

## Fyzikální praktikum 4

### Magnetizační křivka

#### Cíle úlohy

Možnosti měření:

- Kalibrace magnetometru známým vzorkem (niklový plech) – povinná část.
- Změny magnetizace železného vzorku po žihání pro různé rychlosti chlazení.
- Porovnání hysterezní smyčky s měřením permeability pomocí stínění magnetického pole.
- Paramagnetická a diamagnetická susceptibilita, anizotropie diamagnetické susceptibilita v grafitu.
- Magnetokrystalová anizotropie – rozdíly magnetizace podle různých směrů v krystalu.

#### Teorie

Vztah mezi magnetickou intenzitou  $\mathbf{H}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  je dán vztahem

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1)$$

kde  $\mathbf{M}$  je vektor magnetizace, který udává objemovou hustotu magnetického momentu. Magnetický moment je potom objem vzorku násobený magnetizací

$$\mathbf{m} = V \mathbf{M}. \quad (2)$$

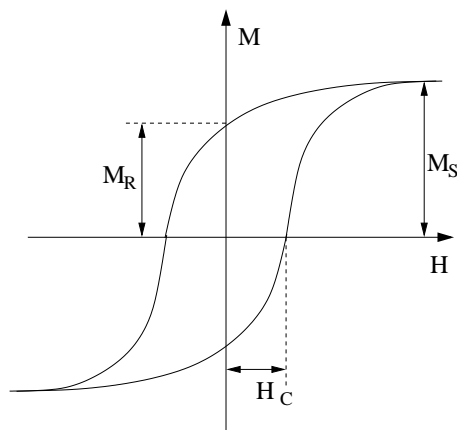
Při známé hustotě vzorku a jeho hmotnosti můžeme potom snadno přepočítat celkový magnetický moment příslušející na jeden atom. Magnetický moment příslušející jednomu atomu je vhodné udávat v jednotkách Bohrova magnetonu  $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ .

Paramagnetické a diamagnetické materiály za běžných teplot vykazují lineární závislost magnetizace na vnějším poli

$$M = \chi H, \quad (3)$$

kde  $\chi$  je magnetická susceptibilita, kladná pro paramagnetika a záporná pro diamagnetika. Obvykle je susceptibilita velmi malá v řádu  $10^{-4}$  až  $10^{-8}$ . Relativní permeabilita je rovna  $\mu_r = 1 + \chi$ . Feromagnetické materiály vykazují nelineární hysterezní závislost podle obrázku 1. Hlavní parametry hysterezní smyčky jsou koercitivní pole  $H_c$  kdy je magnetizace nulová, remanentní magnetizace  $M_R$  a saturační magnetizace. Dále pak je možné zavést susceptibilitu závislou na vnějším poli jako derivaci magnetizace

$$\chi = \frac{dM}{dH}. \quad (4)$$



Obrázek 1: Hysterezní závislost.

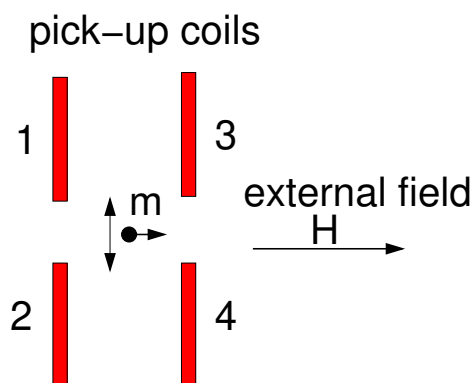
Často se udává hodnota v okolí počátku, tedy pro nulové vnější pole. Tato hodnota je důležitá například pro účinnost transformátorů, kdy se snažíme pracovat jen v oblasti malých polí daleko saturace.

Změna magnetizace feromagnetu se děje pohybem doménových stěn v materiálu a změnou objemu jednotlivých domén. Defekty v krystalu mohou pohyb doménových stěn zpomalit a vedou tak ke změně tvaru hysterezní křivky. Můžeme například studovat vliv rychlosti chlazení materiálu na tvar hysterezní smyčky. Při rychlém chlazení (kalení) zůstane v materiálu obvykle více defektů než při pomalém chlazení, kdy je proces blíže termodynamické rovnováze.

