Matematická analýza 1

Diferenciál a Taylorova věta

Petr Liška

Masarykova univerzita

30.11.2022

Diferenciál

Definice

Nechť funkce f je definovaná v okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 a platí $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstkem nezávislé proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstkem funkce f* v bodě x_0 s krokem h neboli *přírůstkem závislé proměnné*.

Diferenciál

Definice

Nechť funkce f je definovaná v okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 a platí $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$. Pak číslo h nazýváme *přírůstkem nezávislé proměnné* a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme *přírůstkem funkce* f v bodě x_0 s krokem h neboli *přírůstkem závislé proměnné*.

Definice

Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná* v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechny body $x_0 + h \in \mathcal{O}(x_0)$ platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h)\,,$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce taková, že $\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.
Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, nazývá se výraz $A \cdot h$ *diferenciál* funkce f v bodě x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ nebo stručně $\mathrm{d}f(x_0)$.

Věta

Funkce f *má v bodě* x_0 *diferenciál* $A \cdot h$ *právě tehdy, když existuje vlastní derivace* $f'(x_0)$*. Přitom pro konstantu* A *platí, že* $A = f'(x_0)$*, a tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Věta

Funkce f má v bodě x_0 diferenciál $A \cdot h$ právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom pro konstantu A platí, že $A = f'(x_0)$, a tedy

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Funkce f má v bodě x_0 diferenciál $A \cdot h$ právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom pro konstantu A platí, že $A = f'(x_0)$, a tedy

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\mathrm{d}x\,.$$

Pro malá h klademe

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h\,.$$

Taylorův polynom

Taylorovým polynomem stupně n funkce f se středem v bodě x_0 rozumíme polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylorův polynom

Taylorovým polynomem stupně n funkce f se středem v bodě x_0 rozumíme polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Maclaurinovy vzorce elementárních funkcí

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} .$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

4. Pro každé $x \in (-1, +\infty)$ platí

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$$