Lineární a multilineární algebra

Téma 9: Tenzory

Obsah tématu

1. Úvod – tenzory ve fyzice.
2. Duální vektorový prostor a duální báze.
3. Duální součin.
4. Tenzory jako multilineární zobrazení.
5. Tenzorové prostory, transformační vztahy.
6. Tenzorový součin.
7. Symetrické a antisymetrické tenzory.
8. Vnější součin, objemový element.
9. Úlohy k procvičení – úkoly v textu.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi III/1, VUTIUM, Brno 2017 (kap. 12, str. 163-229).

Úvod – tenzory ve fyzice

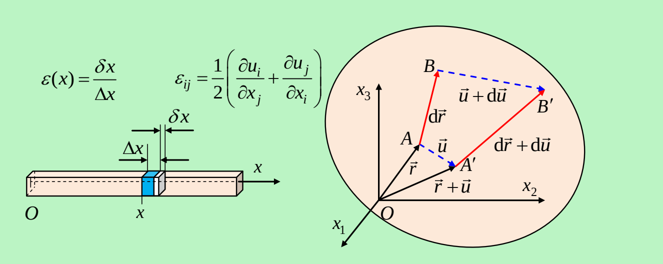
Ve fyzice existuje řada veličin, které nejsou ani skalární, ani vektorové, jsou tenzorové. Jejich chování se z matematického hlediska řídí zákonitostmi lineární algebry. Vyjadřují například lineární závislost mezi vektorovými veličinami, ale v obecnější podobě, než ve tvaru $\vec{B}(t, \vec{r}) = f(t, \vec{r})\vec{A}(t, \vec{r})$, kdy je vektorová veličina $\vec{B}$ (závislá například na čase a na poloze v prostoru) funkčním násobkem veličiny $\vec{A}$. Lineární vztah mezi vektorovými veličinami může panovat i v případě, že nebudou rovnoběžné. Konkrétně jde o situace, kdy je každá složka veličiny $\vec{B}$ lineární kombinací všech složek veličiny $\vec{A}$, tj.

$$\begin{aligned}
B_1 &= f_{11}A_1 + f_{12}A_2 + f_{13}A_3, \\
B_2 &= f_{21}A_1 + f_{22}A_2 + f_{23}A_3, \\
B_3 &= f_{31}A_1 + f_{32}A_2 + f_{33}A_3.
\end{aligned}$$

Veličina f má obecně devět nezávislých složek a není tedy skalárem ani vektorem. Má dva indexy, je to tenzor druhého řádu.

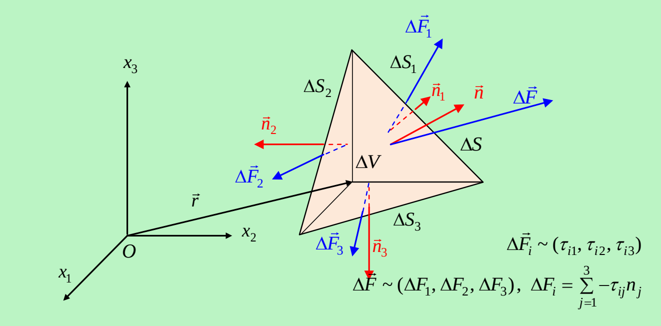
Uvedeme několik typických příkladů tenzorových veličin:

- Moment setrvačnosti $J = (J_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, realizuje vztah úměrnosti mezi složkami momentu hybnosti a úhlové rychlosti tělesa.
- (Symetrický) tenzor deformace tělesa se spojitě rozloženou hmotností $\varepsilon \sim (\varepsilon_{ij})$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 3$, popisuje elementární deformace tělesa v daném bodě (deformace v tahu, resp. tlaku a deformace ve smyku).



Obr. 9.1: Tenzor deformace

- (Symetrický) tenzor napětí v tělese se spojitě rozloženou hmotností $\tau \sim (\tau_{ij})$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 3$, umožňuje vyjádřit sílu působící v daném místě na obecnou elementární ploch v tělese pomocí sil působících na souřadnicové plochy.



Obr. 9.2: Tenzor napětí

- Tenzory elastických modulů a elastických konstant (čtvrtého řádu), realizující vztah úměrnosti mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru deformace,

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} S_{ijkl}\tau_{kl}.$$

- Tenzor piezoelektrických koeficientů (třetího řádu), realizující vztah úměrnosti mezi tenzorem napětí piezoelektrického krystalu a intenzity vzniklého elekrického pole

$$E_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} d_{ijk}\tau_{jk}, \quad d_{ijk} = d_{ikj}.$$

- Metrický tenzor $g \sim (g_{ij}) = (\delta_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, $g_{ij} = g_{ji}$, euklidovská metrika, vyjadřující čtverec vzdálenosti dvou bodů $x \sim (x_1, x_2, x_3)$ a $y \sim (y_1, y_2, y_3)$,

$$|y - x|^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)$$

- Metrický tenzor $g \sim (g_{\alpha\beta})$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 3$, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, Lorentzova metrika,vyjadřující čtverec časoprostorového intervalu dvou bodů $x \sim (x_0, x_1, x_2, x_3)$ a $y \sim (y_0, y_1, y_2, y_3)$, $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$, v teorii relativity.
- Tenzor elektromagnetického pole v klasické elektrodynamice.
- Tenzor energie-hybnosti v teorii relativity.
- Lineární vztah mezi intenzitou $\vec{E}$ elektrického pole a jeho indukcí $\vec{D}$, popřípadě polarizací $\vec{P}$, zprostředkovávají ve fyzikálních situacích, které linearitě odpovídají, tenzor dielektrické permitivity $\varepsilon \sim (\varepsilon_{ij})$, resp. tenzor polarizovatelnosti $\alpha \sim (\alpha_{ij})$,

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j, \quad P_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} E_j, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

  Jedním z důsledků toho, že veličiny ε a α jsou tenzorové, je dvojlom krystalů. (Vztah mezi $\vec{E}$ a $\vec{D}$, nebo $\vec{E}$ a $\vec{P}$ ovšem nemusí být vždy lineární – např. u feroelektrik, vykazjujících hysterezi. Samotný lineární vztah může být i komplikovanější – třeba v případě optických frekvencí elmag pole (světlo) má integrální tvar.)

- Obdobou vztahu mezi elektrickou intenzitou a indukcí, resp. elektrickou intenzitou a polarizací jsou vztahy mezi magnetickou indukcí $\vec{B}$ a intenzitou $\vec{H}$, resp. magnetickou intenzitou $\vec{H}$ a magnetizací $\vec{M}$, zprostředkované tenzorem magnetické permeability μ, resp. tenzorem magnetické susceptibility χ.

$$B_i = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij} H_j, \quad M_i = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} H_j, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \chi_{ij} = \chi_{ji}.$$

V uváděných příkladech z mechaniky šlo přitom o tzv. kartézské tenzory, tj. veličiny, jejichž složky mají tenzorový charakter (transformují se podle pravidel pro obecné tenzory) pouze při přechodech mezi kartézskými souřadnicemi. V ostatních případech šlo o „opravdické“ tenzory.

ÚKOL: Viděli jsme, že některé tenzory mají určité symetrie. Zkuste třeba přijít na to, jaké symetrie pro tenzory elastických modulů a elastických konstant vyplývají ze symetrie tenzoru napětí a tenzoru deformace.

Duální vektorový prostor a duální báze

V úvodu jsme charakterizovali složky tenzorových veličin jako určité faktory (ne vždy konstanty) úměrnosti mezi složkami veličin vektorových. Tenzory jako takové jsou, podobně jako vektory, tzv. geometrické, tedy invariatní objekty (vzhledem k volbě bází, resp. soustav souřadnic). Matematicky se jedná o multilineární zobrazení, jejichž definičními obory jsou vektorové prostory, resp. jejich kartézské součiny. Jde tedy v podstatě o pojmy, které znáte jako funkce více proměnných, jenže těmi proměnnými jsou vektory a ty funkce jsou lineární.

Základní strukturu pro vybudování tenzorových prostorů představuje n-rozměrný vektorový prostor V_n nad polem $\mathbb{R}$ a jeho duální prostor.

EINSTEINOVA SYMBOLIKA: Pro sčítání budeme používat tzv. Einsteinovu sčítací symboliku, spočívající ve vynechání sumačních znaků ve výrazech obsahujících sčítací index ve dvojici – horní a dolní:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \alpha^i \sim \omega_i \alpha^i, \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_k \alpha_i^j A_j^k \sim \omega_k \alpha_i^j A_j^k.$$

Uvažujme o množině V_n^* všech lineárních zobrazení

$$\omega: \ V_n \ni a \longrightarrow \omega(a) \in \mathbb{R}, \ \text{linearita:} \ \omega(\alpha a + \beta b) = \alpha\omega(a) + \beta\omega(b).$$

PŘÍKLAD: Zvolme v prostoru V_n bázi $(e_1, \dots, e_n)$ a prvek $\omega \in V_n^*$. Pro vektor $a \in V_n$ (vzor) $a = \alpha^i e_i = \alpha^1 e_1 + \cdots \alpha^n e_n$ platí (plyne z linearity zobrazení ω)

$$\omega(a) = \omega(\alpha^i e_i) = \alpha^i \, \omega(e_i).$$

Výsledek je v souladu s větou o tom, že každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze. V našem příkladu jsou obrazy báze čísla $\omega_1 = \omega(e_1), \dots, \omega_n = \omega(e_n)$, která, jak později uvidíme, budou představovat složky objektu $\omega \in V_n^*$. Například pro $n = 3$ (ať je to jednoduché), předepišme $\omega(e_1) = 2$, $\omega(e_2) = -3$, $\omega(e_1) = -1$, je tím zobrazení ω jednoznačně určeno a obraz vektoru a bude mít tvar

$$\omega(a) = 2\alpha^1 - 3\alpha^2 - \alpha^3, \ \text{kde} \ a \sim (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \ \text{v bázi} \ (e_1, e_2, e_3).$$

Prvkům množiny V_n^* také říkáme lineární formy.

Na nosné množině V_n^* zavedeme operace sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem. Zvolme $\omega,\ \eta \in V_n^*$ a skalár $\gamma \in \mathbb{R}$ libovolně. Pomocí nich definujeme dvě nová zobrazení

$$\chi:\ V_n \ni a \longrightarrow \chi(a) = \omega(a) + \eta(a) \in \mathbb{R},$$

$$\theta:\ V_n \ni a \longrightarrow \theta(a) = \gamma\omega(a) \in \mathbb{R}.$$

ÚKOL: Dokažte, že nová zobrazení χ a θ jsou lineární, tj. $\chi,\ \theta \in V_n^*$.

Návod: Je třeba dokázat, že platí $\chi(\alpha a + \beta b) = \alpha\chi(a) + \beta\chi(b)$ pro libovolné vektory $a,\ b \in V_n$ a libovolné skaláry $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, a podobně pro θ. Rozepište například $\chi(\alpha a + \beta b)$ podle definice a pak využijte linearity zobrazení ω a η a pravidla pro počítání s reálnými čisly. Půjde to samo.

Značíme $\chi = \omega + \eta$ (součet lineárních forem) a $\theta = \gamma\omega$ (γ-násobek lineární formy ω).

VĚTA: Duální prostor a duální báze.

Množina V_n^* všech lineárních zobrazení s výše zavedenými operacemi sčítání a násobení skalárem je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ dimenze n.

ÚKOL: Pro prvky z V_n^* a zavedené operace sčítání lineárních forem a násobení lineárních forem skalárem ukažte, že (resp. zdůvodněte proč) jsou splněny axiomy vektorového prostoru.

Abychom zjistili, jaká je dimenze vektorového prostoru V_n^*, najdeme v něm jakoukoli bázi. Východiskem pro její konstrukci bude báze $(e_1, \dots, e_n)$ zvolená libovolně, ale pevně v prostoru V_n. Definujme nyní soubor lineárních forem $(e^1, \dots, e^n)$, $e^i \in V_n^*$, takto:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \;\; 1 \leq i, j \leq n, \;\; \text{tj.}$$

$$\begin{array}{l} e^1(e_1) = 1, \;\; e^1(e_2) = 0, \;\; \dots, \;\; e^1(e_n) = 0, \\ e^2(e_1) = 0, \;\; e^2(e_2) = 1, \;\; \dots, \;\; e^2(e_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ e^n(e_1) = 0, \;\; e^n(e_2) = 0, \;\; \dots, \;\; e^n(e_n) = 1. \end{array}$$

Dokážeme, že soubor $(e^1, \dots, e^n)$ je bází v prostoru V_n^*. Položme

$$\gamma_1 e^1 + \cdots + \gamma_n e^n = 0_{V_n^*}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Vyčíslíme-li levou i pravou stranu této rovnice na i-tém vektoru e_i báze zvolené v prostoru V_n, dostaneme

$$\gamma_1 e^1(e_i) + \cdots + \gamma_i e^i(e_i) + \cdots + \gamma_n e^n(e_i) = 0.$$

Využijeme definice lineárních forem $e^1, \dots, e^n$, podle které je pouze $e^i(e_i) = 1 \neq 0$, ostatní hodnoty $e^i(e_j)$ pro $j \neq i$ jsou nulové. Dostaneme tak $\gamma_i = 0$ pro $1 \leq i \leq n$. Nebo jinak:

$$\gamma_i e^i = 0_{V_n^*} \implies \gamma_i e^i(e_j) = 0 \implies \gamma_i \delta^i_j = \gamma_j = 0.$$

Dokázali jsme lineární nezávislost prvků $e^1, \dots, e^n$.