### Vibrační magnetometr

Vibrující magnetizovaný vzorek v blízkosti cívky mění tok magnetického pole, který indukuje v cínce elektromotorické napětí podle Maxwellových rovnic

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$



Obrázek 2: Schematický náčrt vzájemné polohy vzorku jako magnetického dipólu a detekční cívky.

Jednoduchý kvantitativní popis našeho experimentu je možný v přiblížení, kdy vzorek nahradíme magnetickým dipólem. Dále budeme pohyb vzorku v těsné blízkosti cívky aproximovat harmonickým kmitavým pohybem

$$z(t) = z_0 + A_z \cos(\omega t) \quad (6)$$

s amplitudou  $A_z$  se střední polohou  $z_0$ . Situace je znázorněná na obrázku 2. Magnetické pole magnetického dipólu je dáno vztahem [1, 2]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{m} \right], \quad (7)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor vztažený na magnetický dipól,  $\mathbf{m}$  magnetický dipólový moment a  $\mu_0$  je permeabilita vakua. Reálné uspořádání používá čtyři identické cívky, označené 1 až 4. Uvažme nejprve magnetický tok cívky 1

$$\Phi_1(z(t)) = \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}, \quad (8)$$

kde integrace probíhá přes plochu cívky. Tento magnetický tok závisí na rozměrech a počtu závitů cívky, poloze vzorku a je přímo úměrný magnetickému momentu vzorku  $m$ . Kvantitativní výpočet magnetického toku je poměrně náročný, pro malé výchylky vzorku můžeme závislost na výchylce vzorku aproximovat Taylorovým rozvojem do prvního řádu.

$$\Phi_1(z(t)) \approx m [C_0 + C_1 z(t)]. \quad (9)$$

Při vychýlení vzorku dolů poklesne magnetický tok indukovaný vzorkem cívkou 3 a vzroste tok cívkou 4, protože vzorek se přiblíží k cívice 4 a vzdálí od cívky 3. S ohledem na uspořádání je magnetický tok v cívkách 1 a 2 opačný oproti cívkám 3 a 4. Magnetický tok cívkou 1 tedy vzroste a cívkou 2 klesne. Výsledné uspořádání zapojuje cívky 2 a 3 s obrácenou polaritou oproti cívkám 1 a 4, čímž se změny magnetického toku v jednotlivých cívkách sčítají. Pro magnetický tok sestavou cívek platí

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t) - \Phi_3(t) + \Phi_4(t) = 4mC_1A_z \cos(\omega t). \quad (10)$$

K určení napětí indukovaného v závitě při pohybu magnetu uijeme Faradayův zákon (5). Provedeme-li za tohoto předpokladu časovou derivaci magnetického indukčního toku (10), získáme pro napětí indukované ve sběrných cívkách

$$U(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = 4mC_1A_z\omega \sin(\omega t) = mC \sin(\omega t), \quad (11)$$

kde  $C$  je kalibrační konstanta magnetometru, kterou určíme měřením známého vzorku.

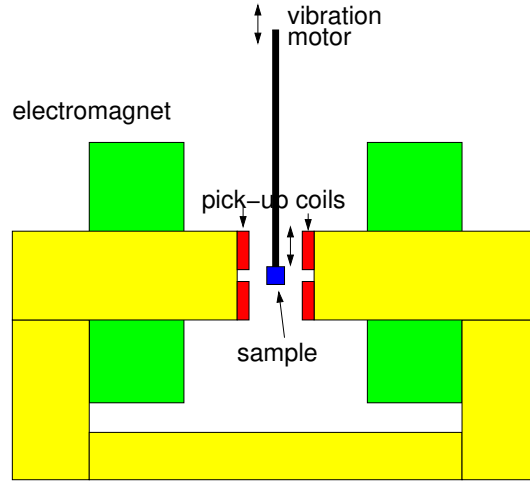
Výhodou tohoto uspořádání je také necitlivost vůči změnám vnějšího magnetického pole. Elektromotorické napětí indukované změnou vnějšího pole v každé cívice stejné, ale protože jsou dvě a dvě zapojeny s opačnou polaritou výsledné indukované napětí téměř nulové, až na odchylky dané nehomogenitou vnějšího pole a rozdíly mezi cívkami.

