2. termín zkoušky – MIN301 – podzim 2021 – 2. 1. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Uvažujme funcki $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x \ln(x^2 + y^2).$$

a) Najděte stacionární body funkce f.

b) Určete lokální extrémy funkce f.

c) Zdůvodněte, zda lokální extrémy jsou či nejsou globálními extrémy.

2. (5 bodů) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 3y^2$$

v bodě $[1,1]$.

3. (5 bodů)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' - 4y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + 3y' - 4y = 8(x-1)^2$.

c) Určete řešení rovnice $y''+3y'-4y = 8(x-1)^2$ splňující počáteční podmínky $y(0) = -\frac{13}{4}$ a $y'(0) = 0$.

4. (5 bodů) V $\mathbb{R}^2$ uvažujme množinu $M_1 = \{(x,y) \mid y \leq x^2 + 1\}$ a dále trojúhelník M_2 s vrcholy $[-1,0]$, $[1,0]$ a $[1,2]$. Položme $M := M_1 \cap M_2$.

a) Načrtněte množinu M a popište její hranici včetně „vrcholů“ (kde se protínají hraniční křivky).

b) Určete těžiště množiny M.

Řešení a bodování:

1. a) **[1.5b]** Parciální derivace položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \tfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{a} \quad f_y(x,y) = \tfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Tato soustava rovnic má čtyři řešení: $[0,\pm 1]$ a $[\pm\frac{1}{e},0]$.

b) **[2.5b]** Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \tfrac{2x}{x^2+y^2} + \tfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= \tfrac{2y}{x^2+y^2} - \tfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \tfrac{2x}{x^2+y^2} - \tfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Matice druhých parciálních derivací ve stacionárních bodech tedy jsou

$$d^2f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ d^2f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ d^2f(\tfrac{1}{e},0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix},\ d^2f(-\tfrac{1}{e},0) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}.$$

Matice $d^2f(0,\pm 1)$ jsou indefinitní a tedy v bodech $[0,\pm 1]$ lokální extrémy nejsou. Matice $d^2f(\frac{1}{e},0)$ je pozitivně definitní a tedy je v bodě $[\frac{1}{e},0]$ lokální minimum. Matice $d^2f(-\frac{1}{e},0)$ je negativně definitní a tedy je v bodě $[-\frac{1}{e},0]$ lokální maximum.

c) **[1b]** Zjevně

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,0)} f(x,y) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y) = -\infty,$$

tj. funkce $f(x,y)$ globální extrémy mít nemůže.

2. [**5 bodů**] Požadovaný Taylorův polynom je obecně tvaru

$$T(x,y) = f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)+\tfrac{1}{2}[f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2].$$

Dosazením do prvních a druhých parciálních derivací dostaneme výsledek

$$T(x,y) = 1 + 3(y-1) + \tfrac{1}{2}[6(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2].$$

3. a) **[1.5b]** Diferenciální rovnice $y''+3y'-4y=0$ má charakteristický polynom $\lambda^2+3\lambda-4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$, který má kořeny -4 a 1. Tedy řešení jsou tvaru $C_1e^{-4x}+C_2e^x$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

b) **[2.5b]** Rovnice je $y''+3y'-4y = 8(x-1)^2$ má pravou stranu $4(x+1)^2 = 8x^2-16x+8$, což je polynom stupně dva – partikulární řešení $y_p(x)$ tedy budeme hledat ve tvaru polynomu stupně dva. (Přesněji, pravá strana je tvaru $8(x^2-2x+1)\cdot e^{0x}$, kde 0 *není* kořenem charakteristického polynomu.) Tedy $y_p(x) = ax^2+bx+c$, tj. $y_p'(x) = 2ax+b$ a $y_p''(x) = 2a$, což po dosazení do rovnice dává

$$2a + 3(2ax+b) - 4(ax^2+bx+c) = -4ax^2 + (6a-4b)x + (2a+3b-4c) = 8x^2-16x+8.$$

Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-4a = 8$, $6a-4b = -16$, $2a+3b-4c = 8$, která má řešení $a=-2$, $b=1$, $c=-\frac{9}{4}$. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = -2x^2+x-\frac{9}{4}$ a obecné řešení je,

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x - 2x^2 + x - \tfrac{9}{4}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek pro $y(x) = C_1e^{-4x}+C_2e^x-2x^2+x-\frac{9}{4}$ dostaneme

$$y(0) = C_1 + C_2 - \tfrac{9}{4} = -\tfrac{13}{4} \quad \text{a} \quad y'(0) = -4C_1 + C_2 + 1 = 0.$$

Tato soustava rovnic má řešení $C_1 = 0$ a $C_2 = -1$, tedy hledané řešení je $y(x) = -e^x - 2x^2 + x - \frac{9}{4}$.

4. a) **[1.5b]** Trojúhelník je pravoúhlý rovnoramenný s přeponou na přímce $y = x + 1$. Průnik této přímky s parabolou $y = x^2 + 1$ je tvořen body $[0, 1]$ a $[1, 2]$; tedy M vzniká z M_2 ostraněním „oblouku“ paraboly mezi body $[0, 1]$ a $[1, 2]$. Vrcholy množiny M jsou $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ a $[1, 0]$.

b) **[3.5b]** Množinu M je vhodné rozdělit na M' pro $-1 \leq x \leq 0$ (to je trojúhelník) a M'' pro $0 \leq x \leq 1$. Platí

$$M' : -1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq x + 1 \quad \text{a} \quad M'' : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2 + 1.$$

Obsah S množiny M je

$$S = \iint_M dxdy = \iint_{M'} dxdy + \iint_{M''} dxdy = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} dydx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{x^2+1} dydx = \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{11}{6}.$$

Dále

$$S_x = \iint_M xdxdy = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} xdydx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{x^2+1} xdydx = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{12},$$

a

$$S_y = \iint_M ydxdy = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} ydydx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{x^2+1} ydydx = \tfrac{1}{6} + \tfrac{14}{15} = \tfrac{11}{10}.$$

Tedy souřadnice těžiště $[x_0, y_0]$ jsou

$$x_0 = \frac{S_x}{S} = \frac{7}{22} \quad \text{a} \quad y_0 = \frac{S_y}{S} = \frac{3}{5}.$$