Zvolme nyní libovolně $\omega \in V_n^*$ a zjišťujme, zda existují čísla ω_i taková, že platí $\omega = \omega_i e^i$. Tuto rovnici opět vyčíslíme na libovolném vektoru báze e_j a dostaneme

$$\omega(e_j) = \omega_i e^i(e_j) = \omega_i \delta^i_j = \omega_j.$$

Čísla $\omega_1 = \omega(e_1), \ldots, \omega_n = \omega(e_n)$ jsme našli. Soubor $(e^1, \ldots, e^n)$ je tedy bází v prostoru V_n^*. Hovoříme o duálním prostoru a duální bázi indukované bází $(e_1, \ldots, e_n)$.

Všimněme si, že pro vektor $a = \alpha^j e_j$ platí

$$e^i(a) = e^i(\alpha^j e_j) = \alpha^j \, e^i(e_j) = \alpha^j \delta^i_j = \alpha^i.$$

Lineární forma e^i přiřazuje vektoru $a \in V_n$ jeho i-tou složku v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Naopak, pro libovolnou lineární formu $\omega \in V_n^*$ je číslo $\omega_i = \omega(e_i)$ její i-tou složkou v indukované duální bázi $(e^1, \ldots, e^n)$.

A dohromady, zapíšeme-li složky vektoru a do řádkové matice (α) a složky lineární formy ω do sloupcové matice (ω), dostaneme

$$\omega(a) = \omega_i \alpha^i = \alpha^1 \omega_1 + \cdots + \alpha^n \omega_n = (\alpha)(\omega).$$

Všimneme si nyní transformačních vztahů pro složky vektorů a lineárních forem (které nazýváme také kovektory), při přechodech mezi bázemi.

DUALITA: Transformační vztahy pro složky vektorů jsme už probírali, takže je jen připomeňme: Označme T matici přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ v prostoru V_n k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, a $S = T^{-1}$ matici inverzní. Vektor $a \in V_n$ má v těchto bázích vyjádření ve složkách

$$a = \alpha^i e_i = \bar{\alpha}^i \bar{e}_i, \ \ (\alpha^1 \dots \alpha^n) = (\alpha), \ \ (\bar{\alpha}^1 \dots \bar{\alpha}^n) = (\bar{\alpha}),$$

$$(\alpha) = (\bar{\alpha})T, \quad (\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}$$

a vypsáno explicitně (sčítací indexy červeně):

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 & \dots & \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}^1 & \dots & \bar{\alpha}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^1 & \dots & T_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ T_n^1 & \dots & T_n^n \end{pmatrix}$$

Teď se podívejme, jak to musí dopadnout s transformačními vztahy složek lineárních forem. Už jsme si odvodili, že platí $\omega(a) = (\alpha)(\omega)$. Ale protože ω i a jsou invariantní objekty, musí formálně stejný vztah platit, i když výchozí bází v prostoru V_n bude $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ a odpovídající duální bází v prostoru V_n* pak $(\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n)$, kde $\bar{e}^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j$, tj. (dosaďme a počítejme dál):

$$\omega(a) = (\alpha)(\omega) = (\bar{\alpha})(\bar{\omega}) = (\alpha)T^{-1}(\bar{\omega}).$$

Matice $(\bar{\omega})$ a (ω) jsou sloupcové, proto pro ně musí platit vztah typu $(\bar{\omega}) = P(\omega)$, kde P je nějaká regulární matice. Jak ale souvisí s maticí T? Dosaďme to do předchozího vztahu a vidíme:

$$\omega(a) = (\alpha)(\omega) = (\alpha)T^{-1}P(\omega) \implies (\alpha)(\omega)(E - T^{-1}P) = O \implies P = T.$$

Shrneme-li transformační vztahy pro vektory i pro lineární formy, vidíme, že se transformují tak trochu „naruby“. A to je ta dualita – pěkné, že?

$$(\alpha) = (\bar{\alpha})T, \;\; (\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}, \;\; (\omega) = T^{-1}(\bar{\omega}), \;\; (\bar{\omega}) = T(\omega).$$

V souvislosti s pojmem duálního prostoru vzniká otázka: Prostor V^* je také vektorový prostor dimenze n, tak co kdybychom k němu opět zkonstruovali prostor duální? Konstrukce by pak byla tato:

$$V_n \longrightarrow V_n^* \longrightarrow V_n^{**}.$$

Samozřejmě nedostaneme prostor původní – myšleno z hlediska konkrétních objektů, které jsou prvky jednotlivých prostorů.

Například: je-li V_3 vektorový prostor volných vektorů generovaných orientovanými úsečkami v trojrozměrném euklidovském prostoru, pak V_3^* je vektorový prostor lineárních zobrazení (lineárních forem) definovaných na volných vektorech a V_3^{**} je vektorový prostor lineárních zobrazení definovaných na prostoru těchto lineárních forem. Jeho objekty již nejsou původní volné vektory. Prostor V_3^{**} je však izomorfní s prostorem V_3, neboť všechny vektorové prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní.

Je tedy něco, čím je prostor V_n^{**} více „podobný", resp. „bližší" prostoru V_n, než prostoru V_n^*? Jsou to transformační vztahy při přechodech mezi bázemi a odpovídajícími indukovanými bázemi.

Všimněme si problému podrobněji. Prvky prostoru V_n jsme značili jako $a, b, \ldots \in V_n$, prvky prostoru V_n^* jako $\omega, \eta, \ldots \in V_n^*$, prvky množiny V_n^{**} všech lineárních zobrazení $V_n^* \to \mathbb{R}$ budeme značit $A, B, \ldots, \in V_n^{**}$. Strukturu vektorového prostoru na V_n^{**} zavedeme již známým způsobem: Zvolme libovolně $A, B \in V_n^{**}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Definujme zobrazení G a H takto:

$$G : V_n^* \ni \omega \longrightarrow G(\omega) = A(\omega) + B(\omega) \in \mathbb{R}$$

$$H : V_n^* \ni \omega \longrightarrow H(\omega) = \alpha A(\omega) \in \mathbb{R}.$$

ÚKOL: Dokažte, že zobrazení G a H jsou lineární, tj. $G, H \in V_n^{**}$, a že množina V_n^{**} s takto zavedými operacemi součtu $(G = A + B)$ a násobení skalárem $(H = \alpha A)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

ÚKOL: Zvolme v prostoru V_n bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Indukovaná báze v prostoru V_n^* je $(e^1, \ldots, e^n)$, $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Definujme prvky $E_1, \ldots, E_n \in V_n^{**}$ vztahem $E_i(e^j) = \delta^j_i$. Dokažte, že soubor $(E_1, \ldots, E_n)$ je báze prostoru V_n^{**}, tj. $\dim V_n^{**} = n$.

Zjistíme transformační vztahy pro objekty prostoru V_n^{**}. Matici přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ označme $T = (\tau_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, $T^{-1} = S = (\sigma_i^j)$, $\bar{e}_i = \tau_i^j\, e_j$, $\bar{e}^i = \sigma_j^i\, e^j$, $\bar{E}_i = \mu_i^j\, E_j$, hledáme matici $M = (\mu_i^j)$. Platí

$$\delta_i^j = \bar{E}_i(\bar{e}^j) = \mu_i^k\, E_k(\sigma_l^j\, e^l) = \mu_i^k \sigma_l^j\, \delta_k^l = \mu_i^k \sigma_k^j.$$

Platí $MS = E$, tj. $M = T$. Matice přechodu od báze $(E_1, \ldots, E_n)$ k bázi $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ v prostoru V_n^{**} je tedy stejná, jako od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ v prostoru V_n. Prostory V_n a V_n^{**} jsou nejen izomorfní, ale platí v nich i stejné tranformační vztahy. Z hlediska algebry není jak je rozlišit. Můžeme je proto považovat za „stejné“. Izomorfismus mezi nimi definujeme tak, že ztotožníme prvky e_i a E_i, přesněji řečeno, definujeme kanonický izomorfismus jako zobrazení

$$\iota : \; V_n \ni a \longrightarrow \iota(a) = A \in V_n^{**}, \;\; \text{kde} \;\; a = \alpha^i\, e_i, \;\; A = \iota(a) = \alpha^i\, E_i.$$

Tím jsme prostory V_n a V_n^{**} ztotožnili.

Duální součin

Duálním (vnitřním) součinem rozumíme zobrazení

$$\langle\ |\ \rangle :\ V_n^* \times V_n \ni [\omega,\, a] \longrightarrow \langle\omega|a\rangle = \omega(a) \in \mathbb{R}.$$

Je to první situace, kdy se setkáváme se zobrazením více argumentů (zde jednoho kovektoru a jednoho vektoru) lineárním v každém z těchto argumentů.

ÚKOL: Dokažte, že duální součin je lineární v každém ze svých argumentů, tj.

$$\langle\alpha\omega + \beta\eta|a\rangle = \alpha\langle\omega|a\rangle + \beta\langle\eta|a\rangle, \quad \langle\omega|\alpha a + \beta b\rangle = \alpha\langle\omega|a\rangle + \beta\langle\omega|b\rangle,$$

a rozepište výraz $\langle\alpha\omega + \beta\eta \mid \gamma a + \delta b\rangle$.

Z definice plyne, že ve vyjádření duálního součinu není pořadí rozhodující, neboť $\langle\omega|a\rangle = \omega(a) = (\alpha)(\omega)$. Lze tedy také zavést zobrazení

$$\langle\ |\ \rangle :\ V_n \times V_n^* \ni [a,\, \omega] \longrightarrow \langle a|\omega\rangle = \omega(a) \in \mathbb{R}, \quad \text{pak} \quad \langle\omega|a\rangle = \langle a|\omega\rangle.$$

Duální součin a transformační vztahy: je zřejmé, že duální součin je, stejně jako argumenty, které zobrazuje, invariantním objektem. Prověříme na příkladu, že jeho hodnota v libovolných agumentech $\omega \in V_n^*$ a $a \in V_n$ je nezávislá na volbě báze.

PŘÍKLAD: Nechť $\omega \in V_n^*$ a $a \in V_n$ jsou libovolně zvolené argumenty. Zvolme v prostoru V_n bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, v ní platí $a = \alpha^i e_i \sim (\alpha)$. Lineární formu musíme vyjádřit v odpovídající duální bázi (jinak by to nefungovalo), tedy $\omega = \omega_j e^j \sim (\omega)$. Označme $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ jinou bázi ve V_n, k níž od báze původní přejdeme pomocí matice přechodu T. Odpovídající duální báze je $(\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n)$. Pomocí transformačních vztahů pro složky vektorů a kovektorů (lineárních forem) dostaneme

$$\langle \omega \,|\, a \rangle = \omega(a) = (\alpha)(\omega) = ((\bar{\alpha})T)\left(T^{-1}(\bar{\omega})\right) = (\bar{\alpha})(\bar{\omega}).$$

Pro číselnou ukázku zvolme třeba $n = 3$, $a = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ a $\omega = -e^1 + 2e^2 - 2e^3$ při volbě báze (e_1, e_2, e_3). Snadno zjistíme, že platí

$$\langle \omega \,|\, a \rangle = \omega(a) = (\alpha)(\omega) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -10.$$

Novou bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ zvolme třeba takto (a všimněte si duality):

$$\bar{e}_1 = e_1 - e_3, \quad \bar{e}_2 = e_2 + 2e_3, \quad \bar{e}_3 = e_1 - 2e_3 \implies$$
$$e^1 = \bar{e}^1 - \bar{e}^3, \; e^2 = \bar{e}^2 + 2\bar{e}^3, \; e^3 = \bar{e}^1 - 2\bar{e}^3.$$

Matice přechodu a inverzní matice jsou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pro duální bázi pak platí

$$\bar{e}^1 = 2e^1 - e^3, \quad \bar{e}^2 = -2e^2 + e^2 + 2e^3, \quad \bar{e}^3 = e^1 - e^3.$$

Složky vektoru a a lineární formy ω v nových bázích a jejich duální součin:

$$(\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{\omega}) = T(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \omega \mid a \rangle = \omega(a) = (\bar{\alpha})(\bar{\omega}) = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -10$$

Výpočet duálního součinu lineární formy a vektoru pomocí jejich složek připomíná výpočet skalárního součinu vektorů rovněž pomocí jejich složek, ale vyjádřených v ortonormální bázi. Je tedy duální součin totéž co skalární? Odpověď je, striktně vzato, záporná – například duální součin můžeme definovat, i když v prostoru V_n není zaveden skalární součin – ale jistou souvislost najdeme.

