Věta 13.9 (Cauchyovy-Riemannovy podmínky): *Předpokládejme, že funkce $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ je definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{C}$. Funkce má derivaci v bodě $z_0 \in D$ právě tehdy, jsou-li funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ v bodě $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ diferencovatelné a platí*

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}. \tag{13.13}$$

Vztahy (13.13) se nazývají Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

V první části důkazu vyjdeme z předpokladu, že funkce $f(z)$ má derivaci v bodě z_0 a označme $\operatorname{Re} f'(z_0) = A$, $\operatorname{Im} f'(z_0) = B$. Platí

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \implies \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0\,. \tag{13.14}$$

Počítejme čitatele posledního zlomku:

$$\begin{aligned}
&f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = \\
&= \Big[u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\Big] - \Big[u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0)\Big] - (A + \mathrm{i}B)\Big[(x - x_0) + \mathrm{i}(y - y_0)\Big] = \\
&= \Big[u(x,y) - u(x_0,y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)\Big] + \\
&+ \mathrm{i}\Big[v(x,y) - v(x_0,y_0) - A(y - y_0) - B(x - x_0)\Big]\,.
\end{aligned}$$

Definujme pomocí reálné a imaginární části získaného výrazu dvě funkce proměnných $(x - x_0)$ a $(y - y_0)$

$$\begin{aligned}
\tau_1(x - x_0, y - y_0) &= \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\,, \\
\tau_2(x - x_0, y - y_0) &= \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - A(y - y_0) - B(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}
\end{aligned}$$

a počítejme limitu těchto funkcí pro $z \to z_0$, tj. $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Ze vztahu (13.14) a s využitím předposlední a poslední vlastnosti ve větě 13.4 postupně plyne

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0\,,$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \Big| \tau_1(x - x_0, y - y_0) + \mathrm{i}\tau_2(x - x_0, y - y_0) \Big| = 0\,,$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \tau_1(x - x_0, y - y_0) = 0, \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \tau_2(x - x_0, y - y_0) = 0\,.$$

Pro funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ tedy nakonec platí

$$\begin{aligned} u(x,y)-u(x_0,y_0) &= A(x-x_0)+(-B)(y-y_0)+ \\ &+\tau_1(x-x_0,y-y_0)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,, \\ v(x,y)-v(x_0,y_0) &= B(x-x_0)+A(y-y_0)+ \\ &+\tau_2(x-x_0,y-y_0)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,, \end{aligned}$$

kde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\tau_1(x-x_0,y-y_0)=0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\tau_2(x-x_0,y-y_0)=0.$$

Tento výsledek neznamená nic menšího, než že funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ jsou diferencovatelné v bodě (x_0,y_0). Plyne z něj i další důležitý závěr,

$$A=\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ -B=\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ B=\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ A=\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

Každé z čísel A a B je předchozími vztahy vyjádřeno dvěma způsoby. Z nich je platnost Cauchyových-Riemannových podmínek již zřejmá.

Při důkazu obrácené implikace předpokládáme, že funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ jsou v bodě (x_0,y_0) diferencovatelné a platí Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Označíme-li

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \\ B &= \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = -\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \end{aligned} \tag{13.15}$$

snadno již dokážeme, že platí

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=A+\mathrm{i}B\,,$$

takže číslo $A+\mathrm{i}B$ má význam derivace funkce $f(z)$ v bodě z_0. (Důkaz sami dokončete.)