

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Úvod do studia proměnných hvězd

Zdeněk Mikulášek, Miloslav Zejda

Brno 2013

Vydáno v rámci projektu Inovace výuky aplikované fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity (CZ.1.07/2.2.00/15.0181) v operačním programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost (VK) – 2.2 Vysokoškolské vzdělávání



Obsah

Historie a metody výzkumu

1	Úvod	11
1.1	Definice	11
1.2	Význam studia proměnných hvězd	11
2	Historie a současnost výzkumu proměnných hvězd	12
2.1	Prehistorie sledování proměnných hvězd	12
2.2	První vědecká pozorování	12
2.3	Začátky systematického studia	13
2.4	Výzkum proměnných hvězd v 19. a 20. století	15
2.4.1	Vizuální fotometrie	16
2.4.2	Nevizuální fotometrie	18
2.4.2.1	Fotografická fotometrie	18
2.4.2.2	Fotoelektrická fotometrie	18
2.4.2.3	„Křemíková“ fotometrie	19
2.4.3	Spektroskopie	20
2.4.4	Družicová pozorování	21
2.5	Typy proměnných hvězd	22
2.6	Brno a proměnné hvězdy	25
3	Pozorování proměnných hvězd	27
3.1	Astronomická fotometrie	27
3.1.1	Základní pojmy a vztahy	27
3.1.2	Rozložení energie ve spektru hvězdy	31
3.1.2.1	Záření AČT. Efektivní teplota. Spektrofotometrie	31
3.1.2.2	Barevné indexy	33
3.1.3	Fotometrické systémy	35
3.1.3.1	Historické fotometrické systémy	37
3.1.3.2	Johnsonův mezinárodní systém a jeho rozšíření	38
3.1.3.3	Strömgenův systém $uvby(\beta)$	39
3.1.3.4	Další současné fotometrické systémy	42
3.1.3.5	Standardizace fotometrických systémů	43
3.1.4	Extinkce a její eliminace	44
3.1.4.1	Optická tloušťka a extinkce	44
3.1.4.2	Mezihvězdná extinkce	45
3.1.4.3	Atmosférická extinkce	47
3.2	Astronomická polarimetrie	49
3.2.1	Stokesův vektor	50
3.2.2	Polarizace záření kosmických objektů	52
3.2.3	Polarimetrická pozorování	52
3.3	Astronomická spektroskopie	53
3.3.1	Charakteristiky spekter	54

3.3.2	Základní pojmy	55
3.3.3	Vzhled spektra	59
3.3.4	Co lze vyčíst ze spektrogramů	62
3.4	Zdroje pozorovacích dat o proměnných hvězdách	63
3.4.1	Vlastní, převzatá a archivní pozorování	63
3.4.1.1	Vizuální odhady	63
3.4.1.2	Fotografická pozorování	64
3.4.1.3	Fotoelektrická pozorování	64
3.4.1.4	CCD pozorování	65
3.4.2	Soudobé přehlídkové projekty	66
3.4.2.1	Pozemské projekty	66
3.4.2.2	Kosmické přehlídky	69
3.4.3	Virtuální observatoř	71

Zpracování pozorování proměnných hvězd

4	Regresní analýza	74
4.1	Úvodem	74
4.1.1	Regresní model	74
4.1.2	Zdůvodnění metody nejmenších čtverců	76
4.2	Metoda nejmenších čtverců	77
4.2.1	Hledání řešení metodou nejmenších čtverců	77
4.2.2	Kritéria úspěšnosti modelování	80
4.2.2.1	Statistika modifikovaných odchylek $\tilde{\epsilon}_i$	80
4.2.2.2	Sumy χ^2 , χ_μ^2 a rozptyl proložení s^2	81
4.2.2.3	Testování regresních modelů pomocí O-C diagramů	81
4.2.2.4	Informační kritéria AIC, AICc a BIC	82
4.2.3	Odhad nejistot jednotlivých měření	83
4.3	Lineární regrese	84
4.3.1	Lineární regrese užitím maticového počtu	85
4.3.2	Nejistoty parametrů modelu a předpovědí	87
4.3.3	Základní regresní modely - aplikace lineární regrese	88
4.3.3.1	Průměrná hodnota	89
4.3.3.2	Přímka jdoucí počátkem	89
4.3.3.3	Proložení obecnou přímkou	90
4.3.3.4	Proložení časových řad polynomem	91
4.3.3.5	Proložení časových řad harmonickým polynomem	91
4.3.4	Zobecnění lineární regrese I - vektorová závislá proměnná	92
4.3.5	Zobecnění lineární regrese II - více nezávisle proměnných	92
4.4	Nelineární regrese	95
4.4.1	Linearizace nelineárních regresních modelů	95
4.4.1.1	Odhad nejistoty okamžiků extrémů	96
4.5	Robustní regrese	96
4.5.1	Vlastní metoda robustní regrese	98

5	Analýza časových řad	100
5.1	Základní pojmy a úvahy	100
5.1.1	Světelná křivka	100
5.1.2	Čas pozorování	101
5.2	Periodicita proměnnosti	103
5.2.1	Příčiny změn periody periodicky proměnných hvězd	103
5.2.1.1	Pulzující hvězdy	103
5.2.1.2	Rotující hvězdy	104
5.2.1.3	Interagující dvojhvězdy	105
5.2.1.4	LiTE a apsidální pohyb	106
5.2.2	Epocha, fáze, fázová funkce a okamžitá perioda	107
5.2.3	Základní dvouparametrický model – lineární efemerida	108
5.2.4	Modely s pozvolnými změnami periody proměnnosti	108
5.2.4.1	Příklady	109
5.2.4.2	Diskuse. Prostý tříparametrický model periody	111
5.2.5	Modely s marginálními změnami periody	112
5.2.5.1	Kubický model změn periody	112
5.2.5.2	LiTE	113
5.3	Periodová analýza okamžiků extrémů	113
5.3.1	Řešení metodou nejmenších čtverců	116
5.3.1.1	Nejistoty jednotlivých okamžiků extrému	117
5.3.1.2	Určování parametrů lineárních regresních modelů	118
5.3.2	Standardní určování okamžiků extrémů	118
5.3.3	Prosté modely světelných křivek	119
5.3.4	Precizní určování okamžiků extrémů světelných křivek	120
5.4	Přímá periodová analýza	122
5.4.1	Popis metody	123
5.4.2	Virtuální O-C diagram	124
5.5	Fenomenologické modely fázových křivek	125
5.5.1	Rotující hvězdy s fotometrickými skvrnami	125
5.5.2	Zákrytové dvojhvězdy	127
5.5.3	Spektroskopická proměnnost	130
5.6	Simultánní modelování nestejnorodých zdrojů fázové informace	130
5.7	Hledání period. Periodogramy	131
5.7.1	Metody minimalizace fázového rozptylu	133
5.7.2	Periodogramy jako aplikace metody nejmenších čtverců	133
5.7.2.1	Lineární regrese a její nástroje	133
5.7.2.2	Varianta I - suma čtverců odchylek	134
5.7.2.3	Varianta II - Lombova-Scargleova metoda	135
5.7.2.4	Varianta III - signál/šum	136
5.7.3	Složitější situace	136
5.7.3.1	Dlouhodobý trend	137
5.7.3.2	Multiperiodické změny	137
5.7.4	Zdánlivé periody (aliasy)	137
5.7.4.1	Falešné periody	138

Fyzika proměnných hvězd

6	Proměnnost periodicky proměnných hvězd	142
6.1	Rotující proměnné hvězdy	142
6.1.1	Asférické hvězdy	142
6.1.2	Skvrny na hvězdách	143
6.1.2.1	Slunce a hvězdy slunečního typu	144
6.1.2.2	Typ FK Comae Berenices	145
6.1.2.3	Typ RS Canum Venaticorum – skvrnití psi	145
6.1.2.4	Typ BY Draconis	149
6.1.2.5	Chemicky pekuliární (CP) hvězdy	149
6.1.3	Magnetické pole	152
6.1.3.1	Pulsary	152
6.2	Dvojhvězdy	155
6.2.1	Zákrytové proměnné hvězdy	155
6.2.2	Světelné křivky zákrytových dvojhvězd	157
6.2.3	Křivky radiálních rychlostí	162
6.2.4	Těsné interagující dvojhvězdy	164
6.2.5	Význam výzkumu zákrytových dvojhvězd	166
6.2.6	Nezákrytové dvojhvězdy	167
6.3	Pulzující proměnné hvězdy	168
6.3.1	Radiální pulzace	168
6.3.2	Mechanismus pulzací	172
6.3.3	Pás nestability a jeho interpretace	173
6.3.4	Závislost perioda–zářivý výkon a její vysvětlení	176
6.3.5	Pulzace radiální i neradiální. Módy pulzací	178
6.3.6	Helioseismologie a astroseismologie	181
6.4	Typy pulzujících proměnných hvězd	183
6.4.1	Klasické cefeidy	183
6.4.2	Hvězdy typu W Virginis	185
6.4.3	RR Lyrae	186
6.4.4	Hvězdy typu δ Scuti	187
6.4.5	Hvězdy typu γ Doradus	188
6.4.6	Rychle oscilující pekuliární hvězdy	189
6.4.7	Hvězdy typu β Cephei	190
6.4.8	SPB	190
6.4.9	Pulzující bílí trpaslíci	191
6.4.10	Dlouhoperiodické pulzující proměnné hvězdy	192
6.4.10.1	Polopravidelné proměnné hvězdy	194
6.4.10.2	Hvězdy typu RV Tauri	195
6.4.10.3	Hvězdy typu R Coronae Borealis	195
7	Fyzika aperiodických proměnných hvězd	196
7.1	Proměnnost hvězdy v důsledku změn jejího okolí	196
7.1.1	Hvězdy typu T Tauri	196
7.1.2	Hvězdy typu FU Orionis	199

7.1.3	Herbigovy-Harovy objekty	200
7.1.4	Látka ve dvojhvězdách	200
7.2	Aktivita hvězd a její projevy	201
7.2.1	Příčiny hvězdné aktivity	203
7.2.2	Vzplanutí nov	204
7.3	Komplexní přestavby, zhroucení a výbuchy	205
7.3.1	Supernovy typu II, Ib a Ic	206
7.3.2	Supernovy typu Ia	207
	Literatura	209

Historie a metody výzkumu

1 Úvod

1.1 Definice

Proměnné hvězdy jsou takové objekty, jejichž jasnost se v čase mění. Proměnné hvězdy tvoří mimořádně pestrou skupinu osamocených hvězd, dvojhvězd a vícenásobných hvězdných soustav, velice rozmanité jsou i projevy pozorovaných změn a jejich příčiny. Proměnnost hvězd je poměrně častý jev, odhaduje se, že asi 10 % hvězd jsou hvězdy zjevně proměnné. Čím více se zjemňují diagnostické metody, tím vyšší je zastoupení odhalených proměnných hvězd v náhodném vzorku hvězd.

