Ústav fyzikální elektroniky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Fyzikální praktikum 4

Koherenční délka

podzim 2014

1 Koherenční délka

Z praktického hlediska můžeme přibližně říci, že světlo je koherentní, pokud dobře interferuje. Představme si, že zdroj vyzařuje monochromaticky harmonickou vlnu pouze omezenou dobu. Poté se fáze náhodně změní a situace se opakuje. Označme střední hodnotu doby trvání této sinusoidy τ_0. Její oříznutí se projeví frekvenčním rozšířením příslušné čáry ve spektru přibližně podle vztahu

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_0}.$$

Za střední dobu τ_0 světlo urazí dráhu

$$l_\mathrm{c} = c\tau_0 = \frac{c}{\Delta\nu}.$$

Protože

$$|\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda^2}|\Delta\lambda|,$$

pro koherenční délku dostaneme vztah

$$l_\mathrm{c} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Při interferenci obvykle původní světlo rozdělíme na dva či více svazků a ty vzájemně zpozdíme. Význam koherenční délky spočívá v tom, že pokud vzájemný dráhový rozdíl mezi svazky překročí koherenční délku, interference vymizí, neboť svazky již nadále nejsou koherentní (vzájemný fázový rozdíl je pak náhodný a interferenční člen vymizí). Pro bílé světlo ($\lambda \approx 500\,\mathrm{nm}$, $\Delta\lambda \approx 300\,\mathrm{nm}$) je koherenční délka $l_\mathrm{c} \approx 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$. Proto pozorujeme interferenci např. na mýdlových bublinách, olejových vrstvách, ale ne na skleněné okenní tabuli.

Pro případ monochromatického světla a dvou svazků o intenzitách I_1 a I_2 lze pro výslednou intenzitu psát

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi,$$

kde fázový rozdíl $\Delta\phi = k\Delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S}$ a $\Delta\mathcal{S}$ je (optický) dráhový rozdíl. Pro téměř monochromatické světlo, vyzařované např. atomem na jedné spektrální čáře, zaveďme pro oba svazky stejný intenzitní spektrální profil $f(\nu)$ normovaný $\int f(\nu)\mathrm{d}\nu = 1$. Protože jednotlivé spektrální příspěvky se sčítají nekoherentně, dostaneme pro výslednou intenzitu čáry

$$I = \int [I_1 f(\nu) + I_2 f(\nu) + 2\sqrt{I_1 I_2} f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S})]\mathrm{d}\nu.$$

Tedy

$$I = \int I_1 f(\nu)\mathrm{d}\nu + \int I_2 f(\nu)\mathrm{d}\nu + 2\int \sqrt{I_1 I_2} f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu$$

Po částečné integraci

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \int f(\nu) \cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu.$$

Ve zbylém integrálu rozšíříme argument kosinu o frekvenci ve středu čáry ν_0

$$\int f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}\nu\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu = \int f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S} + \frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu$$

a kosinus rozepíšeme

$$\int f(\nu)[\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\cos(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}) - \sin(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\sin(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S})]\mathrm{d}\nu.$$

Kosiny obsahující pouze ν_0 vytkneme mimo integrál

$$\overbrace{[\int f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu)-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu]}^{\gamma^{(r)}}\cos(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}) - \overbrace{[\int f(\nu)\sin(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu]}^{\xi^{(r)}}\sin(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S})$$

protože pro spektrální čáru je $|\nu-\nu_0| \ll \nu_0$, integrály jsou velmi pomalou funkcí $\Delta\mathcal{S}$

$$\gamma^{(r)} = \int f(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu$$

$$\xi^{(r)} = \int f(\nu)\sin(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu.$$

Při symetrickém profilu je navíc $\xi^{(r)} = 0$, takže

$$I = I_1 + I_2 + 2\gamma^{(r)}\sqrt{I_1 I_2}\ \cos(\frac{2\pi}{c}\nu_0\Delta\mathcal{S}). \tag{1}$$

$\gamma^{(r)}$ má tedy význam stupně koherence. Viditelnost interferenčního jevu je definována jako

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min} + I_{\max}}.$$

Po dosazení extrémních hodnot z (1)

$$\mathcal{V} = \frac{2\gamma^{(r)}\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Pro $I_1 = I_2$ je viditelnost interferenčního jevu rovna stupni koherence

$$\mathcal{V} = \gamma^{(r)}.$$

Význam předešlého závěru spočívá v tom, že analýzou interferenčních obrazců dokážeme stanovit závislost viditelnosti jevu a tedy i stupně koherence na dráhovém rozdílu. Protože ten je Fourierovou transformací spektrálního profilu, lze zpětnou transformací získat původní spektrální profil. Na tom jsou založeny spektrometry s Fourierovou transformací (např. FTIR). Příklady provázanosti spektrálního profilu a viditelnosti interferenčního jevu jsou na obrázku 1.