Schéma použitého magnetometru je na obrázku 3.

Změnou vnějšího magnetického pole (změnou proudu tekoucího elektromagnetem) můžeme potom naměřit magnetizační křivku vzorku, tedy závislost magnetického momentu vzorku na magnetickém poli.

### Lock-in zesilovač

K potlačení šumu obvodu používáme takzvaný lock-in zesilovač. Toto zařízení zesiluje střídavou složku měřeného signálu, které má stejnou frekvenci jako referenční signál a velmi efektivně potlačuje elektromagnetický šum na jiných frekvencích než má měřená složka. Takto můžeme měřit střídavá napětí ve zlomcích mikrovoltu. Zdrojem referenčního signálu je malý permanentní magnet umístěný na vibrující tyči vně magnetu a referenční cívka v jeho blízkosti. Referenční signál má tedy nutně stejnou frekvenci i fázi jako měřený signál. Je vhodné používat experimentální frekvenci odlišnou od možných zdrojů rušení; zejména je dobré se vyhýbat násobkům síťové frekvence 50 Hz a podobně.



Obrázek 3: Schématické uspořádání magnetometru. Žlutě železné jádro elektromagnetu, zeleně elektrické vinutí, červeně sběrné cívký, modře vzorek, černě vibrující tyč.

Lock-in zesilovač měří středovanou hodnotu

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U_{\text{in}}(\tau) \sin(\omega_{\text{ref}}\tau + \phi) d\tau, \quad (12)$$

kde  $U_{\text{in}}$  je vstupní signál,  $\omega_{\text{ref}}$  frekvence referenčního signálu,  $\phi$  laditelný fázový posun a  $T$  volitelná časová konstanta lock-in zesilovače, vždy mnohem větší než perioda měřeného signálu. Pro harmonický vstupní signál se stejnou frekvencí jako je referenční a nulovým fázovým posunem je výstupní napětí rovno efektivní hodnotě harmonické složky napětí (amplitudě dělené  $\sqrt{2}$ ):

$$U_{\text{lock-in}} = Cm, \quad (13)$$

kde první část vztahu je kalibrační konstanta magnetometru.

### Demagnetizační pole

Pro správnou interpretaci naměřených dat je ještě třeba uvážit demagnetizační pole ve vzorku. Magnetické pole uvnitř vzorku  $H_i$ ,  $B_i$  je odlišné od magnetického pole vně vzorku  $H_e$ ,  $B_e$ . Zřejmě platí

$$B_e = \mu_0 H_e, \quad B_i = \mu_0 (H_i + M). \quad (14)$$

Dále pak platí spojitosti tečných složek intenzity a normálových složek na rozhraní. Řešením jsou vztahy pro pole uvnitř vzorku:

$$H_i = H_e - NM, \quad B_i = \mu_0 (H_i + M) = B_e + \mu_0 (1 - N)M, \quad (15)$$

kde  $N$  je demagnetizační faktor závisející na tvaru a orientaci vzorku vzhledem ke směru magnetického pole. Některé hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. V našem případě se omezíme na vzorky z tenkého plechu s orientací magnetického pole v rovině destičky. Demagnetizační faktor je pak zanedbatelný a korekci dle vztahu (15) nemusíme uvažovat.

### Stínění magnetického pole ve válcové dutině

#### Teorie

Magnetická permeabilita materiálů  $\mu$  vyjadřuje vztah mezi magnetickou indukci a magnetickou intenzitou  $B = \mu_r \mu_0 H$  a lze studovat prostřednictvím stínění magnetického pole. Pro neferomagnetické materiály nabývá relativní permeabilita  $\mu_r$  hodnot velmi blízkých jedné takže jejich

Tabulka 1: Tabulka demagnetizačního faktoru pro některé speciální případy.