Rozpětí pozorovaných světelných změn je široké: od 1 milimagnitudy ($0,001 \text{ mag} \cong 1$ promile) do desítek magnitud ($10 \text{ mag} = 1 : 10^4$, $15 \text{ mag} = 1 : 10^6$). Rozličné jsou časové škály: od 10^{-4} s až do časových měřítek změn, k nimž dochází v důsledku hvězdného vývoje. Pokud tyto vývojové změny souvisejí s jaderným vývojem v centrálních oblastech hvězdy, probíhají velice pomalu, v závislosti na hmotnosti objektu v tzv. *jaderné časové škále* 10^6 až 10^9 let. Řádově rychlejší jsou tehdy, pokud jsou důsledkem vnitřní přestavby jádra i obalu hvězdy. Přestavba se zpravidla děje v tzv. *Kelvinově-Helmholtzově škále* (řádově statisíce let), přičemž stále je hvězda ve stavu takřka přesné hydrostatické rovnováhy. Dojde-li však v průběhu vývoje k jejímu narušení, mění se hvězda v tzv. *dynamické časové škále* (podle typu hvězdy až desítky minut). K rychlým změnám tohoto druhu dochází buď na počátku hvězdného vývoje nebo v pozdních vývojových stadiích.

1.2 Význam studia proměnných hvězd

Proměnné hvězdy jsou zajímavé nejen tím, že se na nich, v nich nebo kolem nich něco děje, ale i tím, že se rozborem jejich proměnnosti můžeme něco dozvědět o objektech samotných. Všeobecně platí, že proměnné hvězdy na sebe prozrazují více než hvězdy s konstantní jasností.

Výzkumem proměnných hvězd získáváme často unikátní informace o výkonech, hmotnostech i o vnitřní stavbě hvězd, které bychom jinak jen stěží dokázali získat (zákrytové dvojhvězdy, pulzující hvězdy aj.). Navíc mohou hodně prozradit i o své poloze. Supernovy typu Ia, pulzující proměnné hvězdy nebo zákrytové dvojhvězdy mohou velmi dobře posloužit i pro určování vzdáleností ve vesmíru.

2 Historie a současnost výzkumu proměnných hvězd

2.1 Prehistorie sledování proměnných hvězd

Přestože by se mezi hvězdami viditelnými pouhýma očima našla řádka hvězd, které mění svou jasnost nepřehlédnutelným způsobem, jejich pozorování byla v počátcích astronomie velmi vzácná a nesystematická.

Hlavní zábranou sledování proměnných hvězd v zemích, ovlivněných starověkou řeckou a římskou kulturou, byla předpojatost učenců, kteří ve shodě s tehdy největší autoritou – Aristotelem – nepočítali s tím, že by se jasnost hvězd měla a mohla nějak měnit. Vyplývalo to z aristotelského náhledu na svět, kde se za sférou Měsíce žádné změny nepřipouštěly. Hvězdná obloha tak byla jen statickou kulisou, definovanou jednou provždy v jednom jediném definitivním tvaru.

Pokud se přece jenom nějaké změny pozorovaly, pak muselo jít o proměnné hvězdy s výjimečnou amplitudou světelných změn – o vzplanutí nov či supernov. Potíž je v tom, že tyto jevy byly aristotelovskou fyzikou odmítány buď jako nedopatření nebo se soudilo, že tu jde o nějaké meteorologické jevy, nejspíš komety. O těch astronomové záznamy nevedli, neboť komety, coby jev související s lokálním počasím, spadaly do kompetence meteorologů či kronikářů.

Čínští a japonští astronomové a astrologové touto předpojatostí netrpěli a neobvyklé jevy na obloze, včetně „návštěv hvězdných hostů“, pečlivě zaznamenávali. Od nich pak pocházejí důležité informace například o všech supernovách, jež v posledním tisíciletí vzplanuly (viz tabulka 2.1). Bohužel, vzhledem k tomu, že vzplanutí supernov byla významná podle jejich astrologie, jsou jejich záznamy nepřesné a někdy i účelově zabarvené a pozměněné.

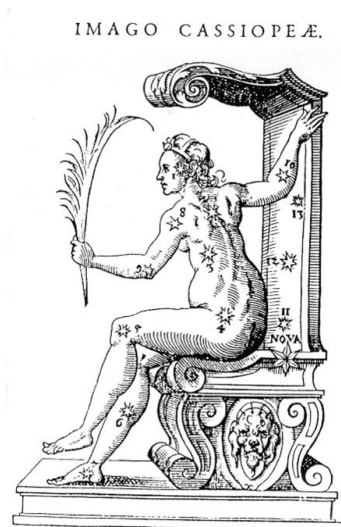
Jedno z nejstarších uvědomělých pozorování proměnných hvězd se prý podle asyrologa Schaumbergera uskutečnilo ve starověké Babylónii. Na jedné z klínopisných tabulek údajně našel údajně důkaz toho, že starověcí pozorovatelé věděli o světelných změnách Algolu.

2.2 První vědecká pozorování

Tycho Brahe (1546–1601) objevil roku 1572 poblíž κ Cas „novou“ hvězdu. Přesně ji zakreslil do hvězdné mapy a určil její souřadnice. Její měnící se jasnost srovnával s jasností ostatních hvězd a získal tak první časovou řadu proměnné hvězdy. Z ní pak bylo možno sestojit vůbec *první světelnou křivku*¹ proměnné hvězdy a současně i první světelnou křivku zachycující pokles jasnosti supernovy. Tutéž supernovu sledoval ještě dvanáct dalších učenců, a je třeba poznamenat, že po Brahovi byl nejpřesnějším pozorovatelem Tadeáš Hájek z Hájku (1525–1600).

Z hlediska výzkumu proměnných hvězd jde o průlom v pohledu na tento typ hvězd. Ostatní učenci Tychonova pozorování zhusta znevažovali, označující novou hvězdu za atmosférický jev: za kometu či meteor. Tycho Brahe však pečlivým rozborem vlastních i Hájkových měření prokázal, že ona nova je nejméně šestkrát dál než Měsíc. V té době to byla jedna z posledních ran aristotelskému světovému názoru.

¹Termínem světelná křivka označujeme závislost jasnosti, hvězdné velikosti hvězdy na čase. Přesná definice bude uvedena v kapitole 5.



Obrázek 2.1: SN 1572.

Periodicky proměnná hvězda byla poprvé uvědoměle pozorována v létě roku 1596, kdy si David Fabricius (1564–1617) povšiml změny jasnosti omikron Ceti. Znovu ji pozoroval v roce 1609 a nazval ji *Mira* – „Podivuhodná“. Znovu ji objevilo několik dalších pozorovatelů, v 1638 i holandský astronom Holwarda² (1618–1651), který hvězdu studoval systematicky po celý rok – to je první případ systematického sledování proměnné hvězdy. Periodicitu světelných změn Miry jako první zjistil Ismael Boulliau (1605–1694). Periodu stanovil na 333 dny, což je v až dojemné shodě s dnešními určeními (332 dny). V roce 1715 Edmond Halley (1656-1742) uvádí v článku o historii „nových“ hvězd za posledních 150 let šest objektů – vesměs nápadně se měnící dlouhoperiodické proměnné a (super)novy - SN 1572 (Tychonova), SN 1604 (Keplerova), omikron Ceti (Mira), P Cyg (N1600 Cyg), Nova 1670 Vul, χ Cyg. Nejde však o katalog v pravém slova smyslu, protože rozhodně neobsahuje všechny tehdy známé proměnné hvězdy. Připomeňme alespoň novodobý

objev proměnnosti Algolu Geminianem Montanarim v roce 1669.