1.1 Gaussův profil

Spektrální čáry plynů ve výbojkách za nízkého tlaku jsou rozšířeny zejména Dopplerovým jevem, mají tedy Gaussův spektrální profil. Vezměme normovaný Gaussův spektrální profil

$$f_{\mathrm{g}}(v) = f_0 \mathrm{e}^{-\alpha^2(\nu-\nu_0)^2},$$

$$f_0 = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\frac{1}{\Delta\nu_{1/2}}, \quad \alpha = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{1/2}},$$

kde $\Delta\nu_{1/2}$ je plná šířka čáry v polovině výšky (FWHM). Viditelnost $\mathcal{V}$ interferenčního jevu při použití kvazimonochromatického světelného zdroje s gaussovsky rozšířenou spektrální čarou

$$\mathcal{V}(\Delta\mathcal{S}) = \gamma^{(r)} = \int f_{\mathrm{g}}(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu.$$

Po integraci

$$\mathcal{V}_{\mathrm{g}}(\Delta\mathcal{S}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\Delta\mathcal{S}^2}{\alpha^2 c^2}}. \tag{2}$$

Po dosazení za α

$$\mathcal{V}_{\mathrm{g}}(\Delta\mathcal{S}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\Delta\nu_{1/2}^2\Delta\mathcal{S}^2}{4\ln 2\, c^2}}.$$

Viditelnost je tedy opět popsána Gaussovou funkcí. Fitujeme-li viditelnost funkcí

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_c)^2}{2w^2}},$$

pak pro pološířku čáry $\Delta\nu_{1/2}$ dostaneme

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\sqrt{2\ln 2}c}{\pi w}.$$

Dosadíme-li za $\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{\lambda_0^2}\Delta\lambda_{1/2}$, pak pro $\Delta\lambda_{1/2}$ dostaneme

$$\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\pi w}\lambda_0^2,$$

neboli

$$\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_{1/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2\ln 2}}w \doteq 2{,}67\, w.$$

1.2 Dvojice Gaussových profilů

Spektrum některých prvků (např. sodíku) je tvořeno dvojicí čar s malou vzájemnou vzdáleností $\delta\lambda$, tzv. dublety. Ukážeme, že v tomto případě je viditelnost nemonotonní funkcí dráhového rozdílu $\Delta\mathcal{S}$.

Napíšeme-li spektrální profil v symetrickém tvaru

$$f_{\mathrm{gg}}(\nu) = \frac{f_0}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2[\nu-(\nu_0-\delta\nu/2)]^2} + \frac{f_0}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2[\nu-(\nu_0+\delta\nu/2)]^2},$$

potom obdobně jako v minulém případě

$$\mathcal{V}(\Delta\mathcal{S}) = \gamma^{(r)} = \int f_{\mathrm{gg}}(\nu)\cos(\frac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\nu.$$

Kosinus převedeme do komplexních exponenciel a jeho argument rozšíříme o $\pm\frac{2\pi}{c}\frac{\delta\nu}{2}\Delta\mathcal{S}$. Po integraci, při níž využijeme výsledek výpočtu pro samotný Gaussův profil dostaneme

$$\mathcal{V}_{\mathrm{gg}}(\Delta\mathcal{S}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\Delta\mathcal{S}^2}{\alpha^2c^2}} \left|\cos\left(\frac{2\pi}{c}\frac{\delta\nu}{2}\Delta\mathcal{S}\right)\right|.$$

První činitel, shodný s výsledkem pro samotný Gaussův profil (2), je nyní silně modulován periodickou funkcí. Pro minima viditelnosti platí

$$\cos(\frac{2\pi}{c}\frac{\delta\nu}{2}\Delta\mathcal{S}) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{2\pi}{c}\frac{\delta\nu}{2}\Delta\mathcal{S} = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad m \in Z.$$

Mezi dvěma minimy viditelnosti je vzdálenost π. Označíme-li dva nejbližší dráhové rozdíly s minimem viditelnosti $\Delta\mathcal{S}_1$ a $\Delta\mathcal{S}_2$, pak pro frekvenční vzdálenost čar dostaneme

$$\delta\nu = \frac{c}{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}.$$

Odpovídající vzdálenost čar ve spektru je pro kvazimonochromatické světlo

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c}\delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}.$$

Výsledek můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\lambda_0}{\delta\lambda} = \frac{\Delta\mathcal{S}_2 - \Delta\mathcal{S}_1}{\lambda_0}.$$

Jak ho můžeme interpretovat z hlediska experimentu?

Spektrální profil může být ve skutečnosti často nesymetrický. Např. komponenty dubletu sodíku mají v opticky tenkém[1] plazmatu výbojky různou intenzitu.

2 Vybavení

V praktiku je k dispozici školní verze Michelsonova interferometru, Newtonova skla a další uspořádání pro pozorování interferenčních jevů.

