1.1.4 Rozhodněte o vzájemné poloze dvou přímek.

11 a) $p: \; x+y+z-1=0$

$\quad\;\; 2x+3y+6z-6=0$

$q: \; y+4z=0$

$\quad\;\; 3x+4y+7z=0$

$\vec{n}_1 \sim (1;1;1)$

$\vec{n}_2 \sim (2;3;6)$

$\vec{n}_3 \sim (0;1;4)$

$\vec{n}_4 \sim (3;4;7)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \emptyset$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

A B

$h(A) = 2$

$h(B) = 3$ → rovnobežné

učebnica str. 13 | alebo

$\bar{u}_p = (1, 1, 1)$

$\bar{v}_p = (2, 3, 6)$

$\bar{u}_p \times \bar{v}_p = (6-3, 2-6, 3-2) =$

$= (3, -4, 1)$

$\bar{u}_q = (0, 1, 4)$

$\bar{v}_q = (3, 4, 7)$

$\bar{u}_q \times \bar{v}_q = (7-16, 12, -3)$

$= (-9, 12, -3)$

$= (3, -4, 1)$

⇓

spoločný smer ⇔ rovnobežné

12) a) Rozhodněte o vzájemné poloze roviny a přímky.

$\rho: 5x - z - 4 = 0$

$p: 3x + 5y - 7z + 16 = 0$

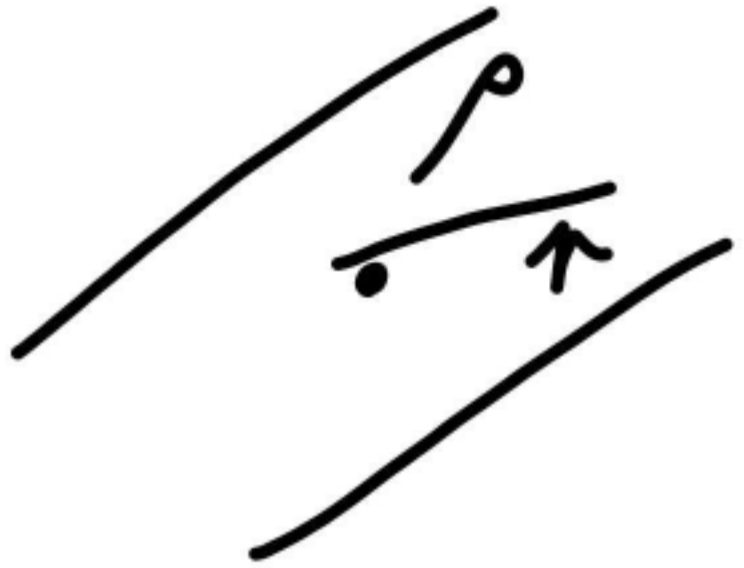
$2x - y + z - 6 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -7 & -16 \\ 2 & -1 & 1 & +6 \\ 5 & 0 & \cancel{4}\,-1 & +4 \\ & & 7 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{c} \cdot 2 \\ (3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & -13 & 17 & 50 \\ 5 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-5) \\ \\ (3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & -13 & 17 & 50 \\ 0 & -25 & 32 & 92 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-25) \\ \cdot(13) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -7 & -16 \\ 0 & -13 & 17 & 50 \\ 0 & 0 & -9 & -54 \end{array}\right)$$

$9z = 54 \Rightarrow z = 6$



102

$-13y + 17z = 50$

$-13y = -52$

$y = 4$

$x = 2 \Leftarrow 3x - 22 = -16$

13 b) $\rho_1\ 2x + y - z = -3$

$\rho_2\ 3x + 0y - z = 0$

$\rho_3\ 0x + 3y + 2z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot -3 \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$z = 3$

$y = -2$

$x = 1$

$A[1, -2, 3]$

Rozhodněte o vzájemné poloze tří rovin.