Předpokládejme, že v prostoru V_n definujeme skalární součin, prostor se tedy stane prostorem euklidovským. V bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ je skalární součin reprezentován pozitivně definitní symetrickou maticí $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Jak víme, skalární součin vektorů a, $b \in V_n$ vyjádřený pomocí jejich složek ve zvolené bázi je $(a,\, b) = (\alpha)G(\beta)^T$. Zvolme $\omega \in V_n^*$ libovolně, ale pevně, a zkusme pro libovolný vektor $a \in V_n$ řešit rovnici $\langle \omega \,|\, a \rangle = (b,\, a)$ $(= (a,\, b))$ vzhledem k neznámému vektoru $b \in V_n$. :

$$(\alpha)(\omega) = (\alpha)G(\beta)^T \implies (\alpha)\left[(\omega) - G(\beta)^T\right] = 0.$$

Tato rovnost platí pro každý vektor $a \in V_n$. Proto je $(\omega) - G(\beta)^T = 0$ (nulová matice). Matice G je regulární, takže platí

$$(\beta)^T = G^{-1}(\omega) \implies (\beta) = (\omega)^T (G^{-1})^T = (\omega)^T (G^{-1}).$$

Hledaný vektor $b \in V_n$ je určen jednoznačně.

ÚKOL: Projděte znovu předchozí úvahu a určete vektor b za předpokladu, že báze $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ je ortonormální. Ukažte, že transformační vztahy pro vektory a lineární formy jsou stejné.

Tenzory jako multilineární zobrazení

Označme $\mathcal{T}_0^1(V_n) = V_n$ a $\mathcal{T}_1^0 = V_n^*$. Jedná se o vektorové prostory stejné dimenze n, tedy izomorfní, lišící se pouze transformačními vztahy (viz výše). Jsou to základní tenzorové postory – prostory tenzorů prvního řádu. Dualita transformačních vztahů se projevuje také v názvosloví: vektory nazýváme kontravariantní tenzory, lineární formy (kovektory) pak jsou kovariantní tenzory. Zavedeme tenzory vyšších řádů, nejprve tenzory řádu druhého, potom definici zobecníme.

DEFINICE: Tenzory druhého řádu

Tenzory druhého řádu nazýváme zobrazení trojího typu:

$$\begin{aligned}
\tau:\ & V_n^* \times V_n^* \ni [\omega,\, \eta] \longrightarrow \tau(\omega,\, \eta) \in \mathbb{R}, \\
\tau:\ & V_n^* \times V_n \ \ni [\omega,\, a] \longrightarrow \tau(\omega,\, a) \in \mathbb{R}, \\
\tau:\ & V_n \times V_n \ \ni [a,\, b] \longrightarrow \tau(a,\, b) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

lineární vždy v obou argumentech.

Co znamená linearita v obou argumentech (tj. bilinearita) ukážeme na případu druhého z uvedených zobrazení:

$$\tau(\alpha\omega + \beta\eta,\, a) = \alpha\tau(\omega,\, a) + \beta\tau(\eta,\, a)$$
$$\tau(\omega,\, \alpha a + \beta b) = \alpha\tau(\omega,\, a) + \beta\tau(\omega,\, b)$$

pro libovolné $\omega,\, \eta \in V_n^*$, $a,\, b \in V_n$ a $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

ÚKOL: Pro tenzor druhého řádu $\tau : V_n^* \times V_n \to \mathbb{R}$, Rozepište výraz

$$\tau(\gamma\omega + \delta\eta,\, \alpha a + \beta b).$$

Dále zvolte ve V_n bázi $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ s odpovídající duální bází $(e^1,\, \ldots,\, e^n)$. Pro lineární formu $\omega = \omega_i e^i$ a vektor $a = \alpha^j e_j$ rozepište výraz

$$\tau(\omega_i e^i,\, \alpha^j e_j) = \tau(\omega_1 e^1 + \cdots + \omega_n e^n,\, \alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n)$$

a zamyslete se nad jeho souvislostí s duálním součinem.

Následující příklad je tak trochu „předzvěstí“ transformačních vztahů pro tenzory.

PŘÍKLAD: Víme, že každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze. To bude platit také pro zobrazení obecně multilineární. Uvažujme o tenzoru druhého řádu $\tau : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ (poslední ze tří typů v definici). Zvolme báze $(e_1, \dots, e_1)$ a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ ve V_n, matici přechodu označme T. Odpovídající duální báze jsou $(e^1, \dots, e^n)$ a $(\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n)$. Označme $\tau_{ij} = \tau(e_i, e_j)$ a $\bar{\tau}_{ij} = \tau(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ a chvíli počítejme, s využitím bilinearity zobrazení τ:

$$\bar{\tau}_{ij} = \tau(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \tau(T_i^k e_k,\ T_j^l e_l) = T_i^k T_j^l \tau(e_k, e_l) = T_i^k T_j^l \tau_{kl}.$$

Pro $n = 3$ a matici T zadanou v předchozím příkladu vyjádříme rozepsáním prvek $\bar{\tau}_{12}$ (ostatní vyjádřete sami):

$$\bar{\tau}_{12} = T_1^1 T_2^1 \tau_{11} + T_1^1 T_2^2 \tau_{12} + T_1^1 T_2^3 \tau_{13} + + T_1^2 T_2^1 \tau_{21} + T_1^2 T_2^2 \tau_{22} +$$

$$+ T_1^2 T_2^3 \tau_{23} + T_1^3 T_2^1 \tau_{31} + T_1^3 T_2^2 \tau_{32} + T_1^3 T_2^3 \tau_{33} = \tau_{12} + 2\tau_{13} - \tau_{32} - 2\tau_{33}.$$

Procvičit si výpočty můžete při řešení násedujícího úkolu.

ÚKOL: Podobný výpočet proveďte pro bilineární zobrazení $\tau : V_n^* \times V_n^* \to \mathbb{R}$ (první typ v definici), a vyjádřete $\bar{\tau}^{ij} = \tau(\bar{e}^i, \bar{e}^j)$ pomocí $\tau^{kl} = \tau(e^k, e^l)$ a prvků matice přechodu.

Zaveďme teď na množinách všech tří typů tenzorů druhého řádu (bilienárních zobrazení), specifikovaných v definici, strukturu vektorového prostoru. Bude to analogické postupu, jakým jsme zaváděli strukturu vektorového prostoru na množině lineárních zobrazení V_n^*. Označme množiny tenzorů druhého řádu jednotlivých typů postupně tak, jak jsme je zavedli v definici, $\mathcal{T}_0^2(V_n)$, $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ a $\mathcal{T}_2^0(V_n)$.

DEFINICE: Operace s tenzory

Nechť $\tau, \sigma \in \mathcal{T}_0^2(V_n)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Definujme nová zobrazení:

$$\chi : V_n^* \times V_n^* \ni [\omega, \eta] \longrightarrow \chi(\omega, \eta) = \tau(\omega, \eta) + \sigma(\omega, \eta) \in \mathbb{R},$$

$$\theta : V_n^* \times V_n^* \ni [\omega, \eta] \longrightarrow \theta(\omega, \eta) = \alpha\tau(\omega, \eta) \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že nově definovaná zobrazení jsou také tenzory (jsou bilineární) a jsou téhož typu jako tenzory τ a σ, z nichž byla zkonstuována. Počítejme:

$$\chi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \eta) = \tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \eta) + \sigma(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \eta) =$$

$$= \alpha\tau(\omega_1, \eta) + \beta\tau(\omega_2, \eta) + \alpha\sigma(\omega_1, \eta) + \beta\sigma(\omega_2, \eta) =$$

$$= \alpha(\tau(\omega_1, \eta) + \sigma(\omega_1, \eta)) + \beta(\tau(\omega_2, \eta) + \sigma(\omega_2, \eta)) = \alpha\chi(\omega_1, \eta) + \beta\chi(\omega_2, \eta).$$

Podobně rozepište $\chi(\omega, \alpha\eta_1 + \beta\eta_2)$. Stejným způsobem dokažte i bilinearitu zobrazení θ.

Tenzor χ nazýváme součet tenzorů τ a σ a značíme $\chi = \tau + \sigma$. Tenzor θ je α-násobek tenzoru τ, značíme $\theta = \alpha\tau$.

ÚKOL: Dokažte, že operace součtu a skalárního násobku tenzorů zavedené v předchozím textu splňují axiomy vektorového prostoru. Analogicky jako výše zaveďte strukturu vektorového prostoru na množinách $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ a $\mathcal{T}_1^1(V_n)$.

DEFINICE: Tenzory obecného řádu

Tenzorem typu (p, q), p-krát kontravariantním a q-krát kovariantním rozumíme zobrazení

$$\tau : \underbrace{V_n^* \times \cdots \times V_n^*}_{p} \times \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{q} \ni [\omega_1, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{R}$$

lineární v každém ze svých argumentů.

Linearita v i-tém kovektorovém, resp. j-tém vektorovém argumentu:

$$\tau(\omega_1, \ldots, \alpha\omega_i + \beta\eta_i, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q) =$$

$$\alpha\tau(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q) + \beta\tau(\omega_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q),$$

$$\tau(\omega_1, \ldots, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots, a_q) =$$

$$\alpha\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_q) + \beta\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, b_j, \ldots, a_q)$$

Tenzorové prostory, transformační vztahy

Množinu právě definovaných tenzorů značíme $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a zavádíme na ní strukturu vektorového prostoru stejně jako v předchozích méněrozměrných případech. Tenzory tedy můžeme sčítat a násobit čísly.

VĚTA: Dimenze tenzorových prostorů

Množina $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ se standardně zavedenými operacemi součtu a násobku skalárem je vektorový prostor dimenze n^{p+q}.

Dokazovat splnění požadavků vektorového prostoru není potřeba, ze samotného zavedení operací součtu tenzorů a násobení tenzoru skalárem jejich platnost vyplývá. Věnujme se proto zjištění dimenze prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$. Tu určíme jako počet prvků libovolné báze, kterou zkonstruujeme – nejprve na příkladu tenzorů nějakého nízkého řádu, třeba $\mathcal{T}_2^1(V_n)$. Půjde opět o bázi indukovanou bází zvolenou ve V_n.

PŘÍKLAD: Zvolme libovolně bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v prostoru V_n, $(e^1, \ldots, e^n)$ je odpovídající duální báze. Uvažujme o tenzorovém prostoru $\mathcal{T}_2^1(V_n)$.

Prvky $F_i^{jk} \in \mathcal{T}_2^1(V_n)$ definujme takto (stačí zadat obrazy pro vzory, jimiž budou prvky báze prostorů V_n a duální báze ve V_n^*). Jistě vidíte podobnost s definicí duální báze.

$$F_i^{jk} : V_n^* \times V_n \times V_n \ni [e^u, e_v, e_w] \longrightarrow F_i^{jk}(e^u, e_v, e_w) = \delta_i^u \delta_v^j \delta_w^k.$$

Soubor (F_i^{jk}), $1 \leq i, j, k \leq n$, je bází v prostoru $\mathcal{T}_2^1(V_n)$. Položme

$$\gamma_{jk}^i F_i^{jk} = 0_{\mathcal{T}_2^1(V_n)}, \ \ \gamma_{jk}^i \in \mathbb{R}, \ \ \text{(všechny indexy jsou sčítací)}$$

a vyčísleme hodnotu této lineární kombinace na argumentech (e^u, e_v, e_w) pro libovolné indexy $1 \leq u, v, w \leq n$. Dostaneme

$$\gamma_{jk}^i F_i^{jk}(e^u, e_v, e_w) = 0 \Longrightarrow \gamma_{jk}^i \delta_i^u \delta_v^j \delta_w^k = \gamma_{vw}^u = 0.$$

Tím je dokázána lineární nezávislost souboru (F_i^{jk}). Hledáme-li pak libovolný tenzor $\tau \in \mathcal{T}_2^1(V_n)$ ve tvaru lineární kombinace $\tau = \tau_{jk}^i F_i^{jk}$, zjistíme analogickým postupem (proveďte), že platí

$$\tau_{jk}^i = \tau(e^i, e_j, e_k).$$

Našli jsme tedy bázi prostoru $\mathcal{T}_2^1(V_n)$ indukovanou bází $e_1, \ldots, e_n$. Počet jejích prvků je roven počtu nezávislých výběrů indexů i, j a k, tj. n^3, což je v souladu s větou. Navíc jsme zjistili, že složku τ^i_{jk} tenzoru τ v této indukované bázi určíme tak, že tenzor τ vyčíslíme na argumentech (e^i, e_j, e_k).