2.3 Začátky systematického studia

Iniciátory systematického výzkumu proměnných hvězd se stali Angličané Edward Pigott (1753-1825) a John Goodricke (1764-1786). Ten v letech 1782–3 objevil světelné změny

²někdy též Jan Fokkens (Johann Phocylides) Holwarda

Tabulka 2.1: Historické supernovy

Rok	Typ	Souřadnice α [h m] δ [°]	Dnešní označení	Maximální hv.vel. [mag]	Doba pozorování pouhýma očima	Pozorovatel(é)
-134	?	5 54 -13		?	?	Hiparchos, Čínané
185	SN	14 12 -60		-8	7.12.185-červenec 186	
369	?	0 \pm +60 \pm		?	6 měsíců	
386	SN	18 30 -25		+1	3 měsíce	
393	SN	16 48 -38		-1	8 měsíců	
1006	SN	15 13 -45		-8 až -10	28.4.1006 -13.8.1006	arab., jap., čín., jihoevr.poz.
1054	SN	5 30 +22	CM Tau	-4 až -5	4.7.1054 -17.4.1056	Jang Wej-Te aj.
1181	SN			-1	červenec 1181 -?	
1203	N	16 48 -38		-2		
1230	N	16 20 +20			říjen 1230 - březen 1231	S. Fujivara aj.
1430	N	7 24 +7			1 měsíc	
1572	SN	0 19 +64	B Cas	-4	6.11.1572-únor 1574	Schüller, Brahe, Hájek aj.
1600	N?	20 12 +38	P Cyg	+3	8.8.1600-1626?	Blaeu, Kepler(?)
1604	SN	17 25 -21	V843 Oph	-2,5	9.10.1604-podzim 1605	Kepler, Fabricius, Brunowski
1667	N	6 +20	V529 Ori			
1670	N	19 42 +28		+2,7	20.6.1670-?	Anthelme, Picard

Algolu a hvězdu sám též systematicky pozoroval. Prokázal, že se mění s periodou necelých tří dní a správně vysvětlil příčinu jejích světelných změn.

Týž Goodricke objevil ještě další dvě periodické proměnné hvězdy: β Lyrae a δ Cephei, shodou okolností tu jde o představitelky dalších dvou typů proměnnosti hvězd. Pigott roku 1784 objevil další cefeidu η Aquilae a v roce 1795 R Coronae Borealis a R Scuti.

V roce 1786 Pigott publikoval *první katalog proměnných hvězd*, který obsahoval těchto 12 exemplářů:

Nova Cas (SN 1572)	Algol	R Leo
Mira	Nova Vul 1670	η Aquilae
P Cygni	χ Cygni	β Lyrae
Nova Oph (SN 1604)	R Hya	δ Cephei

Zájem o výzkum proměnných hvězd se zvýšil až po roce 1844, kdy Friedrich Argelander (1799-1875) publikoval jednoduchou metodu odhadování jasnosti proměnných hvězd - relativním srovnáváním proměnné hvězdy s hvězdami srovnatelné jasnosti, jež se nacházely v bezprostředním okolí. Tato všeobecně dostupná pozorovací metoda sloužila po řadu desetiletí jak profesionálním astronomům, tak i astronomům amatérům, jimž konečně slouží doposud. Ale i zde se dnes díky dostupnosti moderní detekční techniky (hlavně CCD) postupně přechází od subjektivních pozorovacích metod k metodám objektivním.

V roce 1844 měl Argelanderův soupis známých proměnných hvězd 44 položek. Jako autor známého bonnského katalogu (*Bonner Durchmusterung*) si Argelander uvědomil nutnost jednoznačného označování proměnných hvězd a začal je v jednotlivých souhvězdích označovat postupně písmeny R, S, ... Z³ a následně kombinacemi RR, RS, RT, ..., RZ, SS, ST, ..., SZ, TT, ... ZZ. Argelander tak přispěl také k systematizaci výzkumu proměnných hvězd.⁴

V roce 1880 byla známa už stovka proměnných, což umožnilo Edwardu C. Pickeringovi (1846-1919) provést jejich základní klasifikaci, jíž se přidržíme doposud. Přesto poznání *příčin proměnnosti* bylo stále obtížné zejména pro velké množství typů proměnnosti. Nicméně jak narůstal počet proměnných hvězd, rýsovaly se již určitější skupiny proměnných hvězd s podobným chováním.

Spektroskopie ukázala, že většina ze známých proměnných hvězd má sytě oranžový nádech (miridy) se spektrem s molekulárními pásy. Soudilo se, že proměnnost je tu vlastností rozsáhlých chladných a hustých atmosfér. Právě změna spektra se změnou jasnosti vedla k tomu, že byla definitivně opuštěna myšlenka Wiliama Herschela, který se

³Často se tvrdí, že počáteční písmeno R bylo zvoleno podle německého „rot“ nebo francouzského „rouge“, česky červený, což mělo vycházet z toho, že většina tehdy známých proměnných hvězd byla červená. Tento rozšířený názor vyvrátil sám Argelander, který naopak uvádí: „Aby se zamezilo záměně s Bayerových abecedním označením, zvolil jsem poslední písmena abecedy psaná verzálkami.“ Argelanderův návrh na označování pochází z roku 1855, ale oficiálně byl přijat až roku 1867.

⁴Později byl tento systém označování nových proměnných hvězd doplněn Ristenpartem a následně Andrém. Dnes platné „definitivní“ označení proměnné hvězdy má tedy následující podobu: Před latinským názvem souhvězdí ve 2. pádu, respektive jeho třípísmenovou zkratkou, se uvádí původní Argelanderova kombinace písmen, případně další kombinace písmen nebo číslic, a to v tomto pořadí: R, S, T, ... Z, RR, RS, RT, ... RZ, SS, ST, ..., SZ, TT, ... ZZ, AA, AB, ... QQ, QZ, V 343, V 344 ..., přičemž se nepoužívají kombinace s písmenem J. Mohlo by se totiž snadno poplést s písmenem I.

domníval, že tyto hvězdy jsou posety tmavými skvrnami a ke změnám dochází v důsledku rotace. Zachována ale zůstala u některých polopravidelných proměnných hvězd, jejichž světelná křivka připomínala průběh výskytu slunečních skvrn.

Zcela jiným případem byl bílý Algol: V roce 1880 Pickering oprávil již skoro sto let starou Goodrickovu domněnku o dvojhvězdné povaze proměnné hvězdy a dokázal, že výborně odpovídá pozorování. Z tvaru světelné křivky odvodil proměnnost i relativní rozměry obou složek. O potvrzení domněnky se postaral v roce 1888 Hermann Vogel (1834–1898), když zjistil, že Algol je jednosložková spektroskopická dvojhvězda, jejíž křivka radiální rychlosti přesně odpovídá dvojhvězdnému modelu. Bezpečně tak byl kombinací fotometrických a spektroskopických pozorování prokázán mechanismus proměnnosti tzv. *zákrytových dvojhvězd*⁵.

Po úspěchu u Algolu zkoušeli astronomové štěstí u *cefeid*. δ Cephei sice objevil už Goodricke, ale řádně ji zkoumala až V. K. Ceraski roku 1880. I když se jedná o přísně periodickou hvězdu, pokus o vysvětlení zákryty ve dvojhvězdě selhal. Hvězdy jsou v minimu jasnosti červenější než v maximu, světelná křivka je asymetrická, vždy má pomalý pokles, rychlý nárůst. Radiální rychlost je proměnná, což dává možnost výpočtu fiktivní trajektorie dvojhvězdy. Bohužel, jak v roce 1914 ukázal Harlow Shapley (1885–1972), trajektorie neviditelné složky by v mnoha případech zasahovala do jasnější hvězdy – jedna hvězda by obíhala v druhé.

Během 19. století vzrostl počet známých proměnných hvězd až na několik stovek. Příčinou a předpokladem byly: a) zvýšený zájem o hvězdy, b) spolehlivé hvězdné mapy, c) fotometrické přehlídky, d) na konci století i harvardské fotografické přehlídky a e) zapojení astronomů amatérů do výzkumu proměnných hvězd, což jim v podstatě umožnila Argelanderova stupňová metoda odhadu jasnosti.

2.4 Výzkum proměnných hvězd v 19. a 20. století

Devatenácté století a zejména jeho druhá polovina byla epochou překotného vývoje astronomie a některých oblastí fyziky (například spektroskopie); přinesla řadu objevů, které vedly ke vzniku nového vědního oboru – *astrofyziky*. V řadě publikací se toto období označuje jako éra vznikající „nové astronomie“. Ta se navíc mohla stále více spoléhat na objektivnější metody výzkumu, kdy oko přestávalo být základním detektorem světla.

Pomyslné vlády se ujala fotografie, která si svou pozici držela až do konce dvacátého století. To přineslo nejen otevírání oken do vesmíru v podobě detekce i jiných částí elektromagnetického spektra záření než světlo, ale také přesnější detekční metody využitím fotoelektrické a CCD fotometrie. Zejména CCD technika na konci 20. století prakticky zcela vytlačila z astronomických observatoří klasickou fotografii i fotoelektrickou fotometrii. Po nesmělých počátcích na balónech a raketách přišla v druhé polovině minulého století ke slovu i družicová astronomie.

Připomeňme si tedy tento překotný vývoj nikoli chronologicky ale dle jednotlivých metod sledování proměnných hvězd a místa pozorování.

⁵Teprve na sklonku 20. století ukázala interferometrická pozorování rádiového zdroje v místě dvojhvězdy, že zdroj kmitá v rámci úsečky o délce 0.004“ s periodou 2.87 dne, která odpovídá orbitální periodě Algolu B. Nově byla zjištěna i orientace oběžné trajektorie dvojhvězdy v prostoru. (J.-F. Lestrade et al., 1999).

Tabulka 2.2: Definiční stupně rozdílu slabosti dvou hvězd.

Odhadní stupeň (os)	Definiční popis rozdílu slabostí srovnávaných hvězd	Zápis
0	Hvězda a se jeví stejně slabá jako hvězda b nebo se chvílemi zdá střídavě nepatrně slabší a nepatrně jasnější než hvězda b .	$a0b$
1	Při bedlivém pozorování se hvězda a jeví častěji jasnější než stejně jasná jako hvězda b a jen vzácně se jeví hvězda b jasnější než hvězda a .	$a1b$
2	Hvězda a se jeví takřka vždy o málo jasnější než hvězda b . Jen zřídka se zdá, že se jejich slabosti rovnají.	$a2b$
3	Hvězda a se již na první pohled jeví jasnější než b .	$a3b$
4	Hvězda a je výrazně jasnější než hvězda b .	$a4b$

2.4.1 Vizualní fotometrie

První pozorovatelé proměnných hvězd měli každý svůj systém zápisu a vyhodnocení pozorování proměnných hvězd. Jednalo se v podstatě buď o přímé zařazení hvězdy do některé z ptolemaiovských tříd hvězdné velikosti nebo o (většinou nepřesný) popis, jak jasná je hvězda ve srovnání s okolními hvězdami.