Binomický rozvoj

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5.b + 15a^4.b^2 + 20a^3.b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$1{,}01^6 = (1+10^{-2})^6 = 1^6 + 6.1.(10^{-2})^1 + 15.(10^{-2})^2 + 20.(10^{-2})^3 + $$
$$+ 15.(10^{-2})^4 + 6.(10^{-2})^5 + (10^{-2})^6$$

$$= 1 + 6.10^{-2} + \dots$$

Binomická věta

Při řešení různých algebraických úloh potřebujeme občas umocnit dvojčlen $a+b$ na přirozené číslo n, tj. vypočítat $(a+b)^n$.
Nejspíš už znáte vzorce pro $n=1$, $n=2$ a $n=3$:

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Vypočítáme ještě $(a+b)^4$:

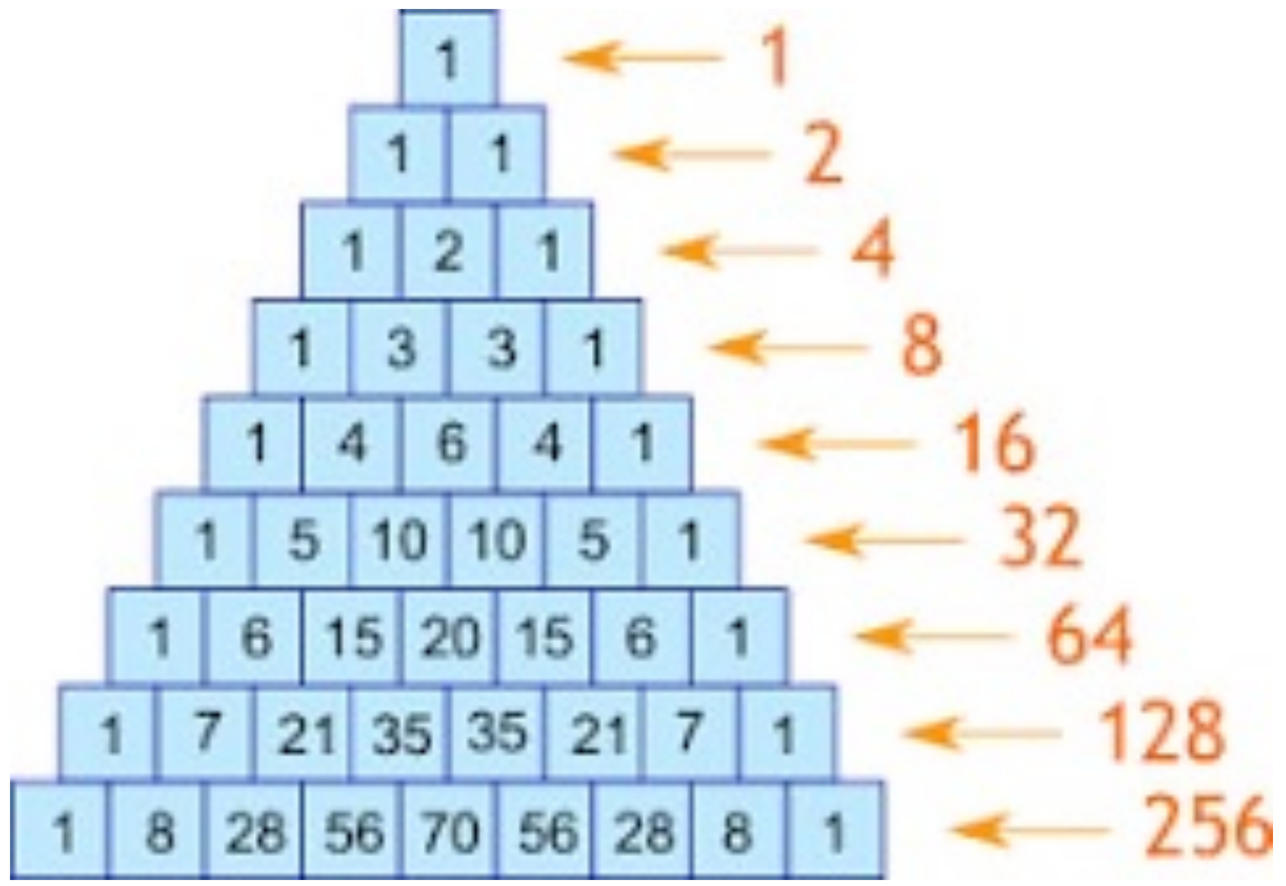
$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3\cdot(a+b) = \\ &= \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\cdot(a+b) = \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = \\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých členů s hodnotami v Pascalově trojúhelníku:

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1

Je vidět, že koeficienty v mnohočlenech odpovídají hodnotám v Pascalově trojúhelníku; každému mnohočlenu takto odpovídá právě jeden řádek Pascalova trojúhelníku. Tato vlastnost platí nejen pro $n=1,2,3$ a 4, ale platí pro libovolné n z množiny přirozených čísel:

> Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí
> $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots$$
> $$\dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$



$i^2 = -1$ $\qquad$ $zz^* = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$

$[x, y]$ $\qquad$ $|z| = \sqrt{zz^*}$

$x = |z| \cos\varphi$

$y = |z| \sin\varphi$

$z = x + yi = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi}$

$z^* = x - yi$

Eulerův vzorec

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$$

Moivreova věta

$$\boxed{(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i \sin nx}$$

1.19) Vyřešte rovnici:

$z^4 = -1$

$\left(|z| e^{i\varphi}\right)^4 = z^4 \cdot \left(e^{i\varphi}\right)^4 = |z|^4 e^{4i\varphi}$

$|z|^4 \cdot e^{4i\varphi} = e^{i\pi}$

$|z| = 1$

$-1 \quad\quad 0$

$1 \cdot \left(\cos \pi + i \sin \pi\right) = -1 = e^{i\pi}$

$e^{4i\varphi} = e^{i\pi}$

$4i\varphi = i\pi$

$\varphi = \varphi_0 + k2\pi$

$4\varphi = \pi + k2\pi$

$k=0 \quad \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$k=1 \quad \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad k=3 \quad \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$k=2 \quad \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$\frac{1}{5^2}\left[(-3+4i)^2-(-3-4i)^2\right]=\frac{1}{25}\left[\left(\overbrace{9-24i+16i^2}^{9-24i-16}\right)-(24i-7)\right]=$$

$$(-3-4i)(-3-4i)=9+12i+12i+16\underset{\uparrow \atop -1}{i^2}=9+24i-16=24i-7$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\left[(-24i-\cancel{7})-24i\ \cancel{+7}\right]=\frac{1}{25}\cdot(-48i)=-\frac{48}{25}i$$

1.2.3 1) a) Vyjádřete v algebraickém tvaru:

$$\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2-\left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^2=\left(\frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)^2-\left(\frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1+2i+2i+4i^2}{1-2i+2i-4i^2}\right)^2-\left(\frac{1-2i-2i+4i^2}{1-2i+2i-4i^2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1+4i-4}{1+4}\right)^2-\left(\frac{1-4i-4}{1+4}\right)^2=\frac{1}{5^2}\left[(-3+4i)^2-(-3-4i)^2\right]$$

$$(1-i)z^2 - 2(4+i)z + 3 + 11i = 0$$

$$D = b^2 - 4\cdot ac$$

$$b^2 = (8+2i)(8+2i) =$$
$$= 64 + 16i + 16i + 4i^2 =$$
$$= 64 + 32i - 4 =$$
$$= 60 + 32i$$

$$b^2$$
$$60+32i$$

$$(8+2i)^2 - 4\cdot(1-i)\cdot(3+11i)$$

$$60+32i - (4-4i)\cdot(3+11i)$$

$$60+32i - 12 + 44i - 12i + 44i^2$$

$$60+32i - 12 + 44i - 12i - 44$$

$$b^2 - 32i - 56$$

$$D = 60 + \cancel{32i} - \cancel{32i} - 56 = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{8+2i+2}{2-2i}$$

$$z_1 = \frac{10+2i}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i} = \frac{20+20i+4i+4i^2}{4+4i-4i-4i^2}$$

$$= \frac{16+24i}{8} = \underline{\underline{2+3i}}$$

$$z_2 = \frac{6+2i}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i} = \frac{12+12i+4i+4i^2}{8} =$$

$$= \frac{12+16i-4}{8} = \underline{\underline{1+2i}}$$