Úkoly

1. Připravte optickou lavici pro pozorování interference na Michelsonově interferometru. Vyskoušejte různá uspořádání (proužky stejné tloušťky, stejného sklonu). Použijte laser.
2. Okalibrujte převod polohy mezi mikrometrickým šroubem a polohou zrcadla pomocí světelného zdroje se známou vlnovou délkou. Kalibraci otestujte na jiném známém zdroji.
3. Proměřte viditelnost interference s vysocesvítivou LED diodou. Pro záznam interferenčních obrazců a vyhodnocení viditelnosti použijte CCD kameru, videopřevodník a dostupný software. Stanovte viditelnost jako funkci dráhového rozdílu, kterého dosáhnete změnou polohy zrcadla nebo úhlu v samotném interferenčním obrazci. Stanovte koherenční délku, odhadněte spektrální profil zdroje a jeho šířku.
4. Proměřte viditelnost interference s vysokotlakou sodíkovou výbojkou. Opět stanovte koherenční délku, spektrální profil zdroje a jeho šířku.
5. Své odhady porovnejte s výsledky měření spekter zdrojů mřížkovým spektrometrem.

References

[1] Malý Petr 2008 Optika. Praha:Karolinum.

[2] Born M and Wolf E 1970 Principles of Optics. Pergamon Press.

[1] se zanedbatelnou absorpcí

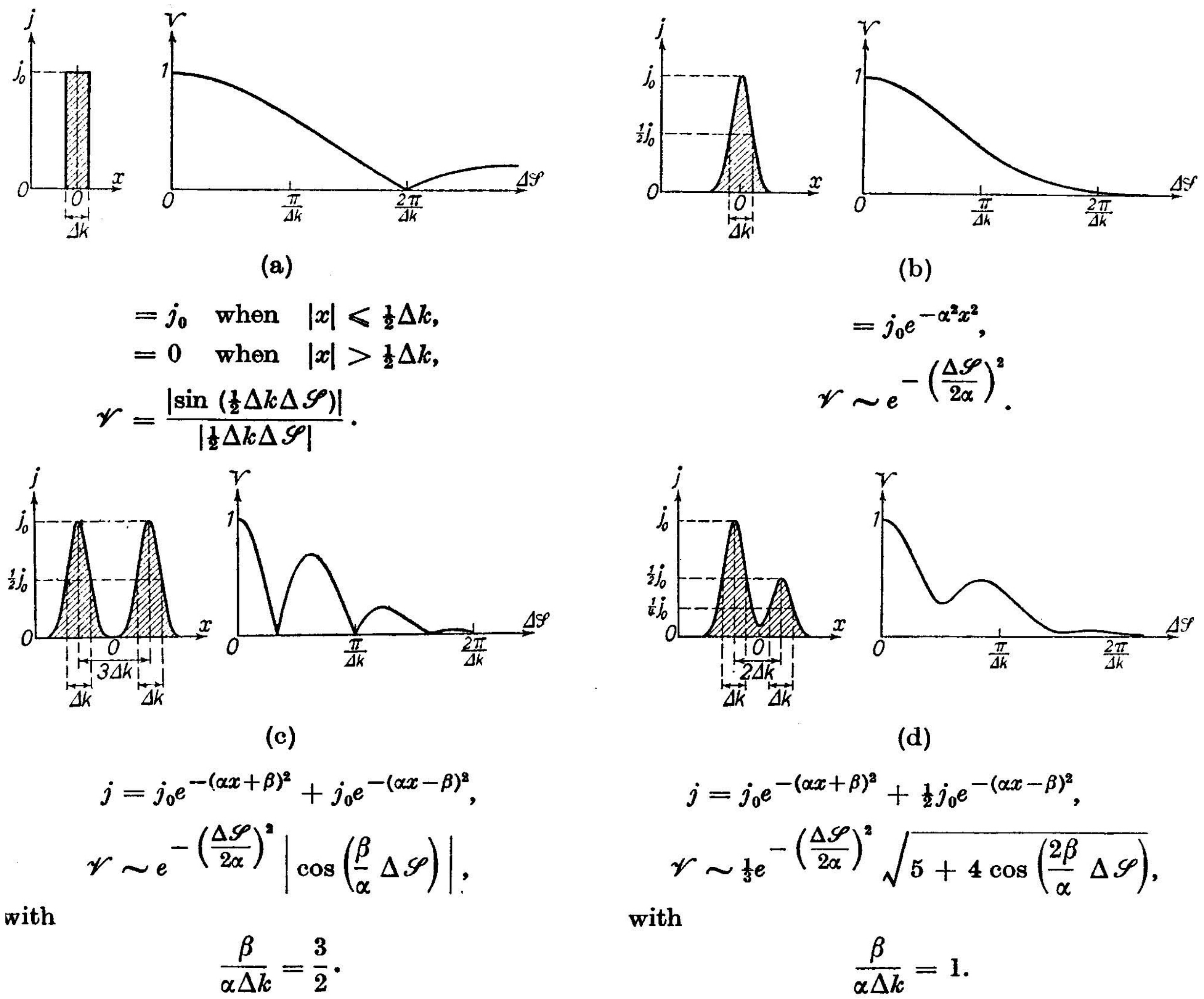

Figure 1: Viditelnost interferenčního jevu pro různé spektrální profily, odvozená za předpokladu kvazimonochromatičnosti světla. V obrázcích b), c), d) je $\Delta k = 2\sqrt{\ln 2}/\alpha = 1{,}66/\alpha$.