První jasně formulovanou pozorovací metodu používal F. W. Herschel. Výsledky srovnání jasností dvou hvězd vyjadřoval pomocí soustavu zvláštních značek a symbolů, které lze slovně číst jako: stejně jasné, jasnější, slabší, výrazně jasnější, výrazně slabší. Herschel systematicky pozoroval hvězdy dle katalogu J. Flamsteeda a výsledky pozorování všech přibližně 3000 hvězd publikoval ve čtyřech katalozích v letech 1796–1799. Jeho metodu užívali pozorovatelé až do časů Argelanderů.

F. W. A. Argelander používal nejprve při vlastních pozorováních Herschelovu metodu, ale záhy si uvědomil její nedostatky. V roce 1844 pak publikoval *Výzvu k přátelům astronomie* (Argelander, 1844) v níž popsal, jak by se mělo vizualní pozorování proměnných hvězd provádět. Herschelovy značky nahradil jasně definovanými stupni s číselným vyjádřením. Pozorovanou jasnost hvězdy vyjádřenou ve stupních dle definice v tabulce 2.2 označujeme jako slabost.

Argelander nezavrhuje ohodnocení rozdílu slabostí dvou hvězd vyšším stupněm. Takové odhady ale mohou být zatíženy větší chybou a zpravidla je používají jen zkušení pozorovatelé, kteří mají po letech praxe odhadní stupeň poměrně malý. Zatímco u začátečníků totiž u prvních pozorování může být velikost jednoho odhadního stupně (os) až 0,5 mag, ti nejlepší pozorovatelé „v aktivní službě“ dosahovali až 0,02 mag. Taková přesnost je ale výjimečná, ze známých pozorovatelů ji dosahovali či dosahují jen například Sebastian Otero, Kamil Hornoch nebo Pavol A. Dubovský. Běžná velikost 1 os pro zkušeného pozorovatele je kolem 0,1 mag.

Vizualní pozorovatelé používají Argelanderovu metodu dodnes, ale většinou v nějaké ze dvou modifikací. Buď používají pro stanovení slabosti proměnné hvězdy vždy pouze dvě srovnávací hvězdy – jednu slabší a jednu jasnější a nebo použijí více srovnávacích hvězd najednou.

Jinou cestou než Argelander se vydal N. R. Pogson. Zatímco Argelander nepotřeboval v principu vědět nic o použitých srovnávacích hvězdách, Pogson svou metodu založil na znalosti hvězdných velikostí srovnávacích hvězd. Při vlastním odhadu pak pozorovatel interpoluje hvězdnou velikost proměnné hvězdy mezi známé hvězdné velikosti dvojice srovnávacích hvězd. Pogson přímo předpokládal, že velikost jednoho odhadního stupně je 0,1 mag, takže pak pracoval s desetinnými magnitudy stejně jako se stupni.

Ve světě je Pogsonova metoda poměrně rozšířená (například v rámci společnosti AAVSO). Její výhodou je rychlost, odhady se většinou zapisují přímo v magnitudách a není potřeba dalších výpočtů. Jenže jsou zde přinejmenším dvě úskalí - ne vždy jsou srovnávací hvězdy proměřeny dostatečně přesně a ve vizuální oblasti spektra a navíc nejsou zpravidla uchovány informace o použitých srovnávacích hvězdách. Výsledkem je jednak možný větší rozptyl pozorování a zejména znehodnocení pozorování, pokud se později ukáže, že jedna z používaných srovnávacích hvězd je ve skutečnosti sama proměnná.

Americký význačný astronom konce 19. století E. C. Pickering ale nebyl spokojen ani s jednou výše popsanou metodou a navrhl vlastní postup (Pickering, 1882, 1883) v článku nazvaném „A Plan for Securing Observations of the Variable Stars“. Jeho interpolační metoda využívá vždy dvojice srovnávacích hvězd se známými hvězdnými velikostmi. Jejich rozdíl vždy rozdělil na 10 částí, takže při vlastním odhadu u dalekohledu bylo nutné rozhodnout, kde v daném intervalu leží proměnná hvězda. Tento přístup je z hlediska fyziologie smyslového vnímání lepší než absolutní porovnávání v Argelanderově, respektive Pogsonově metodě. Ale opět je tu nezbytný předpoklad mít srovnávací hvězdy předem řádně proměřené.

Jako poslední se objevila metoda vizuálního pozorování proměnných hvězd, kterou nezávisle na sobě navrhli A. A. Nijland (1901) a o pár let později S. N. Blažko. Snaží se spojit výhody Argelanderovy stupňové a Pickeringovy interpolační metody. Pro odhad jasnosti proměnné hvězdy se využije vždy dvojice srovnávacích hvězd. Proměnná hvězda se pak zařadí mezi ně do intervalu, rozdílu hvězdných velikostí nebo slabostí. Interval slabostí mezi srovnávacími hvězdami rozdělíme na tolik částí, kolik bychom mezi nimi vložili odhadních stupňů. Následně určíme o kolik těchto částí je proměnná slabší, respektive jasnější než srovnávací hvězdy. Tato metoda vyžaduje určitý cvik a není vhodná pro začínající pozorovatele.

Vizuální pozorování je dnes jednoznačně na ústupu. Provozuje se jen tam, kde zejména z materiálních důvodů si pozorovatelé nemohou pořídit CCD kamery a počítače. Nicméně i v končinách, kde vizuální pozorovatelé vymřeli, je nutné vědět více o těchto pozorováních, protože často představují jediné informace o zkoumané hvězdě z období před desítkami někdy i stovkami let. Pokud už vizuální pozorování použije je však nutné k nim přistupovat obezřetně a detailně je prozkoumat. Jsou totiž subjektivním výsledkem pozorovatele nikoli objektivním měřením. Příčinou jsou fyziologické a psychologické vlivy, které se na výsledku vizuálního pozorování podepisují. Podrobněji si o nich lze přečíst například v publikaci *Pozorování proměnných hvězd I* (Zejda et al., 1994).

2.4.2 Nevizuální fotometrie

2.4.2.1 Fotografická fotometrie

Jakmile se astrofotografie „zabydlela“ na observatořích, došlo k překotnému objevování nových proměnných hvězd. Astronomové už přestali spoléhat na náhodu, a pustili se do systematického vyhledávání nových proměnných hvězd pomocí fotografických přehlídek oblohy. Pořizovaly se snímky stejných oblastí hvězdného nebe a na nich se prostým porovnáním daly nové proměnné hvězdy odhalit relativně snadno. Vznikaly rozsáhlé skleněné archivy.⁶

Desky také bylo možno proměřovat a měření i po letech znovu opakovat. Astronomové tak po několika staletích začali opouštět subjektivní metody zkoumání hvězd. Nicméně bylo třeba vyvinout korektní a přesné metody zpracování a proměřování fotografií hvězdných polí. Průkopníkem v oblasti fotografické fotometrie se stal Karl Schwarzschild.

2.4.2.2 Fotoelektrická fotometrie

První elektrickou detekci slabého světla hvězd uskutečnil roku 1892 v Dublinu William Monck, když použil jako světločivný prvek fotonku zkonstruovanou Georgem Minchinem. Američan Joel Stebbins začal používat seleniový odporový fotočlánek v roce 1907. Avšak skutečný počátek fotometrické fotometrie je spojen s konstrukcí fotočlátku, kde se měří elektrický proud vzniklý fotoefektem v hydridu draslíku. Ten vyrobili Julius Elster a Hans Geitel v Německu a krátce poté Jakob Kunz v USA.

Hlavními průkopníky fotoelektrické fotometrie byli Paul Guthnick a Richard Prager v Berlíně a Joel Stebbins a jeho kolegové v USA. Právě oni povýšili původní fyzikálně technické pokusy na metodu, která začala dávat vědecké výsledky i mimo laboratoř. Během let 1912–1940 následovalo postupy pozorovatelů z Berlína a Illinois (nebo Wisconsinu) mnoho dalších pozorovatelů. Uvádí se až 38 pozorovatelů na 22 observatořích ale s rozdílnými úspěchy. Samozřejmě došlo k vylepšením a vývoji, ale nutno říci, že do první komerční výroby fotonásobičů, vlastně během celé zmiňované epochy byla fotoelektrická fotometrie spíše jistým druhem umění než rutinním měřením. Do toho období, přesněji do roku 1930⁷ spadá i objev fotonásobiče, jehož autorem je L. A. Kubetsky.

Fotonásobiče (PMT - z anglického “photomultiplier tube”) jsou vlastně elektronky, kde ve vakuované trubici na záporně nabitou katodu dopadá záření hvězdy. Fotoefektem vzniklý proud elektronů je pak zesílen v soustavě několika dynod využívajících efekt sekundární elektronové emise. Je to křehké zařízení, které lze zničit i tím, že je vystavíte příliš jasnému světlu.

I na počátku 21. století jsou fotonásobiče nejcitlivějším přístrojem na detekci světla, schopným detekovat jednotlivé fotony. Mezi jejich další přednosti patří velký dynamický rozsah, který typicky dosahuje řádu 10^7 , a také linearita, kdy výstupní signál se mění s rozdílnou intenzitou dopadajícího světla ve velkém rozsahu lineárně. Navíc jde o velmi rychlý měřicí přístroj, který může pracovat i na škálách kratších než milisekundy. Při správném zpracování naměřených dat poskytuje velmi přesné reálné hodnoty v rádech milimagnitud.