PŘÍKLAD: Operace ve složkách – vektory $(V_n = \mathcal{T}_0^1(V_n))$
Ve složkách umíme dobře počítat s vektory: složky součtu vektorů v dané bázi jsou součtem složek sčítanců, složky k-násobku vektoru jsou k-násobky jeho složek, vše ve stejné předem zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$a = \alpha^i e_i, \quad b = \beta^i e_i, \quad c = a + b = \gamma^i e_i, \quad d = ka = \delta^i e_i,$$

$$c = \alpha^i e_i + \beta^i e_i = (\alpha^i + \beta^i) e_i, \; d = k(\alpha^i e_i) = (k\alpha^i) e_i \implies$$

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i, \; \delta^i = k\alpha^i,$$

$$\text{nebo maticově} \;\; c \sim (\gamma) = (\alpha) + (\beta), \quad d \sim (\delta) = k(\alpha).$$

PŘÍKLAD: Operace ve složkách – kovektory ($V_n^* = \mathcal{T}_1^0(V_n)$)
Pro kovektory (lineární formy) můžeme pravidla pro počítání ve složkách přepsat z předchozího příkladu s jedinou změnou – dolní indexy přesuneme nahoru a horní dolů, v maticovém vyjádření zaměníme řádky za sloupce. (Samozřejmě dodržíme značení, místo $a, b \in V_n$ pracujeme s $\omega, \eta \in V_n^*$, apod.)

Ale zkusíme to jinak – a to nám pak pomůže u tenzorů vyšších řádů. Ze skutečnosti, že každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze, jsme pro libovolnou lineární formu $\omega \in V_n^*$ odvodili toto:

$$\omega = \omega_j e^j \implies \omega(e_i) = \omega_j \, e^j(e_i) = \omega_j \, \delta_i^j = \omega_i = \omega(e_i),$$

Lineární forma ω přiřazuje i-tému vektoru (základní) báze $(e_1, \ldots, e_n)$ ve V_n svoji i-tou složku v duální bázi $(e^1, \ldots, e^n)$.

$$\omega = \omega(e_1)e^1 + \cdots + \omega(e_n)e^n.$$

Tohoto zápisu nyní využijeme.

Zvolme libovolně $\omega,\, \eta \in V_n^*$ a $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$. Uvažme obecnou lineární kombinaci $\chi = \alpha\omega + \beta\eta$. Již dříve jsme dokázali, že χ je lineární forma, $\chi \in V_n^*$. Její i-tou složku zapíšeme jako $\chi_i = \chi(e_i)$ a počítáme s využitím definice součtu a skalárního násobku lineárních forem:

$$\chi_i = \chi(e_i) = \alpha\omega(e_i) + \beta\eta(e_i) = \alpha\omega_i + \beta\eta_i \implies (\chi) = \alpha(\omega) + \beta(\eta).$$

Získali jsme očekávané pravidlo počítání „po složkách“. Číselně třeba pro $n = 3$: $\omega = 3e^1 + 2e^2 - 4e^3$, $\eta = -e^1 - e^2 + 3e^3$, $\alpha = 2$, $\beta = -3$,

$$(\chi) = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix}$$

ÚKOL: Pokuste se odvodit pravidlo pro počítání se složkami v prostoru $\mathcal{T}_2^0(V_n)$.

Návod: Definujte zobrazení $F^{ij} \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$, $1 \leq i,\, j, \leq n$, vztahy $F^{ij}(e_k,\, e_l) = \delta^i_k \delta^j_l$, ukažte, že tvoří bázi a vyjádřete pomocí nich výraz $\alpha\tau + \beta\sigma$ pro libovolné $\tau,\, \sigma \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

Pokusíme se nyní odvodit pravidlo pro počítání se složkami v prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ a pak už pravidlo zobecníme.

PŘÍKLAD: Definujme, podobně jako výše v příkladu s prostorem $\mathcal{T}_2^1(V_n)$ zobrazení $F_{ij}^k \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$, $1 \leq i, j, k \leq n$, takto (všimněte si v porovnání s příkladem prostoru $\mathcal{T}_2^1(V_n)$ definičního oboru a umístění indexů):

$$F_{ij}^k : V_n^* \times V_n^* \times V_n \ni [\omega, \eta, a] \longrightarrow F_{ij}^k(\omega, \eta, a) \in \mathbb{R}, \; F_{ij}^k(e^u, e^v, e_w) = \delta_i^u \delta_j^v \delta_w^k.$$

(Víte, proč stačí definici specifikovat pouze pro prvky báze? Jistěže víte – zobrazení F_{ij}^k mají být lineární v každém argumentu, a proto jsou jednoznačně určena obrazy prvků bází $(e_1, \ldots, e_n)$ a $(e^1, \ldots, e^n)$.)
Soubor $\{F_{ij}^k\}$, $1 \leq i, j, k \leq n$, tvoří v prostoru $\mathcal{T}_1^2$ bázi, jak už sami snadno jistě dokážete. Zvolme $\tau, \sigma \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$ a zapišme je ve složkách, tj. jako lineární kombinace prvků báze a počítejme jejich lineární kombinaci $\chi = \alpha\tau + \beta\sigma$ s využitím toho, že $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ je vektorový prostor (pravidla pro počítání s vektory):

$$\tau = \tau_k^{ij}\, F_{ij}^k, \quad \sigma = \sigma_k^{ij}\, F_{ij}^k$$

$$\alpha\tau + \beta\sigma = \alpha(\tau_k^{ij}\, F_{ij}^k) + \beta(\sigma_k^{ij}\, F_{ij}^k) = (\alpha\tau_k^{ij} + \beta\sigma_k^{ij})\, F_{ij}^k.$$

Výraz v závorce $\chi_k^{ij} = \alpha\tau_k^{ij} + \beta\sigma_k^{ij}$ je nepochybně složkou tenzoru χ. To je pravidlo „počítání po složkách“, na které jsme zvyklí z jakéhokoli vektorového prostoru.

ÚKOL: Uvažujte opět o prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ a zobrazeních $\{F_{ij}^k\}$, $1 \leq i, j, k$, která v něm tvoří bázi. Pro tenzor $\tau \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$, $\tau = \tau_k^{ij}\, F_{ij}^k$ ukažte, že platí

$$\tau_k^{ij} = \tau(e^i, e^j, e_k),$$

tedy pravidlo, že složka tenzoru v dané bázi (indukované bází $(e_1, \ldots, e_n)$ předem zvolené ve V_n) se dostane jeho vyčíslením na odpovídajících prvcích báze $(e_1, \ldots, e_n)$ a báze duální.

Pokud jste splnili úkol, nebudete mít problém s následujícícm příkladem.

PŘÍKLAD: Transformační vztahy pro tenzory prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$
Uvažujme o bázích $(e_1, \dots e_n)$ a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ ve V_n (matice přechodu T, $S = T^{-1}$) a indukovaných bázích $(e^1, \dots, e^n)$ a $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n$ ve V_n^*, resp. $\{F_{ij}^k\}$ a $\{\bar{F}_{ij}^k\}$ v $\mathcal{T}_1^2(V_n)$, $1 \le i, j, k \le n$,

$$F_{ij}^k(e^u, e^v, e_w) = \delta_i^u \delta_j^v \delta_k^w, \quad \bar{F}_{ij}^k(\bar{e}^u, \bar{e}^v, \bar{e}_w) = \delta_i^u \delta_j^v \delta_k^w.$$

Vyjádříme obecnou složku $\bar{\tau}_k^{ij}$ tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$ v bázi $\{\bar{F}_{ij}^k\}$ pomocí jeho složek v bázi $\{F_{ij}^k\}$:

$$\bar{\tau}_k^{ij} = \tau(\bar{e}^i, \bar{e}^j, \bar{e}_k) = \tau(S_u^i e^u, S_v^j e^v, T_k^w e_w) = S_u^i S_v^j T_k^w \tau(e^u, e^v, e_w),$$

$$\bar{\tau}_k^{ij} = S_u^i S_v^j T_k^w \tau_w^{uv}.$$

Vyzkoušíme získaný transformační vztah na jednoduchém číselném příkladu, pro $n = 2$.

Zvolme báze $(e_1,\, e_2)$ a $(\bar{e}_1,\, \bar{e}_2)$ v prostoru V_2 a tenzor τ (v bázi $\{F_{ij}^k\}$, $1 \le i,\, j,\, k \le 2$, indukované bází $(e_1,\, e_2)$) takto:

$$\bar{e}_1 = e_1 - 2e_2,\ \bar{e}_2 = e_1 - e_2 \Longrightarrow\ T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tau = 2F_{11}^1 - F_{11}^2 + 3F_{12}^1 - 2F_{12}^2 - F_{21}^1 - 3F_{21}^2 + F_{22}^2, \ \text{ tj.}$$

$$\tau_1^{11} = 2,\ \tau_2^{11} = -1,\ \tau_1^{12} = 3,\ \tau_2^{12} = -2,$$

$$\tau_1^{21} = -1,\ \tau_2^{21} = -3,\ \tau_1^{22} = 0,\ \tau_2^{22} = 1.$$

Vypočteme složku $\bar{\tau}_1^{21}$ (výraz bude obsahovat $2^3 = 8$ sčítanců):

$$\bar{\tau}_1^{21} = S_u^2 S_v^1 T_1^w \tau_w^{uv} =$$

$$S_1^2 S_1^1 T_1^1 \tau_1^{11} + S_1^2 S_1^1 T_1^2 \tau_2^{11} + S_1^2 S_2^1 T_1^1 \tau_1^{12} + S_1^2 S_2^1 T_1^2 \tau_2^{12} +$$

$$+ S_2^2 S_1^1 T_1^1 \tau_1^{21} + S_2^2 S_1^1 T_1^2 \tau_2^{21} + S_2^2 S_2^1 T_1^1 \tau_1^{22} + S_2^2 S_2^1 T_1^2 \tau_2^{22} =$$

$$= (-2)\cdot 2 + 4\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 + 4\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 = -25.$$

Pro kontrolu a procvičení určíme nyní složku $\bar{\tau}_1^{21}$ pomocí vyčíslení tenzoru τ na prvcích bází (sledujte horní a dolní pevné indexy a všechny sčítací indexy):

$$\bar{\tau}_1^{21} = \tau(\bar{e}^2,\ \bar{e}^1,\ \bar{e}_1) = \tau(S_1^2 e^1 + S_2^2 e^2,\ S_1^1 e^1 + S_2^1 e^2,\ T_1^1 e_1 + T_1^2 e_2) =$$

$$= \tau(2e^1 + e^2,\ -e^1 - e^2,\ e_1 - 2e_2) =$$

$$= -2\tau(e^1,\ e^1,\ e_1) + 4\tau(e^1,\ e^1,\ e_2) - 2\tau(e^1,\ e^2,\ e_1) + 4\tau(e^1,\ e^2,\ e_2) -$$

$$-\tau(e^2,\ e^1,\ e_1) + 2\tau(e^2,\ e^1,\ e_2) - \tau(e^2,\ e^2,\ e_1) + 2\tau(e^2,\ e^2,\ e_2) =$$

$$= -2\tau_1^{11} + 4\tau_2^{11} - 2\tau_1^{12} + 4\tau_2^{12} - \tau_1^{21} + 2\tau_1^{21} - \tau_1^{22} + 2\tau_2^{22} = -25.$$

ÚKOL: Pro procvičení vypočtěte některou z dalších složek tenzoru τ v bázích indukovaných bází $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2)$.

Nyní už zapíšeme transformační vztahy pro složky tenzorů obecně.