tvar	orientace pole	$N$
koule	libovolná	1/3
tenká destička	kolmo k ploše	1
tenká destička	v rovině plochy	0
dlouhý tenký válec	podél osy válce	0
dlouhý tenký válec	kolmo na osu	1/2

odezva v magnetickém poli se příliš neliší od vakua. Permeabilita feromagnetik souvisí s hysterezní křivkou; permeabilita je úměrná směrnicí tečny k hysterezní křivce. Pro feromagnetika může nabývat velmi vysokých hodnot, avšak silně závisí na velikosti magnetického pole. Magneticky měkká feromagnetika (malá koerzivní pole) mají vysokou permeabilitu, zatímco magneticky tvrdé materiály mají permeabilitu nízkou. Magneticky tvrdé materiály mají permeabilitu v řádu desítek až stovek, zatímco magneticky měkké speciální materiály s vysokou permeabilitou mohou dosahovat hodnot až  $10^6$ . Pro malá magnetická pole a magneticky měkké materiály můžeme předpokládat lineární závislost  $B = \mu_r \mu_0 H$  s konstantní permeabilitou.

### Stínění magnetického pole ve válcové dutině

Umístíme-li dutý válec o poloměru  $R$  do homogenního magnetického pole velikosti  $B_o$  kolmému na osu válce je pole uvnitř válce rovněž homogenní o nižší velikosti  $B_i$ . Kompletní výpočet je poněkud zdoluhavý [3, 2], zde se omezíme na uvedení předpokladů:

- Magnetická intenzita a indukce splňují Maxwellovy rovnice bez přítomnosti vnějších proudů

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (16)$$

- Magnetická indukce a intenzita jsou svázány lineárním materiálovým vztahem

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}. \quad (17)$$

- Tečná složka magnetické intenzity je spojitá na rozhraní dvou prostředí.
- Normálová složka magnetické indukce je spojitá na rozhraní dvou prostředí.
- Magnetická indukce ve velké vzdálenosti  $r$  od osy válce je

$$\mathbf{B}(r \gg R) = \mathbf{B}_o. \quad (18)$$

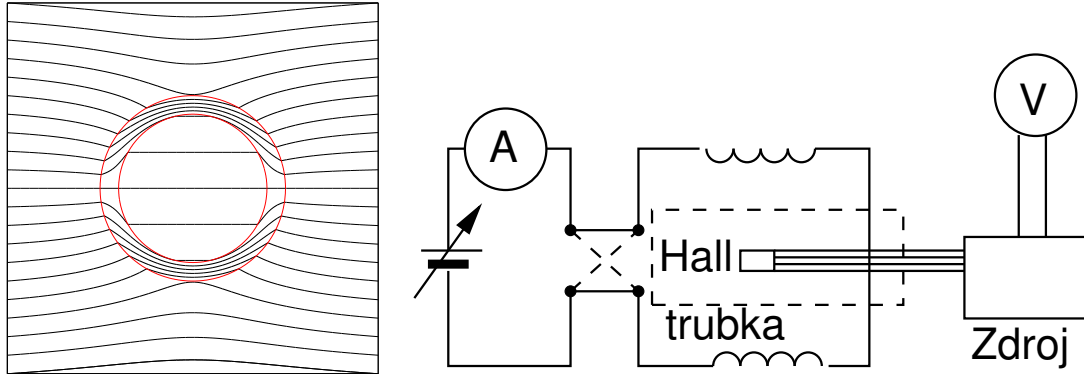
Výsledný průběh magnetického pole je znázorněn v obrázku 4. Poměr indukce vně  $B_o$  a uvnitř trubice  $B_i$  vyjadřuje stínící koeficient  $S$ , pro nějž platí vztah [3, 2]

$$S = \frac{B_o}{B_i} = \frac{(\mu_r + 1)^2 - \frac{b^2}{a^2}(\mu_r - 1)^2}{4\mu_r}, \quad (19)$$

kde  $a$  je vnější poloměr a  $b$  je vnitřní poloměr dutého válce. Pro vysoké hodnoty magnetické permeability  $\mu_r \gg 1$  a malou tloušťku stěny trubice  $d$  vzhledem k jeho poloměru  $d \ll R$  můžeme použít aproximativní vztah

$$S = \frac{B_o}{B_i} \approx 1 + \frac{\mu_r d}{2R}. \quad (20)$$

Výše uvedené vztahy platí pro malá magnetická pole. Obzvláště uvnitř materiálů s vysokou permeabilitou může maximální hodnota magnetické indukce (přibližně rovna  $B_{\max} \approx \mu_r B_o$ ) snadno překročit saturační magnetizaci materiálu (pro železo asi 2,2 T) a celkový stínící koeficient pak vyjde efektivně nižší. Tato vlastnost se projeví jako závislost stínícího koeficientu na vnějším poli, který s větším vnějším polem klesá. Hodnotu permeability pro nízká pole získáme z hodnot stínícího koeficientu pro nízká pole, kdy u stínící koeficient nezávisí na intenzitě pole.