⁶Většinou byla fotografická emulze nanášena na skleněnou desku.

⁷Mnoho prací uvádí za datum vzniku fotonásobiče rok 1936 a za jeho vynálezce kolektiv kolem V. K. Zworykina.

V dnešní době jsou měření provedená fotoelektrickým fotonásobičem spíše výjimečná. Většina observatoří vyměnila tyto přístroje za modernější a citlivější CCD kamery. Bohužel tím většinou také ukončila časové řady přesných fotometrických pozorování jasných hvězd.

2.4.2.3 „Křemíková“ fotometrie

První prvek CCD (z anglického Charged Coupled Device) vznikl v roce 1969 v Bellových laboratořích. Willard Boyle a George E. Smith tehdy vyvíjeli elektronovou počítačovou paměť. Nicméně první CCD kameru představili už o rok později. První komerční CCD zobrazovací prvky byly vyráběny firmou Fairchild Electronics v roce 1974 o rozměru 100×100 pixelů. Schopnost přenosu náboje byla tehdy méně než 0,5 % (o trochu méně než dobrá fotografická deska). První použití v astronomii a skutečný počátek nového věku v pozorovací technice nastal v roce 1979, kdy na metrovém dalekohledu na Kitt Peak National Observatory použili chlazený čip RCA 320×512 LN₂.

Již první pozorování ukázala přednosti využití CCD prvků namísto fotografických desek. Kvantová účinnost byla brzy 50 a vícekrát vyšší (v červené barvě). Čipy samotné byly na rozdíl od fotografických desek velmi lineární, takže kalibrace byly snadné a bylo možné snadno detekovat i slabé, málo kontrastní mlhoviny. Nicméně ve srovnání s fotoelektrických fotometrem CCD kamery nemají takový dynamický rozsah, citlivost a typicky nejsou tak přesné. CCD kamery jsou vynikající pro sledování slabých hvězd, kdy se na snímku najednou nachází řada zhruba stejně jasných hvězd. Naopak pro jasné hvězdy většinou není na snímku použitelná srovnávací a kontrolní hvězda a navíc je pro jasné hvězdy třeba zpravidla volit velmi krátké expoziční časy a přesnost měření pak nemusí být veliká. CCD kamery jsou nejcitlivější v červené oblasti spektra, dnes už jsou po úpravách více citlivé i v modré barvě. CCD systémy zpravidla dosahují přesnosti 0,01 mag, přestože řada programů na zpracování CCD pozorování počítá s milimagnitudami. Maximální časově rozlišení u běžných komerčních kamer bývá kolem 0,1 sekundy. Dynamický rozsah CCD kamer je dán analogově digitálním převodníkem ADC⁸, který v době vzniku skript bývá většinou šestnácti bitový, což znamená zhruba 65 000 úrovní signálu.

Jednou z předností použití CCD kamer v astronomii je současné zachycení řady hvězd na jediném snímku, tedy současné měření jejich jasnosti. Navíc jsou snímky uchovávány v digitálních archivech a je možné se k nim po čase znovu vrátit, proměřit a zpracovat a to vše efektivněji než u skleněných desek.

CCD kamery jsou dnes masově rozšířeny a jsou v dosahu i movitějších amatérských astronomů. Znamená to, že od zavedení CCD kamer v astronomii nebývale vzrostl počet fotometrických dalekohledů, schopných proměřovat jasnosti i slabých objektů, které byly ještě před několika desítkami let v dosahu jen několika málo velkých dalekohledů. Počet získaných dat i nově objevených proměnných hvězd tak rostou nevídaným tempem. Přispívají k tomu, jak již zmiňovaní amatérští astronomové, ale zejména pak velké přehlídkové projekty, například ASAS, OGLE, MACHO, ROTSE, NSVS a další. V současné době jsou zejména díky zmiňovaným přehlídkovým projektům masivně objevovány nové proměnné hvězdy.

⁸Zkratka vychází z anglického *analog-to-digital converter*.

Základní katalog proměnných hvězd, tzv. *General Catalogue of Variable Stars*, vydávaný od roku 1948 v Moskvě, už rozhodně není „generální“ - všeobecný. Poslední 4. vydání katalogu (4.2 v elektronické verzi) lze najít na internetu a obsahuje 40 215 objektů (stav ke konci roku 2009). Nově jsou do něj zařazovány jen individuálně objevené proměnné hvězdy. Proměnné hvězdy objevené v rámci přehlídkových projektů pozemních observatoří jako ASAS, ROTSE, OGLE, NSVS a další, podobně jako proměnné hvězdy, které byly odhaleny jako rentgenové nebo rádiové zdroje z družic bývají označovány zkratkou příslušného katalogu a polohou na hvězdné obloze, většinou v rovníkových souřadnicích. Kompletnější a aktuálnější přehled o proměnných hvězdách dnes poskytuje například server Americké asociace pozorovatelů proměnných hvězd AAVSO (<http://www.aavso.org/vsx>).

2.4.3 Spektroskopie

V 19. století bylo publikováno několik zásadní prací, které položily základ hvězdné spektroskopii. Připomeňme si alespoň některé z protagonistů rozvoje spektroskopie.

Brit William Hyde Wollaston objevil roku 1802 temné čáry ve slunečním spektru. V roce 1818 Joseph Fraunhofer pozoroval a popsal 576 temných čar ve slunečním spektru a ty nejvýraznější označil písmeny A až K. David Brewster ukázal roku 1832, že chladný plyn vytváří temné čáry ve spojitém spektru. O 15 let později John W. Draper zjistil, že horká pevná látka emituje spojitě spektrum zatímco horký plyn čárové spektrum. V roce 1859 Gustav Robert Kirchhoff a Robert Bunsen objevili, že každý chemický prvek nebo sloučenina má charakteristické spektrum čar, které mají stejnou vlnovou délku v emisním i absorpčním spektru. To byl převratný objev, který v podstatě umožnil studovat složení alespoň povrchových vrstev hvězd na dálku pouhým rozbořením jejich světla. První fotografický záznam spektra, tzv. spektrogram hvězdy, konkrétně Vegy, získal roku 1872 americký amatér Henry Draper.

Christian Doppler (1803-53) ve svých pracích předpověděl, že pohybující se objekt bude vykazovat změnu polohy spektrálních čar, takže bude možné rozbořením spektra určit radiální složku rychlosti s velkou přesností. Nicméně poprvé se to ve spektru konkrétní hvězdy podařilo ukázat až Williamu Hugginsovi v roce 1868. První měření a sestavení křivky radiálních rychlostí pro dvojhvězdu pak provedl o dvacet let později Hermann Carl Vogel (1841-1907).

Na konci 19. století již patřilo spektroskopické pozorování hvězd k běžným metodám výzkumu. Přestože už roku 1867 se Angelo Secchi (1818-1878) pokusil o první klasifikaci spekter 316 hvězd, teprve na přelomu 19. a 20. století byl získán dostatečně bohatý pozorovací materiál, aby bylo možné udělat důkladný rozbor a následnou klasifikaci hvězdných spekter. Při tvorbě HD katalogu s téměř 230 tisíci hvězdami vytvořili Edward Pickering a zejména Annie Cannonová základ systému klasifikace spekter, který se používá dodnes.

Systematické sledování spekter některých hvězd ukázalo, že se tato spektra mění, a to v řadě ohledů. Kromě již zmíněných radiálních rychlostí systémů spektrálních čar ve spektrech dvojhvězd a vícenásobných hvězdných systémů, byly nalezeny změny v profilech některých spektrálních čar, zejména pak těch, které vykazují emisi (nejčastěji $H\alpha$, rezonanční čáry ionizovaného vápníku $Ca II - H$ a K). U magnetických chemicky pekuliárních hvězd pozorujeme cyklické změny ekvivalentní šířky čar některých prvků, s

periodou rotace se mění i jejich rozšíření způsobené silným magnetickým polem. U řady hvězd byly nejdříve zjištěny jejich spektroskopické změny a teprve pak se ukázalo, že jsou doprovázeny i změnami jasnosti.

2.4.4 Družicová pozorování

Novou éru ve výzkumu proměnných hvězd započala činnost astrometrické družice *Hipparcos*, pomocí níž bylo objeveno na 12 000 nových proměnných hvězd a byla potvrzena proměnnost 8 200 hvězd. Dnes je fotometrie této družice z hlediska přesnosti a časového rozlišení už překonána. Z fotometrických družic počátku 21. století uveďme alespoň družice COROT, MOST, BRITE, Kepler nebo připravovaný satelit GAIA.

