12. cvičení (12. 12. 2022)

Kvadriky v euklidovském prostoru

Pojmy:

- osa kvadriky, vrchol kvadriky;
- euklidovská klasifikace kvadrik;
- metoda invariantů.

Úlohy:

1. Určete charakteristickou rovnici, hlavní čísla, hlavní směry, hlavní roviny a osy kvadriky $K : 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$.
2. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete typ, kanonickou rovnici a transformační rovnice, které převedou rovnici kvadrik do kanonického tvaru.
   (a) $K_1 : 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$
   (b) $K_2 : x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$
   (c) $K_3 : x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$
   (d) $K_4 : 5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz - 8xz - 27 = 0$
3. Zodpovězte na otázky:
   (a) Které přímkové plochy jsou eliptické?
   (b) Kvadrika má trojnásobné hlavní číslo 3. Co to může být za kvadriku?
   (c) Plocha, která vznikne rotací přímky v prostoru okolo přímky s ní mimoběžné, je kvadrika. Jaká?
   (d) V prostoru jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky p a q a dále je dáno kladné reálné číslo d. Množina všech bodů X v prostoru, pro které platí $|Xp| + |Xq| = d$, je kvadrika. Jaká?
   (e) V jaké kuželosečce protíná nevlastní rovinu přímkový paraboloid?

Řešení

Kvadriky v euklidovském prostoru

1. $\lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 15 = 0$,
   $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -5$,
   $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$,
   $\pi_1 : x - y = 0, \quad \pi_2 : 3x + 3y - 2 = 0, \quad \pi_3 : -5z - 2 = 0$,
   $o_1 : X = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right] + t(1, -1, 0), \quad o_2 : X = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right] + t(1, 1, 0), \quad o_3 : X = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right] + t(0, 0, 1)$.

2. (a) dvoudílný hyperboloid

   $x''^2 + 3y''^2 - 5z''^2 + \frac{32}{15} = 0$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

   (b) reálná kuželová plocha

   $3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 = 0$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) rotační paraboloid

   $5x''^2 + 5y''^2 + 6\sqrt{5}z'' = 0$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d) eliptická (reálná) rotační válcová plocha

   $9x''^2 + 9y''^2 - 27 = 0$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

3. (a) žádné

   (b) reálný elipsoid (přesněji reálná kulová plocha), imaginární elipsoid (přesněji imaginární kulová plocha), imaginární kuželová plocha

   (c) rotační jednodílný hyperboloid

   (d) eliptická válcová plocha

   (e) ve dvojici reálných přímek