Obrázek 4: Vlevo: Průběh siločar magnetického pole v okolí a uvnitř dutého válce z feromagnetického materiálu s permeabilitou  $\mu_r = 10$ . V blízkém okolí válce je homogenita magnetického pole poněkud narušena. Vpravo: Schéma zapojení Helmholtzových cívek. Vyznačena je poloha stínící trubky a Hallovy sondy pro měření magnetického pole.

### Homogenní magnetické pole v Helmholtzových cívkách

Nejjednodušší možnost vytvoření homogenního pole představují tzv. Helmholtzovy cívký. Jsou to dvě cívký o stejném počtu závitů a poloměru  $R$  umístěné na společné ose ve vzdálenosti jejich poloměru  $R$  od sebe. Magnetické pole jedné cívký můžeme vypočítat pomocí Biotova–Savartova zákona

$$\mathbf{H} = \int \frac{I}{4\pi r^3} \mathbf{r} \times d\mathbf{l}, \quad (21)$$

kde  $I$  je proud protékající vodičem,  $r$  vzdálenost délkového elementu  $d\mathbf{l}$  od místa měření pole. Magnetické pole na ose úzké cívký poloměru  $R$  o  $N$  závitěch ve vzdálenosti  $z$  od středu cívký se spočte snadno jako

$$H(z) = \frac{NIR^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{NIR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (22)$$

Velikost magnetického ve středu dutiny Helmholtzových cívek získáme jako součet příspěvku obou cívek (vzdálenost středu dutiny od středu každé cívký je  $z = R/2$ )

$$H = 2 \frac{NIR^2}{2(R^2 + (R/2)^2)^{3/2}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{NI}{R}. \quad (23)$$

### Měření magnetického pole Hallova sondou

K měření velikosti magnetického pole použijeme Hallova jevu. Při pohybu nositelů náboje ve vzorku v magnetickém poli (elektrony či díry v polovodiči) na ně působí Lorentzova síla kolmo ke směru jejich pohybu

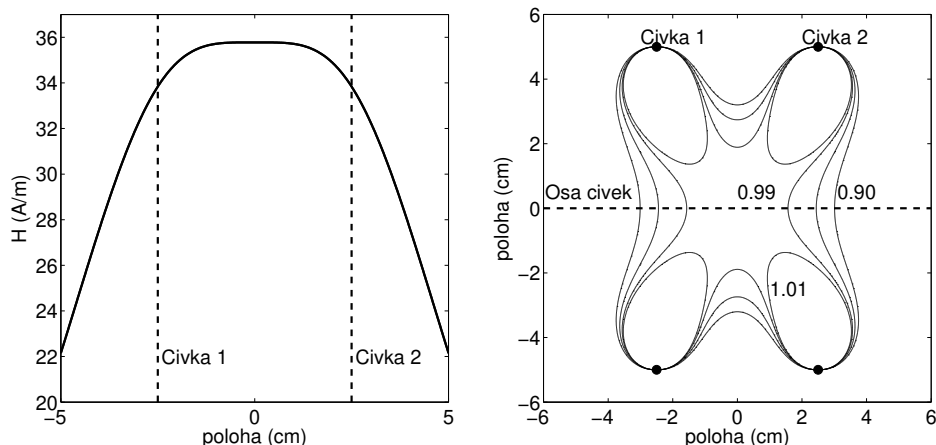
$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}, \quad (24)$$

kde  $q$  je jejich náboj a  $\mathbf{v}_d$  driftová rychlost jejich pohybu. V ustáleném stavu vzniká elektrické pole  $\mathbf{E}_H$ , které eliminuje vliv Lorentzovy síly