- COROT – odstartovala v roce 2006. Na palubě je dalekohled o průměru 28 cm ($f=1200$ mm, FoV $3,8^\circ$), dvě CCD $2k \times 2k$ – každá na jeden základní projekt - astroseismologie (objekty $5,7 < V < 9,5$ mag v 5 oknech) a exoplanety (objekty $11,5 < V < 16,5$ mag v 6000 oknech). Družice pořizuje třibarevnou fotometrii a spektroskopii s velmi malým rozlišením. <http://corot.oamp.fr>
- MOST – Kanadská vesmírná agentura (CSA) vypustila roku 2003 mikrosatelit Microvariability and Oscillations of Stars (MOST) určený ke studiu změn jasností hvězd a ke studiu extrasolárních planet. Dalekohled o průměru 15 cm doplněný CCD kamerou (1024×1024) pracuje v intervalu 350-700 nm. MOST zkoumá malé změny v jasnostech blízkých hvězd a určuje jejich stáří a složení. Dalším pozorovacím programem je studium atmosfér extrasolárních planet. <http://www.astro.ubc.ca/MOST/>
- BRITE – Projekt BRight Target Explorer počítá se 4 nanodružicemi, každá s hlavním dalekohledem, vlastně jen čočkou o průměru 30 mm (FoV 24°). Družice mají sloužit k monitorování změn jasnosti hvězd s vizuální hvězdnou velikostí do 4 mag. Každá má mít fixní fotometrický filtr. <http://www.univie.ac.at/brite-constellation/spacecraft.html>
- Kepler – Hlavním cílem družice Kepler (start v roce 2009) je detekovat exoplanety o hmotnosti 30-600krát menší než Jupiter. Dalekohled o průměru 0.95 m s FoV větší než 10 čtverečních stupňů nepřetržitě monitoruje jasnost 100 000 hvězd jasnějších než 14 mag v souhvězdích Labuť a Lyra. Aby byl schopen splnit vytčený cíl, musí detekovat pokles jasnosti 1/100 procenta. <http://kepler.nasa.gov/>
- GAIA - Nejočekávanější družice stelární astronomie posledních let má plánovaný start v roce 2013. Během pěti let má doslova „prošmejdit“ oblohu do 20 mag. Hlavní zrcadla $1,45 \times 0,5$ m mají soustřeďovat zachycené záření na 106 CCD prvků a tak získávat vícebarevnou fotometrii, astrometrii (pro objekty do 15 mag dle barvy s přesností 12-25 μas , do 20 mag 100-300 μas) a spektrometrii (spektrofotometrii s nízkým rozlišením v rozsahu 330-1000 nm, radiální rychlosti s přesností 1-15 km/s pro všechny objekty do 17 mag). <http://www.rssd.esa.int/Gaia>

2.5 Typy proměnných hvězd

Využití CCD techniky a její zpřístupnění amatérským pozorovatelům spolu s pokrokem družicové astronomie znamenaly doslova boom v počtu proměnných hvězd. Prudký růst jejich počtu je možné sledovat i v přehledu katalogů proměnných hvězd v tabulce 2.3. Zatímco první katalog z roku 1786 obsahoval pouhý tucet proměnných hvězd, nejobsáhlejší katalog současnosti Variable Star Index (VSX) americké společnosti AAVSO obsahuje přes 200 000 proměnných a každý měsíc v něm přibývají další tisíce hvězd.

Je zřejmé, že jak v historii rostl počet známých proměnných hvězd, vyvstávala i potřeba rozčlenit je podle jejich chování a příčin jejich změn. Hlavním rozlišovacím znakem vždy byl a stále zůstává podoba změny jasnosti, tedy vzhled jejich *světelné křivky*. S rozvojem pozorovací techniky přes vizuální odhady, fotografii, fotonásobiče až po CCD prvky, se neustále zlepšuje přesnost pozorování (v současnosti standardně řádově milimagnitudy) i jeho časové rozlišení (až 10^{-4} s). Časem nabyly na důležitosti další rozlišovací znaky příslušnosti k určitému typu proměnnosti: vzhled spektra, spektrální změny (změny intenzity, ekvivalentní šířky a profilu spektrálních čar), změny radiální rychlosti.

Oficiální Generální katalog proměnných hvězd (GCVS) už dávno není generální, obsahuje „jen“ 40 000 hvězd. Najdeme v něm ale generacemi astronomů vytvářenou typologii proměnných hvězd. Dnes užívaná klasifikace vychází z Generálního katalogu proměnných hvězd (Durlevich et al., 2006). Je v ní zastoupeno 119 typů proměnných hvězd.

Na Valném shromáždění IAU v roce 2006 v Praze byla diskutována nová klasifikace navržená vedoucím týmu GCVS Nikolajem Samusem. Kromě řady změn v typologii proměnných hvězd bylo navrženo, aby se mimo již používaného znaménka „+“ (pro koexistenci dvou typů) užíval také znak „|“, znamenající „nebo“ – pro možné klasifikace téhož objektu, například EC|Ell, EC|RR. IAU návrhy dosud nepřijala, řadu z nich akceptovali tvůrci VSX a uvedli je v život. Jejich klasifikace typů proměnných hvězd včetně charakteristik jednotlivých typů je k dispozici na <http://www.aavso.org/vsx/index.php?view=about.vartypes>.

V zásadě můžeme rozdělit proměnné hvězdy podle mechanismu proměnnosti na dvě skupiny:

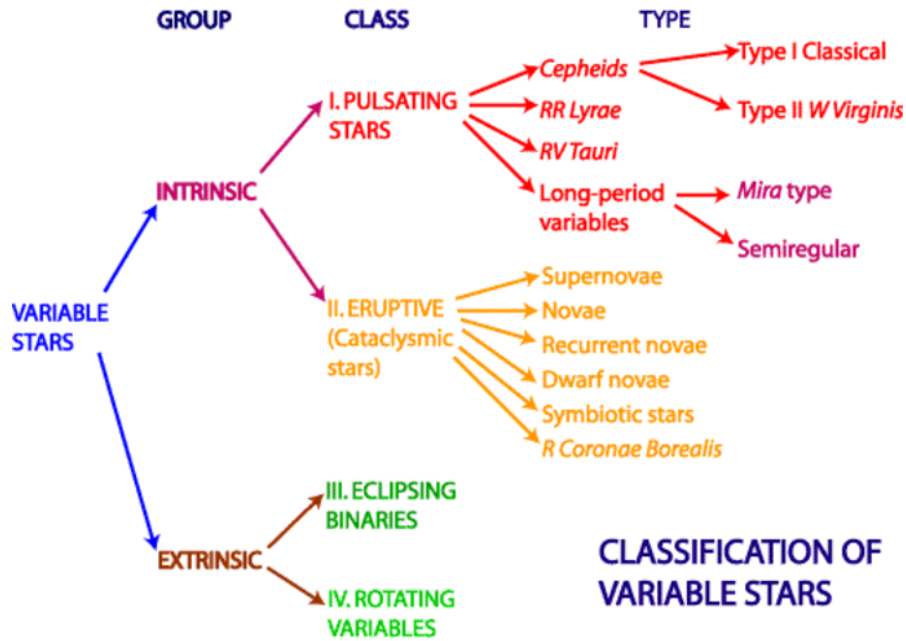
- A) **geometrické** (anglicky *extrinsic*), kde se světelný tok z hvězdy nebo hvězdné soustavy nemění, mění se však její svítivost. Děje se tak nejčastěji v důsledku rotace hvězdy se skvrnami na povrchu nebo oběhu složek dvojhvězdy kolem společného těžiště.
- B) **fyzické** (anglicky *intrinsic*), neboli skutečné proměnné hvězdy, u nichž se reálně mění jejich zářivý výkon v daném spektrálním oboru. Sídlo jejich změn může být jak v okolí hvězdy, tak v jejích povrchových vrstvách (nejčastěji tu jde o různé projevy hvězdné aktivity), v podpovrchových vrstvách (pulzace všeho druhu) a konečně i samotném jádru hvězdy, které bývá ohniskem vzplanutí supernov všeho druhu.

Tyto skupiny se dále dělí na třídy a jednotlivé typy (viz obr. 2.2). Často se jednotlivé typy proměnných hvězd označují podle první nebo nejlépe prozkoumané hvězdy dané skupiny:

Tabulka 2.3: Katalogy proměnných hvězd v minulosti a dnes.

Rok	Autor	Počet hvězd
1786	Pigott) ¹	12
1840	Argelander) ²	18
1850	Argelander) ³	24
1856	Pogson) ⁴	53
1865	Chambers) ⁵	113
1866	Schönfeld) ⁶	119
1868	Schönfeld, Winnecke) ⁷	126
1875	Schönfeld) ⁸	143
1877	Chambers) ⁹	147
1884	Gore) ¹⁰	191
1887	Gore) ¹¹	243
1893	Chandler) ¹²	260
1896	Chandler) ¹³	393
1903	Pickering) ¹⁴	701
1907	Cannonová) ¹⁵	1425
1918	Müller, Hartwig) ¹⁶	1687
1920	Müller, Hartwig) ¹⁷	2054
1922	Müller, Hartwig) ¹⁸	2233
1926	Prager) ¹⁹	2906
1930	Prager) ²⁰	4581
1935	Prager) ²¹	6776
1940	Schneller) ²²	8254
1942	Schneller) ²³	9476
1948	Kukarkin, Parenago) ²⁴	10912
1958	Kukarkin aj.) ²⁵	14711
1969–70	Kukarkin aj.) ²⁶	20437
1972	Kukarkin aj.) ²⁷	22731
1974	Kukarkin aj.) ²⁸	25221
1985–87	Cholopov aj.) ²⁹	28277
1985	Cholopov, Samus aj.) ³⁰	28924
1987	Cholopov, Samus aj.) ³¹	29587
1989	Cholopov, Samus aj.) ³²	30099
1990	Samus, Kazarovetsová) ³³	30264
1993	Samus, Kazarovetsová, Goranskij) ³⁴	30702
2012	Samus, Durlevich et al.) ³⁵	45835
2012	VSX) ³⁶	214 287