Vycházíme z toho, že pro $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ je (opět sledujte sčítací indexy)

$$\bar{\tau}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tau(\bar{e}^{i_1}, \dots, \bar{e}^{i_p}; \bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_q}), \ \tau^{u_1 \dots u_p}_{v_1 \dots v_q} = \tau(e^{u_1}, \dots, e^{u_p}; e_{v_1}, \dots, e_{v_q}),$$

kde všechny indexy nabývají všech hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
Transformační vztahy pro vektory bází jsou

$$\bar{e}_{j_1} = T^{v_1}_{j_1} e_{v_1}, \ \dots, \ \bar{e}_{j_q} = T^{v_q}_{j_q} e_{v_q}, \quad \bar{e}^{i_1} = S^{i_1}_{u_1} e^{u_1}, \ \dots, \ \bar{e}^{i_p} = S^{i_p}_{u_p} e^{u_p}$$

$$\bar{\tau}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tau(\bar{e}^{i_1}, \dots, \bar{e}^{i_p}; \bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_q}) =$$

$$= \tau(S^{i_1}_{u_1} e^{u_1}, \dots, S^{i_p}_{u_p} e^{u_p}, \ T^{v_1}_{j_1} e_{v_1}, \dots, T^{v_q}_{j_q} e_{v_q}) =$$

$$S^{i_1}_{u_1} \cdots S^{i_p}_{u_p} T^{v_1}_{j_1} \cdots T^{v_q}_{j_q} \tau(e^{u_1}, \dots, e^{u_p}; e_{v_1}, \dots, e_{v_p}) \implies$$

$$\bar{\tau}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = S^{i_1}_{u_1} \cdots S^{i_p}_{u_p} T^{v_1}_{j_1} \cdots T^{v_q}_{j_q} \tau^{u_1 \dots u_p}_{v_1 \dots v_1}$$

Transformační vztahy pro složky tenzorů:

složky vektoru $\bar{\alpha}^i = S^i_k \, \alpha^k, \; \alpha^i = T^i_k \, \bar{\alpha}^k$

složky kovektoru $\bar{\omega}_j = T^l_j \, \omega_l, \; \omega_j = S^l_j \, \bar{\omega}_l$

složky tenzoru

$$\bar{\tau}^{i_1 \dots i_a \dots i_p}_{j_1 \dots j_b \dots j_q} = S^{i_1}_{k_1} \dots S^{i_a}_{k_a} \dots S^{i_p}_{k_p} T^{l_1}_{j_1} \dots T^{l_b}_{j_b} \dots T^{l_q}_{j_q} \, \tau^{k_1 \dots k_a \dots k_p}_{l_1 \dots l_b \dots l_q}$$

$$\tau^{i_1 \dots i_a \dots i_p}_{j_1 \dots j_b \dots j_q} = T^{i_1}_{k_1} \dots T^{i_a}_{k_a} \dots T^{i_p}_{k_p} S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_b}_{j_b} \dots T^{l_q}_{j_q} \, \bar{\tau}^{k_1 \dots k_a \dots k_p}_{l_1 \dots l_b \dots l_q}$$

Obr. 9.3: Transformační vztahy pro tenzory

Tenzorový součin

Tenzorovým součinem vznikají z tenzorů nižších řádů tenzory vyšších řádů.

DEFINICE: Tenzorový součin

Nechť $\tau \in \mathcal{T}_q^p$ a $\sigma \in \mathcal{T}_s^r$. Definujme zobrazení

$$\chi : \underbrace{V_n^* \times \cdots \times V_n^*}_{(p+r)\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{(q+s)\text{-krát}} \ni (\omega_1, \ldots, \omega_{p+r}; a_1, \ldots, a_{q+s}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \chi(\omega_1, \ldots, \omega_{p+r}; a_1, \ldots, a_{q+s}) \in \mathbb{R},$$

$$\text{kde } \chi(\omega_1, \ldots, \omega_{p+r}; a_1, \ldots, a_{q+s}) =$$

$$= \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; a_1, \ldots, a_q) \cdot \sigma(\omega_{p+1}, \ldots, \omega_{p+r}; a_{q+1}, \ldots, a_{q+s}).$$

Zobrazení $\chi = \tau \otimes \sigma$ se nazývá tenzorový součin tenzorů τ a σ.

POZOR: Pořadí argumentů je třeba dodržet!!

ÚKOL: Dokažte, že právě definované zobrazení χ je tenzorem z prostoru $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(V_n)$.

Návod: Dokažte linearitu zobrazení χ v obecném i-tém kovektorovém argumentu a poté v obecném j-tém vektorovém argumentu, tj. na i-tou kovektorovou pozici (pozici pro „omegy“) dosaďte místo ω_i lineární kombinaci $\alpha\omega_i + \beta\eta_i$ a potom podobně na j-tou vektorovou pozici (pozici pro „áčka“) dosaďte místo a_j lineární kombinaci $\alpha a_j + \beta b_j$.

Usnadnění: Vzhledem k tomu, že linearita se dokazuje nezávisle pro každý argument zvlášť (tj. při dosazení lineární kombinace na zvolenou pozici zůstávají ostatní argumenty nezměněny), lze si důkaz zjednodušit tak, že jej provedete pro nižší řády, třeba pro $\tau \in \mathcal{T}^1_0(V_n)$ a $\sigma \in \mathcal{T}^0_1(V_n)$

$$\chi : \; V_n^* \times V_n \ni (\omega, a) \longrightarrow \chi(\omega, a) = \tau(\omega) \cdot \sigma(a) \in \mathbb{R}$$

a dokážete, že $\chi \in \mathcal{T}^1_1(V_n)$, konkrétně vypočtete

$$\chi(\alpha\omega + \beta\eta;\, a) \;\text{ a }\; \chi(\omega;\, \alpha a + \beta b) \;\text{ pro }\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Vlastnosti tenzorového součinu jsou z linearity zcela zřejmé. Shrneme je ve větě.

VĚTA: Vlastnosti tenzorového součinu

Nechť $\tau_1, \tau_2, \tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$, $\chi \in \mathcal{T}_v^u(V_n)$, jsou libovolné tenzory a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolné skaláry. Platí

- $(\alpha\tau) \otimes \sigma = \tau \otimes (\alpha\sigma) = \alpha(\tau \otimes \sigma)$,
- $(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \sigma = \alpha(\tau_1 \otimes \sigma) + \beta(\tau_2 \otimes \sigma)$,
- $\tau \otimes (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2) = \alpha(\tau \otimes \sigma_1) + \beta(\tau \otimes \sigma_2)$,
- $\tau \otimes (\sigma \otimes \chi) = (\tau \otimes \sigma) \otimes \chi$, píšeme $\tau \otimes \sigma \otimes \chi$.

Důkaz: Důkazy všech částí věty jsou triviální a vyplývají přímo z definice, z linearity a z pravidel pro počítání s reálnými čísly. Proveďme důkaz pouze pro druhé tvrzení, další důkazy proveďte podobným způsobem sami – třeba jen pro tenzory nižších řádů. Zvolme libovolné argumenty a počítejme:

$$((\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \sigma)(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; a_1, \dots, a_{q+s}) =$$

$$= (\alpha\tau_1+\beta\tau_2)(\omega_1, \dots, \omega_p; a_1, \dots, a_q) \cdot \sigma(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; a_{q+1}, \dots, a_{q+s}) =$$

$$\alpha\tau_1(\omega_1, \dots, \omega_p; a_1, \dots, a_q) \cdot \sigma(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; a_{q+1}, \dots, a_{q+s}) +$$

$$+\beta\tau_2(\omega_1, \dots, \omega_p; a_1, \dots, a_q) \cdot \sigma(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; a_{q+1}, \dots, a_{q+s}) =$$

$$= (\alpha(\tau_1 \otimes \sigma) + \beta(\tau_2 \otimes \sigma))(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; a_1, \dots, a_{q+s}).$$

Pomocí tenzorového součinu můžeme v tenzorových prostorech konstruovat indukované báze.

VĚTA: Indukované báze v $\mathcal{T}^p_q(V_n)$

Nechť $(e_1, \dots, e_n)$ je báze v prostoru V_n, $(e^1, \dots, e^n)$ indukovaná duální báze. Pak soubor

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}\}, \quad 1 \le i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \le n,$$

je báze v tenzorovém prostoru $\mathcal{T}^p_q(V_n)$.

Místo obecného důkazu předchozí věty osvětlíme situaci na příkladu.

PŘÍKLAD: Podle předchozí věty je indukovaná báze v prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ tvořena prvky $\{e_i \otimes e_j \otimes e^k\}$, přičemž indexy i, j, k nabývají nezávisle na sobě hodnot 1 až n. Platí

$$e_i \otimes e_j \otimes e^k(e^u,\, e^v,\, e_w) = e_i(e^u)\, e_j(e^v)\, e^k(e_w) = \delta_i^u\, \delta_j^v\, \delta_w^k.$$

Přesně takto fungovala zobrazení $F_{ij}^k \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$, která jsme zavedli na straně 33. Tato zobrazení tvořila v prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ bázi. A fungují stejně jako tenzorové součiny $e_i \otimes e_j \otimes e^k$, konkrétně $F_{ij}^k(e^u,\, e^v,\, e_w) = \delta_i^u\, \delta_j^v\, \delta_w^k$. Protože každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze, nutně platí $F_{ij}^k = e_i \otimes e_j \otimes e^k$. Pro tenzor $\tau \in \mathcal{T}_1^2(V_n)$ ve složkách platí (očekávaný výsledek)

$$\tau = \tau_k^{ij}\, e_i \otimes e_j \otimes e^k \implies \tau(e^u,\, e^v,\, e_w) = (\tau_k^{ij}\, e_i \otimes e_j \otimes e^k)(e^u,\, e^v,\, e_w) =$$

$$= \tau_k^{ij}\, e_i(e^u)\, e_j(e^v)\, e^k(e_w) = \tau_k^{ij}\, \delta_i^u \delta_j^v \delta_w^k = \tau_w^{uv}.$$

Podívejme se na tenzorový součin ještě jinak:

ÚKOL: Zvolme libovolně například tenzory prvního řádu $\tau \in \mathcal{T}_0^1(V_n)$ a $\sigma \in \mathcal{T}_1^0(V_n)$. Jejich tenzorový součin $\chi = \tau \otimes \sigma$ je tenzorem druhého řádu, konkrétně jednou kontravariantní a jednou kovariantní, tj. $\chi \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$. Tenzor χ je tenzory τ a σ jednoznačně určen. Ve složkách platí

$$\chi = \tau \otimes \sigma = (\tau^i\, e_i) \otimes (\sigma_j\, e^j) = (\tau^i \sigma_j)\, e_i \otimes e^j, \quad \chi_j^i = \tau^i \sigma_j.$$

Zamyslete se nad opačnou otázkou: Lze každý tenzor $\chi \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$ vyjádřit jako tenzorový součin tenzorů prvního řádu? Pokud ano, kolika způsoby? Pokud ne, najděte protipříklad.

PŘÍKLAD: Ztotožnění.
Problém vysvětlíme na příkladu tenzorového prostoru $\mathcal{T}_1^1(V_n)$. Tenzory typu $(1, 1)$ jsme definovali jako zobrazení s definičním oborem $V_n^* \times V_n$, lineární v každém argumentu. Ve složkách (po zavedení struktury vektorového prostoru na množině takových zobrazení) je $\tau = \tau_j^i\, e_i \otimes e^j$.

Co kdybychom definovali také zobrazení

$$\tilde{\tau} : \, V_n \times V_n^* \ni [a, \omega] \longrightarrow \tilde{\tau}(a, \omega) \in \mathbb{R},$$

rovněž lineární v každém z obou argumentů? (O takových zobrazeních jsme zatím nehovořili.) Na množině $\widetilde{\mathcal{T}}_1^1(V_n)$ všech takových zobrazení lze rovněž zavést strukturu vektorového prostoru – zkuste to provést již známým způsobem. Tento vektorový prostor má stejně jako $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ dimenzi n^2. Zkuste tipovat, jaké budou transformační vztahy pro zobrazení typu $\tilde{\tau}$. Že stejné, jako pro $\tau \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$? Pokud tipujete takto, máte pravdu. Dokážeme to:

$$\bar{\tilde{\tau}}_i^j = \tilde{\tau}(\bar{e}_i, \, \bar{e}^j) = \tilde{\tau}(T_i^k \, e_k, \, S_l^j \, e^l) = T_i^k S_l^j \, \tilde{\tau}(e_k, \, e^l)),$$

$$\bar{\tilde{\tau}}_i^j = T_i^k S_l^j \, \tilde{\tau}_k^l.$$

Transformační vztah je stejný jako pro prvky $\tau \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$. Nemáme tedy jak rozlišit zobrazení typu $\tau \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$ od nových zobrazení typu $\tilde{\tau}$.

Znamená to, že zobrazení $\tilde{\tau}$ je totéž jako zobrazení τ? Nikoli. Tato zobrazení mají odlišné definiční obory. Prostory $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ a $\widetilde{\mathcal{T}}_1^1(V_n)$ jsou však nejen izomorfní (stejná dimenze), ale platí v nich také stejné transformační vztahy. Mohli bychom tedy říci, že jsou kanonicky izomorfní. „Stejné" jsou z abstraktního algebraického hlediska. Kanonický izomorfismus těchto prostorů zavedeme takto:

$$\tilde{\tau} \equiv \tau \ \text{ právě tehdy, platí-li } \ \tilde{\tau}(a,\, \omega) = \tau(\omega,\, a)$$

pro libovolný vektor $a \in V_n$ a libovolný kovektor $\omega \in V_n^*$. Hovoříme pak o ztotožnění prostorů $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ a $\widetilde{\mathcal{T}}_1^1(V_n)$.

POZOR! Přestože pro libovolné prvky $a \in V_n$ a $\omega \in V_n^*$ platí $e_i \otimes e^j(a,\, \omega) = e^j \otimes e_i(\omega,\, a) = \alpha^i \omega_j$, nejde o komutativitu tenzorového součinu, ale právě jen o zototožnění zobrazení. (Viz také duální součin.)