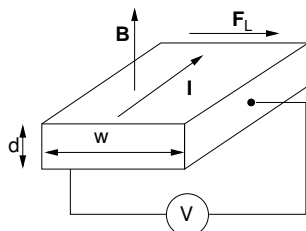
$$\mathbf{F}_H = q\mathbf{E}_H = -\mathbf{F}_L. \quad (25)$$

Dosadíme za driftovou rychlost  $v_d = \frac{j}{nq} = \frac{1}{nq} \frac{I}{wd}$ , kde  $j$  je proudová hustota,  $n$  koncentrace nositelů náboje,  $d$  tloušťka a  $w$  šířka vzorku. Pak porovnáním těchto vztahů dostaneme vztah pro Hallovo napětí

$$U_H = E_H w = \frac{R_H}{d} I B, \quad (26)$$



Obrázek 5: Vlevo: Průběh intenzity magnetického pole na ose Helmholtzových cívek s poloměrem  $R = 5$  cm. Vpravo: Rozložení v rovině osy Helmholtzových cívek. Zobrazeny jsou vrstevnice pro hodnoty 0.90, 0.95, 0.99 a 1.01 hodnoty ve středu dutiny. Ve středové oblasti hvězdovitěho tvaru je odchylka velikosti magnetického pole menší než 1 %.



Obrázek 6: Princip Hallova jevu.

kde  $R_H = \frac{1}{nq}$  je Hallova konstanta a  $d$  je tloušťka vzorku. Znaménko Hallovy konstanty odpovídá znaménku nositelů náboje, umožňuje nám tedy určit typ vodivosti a měřit koncentraci nositelů náboje. Naopak Hallova sonda známých parametrů může sloužit k měření magnetické indukce. V našem případě použijeme komerční Hallovu sondu s integrovaným proudovým zdrojem a zesilovací elektronikou neznámých parametrů.

### Postup měření

Provedeme měření magnetického pole bez vložené trubky, změříme Hallovo napětí  $U_o$  úměrné vnějšímu magnetickému poli  $B_o$ . S vloženou trubicí změříme napětí  $U_i$  úměrné magnetické indukci uvnitř trubice  $B_i$ . Stínící koeficient  $S$  je roven podílu napětí

$$S = \frac{U_o}{U_i}. \quad (27)$$

Pro eliminaci případného špatného nastavení nuly (nulové napětí nemusí odpovídat stavu bez magnetického pole) provádíme měření pro obě komutace proudu (+ a -) a výsledné napětí pak průměrujeme s ohledem na znaménko

$$U = \frac{1}{2} (U_+ - U_-). \quad (28)$$

### Úkoly

1. Zapojte Helmholtzovy cívky do obvodu.

2. Změřte stínící koeficient  $S$  a rozměry sady poskytnutých válcových trubek. Vnější pole  $B_o$  měřte ve středu dutiny bez zasunuté stínící trubky, hodnotu  $B_i$  po umístění stínící trubky. Měření proveďte pro několik hodnot proudu procházející cívkami (doporučené hodnoty 0,5 A, 1,5 A a 2,5 A) a zjistěte zda je stínící koeficient nezávislý na intenzitě vnějšího pole. Měřte pro oba směry komutace proudu.
3. Vypočtěte jejich permeabilitu podle vztahu (20), případně (19).

### Doporučený postup a úkoly pro měření

Student má tři týdny na provedení měření. Doporučený postup:

- První týden – seznámení s magnetometrem; kalibrace magnetometru pomocí referenčního vzorku (niklový plech).
- Druhý a třetí týden – změření magnetizační křivky pro několik různých vzorků podle vybraného cíle.

Výstupem praktika budou prezentovány vyučujícímu naměřené závislosti ve formě grafů a naměřené hodnoty, včetně odhadu nejistot, pokud je to možné a vhodné.

### Literatura:

- [1] D. Griffith, *Introduction to electrodynamics*, Prentice-Hall (1999).
- [2] J.D. Jackson: *Classical electrodynamics*, Willey (1999).
- [3] J. Perry, Proc. Phys. Soc. London **13**, 227 (1894).