Publikace: **1)** Philosophical Transaction of the Royal Society of London 76, for the year 1786, s. 189; **2)** Schumachers Jahresbuch für 1844, s. 214, 1844; **3)** Abgedruckt von A. v. Humboldt im Kosmos Band III, s. 243, 1850; **4)** Astronomical and Meteorological Observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the year 1854, XV, s. 281–298; **5)** Monthly Notices 25, 208; **6)** 32. Jahresbericht des Mannheimer Vereins für Naturkunde. Mannheim 1866; **7)** Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft (Leipzig) 3, 66; **8)** 41. Jahresbericht. . . (viz 6) Mannheim 1875; **9)** A handbook of descriptive astronomy. 3. vyd. Oxford 1877, s. 578; **10,11)** Proceedings of the Royal Irish Academy — Ser. II, Vol. IV, s. 149–210 a Ser. III, Vol. I, s. 97–150; **12)** Astronomical Journal (AJ) s. 300, 1893; **13)** AJ s. 379, 1896; **14)** Annals of the Observatory of Harvard College (Harv. Ann.) 48, s. 91–123; **15)** Harv. Ann. 55, s. 1–88; **16)** Geschichte und Literatur des Lichtwechsels der bis Ende 1915 als sicher veränderlich anerkannten Sterne (GuL), 1. díl, Leipzig, 1918; **17)** GuL, 2. díl, Leipzig, 1920; **18)** GuL, 3. díl, Leipzig 1922; **19)** Kleinere Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg (KVBB) 1, 1926; **20)** KVBB 9, 1930; **21)** KVBB 15, 1935; **22)** KVBB 22, 1940; **23)** KVBB 26, 1942; **24)** GCVS, 1. vydání; **25)** GCVS, 2. vydání; **26)** GCVS, 3. vydání; **27)** 1. doplněk ke 3. vydání GCVS; **28)** 2. doplněk ke 3. vydání GCVS; **29)** GCVS, 4. vydání; **30)** IBVS 2681, 1985; **31)** IBVS 3058, 1987; **32)** IBVS 3323, 1989; **33)** IBVS 3530, 1990; **34)** IBVS 3840, 1993; **35)** CDS GCVS k 15.4.2012, **36)** CDS VSX k 30.12.2012.

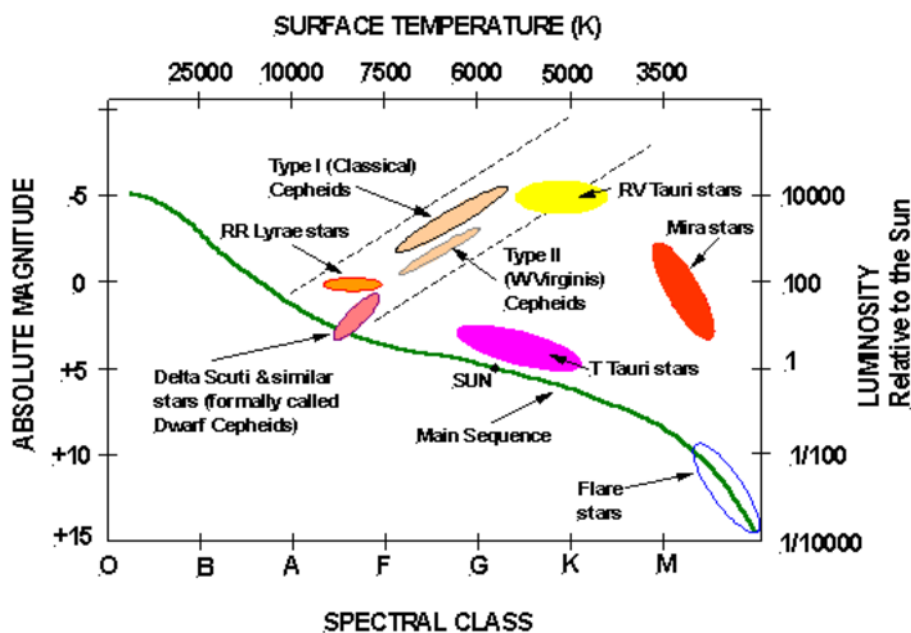


Obrázek 2.2: Rozdělení proměnných hvězd. Převzato z <http://outreach.atnf.csiro.au/>.

tak například *hvězdy typu W Ursae Majoris* jsou zákrytové dvojhvězdy s vlastnostmi podobnými jejich hlavní představitelce W UMa, miridy hvězdy typu Mira Ceti atd. Existují i proměnné hvězdy které vykazují současně hned několik typů proměnnosti, patří tedy současně do několika skupin proměnných hvězd.

Aplikace spektroskopie, výzkum kinematiky proměnných hvězd v Galaxii, měření paralax novými astrometrickými metodami (HIPPARCOS) a další nástroje umožnily odhadnout vzdálenosti řady jednotlivých proměnných hvězd a vypočítat jejich absolutní hvězdné velikosti. Tím bylo umožněno znázornit jednotlivé typy proměnných hvězd v ploše *HR diagramu* (viz obr. 2.3). Tento zcela nový pohled na problematiku výzkumu proměnných hvězd ukázal, že určité typy proměnných hvězd zde zaujímají své specifické místo. Poloha konkrétní hvězdy na HR diagramu je dána její hmotností a vývojovým stadiem. Z tohoto pohledu se hvězdná proměnnost začala vykládat jako jistá „nemoc“, kterou si hvězda v průběhu svého vývoje chtě nechtě musí prodělat (obdoba tzv. dětských nemocí).

Ale ani tento vyšší stupeň poznání nepřináší odpověď na základní otázku: „Jak a proč se jasnost proměnných hvězd mění?“ K tomu je zapotřebí nejprve vytipovat několik *základních mechanismů hvězdné proměnnosti* a pomocí nich a teorie hvězdné stavby zkonstruovat soubor *základních modelů proměnnosti*. Pak je možné rozebírat vlastnosti a chování reálných proměnných hvězd, jejichž proměnnost lze zpravidla vyložit spolupůsobením několika mechanismů proměnnosti. O modelech i mechanismech proměnnosti si povíme v dalších kapitolách.



Obrázek 2.3: Proměnné hvězdy v Hertzsprungově-Russellově diagramu. Zdroj: <http://webs.mn.catholic.edu.au/physics/emery/>.

2.6 Brno a proměnné hvězdy

Astronomie má na Masarykově univerzitě dlouhou tradici. Je zde vyučována už od dvacátých let minulého století. Krátce po druhé světové válce založil profesor Josef Mikuláš Mohr univerzitní astronomický ústav, který výrazně přispěl k rozvoji stelární astronomie v bývalém Československu. Mohrův nejlepší žák – Luboš Perek, pozdější šéf ústavu si přivezl z pobytu v Leidenu plány na stavbu reflektoru, kterou pak v Brně realizoval v univerzitní kopuli hvězdárny na Kraví hoře v roce 1954. Na astronomickém ústavu pracovalo mnoho významných českých astronomů, kromě výše jmenovaných například Vladimír Vanýsek, Jiří Grygar, Zdeněk Kvíz nebo Luboš Kohoutek.

V padesátých letech se dařilo brněnské astronomii nejen na akademické půdě, ale vznikla i lidová hvězdárna s planetáriem, v jejímž čele stanul prof. Oto Obůrka. Ten na konci padesátých let minulého století inicioval vznik pozorovacího programu krátkoperiodických proměnných hvězd pro astronomy amatéry, zejména z řad mládeže. Později tento program převzala pod svá křídla Československá a posléze Česká astronomická společnost a její obnovená Sekce pro pozorovatele proměnných hvězd. Sekce, její pozorovací program, získaná data, organizované zácvikové akce i vědecké konference pak proslavila brněnskou hvězdárnu v komunitě pozorovatelů proměnných hvězd a stelárních astronomů po celém světě. V čele Sekce se po Obůrkovi vystřídali Jindřich Šilhán, Zdeněk Pokorný, Zdeněk Mikulášek, Miloslav Zejda a od roku 2005 Luboš Brát. Se změnou vedení brněnské hvězdárny na počátku 21. století se změnily i podmínky pro činnost Sekce. Symbióza s Hvězdárnou a planetáriem M. Koperníka v Brně byla přerušena, Sekce změnila své sídlo, reorganizovala se, rozšířila svůj program. Podrobnosti lze najít na stránkách Sekce na <http://var.astro.cz>. Současné vedení brněnské hvězdárny

usiluje o navrácení odborného pozorovacího programu na půdu této instituce. Mohutná přestavba budovy v letech 2010/2011 k tomu vytvořila předpoklady.

Univerzitní astronomii se v Brně dařilo se střídavými úspěchy. Po skvělém začátku v padesátých letech se v polovině 80. let dostalo univerzitní pracoviště pod tvrdý tlak děkanátu přírodovědecké fakulty, jenž tehdy astronomii vyloženě nepřál. Po odchodu L. Perka a V. Vanýska do Prahy se stal vedoucím pouhého oddělení astrofyziky prof. Miroslav Vetešník, ale jeho pracoviště se muselo několikrát přestěhovat do stále stísněnějších prostor a personální stav se neustále snižoval. Přesto se na observatoři na Kraví hoře zásluhou prof. Miroslava Vetešníka a zejména RNDr. Jiřího Papouška stále konala soustavná a homogenní fotoelektrická měření.

Po příchodu Zdeňka Mikuláška v roce 2002 byl zatráktivněn obsah studia, zvýšil se počet studentů a také pracovníků astronomického oddělení. V současné době patří mezi hlavní vědecká témata, kterým se zaměstnanci oddělení věnují, horké hvězdy a hvězdné systémy s horkou složkou, a dále pak proměnné hvězdy všech typů. Věnujeme se komplexnímu studiu chemicky pekulárních hvězd, spojitostí mezi geometrií jejich magnetických polí a tvarem a rozložením fotometrických a spektroskopických nehomogenit na jejich povrchu. Další oblastí výzkumu jsou atmosféry a hvězdný vítr horkých hvězd, a to jak z teoretického tak i z pozorovatelského hlediska. V případě proměnných hvězd se zaměřujeme na vývoj a testování nových sofistikovaných metod pro zpracování a interpretaci napozorovaných dat, které jsou aplikovány zejména na zákrytové dvojhvězdy a miridy. Nezanedbatelnou pozornost věnujeme i výukovým metodám v astronomii a historii astronomického vzdělávání.