Taková ztotožnění můžeme provádět i obecně, pro tenzorové prostory typu $(p,\, q)$.

Symetrické a antisymetrické tenzory

Fyzikální tenzorové veličiny často vykazují vlastnosti symetrie nebo antisymetrie. Symetrické jsou například tzv. materiálové tenzory, charakterizující vlastnosti různých prostředí (elastické konstanty a moduly, dielektrická permitivita), ale třeba také metrický tenzor. Antisymetrický je např. tenzor elektromagnetického pole. Antisymetrická tenzorová pole slouží jako integrandy v „moderní“ teorii integrálu, a figurují ve variačních fyzikálních teoriích.

DEFINICE: Symetrické a antisymetrické tenzory

Tenzor $\tau \in \mathcal{T}^p_q(V_n)$ se nazývá symetrický, resp. antisymetrický, v i-tém a j-tém kovektorovém argumentu, $1 \leq i, j \leq p$, je-li pro lib. argumenty

$$\tau(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_p; a_1, \dots, a_q) =$$

$$\pm\tau(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_p; a_1, \dots, a_q),$$

přičemž „plus“ se týká symetrického, „minus“ antisymetrického tenzoru.

Podobně lze definovat symetrii a antisymetrii ve vektorových argumentech.

ÚKOL: Definujte tenzor symetrický, resp. antisymetrický, v i-tém a j-tém vektorovém argumentu, $1 \leq i, j \leq q$. Dále dokažte, resp. zdůvodněte, že podmnožina všech tenzorů symetrických, resp. antisymetrických, v i-tém a j-tém kovektorovém, resp. vektorovém argumentu je vektorovým podprostorem výchozího tenzorového prostoru.

Symetrie, resp. antisymetrie se může týkat i většího počtu argumentů. Významné jsou tzv. úplně symetrické, resp. úplně antisymetrické tenzory, ať již v kovektorových nebo vektorových argumentech. Symetrii a antisymetrii lze také kombinovat – tenzor může být třeba symetrický v kovektorových argumentech a antisymetrický ve vektorových argumentech.

ÚKOL: Definujte tenzor τ typu $(4, 6)$, tj. $\tau \in \mathcal{T}_6^4(V_n)$, který je symetrický v druhém a třetím kovektorovém argumentu a antisymetrický v prvním a pátém vektorovém argumentu.

Vektorové a kovektorové argumenty mezi sebou zaměňovat nelze.

Dále se budeme zabývat úplně symetrickými a úplně antisymetrickými tenzory a jejich základní vlastnosti a počítání s nimi ukážeme pro jednoduchost na čistě kovariantních tenzorech, tj. pro $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$.

DEFINICE: Úplně symetrické, resp. antisymetrické, kovariantní tenzory

Tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$ se nazývá úplně symetrický, jestliže se jeho hodnota nezmění při libovolné permutaci argumentů, resp. úplně antisymetrický, změní-li znaménko při liché permutaci argumentů a zůstane beze změny při permutaci sudé, tj.

$$\tau(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(q)}) = \tau(a_1, \ldots, a_q), \quad \text{resp.}$$

$$\tau(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \tau(a_1, \ldots, a_q),$$

kde $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(q)) \in P_q$ je permutace indexů $(1, \ldots, q)$ číslujících jednotlivé pozice pro vektorové argumenty.

VĚTA: Podprostory symetrických a antisymetrických tenzorů

Množiny $\mathcal{S}^0_q(V_n)$, $\bigwedge^0_q(V_n) \subset \mathcal{T}^0_q(V_n)$ úplně symetrických a úplně antisymetrických (kovariantních) tenzorů jsou vektorové podprostory prostoru $\mathcal{T}^0_q(V_n)$, přičemž

$$\dim \mathcal{S}^0_q(V_n) = \binom{n+q-1}{q}, \quad \dim \bigwedge\nolimits^0_q(V_n) = \binom{n}{q}.$$

Důkaz: Důkaz tvrzení, že se jedná o vektorové podprostory, je jednoduchý: je zřejmé, že lineární kombinace symetrických, resp. antisymetrických tenzorů je opět symetrický, resp. antisymetrický tenzor. Dimenze podprostorů zjistíme jednoduchou úvahou založenou na známé větě (že lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze), jejímž důsledkem je vyjádření obecné složky tenzoru τ:

$$\tau_{i_1 \ldots i_q} = \tau(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}).$$

Dimenze daného podprostoru je rovna počtu nezávislých složek každého tenzoru, který je prvkem tohoto podprostoru.

Uvažujme nejprve o podprostoru symetrických tenzorů. Záměny argumentů $e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}$ se nepoznají, argumenty se mohou opakovat. Nezávislých výběrů argumentů $e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}$ (a tedy nezávislých složek úplně symetrického tenzoru) je tolik, kolik je kombinací s opakováním q-té třídy z n prvků, tedy $\binom{n+q-1}{q}$.

V případě antisymetrického tenzoru je jeho hodnota nulová v případě, že jakékoli dva argumenty jsou stejné. Nezávislých složek je tolik, kolik je kombinací bez opakování q-té třídy z n prvků, tedy $\binom{n}{q}$.

PŘÍKLAD: Uvažujme o podprostoru $\mathcal{S}_2^0(V_n) \subset \mathcal{T}_2^0(V_n)$. Jak bude vypadat jeho báze, je-li báze v celém prostoru $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ tvořena prvky $(e^i \otimes e^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, kde $(e_1, \ldots, e_n)$ je zvolená báze v prostoru V_n?

Vyjádříme tenzor τ ve složkách:

$$\tau = \tau_{ij}\, e^i \otimes e^j \implies \tau_{kl} = \tau(e_k,\, e_l) = \tau(e_l,\, e_k) = \tau_{lk},$$

$$\tau = \frac{1}{2}\tau_{ij}\, e^i \otimes e^j + \frac{1}{2}\tau_{ji}\, e^j \otimes e^i = \tau_{ij}\, \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i).$$

Všimněme si, že platí například

$$\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) = \frac{1}{2}(e^2 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^2), \text{ obecně}$$

$$\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i) = \frac{1}{2}(e^j \otimes e^i + e^i \otimes e^j),$$

takže soubor $\left\{\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i)\right\}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, je báze v podprostoru $\mathcal{S}_2^0(V_n)$. (Nerovností $i \leq j$ jsme zajistili to, že se prvky neopakují dvakrát.) Počet navzájem nezávislých (různých) prvků této báze je $\frac{1}{2}(n^2 - n) + n = \frac{1}{2}(n+1)n = \binom{n+2-1}{2}$. To souhlasí se vztahem pro dimenzi prostoru $\mathcal{S}_q^0(V_n)$ pro $q = 2$.

Podobně budeme hledat bázi prostoru $\bigwedge_2^0(V_n) \subset \mathcal{T}_2^0(V_n)$. Ve složkách:

$$\tau = \tau_{ij}\, e^i \otimes e^j \implies \tau_{kl} = \tau(e_k,\, e_l) = -\tau(e_l,\, e_k) = -\tau_{lk},$$

$$\tau = \frac{1}{2}\tau_{ij}\, e^i \otimes e^j - \frac{1}{2}\tau_{ji}\, e^j \otimes e^i = \tau_{ij}\, \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i).$$

Platí například

$$\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1) = -\frac{1}{2}(e^2 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^2), \text{ obecně}$$

$$\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) = -\frac{1}{2}(e^j \otimes e^i - e^i \otimes e^j),$$

přičemž pro $i = j$ je $\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) = 0_{\mathcal{T}_2^0(V_n)}$. Soubor $\left\{\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)\right\}$, $1 \leq i < j \leq n$, je báze v podprostoru $\bigwedge_2^0(V_n)$. Počet prvků této báze je $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}(n-1)n = \binom{n}{2}$, jak vychází z obecného vztahu pro dimenzi prostoru $\bigwedge_q^0(V_n)$ pro $q = 2$.

Vyzkoušejme podrobně, jak to funguje pro $n = 2$, tj. v prostoru $\mathcal{T}_2^0(V_2)$. Nejprve pro symetrické tenzory. V původním zápisu, v němž vezmeme v úvahu vztah $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, který jsme před chvílí odvodili, dostaneme:

$$\tau = \tau_{ij}\, e^i \otimes e^j = \tau_{11}\, e^1 \otimes e^1 + \tau_{12}\, e^1 \otimes e^2 + \tau_{21}\, e^2 \otimes e^1 + \tau_{22}\, e^2 \otimes e^2 =$$

$$\tau_{11}\, e^1 \otimes e^1 + \tau_{12}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \tau_{22}\, e^2 \otimes e^2.$$

Při novém zápisu (indexy i a j nabývají všech hodnot z indexové množiny $\{1, 2\}$, stejně jako v zápisu původním) dostaneme, opět s využitím symetrie složek $\tau_{ij} = \tau_{ji}$:

$$\tau_{ij}\left(\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i)\right) = \frac{1}{2}\tau_{11}(e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^1) + \frac{1}{2}\tau_{12}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) +$$

$$+\frac{1}{2}\tau_{21}(e^2 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^2) + \frac{1}{2}\tau_{22}(e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2) =$$

$$= \tau_{11}\, e^1 \otimes e^1 + \tau_{12}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \tau_{22}\, e^2 \otimes e^2.$$

Výsledek je stejný pro oba zápisy, jsou tedy ekvivalentní.

Jak by vypadal zápis tenzoru τ ve složkách, kdybychom jej rozepsali jen pomocí nezávislých prvků báze, tj. jako lineární kombinaci tenzorů

$$\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i) \text{ pro } 1 \le i \le j \le n,$$

pro $n = 2$ tedy $\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^1)$, $\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1)$, $\frac{1}{2}(e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2)$?

Složky při tomto vyjádření mohou být obecně jiné než ve vyjádřeních předchozích. Také nepůjde použít Einsteinovu symboliku – výběr sčítacích indexů je nyní omezen nerovností $i \le j$. Složky označíme $\tilde{\tau}_{ij}$:

$$\tau = \sum_{1 \le i \le j \le 2} \tilde{\tau}_{ij} \left(\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^j + e^j \otimes e^i) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{11}(e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^1) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{12}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{22}(e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2).$$

Porovnáním s předchozími (navzájem ekvivalentními) zápisy vidíme:

$$\tilde{\tau}_{11} = \tau_{11}, \ \ \tilde{\tau}_{12} = \tau_{12} + \tau_{21} = 2\tau_{12} = 2\tau_{21}, \ \ \tilde{\tau}_{22} = \tau_{22}.$$

Teď provedeme podobné úvahy pro antisymetrické tenzory, opět jen pro $n = 2$. V původním zápisu, v němž vezmeme v úvahu vztah antisymetrie $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ (tj. $\tau_{ii} = 0$), dostaneme:

$$\tau = \tau_{ij}\, e^i \otimes e^j = \tau_{11}\, e^1 \otimes e^1 + \tau_{12}\, e^1 \otimes e^2 + \tau_{21}\, e^2 \otimes e^1 + \tau_{22}\, e^2 \otimes e^2 =$$

$$\tau_{12}(e^1 \otimes e^2) + \tau_{21}(e^2 \otimes e^1) = \tau_{12}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1).$$

Při novém zápisu (indexy i a j nabývají všech hodnot z indexové množiny $\{1, 2\}$, stejně jako v zápisu původním) dostaneme, opět s využitím antisymetrie složek $\tau_{ij} = -\tau_{ji} \;\Rightarrow\; \tau_{ii} = 0$:

$$\tau_{ij}\left(\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\tau_{12}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1) + \frac{1}{2}\tau_{21}(e^2 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^2) = \tau_{12}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1).$$

Výsledek je opět stejný pro oba zápisy, jsou ekvivalentní.

Tenzor $\tau \in \bigwedge_2^0(V_n)$ je lineární kombinaci tenzorů

$$\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) \ \text{pro} \ 1 \leq i < j \leq n.$$

Pro $n = 2$ je prostor $\bigwedge_2^0(V_2)$ jednorozměrný, jediný prvek báze je

$$\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1).$$

Složky v bázi tvořené nezávislými prvky opět označíme $\tilde{\tau}_{ij}$:

$$\tau = \sum_{1 \leq i < j \leq 2} \tilde{\tau}_{ij} \left(\frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) \right) = \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{12}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1),$$

$$\tilde{\tau}_{12} = \tau_{12} - \tau_{21} = 2\tau_{12} = -2\tau_{21}.$$

Zaměříme se nyní na proceduru, pomocí níž lze ze zadaného obecného tenzoru $\tau \in \mathcal{T}^0_q(V_n)$ „vyrobit“ tenzor symetrický, nebo antisymetrický. Nejprve opět na příkladu tenzorů druhého řádu.

