Matematická analýza 1

Posloupnosti/Elementární funkce

Petr Liška

MUNI

5.10.2022

Další vlastnosti limit

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$.

1. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
2. *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a existuje* n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je* $a_n > 0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Věta

Každá neklesající shora ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ *má vlastní limitu.*
Každá nerostoucí zdola ohraničená posloupnost $\{b_n\}$ *má vlastní limitu.*

Definice

Limitu e: $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nazýváme *Eulerovo číslo*.

Vybraná podposloupnost

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *vybraná podposloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta

Nechť $\{a_{n_k}\}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Hromadný bod posloupnosti

Definice

Číslo $a \in \mathbb{R}^\star$ se nazývá *hromadný bod* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$.

Věta

Číslo a je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Věta

Každá posloupnost má nejmenší a největší hromadný bod.

Věta (**Bolzano-Weierstrass**)

Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Definice

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$. Pak největší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita superior* a označujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,$$

nejmenší hromadný bod této posloupnosti nazveme *limita inferior* a označujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n,$$

Věta

Posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu právě tehdy, když*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Všechny tři hodnoty jsou pak stejné.

Elementární funkce

Polynom

Definice

Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu.
Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, kde* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *je polynom stupně* $n \geq 0$*.*

1. *(Základní věta algebry.) Polynom* P *má nad komplexním oborem* $\mathbb{C}$ *právě* n *kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*
2. *Je-li komplexní číslo* α k*-násobným kořenem reálného polynomu* P*, je číslo komplexně sdružené* $\bar{\alpha}$ *též* k*-násobným kořenem polynomu* P*.*
3. *(Rozklad polynomu v oboru reálných čísel.) Jsou-li* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *všechny reálné kořeny polynomu* P *s násobnostmi* $k_1, \ldots, k_r$ *a* $(c_1 \pm id_1)$*, ...,* $(c_s \pm \mathrm{i}d_s)$ *všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*, platí*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r}[(x-c_1)^2+d_1^2]^{r_1} \cdots [(x-c_s)^2+d_s^2]^{r_s}.$$

4. *Nechť* $a_n = 1$*. Je-li celé číslo* α *kořenem polynomu* P *s celočíselnými koeficienty, pak* α *je dělitelem čísla* a_0*.*

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$.

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

a) Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k-násobné kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

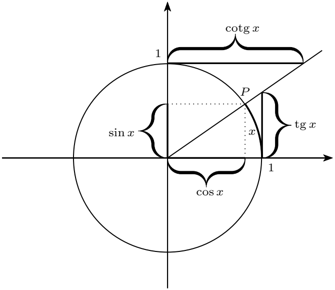
Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice

Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.



Definice

Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

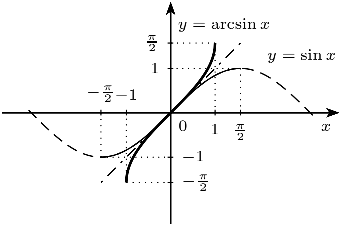
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

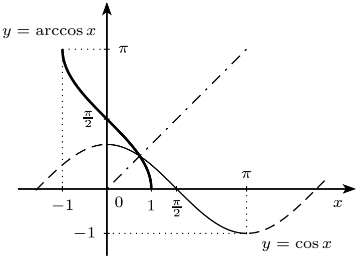
Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce.*

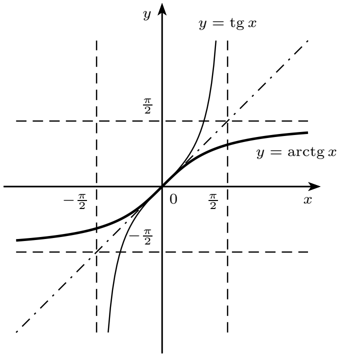
Věta

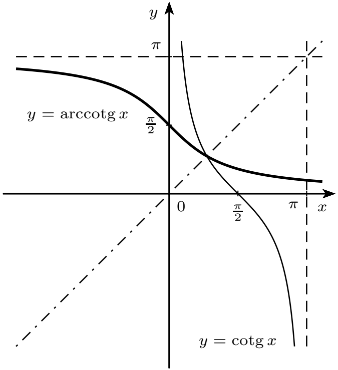
Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

1. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou rostoucí, funkce* $\arccos x$ *a* $\operatorname{arccotg} x$ *jsou klesající.*
2. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou liché.*


$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
1
$y = \sin x$
$-\frac{\pi}{2}$ -1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$-\frac{\pi}{2}$


$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
π
-1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$y = \cos x$


y
$y = \operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg} x$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
$y = \operatorname{arccotg} x$
$\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
$y = \operatorname{cotg} x$