PŘÍKLAD: Zvolme libovolně $\tau \in \mathcal{T}^0_2(V_n)$ a pomocí něj definujme nová zobrazení

$$\mathrm{Sym}\,\tau : \; V_n \times V_n \ni [a,\, b] \longrightarrow \mathrm{Sym}\,\tau(a,\, b) = \frac{1}{2}\left(\tau(a,\, b) + \tau(b,\, a)\right) \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{Alt}\,\tau : \; V_n \times V_n \ni [a,\, b] \longrightarrow \mathrm{Alt}\,\tau(a,\, b) = \frac{1}{2}\left(\tau(a,\, b) - \tau(b,\, a)\right) \in \mathbb{R}.$$

Především je zřejmé, že $\mathrm{Sym}\,\tau,\, \mathrm{Alt}\,\tau \in \mathcal{T}^0_2(V_n)$. Vyjádřete ještě $\mathrm{Sym}\,\tau(b,\, a)$ a $\mathrm{Alt}\,\tau(b,\, a)$ a uvidíte, že tenzor $\mathrm{Sym}\,\tau$ je symetrický a tenzor $\mathrm{Alt}\,\tau$ je antisymetrický.

Proč je v definici faktor $\frac{1}{2}$, když by vlastnost symetrie, resp. antisymetrie zůstala zachována i bez něj, nebo dokonce při volbě jakékoli konstanty? Uvidíme později.

VĚTA: Symetrizace a antisymetrizace

Nechť $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$. Zobrazení

$$\operatorname{Sym}\tau : \; V_n \times V_n \ni [a_1, \ldots, a_q] \longrightarrow \operatorname{Sym}\tau(a_1, \ldots, a_q) =$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in P(q)} \tau(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(q)}) \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Alt}\tau : \; V_n \times V_n \ni [a_1, \ldots, a_q] \longrightarrow \operatorname{Alt}\tau(a_1, \ldots, a_q) =$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in P(q)} \operatorname{sign}\sigma \cdot \tau(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(q)}) \in \mathbb{R},$$

je úplně symetrický, resp. úplně antisymetrický (kovariantní) tenzor.

Zobrazení $\operatorname{Sym} : \mathcal{T}_q^0(V_n) \ni \tau \longrightarrow \operatorname{Sym}\tau \in \mathcal{S}_q^0(V_n)$ je tzv. symetrizace,

zobrazení $\operatorname{Alt} : \mathcal{T}_q^0(V_n) \ni \tau \longrightarrow \operatorname{Alt}\tau \in \bigwedge_q^0(V_n)$ je tzv. antisymetrizace.

Následující úkol je praktickou ukázkou provedení symetrizace a antisymetrizace.

ÚKOL: Pro $\tau \in \mathcal{T}_3^0(V_n)$ vyjádřete explicitně výrazy $\mathrm{Sym}\,\tau(a_1, a_2, a_3)$ a $\mathrm{Alt}\,\tau(a_1, a_2, a_3)$.

Návod: Permutace argumentů a_1, a_2, a_3 jsou

$$\text{sudé:}\ (a_1, a_2, a_3),\ (a_3, a_1, a_2),\ (a_2, a_3, a_1),$$

$$\text{liché:}\ (a_2, a_1, a_3),\ (a_3, a_2, a_1),\ (a_1, a_3, a_2).$$

ÚKOL: Reprodukujte definici symetrizace a antisymetrizace pro tenzory typu $(p, 0)$, tj. $\tau \in \mathcal{T}_0^p(V_n)$. Pro $\tau \in \mathcal{T}_0^3(V_n)$ vyjádřete explicitně výrazy $\mathrm{Sym}\,\tau(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a $\mathrm{Alt}\,\tau(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pro libovolné argumenty $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in V_n^*$.

ÚKOL: Určete průnik vektorových podprostorů $\mathcal{S}_q^0(V_n)$ a $\bigwedge_q^0(V_n)$ prostoru tenzorů $\mathcal{T}_q^0(V_n)$.

VĚTA: Vlastnosti symetrických a antisymetrických tenzorů

Uvažujme o tenzorech prostoru $\mathcal{T}^0_q(V_n)$ (čistě kovariantní tenzory q-tého řádu). Platí

- pro $\tau \in \mathcal{S}^0_q(V_n)$ je $\operatorname{Sym}\tau = \tau$, pro $\sigma \in \bigwedge^0_q(V_n)$ je $\operatorname{Alt}\sigma = \sigma$,
- zobrazení Sym a Alt jsou projekce, tj. $\operatorname{Sym} \circ \operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}$, $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$,
- $\operatorname{Sym} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt} \circ \operatorname{Sym} = 0_{\mathcal{T}^0_q(V_n)}$.

Je-li tedy tenzor již symetrický, resp. antisymetrický, další symetrizace, resp. antisymetrizace, jej nezmění. Věta také ukazuje význam faktoru $\frac{1}{q!}$ ve výrazech pro symetrizaci a antisymetrizaci. Kdyby tento faktor v definici chyběl, rovnosti v první odrážce by neplatily. Stejné vlastnosti platí pro symetrizaci a antisymetrizaci kontravariantních tenzorů. V případě obecných tenzorů, tj. typu (p, q), lze nezávisle provádět symetrizaci a antisymetrizaci jak v kovektorových, tak ve vektorových argumentech.

Uvedeme typické příklady symetrických a antisymetrických tenzorů s fyzikálním významem.

PŘÍKLAD: Metrický tenzor

O metrickém tenzoru jsme se už stručně zmínili v úvodu. Obecně se jedná o veličinu, která umožňuje „měřit vzdálenosti“ v prostorech daného typu. Názorně bychom v případě vektorových prostorů, také mohli hovořit o „odlehlosti vektorů“. Obecně je kovariantní metrika na V_n regulární symetrický kovariantní tenzor druhého řádu $g \in \mathcal{S}_2^0(V_n)$, tj.

1) $g(a, b) = g(b, a)$ pro libovolné vektory $a, b \in V_n$,
2) $g(a, a) \neq 0$ pro libovolný nenulový vektor $a \in V_n$, a $g(0_{V_n}, 0_{V_n}) = 0$.

Při vyjádření v bázích a ve složkách

$$g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j, \;\; g_{ji} = g_{ij}, \;\; g(a, b) = g_{ij}\alpha^i \beta^j, \;\; 1 \leq i, j \leq n,$$

přičemž matice $G = (g_{ij})$ je regulární.

Složkové vyjádření metriky jako funkce složek jejích vektorových argumentů má tvar kvadratické formy (viz Algebra 5). Euklidovská metrika je pozitivně definitní kvadratickou formou, Minkowského metrika je indefinitní kvadratická forma.

Když do úvah vložíme trochu analýzy, můžeme zjistit, jak bude euklidovská metrika

$$g = e^x \otimes e^x + e^y \otimes e^y + e^z \otimes e^z$$

fungovat třeba na kulové ploše. Sférické souřadnice bodu $X \sim (x, y, z)$ můžeme chápat jako složky vektoru $a = \overrightarrow{OX}$. Sférické souřadnice tohoto bodu jsou $X \sim (r, \vartheta, \varphi)$, kde

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Bázi v tomto bodě tvoří tečné vektory k souřadnicovým křivkám, tj.

$$
\begin{aligned}
\bar{e}_r &\sim (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta),\\
\bar{e}_\vartheta &\sim (r\cos\vartheta\cos\varphi,\ r\cos\vartheta\sin\varphi,\ -r\sin\vartheta),\\
\bar{e}_\varphi &\sim (-r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0).
\end{aligned}
$$

Složky těchto vektorů tvoří řádky matice přechodu $(e_x,\ e_y,\ e_z) \to (\bar{e}_r,\ \bar{e}_\vartheta,\ \bar{e}_\varphi)$ v daném bodě. Pro duální bázi $(\bar{e}^r,\ \bar{e}^\theta,\ \bar{e}^\varphi)$ platí

$$
\begin{aligned}
e^x &= (\sin\vartheta\cos\varphi)\,\bar{e}^r + (r\cos\vartheta\cos\varphi)\,\bar{e}^\vartheta + (-r\sin\vartheta\sin\varphi)\,\bar{e}^\varphi,\\
e^y &= (\sin\vartheta\sin\varphi)\,\bar{e}^r + (r\cos\vartheta\sin\varphi)\,\bar{e}^\vartheta + (r\sin\vartheta\cos\varphi)\,\bar{e}^\varphi,\\
e^z &= (\cos\vartheta)\,\bar{e}^r + (-r\sin\vartheta)\,\bar{e}^\vartheta.
\end{aligned}
$$

Dosazením do výrazu pro g (proveďte jako další úkol) dostaneme

$$
g = \bar{e}^r \otimes \bar{e}^r + r^2\,\bar{e}^\vartheta \otimes \bar{e}^\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\,\bar{e}^\varphi \otimes \bar{e}^\varphi.
$$

Na kulové ploše $\mathcal{K}$ o poloměru R je souřadnice $r = R$ konstantní, takže bázi tvoří dva vektory $\bar{e}^\vartheta$ a $\bar{e}^\varphi$. Metrika indukovaná na (dvojrozměrné) ploše $\mathcal{K}$ (trojrozměrnou) euklidovskou metrikou je

$$
g_{\mathcal{K}} = R^2\,\bar{e}^\vartheta \otimes \bar{e}^\vartheta + R^2\sin^2\vartheta\,\bar{e}^\varphi \otimes \bar{e}^\varphi.
$$

PŘÍKLAD: Kontravariantní metrika, „cvičení“ s indexy

Kontravariantní metrikou odvozenou od kovariantní metriky $g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$ rozumíme tenzor $\tilde{g} \in \mathcal{S}^2_0(V_n)$, $\tilde{g} = g^{ij}\, e_i \otimes e_j$, kde matice (g^{ij}) a (g_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, jsou navzájem inverzní a báze $(e^1, \ldots, e^n)$ je duální k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Proveďme formální operace (s využitím právě uvedené souvislosti matic (g^{ij}) a (g_{ij}) a symetrie tenzoru g):

$$(g^{ik} g^{jl})\, g_{kl} = (g^{ik} g_{kl})\, g^{jl} = \delta^i_l\, g^{jl} = g^{ji} = g^{ij},$$

$$(g_{ik} g_{jl})\, g^{kl} = g_{ik}\, (g_{jl} g^{kl}) = g_{ik}\, (g_{jl} g^{lk}) = g_{ik} \delta^k_j = g_{ij}.$$

Tím jsme ukázali příklad tzv. zvedání a snižování indexů pomocí metriky. Tyto operace lze zobecnit a z tenzorů daného řádu typu (p, q) vytvářet tenzory téhož řádu, obecně typu $(p + r, q - r)$, $-p \leq r \leq q$.

ÚKOL: Nechť $\tau \in \mathcal{T}^0_2(V_n)$. Ověřením transformačních vztahů dokažte, že pro veličiny $\tilde{\tau}$ a τ' o složkách

$$\tilde{\tau}_{ij} = g_{ik} g_{jl}\, \tau^{kl}, \quad (\tau')^j_i = g_{ik} \tau^{kj} \;\text{ platí }\; \tilde{\tau} \in \mathcal{T}^2_0(V_n), \quad \tau' \in \mathcal{T}^1_1(V_n).$$

Formulujte a řešte další takové úkoly pro tenzory 2. řádu, úvahy zobecněte.

PŘÍKLAD: Tenzor elektromagnetického pole

Světlo je elekromagnetické vlnění a jeho rychlost ve vakuu je zároveň mezní rychlostí pro přenos hmoty, energie a signálu. Musíme pracovat ve čtyřrozměrném časoprostoru V_4 s Minkowského metrikou $g = g_{\alpha\beta}\, e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$, $0 \leq \alpha,\, \beta \leq 3$, $\operatorname{diag} g = (1,\, -1,\, -1,\, -1)$ (viz Úvod).
Pro vektory $A \sim (A^0,\, A^1,\, A^2,\, A^3) = (A^0,\, \vec{A})$, tzv. čtyřvektory, platí

$$g(A,\, A) = (A^0 \;\; A^1 \;\; A^2 \;\; A^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Tento výraz je invariantní při Lorentzově transformaci. Veličinu

$$\tilde{A} = A_{\alpha}\, e^{\alpha} = (g_{\alpha\beta} A^{\beta})\, e^{\alpha} \sim (A_0,\, A_1,\, A_2,\, A_3) = (A^0,\, -A^1,\, -A^2,\, -A^3),$$

$\tilde{A} \in V_4^*$ ve fyzice značíme $\tilde{A} \sim (A_0,\, -\vec{A}) = (A^0,\, -\vec{A})$ (i když se toto „historické“ značení poněkud vymyká dosavadní logické symbolice).

Tenzor elektromagnetického pole zavedeme, budeme-li zkoumat pohybovou rovnici nabité částice v elektromagnetickém poli o elektrické intenzitě $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r})$ a magnetické indukci $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{r})$, $ct \sim (x^0)$, $\vec{r} \sim (x^1, x^2, x^3)$,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

kde $\phi(t, \vec{r})$, resp. $\vec{A}(t, \vec{r})$ je skalární, resp. vektorový potenciál elektromagnetického pole. Zavádíme tzv. čtyřpotenciál $\tilde{A} \sim (c^{-1}\phi, -\vec{A})$ a definujeme antisymetrické výrazy

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},$$

které se, jak lze ukázat, transformují jako složky antisymetrického kovariantního tenzoru druhého řádu.

Zapisujeme je do matice

$$\tilde{F} \sim \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}E^1 & c^{-1}E^2 & c^{-1}E^3 \\ -c^{-1}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -c^{-1}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -c^{-1}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veličina $\tilde{F} = F_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta$ se nazývá tenzor elektromagnetického pole.

ÚKOL: Ukažte, že pro $A \in V_4$ (prvek Minkowského časoprostoru), $A \sim (c^{-1}\phi, \vec{A})$ splňuje veličina $\tilde{F}$ transformační vztahy pro tenzory typu (0, 2), tj. $\tilde{F} \in \bigwedge_2^0(V_4)$. Pomocí operace zvednutí indexů Minkowského metrikou g zapište do matice složky $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}$ odpovídající veličiny F. Dále prověřte, že pro tenzor elektromagnetického pole platí

$$\frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} = 0, \quad 0 \le \alpha, \beta \le 3.$$

Abychom dospěli k souvislosti tenzoru elektromagnetického pole s pohybovou rovnicí nabité částice v tomto poli, potřebujeme ještě pojem čtyřrychlost a čtyřhybnost. Uvědomme si, že v časoprostoru s Minkowského metrikou je invariantem časoprostorový interval (viz Úvod). Jeho infinitesimální tvar je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\,(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]}\, c\,\mathrm{d}t,$$

nebo při zápisu $(ct,\, x,\, y,\, z) = (x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 - \left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}x^0}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x^0}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x^0}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x^0.$$

Výraz

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

je čtverec rychlosti částice. Dostáváme

$$\mathrm{d}s = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = c\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t, \quad \beta = \frac{v}{c} \implies$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s}\, c\sqrt{1-\beta^2}.$$

Pozor! Nespleťte si index β s právě zavedeným faktorem β.

Čtyřrychlost a čtyřhybnost částice definujeme vztahy

$$u \sim (u^0,\ \vec{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

$$p = mcu, \quad \tilde{u} \sim (u_0, -\vec{u}), \quad \tilde{p} = mc\tilde{u}.$$

Relativistická pohybová rovnice částice má potom tvar

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}s} = qF_{\alpha\beta}u^\beta .$$

ÚKOL: Přímým výpočtem (dosazením do výchozí pohybové rovnice) odvoďte relativistickou pohybovou rovici nabité částice.

PŘÍKLAD: Tenzor energie-hybnosti

Tenzor energie-hybnosti je zaváděn jako symetrický kontravariantní tenzor na prostoru V_4 s Minkowského metrikou takto:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(g_{\gamma\delta}F^{\alpha\gamma}F^{\beta\delta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\right), \quad 0 \leq \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \leq 3,$$

kde μ_0 je magnetická permeabilita vakua. Je to elegantní tenzorový zápis, ale není z něj vidět souvislost s „klasickými“ trojrozměrnými charakteristikami pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$.

ÚKOL: Zapište do matice 4×4 složky tenzoru energie-hybnosti pomocí složek veličin

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right), \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \sim (S^1, S^2, S^3)$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - w\delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

kde w je hustota energie elektromagnetického pole, $\vec{S}$ je Poyntingův vektor (měří tok elektromagnetického pole) a σ je Maxwellův tenzor napětí.

Při výpočtech pozor na dolní a horní polohu indexů. Tak třeba $B \sim (B^0, \vec{B}) = (B^0, B^1, B^2, B^3)$, ale $\tilde{B} \sim (B_0, -\vec{B}) = (B_0, B_1, B_2, B_3)$, $B_\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta$. Nakonec by vám mělo vyjít

$$T = \begin{pmatrix} w & c^{-1}S^1 & c^{-1}S^2 & c^{-1}S^3 \\ c^{-1}S^1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ c^{-1}S^2 & \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ c^{-1}S^3 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Už věříte, že tenzory jsou ve fyzice všude?

Vnější součin, objemový element

Vnější součin je v podstatě antisymetrizovaný tenzorový součin. Motivace je následující: Mějme dva antisymetrické tenzory $\tau \in \bigwedge_q^0(V_n)$ a $\sigma \in \bigwedge_s^0(V_n)$. Jejich tenzorový součin $\tau \otimes \sigma \in \mathcal{T}_{q+s}^0(V_n)$ obecně není antisymetrický – antisymetrie je zaručena pouze v prvních q vektorových argumentech a posledních s vektorových argumentech, ale záměna argumentu z první q-tice a druhé s-tice není nijak specifikována. Obecně je tedy pro $1 \leq i \leq q$ a $q+1 \leq j \leq q+s$

$$\tau \otimes \sigma(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_{q+s}) =$$

$$\tau(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_q) \cdot \sigma(a_{q+1}, \ldots, a_j, \ldots, a_{q+s}) \neq$$

$$\neq -\tau(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_q) \cdot \sigma(a_{q+1}, \ldots, a_j, \ldots, a_{q+s}) =$$

$$-\tau \otimes \sigma(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_{q+s}).$$

Tenzorový součin $\tau \otimes \sigma$ je třeba ještě antisymetrizovat.

DEFINICE: Vnější součin

Nechť $\tau \in \bigwedge_q^0(V_n)$ a $\sigma \in \bigwedge_s^0(V_n)$. Vnějším součinem tenzorů τ a σ rozumíme tenzor

$$\tau \wedge \sigma = \frac{(q+s)!}{q!s!} \operatorname{Alt}(\tau \otimes \sigma).$$

VĚTA: Vlastnosti vnějšího součinu

Nechť $\tau_1, \tau_2, \tau \in \bigwedge_q^0(V_n)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \bigwedge_s^0(V_n)$, $\chi \in \bigwedge_u^0(V_n)$, jsou libovolné tenzory a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolné skaláry. Pak platí

- $(\alpha\tau) \wedge \sigma = \tau \wedge (\alpha\sigma) = \alpha(\tau \wedge \sigma)$,
- $(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \wedge \sigma = \alpha(\tau_1 \wedge \sigma) + \beta(\tau_2 \wedge \sigma)$,
- $\tau \wedge (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2) = \alpha(\tau \wedge \sigma_1) + \beta(\tau \wedge \sigma_2)$,
- $\tau \wedge \sigma = (-1)^{qs}\sigma \wedge \tau$,
- $(\tau \wedge \sigma) \wedge \chi = \tau \wedge (\sigma \wedge \chi)$, píšeme $\tau \wedge \sigma \wedge \chi$.

PŘÍKLAD: Na argumentech $a_1 = \alpha_1^1 e_1 + \dots + \alpha_1^n e_n \in V_n$ a $a_2 = \alpha_2^1 e_1 + \ldots + \alpha_2^n e_n \in V_n$ vypočteme dva výrazy utvořené z prvků duální báze $(e^1, \ldots, e^n)$, indukované zvolenou bází $(e_1, \ldots, e_n)$ prostoru V_n, konkrétně $e^1 \wedge e^2$ a $\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1)$:

$$\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1)(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(e^1(a_1)\, e^2(a_2) - e^2(a_1)\, e^1(a_2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1),$$

$$e^1 \wedge e^2(a_1, a_2) = \frac{(1+1)!}{1!1!} \mathrm{Alt}\,(e^1 \otimes e^2)(a_1, a_2) =$$

$$= 2! \cdot \frac{1}{2!}[(e^1 \otimes e^2)(a_1, a_2) - (e^1 \otimes e^2)(a_2, a_1)] = \alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \alpha_1^2.$$

Platí $e^1 \wedge e^2 = e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1$, obecně $e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i$.

Tenzory $e^i \wedge e^j$ jsou dvojnásobky prvků báze prostoru $\bigwedge_2^0(V_n)$, s níž jsme pracovali na str. 57 a 58.

Soubor $\{e^i \wedge e^j\}$, $1 \leq i < j \leq n$, je, jak vyplývá z předchozího závěru, rovněž bází v podprostoru $\bigwedge_2^0(V_n)$. Tato báze se používá nejčastěji, také při ní zůstaneme. Nerovnost $i < j$ ovšem komplikuje použití Einsteinovy sčítací symboliky. Tenzor τ by v takové bázi měl být zapsán takto:

$$\tau = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{\tau}_{ij}\, e^i \wedge e^j,$$

vlnovka odliší složky při různých zápisech. Tento zápis například obsahuje člen $\tilde{\tau}_{12}\, e^1 \wedge e^2$, nikoli však už člen $\tilde{\tau}_{21}\, e^2 \wedge e^1$. Einsteinovy symboliky se však neradi vzdáváme. Zápis $\tau = \tau_{ij}\, e^i \wedge e^j$ znamená, že sčítací indexy i a j nabývají všech hodnot od jedné do n, výraz tedy obsahuje sčítance $\tau_{12}\, e^1 \wedge e^2$ i $\tau_{21}\, e^2 \wedge e^1$. Protože podle poslední věty je $e^2 \wedge e^1 = -e^1 \wedge e^2$, platí

$$\tilde{\tau}_{12} = (\tau_{12} - \tau_{21}) \implies \tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - \tau_{ji} \text{ pro } i < j.$$

Protože hodnoty τ_{ij} a τ_{ji} pro $i < j$ tvoří jednu nezávislou složku $\tilde{\tau}_{ij}$, klademe $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$, pak $\tilde{\tau}_{ij} = 2\tau_{ij} = -2\tau_{ji}$. Standardní zápis tenzoru τ má tedy tvar

$$\tau = \tau_{ij}\, e^i \wedge e^j, \quad \text{kde} \quad \tau_{ji} = -\tau_{ij}.$$

Vyčíslíme ještě tenzor τ na prvcích báze e_i a e_j pro pevně zvolené indexy i a j (kdo si chce výpočet usnadnit, může třeba zvolit $i = 1$, $j = 2$):

$$\tau(e_i,\, e_j) = \tau_{kl}\, e^k \wedge e^l(e_i,\, e_j) = \tau_{kl} \cdot \frac{2!}{1!1!} \mathrm{Alt}\, e^k \otimes e^l(e_i,\, e_j) =$$

$$\frac{2!}{1!1!} \cdot \tau_{kl} \cdot \frac{1}{2!} \left(e^k(e_i)\, e^l(e_j) - e^k(e_j)\, e^l(e_i)\right) =$$

$$= \tau_{kl}(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l) = \tau_{ij} - \tau_{ji} = 2\tau_{ij} = -2\tau_{ji}$$

Až na faktor 2 dostáváme vyčíslením tenzoru na prvcích báze definičního oboru $V_n \times V_n$ odpovídající složku v indukované bázi tenzorového prostoru.

VĚTA: Báze v prostoru $\bigwedge_q^0(V_n)$

Soubor

$$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}\}, \ \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n,$$

je báze v podprostoru $\bigwedge_q^0(V_n) \subset \mathcal{T}_q^0(V_n)$.

Alternativní zápisy ve složkách:

$$\tau = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \tilde{\tau}_{i_1 \cdots i_q} \, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},$$

$$\tau = \tau_{i_1 \cdots i_q} \, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}, \ \ \tau_{i_1 \cdots i_q} = \operatorname{sign} \sigma \cdot \tau_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_q)},$$

$$\frac{1}{q!} \tilde{\tau}_{i_1 \, \ldots \, i_q} = \operatorname{sign} \sigma \cdot \tau_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_q)} \ \text{ pro } \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n.$$

Analogicky můžeme uvažovat o tenzorech symetrických (a symetrizovaném součinu), a také o symetrických a antisymetrických tenzorech čistě kontravariantních – úvahy jsou to velmi podobné.

PŘÍKLAD: Vektorový podprostor $\bigwedge_n^0(V_n)$ je jednorozměrný, neboť $\binom{n}{n} = 1$. Jediný prvek jeho báze podle předchozí věty je $\omega = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$. Vyčíslíme jej na vektorových argumentech $a_1, \ldots, a_n \in V_n$, $a_i = \alpha_i^j e_j$:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in P(n)} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \det(\alpha_i^j),$$

kde $1 \leq i, j \leq n$. Antisymetrický tenzor $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ přiřazuje n vektorovým argumentům determinant utvořený z jejich složek v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Jestliže je v prostoru V_n zaveden skalární součin a báze $(e_1, \ldots, e_n)$ je vzhledem k němu ortonormální, pak absolutní hodnota tohoto determinantu představuje n-rozměrný objem obecného rovnoběžnostěnu s hranami tvořenými vektory $a_1, \ldots, a_n$. Proto se tenzor $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$ nazývá objemový element prostoru V_n.