Astronomické oddělení Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky spolupracuje s dalšími českými a slovenskými institucemi, jmenovitě jde o Astronomický ústav Akademie věd ČR v Ondřejově a Astronomický ústav Slovenské akademie věd, zejména pak s jejich stelárními odděleními, se kterými pracujeme na několika společných projektech. Astrofyzici z těchto pracovišť rovněž zaštiťují diplomové a dizertační práce našich studentů jako školitelé. Pracovníci astronomického oddělení se podílejí na řešení řady dvoustranných projektů a spolupracují s partnerskými institucemi například v Polsku, Rakousku, Turecku, Řecku, Maďarsku, Číně, Německu a jinde (více na stránkách oddělení <http://astro.physics.muni.cz>). Příkladem prestiže a dobrého jména brněnského pracoviště byla mezinárodní konference o dvojhvězdách BINKEY, na které přednášelo řada astronomů světového jména (<http://astro.physics.muni.cz/binkey/>).

3 Pozorování proměnných hvězd

Proměnné hvězdy jsou objekty, jejichž pozorovatelné vlastnosti se průběhu času mění. Probereme si teď ve stručnosti ty charakteristiky, jichž si u proměnných hvězd všímáme nejčastěji.

3.1 Astronomická fotometrie

Hlavním zdrojem informací o proměnných hvězdách jsou časové změny jejich jasnosti. Závislost jasnosti na čase, tzv. *světelná křivka* ukazuje nejen na typ proměnnosti, ale přináší i řadu dalších podstatných informací o objektu samotném, například o jeho rozměrech a mechanismech proměnnosti a jejich parametrech.

3.1.1 Základní pojmy a vztahy

Záření přicházející k nám od zvoleného objektu lze nahlížet jako proud fotonů o různé vlnové délce λ či frekvenci ν pohybujících se rychlostí světla $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, z nichž každý nese energii E_f a hybnost p_f , přičemž platí:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (3.1)$$

kde $h = 6,626069 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$. Vlnová délka záření λ se měří v metrech, či v menších jednotkách, jako jsou nanometry $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ nebo v ångströmech, $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$, zatímco frekvence ν počítá v hertzech, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Základní fotometrickou veličinou je tzv. *hustota zářivého toku* F nebo též *bolometrická jasnost*, což je množství energie záření, které projde plochou kolmo nastavenou směrem k přicházejícímu záření o výměře 1 m^2 za 1 s . Důležité je však zdůraznit, že tato plocha musí být umístěna za hranicemi zemského ovzduší. Jednotkou bolometrické jasnosti nebo hustoty zářivého toku F je watt na metr čtvereční ($\text{W m}^{-2} = \text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$). Základní spektrofotometrickou veličinou je tzv. *spektrální hustota zářivého toku* $f_\lambda(\lambda)$ nebo $f_\nu(\nu)$, což je hustota zářivého toku v určité vlnové délce λ nebo frekvenci ν , připadající na jednotku vlnové délky (1 m , 1 nm , 1 Å) nebo jednotku frekvence (1 Hz). Jednotkami těchto možných vyjádření spektrální hustoty zářivého toku jsou watt na metr krychlový (W m^{-3}), respektive joule na metr čtvereční ($\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} = \text{J m}^{-2}$). Mezi těmito veličinami platí tyto vztahy:

$$F = \int f_\nu d\nu = \int f_\lambda d\lambda = \int f_\lambda d\left(\frac{c}{\nu}\right) = \int \frac{\lambda^2}{c} f_\lambda d\nu, \quad \Rightarrow \quad f_\nu = \frac{\lambda^2}{c} f_\lambda. \quad (3.2)$$

Závislost spektrální hustoty zářivého toku na vlnové délce nebo na frekvenci určuje *rozdělení energie ve spektru*, označované často zkratkou SED (Spectral Energy Distribution), nebo také obyčejně *spektrum* objektu.

Rigorózní určování průběhu spektrální hustoty zářivého toku $f_\lambda(\lambda)$ reálných objektů z pozemních observatoří je velice náročným měřením, takže bylo provedeno jen u několika málo nejjasnějších hvězd. Jako etalon, z něhož se pak odvozuje SED pro ostatní objekty, se užívá měření $f_\lambda(\lambda)$ Vegy. Rovněž tak měření bolometrické jasnosti F je dosti náročným úkolem

mj. i proto, že zemská atmosféra prakticky nepropuští záření s vlnovou délkou kratší než 300 nm. V minulosti se proto taková měření vedla z vysokých hor, případně výškových letadel, či ze stratosférických balónů, v současnosti se taková pozorování provádějí z paluby umělých družic či kosmických sond. Ale i tam zůstávají problémy se samotným měřením, s propustností přístrojů, citlivostí detektorů, což je i příčinou, že praktická fotometrie i spektroskopie si vypracovala jiné metody a pracovní postupy.

Při běžné astronomické fotometrii se jasnost dotyčného objektu zpravidla měří fotometrem, což je přístroj schopný detekovat světlo s účinností, která obecně závisí na vlnové délce $R_d(\lambda)$. Před fotometr se vkládají standardizované filtry c s definovanou propustností $R_{fc}(\lambda)$. Sada použitých filtrů c pak definuje tzv. *instrumentální fotometrický systém*, kde index c označuje jednotlivé filtry nebo také fotometrické barvy. Fotometr s filtrovým kolem bývá připojen k dalekohledu se svou specifickou propustností $R_t(\lambda)$. Signál od hvězdy ale musí ještě předtím projít několikakilometrovou vrstvou vzduchu se stopami vodní páry a rozptýlenými opticky aktivními částicemi prachu. Propustnost této další překážky stavící se postupujícímu záření $A(t, \lambda)$, nazývaná běžně *atmosférická extinkce*, silně závisí na vlnové délce. Hodnota atmosférické extinkce se během pozorování navíc velice výrazně mění a to jak co do amplitudy, tak i co do profilu funkce $A(t, \lambda)$. Skutečně měřená hustota toku energie záření $F_{Ac}(t)$ je při tomto uspořádání rovna integrálu součinů všech zmíněných funkcí a spektrální hustoty zářivého toku $f_\lambda(\lambda)$ přes všechny vlnové délky podle vztahu:

$$F_{Ac}(t) = \int_0^\infty A(t, \lambda) [R_{fc}(\lambda) R_d(\lambda) R_t(\lambda)] f_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty A(t, \lambda) R_c(\lambda) f_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (3.3)$$

Součin tří funkcí související s instrumentací našeho fotometru připojeného k dalekohledu $R_c(\lambda) = R_{fc}(\lambda) R_d(\lambda) R_t(\lambda)$ podle všeho málo závisí na času a výrazně na volbě konkrétního filtru c , nezávisí na momentálním stavu zemské atmosféry ve směru pozorovaného objektu, protože ta je zohledněna speciálním členem – extinkcí $A(t, \lambda)$. Pomocí funkce $R_c(\lambda)$ lze definovat instrumentální *jasnost* F_c příslušnou k filtru c a používanému přístroji¹, nebo také jasnost v odpovídající fotometrické barvě c . Měření jasností vybraných hvězd zvaných fotometrické standardy lze pomocí jednoduchých transformací dojít k jasnostem F_c v určitém mezinárodně uznávaném fotometrickém systému²:

$$F_c = \int R_c(\lambda) f_\lambda d\lambda, \quad \lambda_{efc} = \frac{\int \lambda R_c(\lambda) f_\lambda d\lambda}{\int R_c(\lambda) f_\lambda d\lambda} \simeq \frac{\int \lambda R_c(\lambda) d\lambda}{\int R_c(\lambda) d\lambda} \quad (3.4)$$

Velmi informativní charakteristikou jasnosti v určité fotometrické barvě je tzv. *efektivní vlnová délka* dané barvy λ_{efc} , která nám v podstatě zařadí data změřená v dotyčné oblasti do spektra hvězdy i do kontextu s měřeními v jiných fotometrických systémech³.

¹Pokud si svůj fotometr neodvezete za hranice zemské atmosféry, musíte se smířit s tím, že přímo vždycky budete měřit hustotu zářivého toku $F_{Ac}(t)$, nikoli F_c . Nicméně při zvolení vhodné metody pozorování lze vliv atmosférické extinkce docela dobře odhadnout a eliminovat. Bude to předmětem kap. 3.1.4.3.

²Problematikou převodu instrumentálních jasností na jasnosti mezinárodní se zabýváme v kap. 3.1.3.5, mnohem více se ale o ní dozvíte v pracích Harmanec et al (1977) a Harmanec et al. (1994).

³Jak je patrné z rovnice 3.4, hodnota efektivní vlnové délky nezávisí pouze na pozorovacím přístroji, ale i na rozložení energie ve spektru pozorované hvězdy. Platí, že čím teplejší hvězdu budeme studovat, tím kratší efektivní vlnová délka bude. Jde však o efekt druhého řádu, který téměř vymizí, pokud přejdeme k středněpásmovým nebo úzkopásmovým fotometrickým systémům.

Další důležitou charakteristikou daného filtru je i tzv. *šířka filtru* v poloviční výšce jeho maximální propustnosti FWHM (full width at half maximum), pomocí níž pak rozlišujeme mezi širokopásmovými fotometrickými systémy, středněpásmovými a specializovanými úzkopásmovými systémy, jakými jsou třeba absolutní spektrofotometrie stojící napůl mezi klasickou fotometrií a spektroskopií.

Mezi množstvím používaných fotometrických „barev“ zaujímá zvláštní postavení *vizuální obor*, definovaný filtrem V s propustností, jež odpovídá spektrální citlivosti lidského oka v denním (fotopickém) režimu vidění⁴.

Několik vhodně zvolených filtrů spojených s detektorem o specifické spektrální citlivosti vytváří instrumentální základ pro tzv. *fotometrický systém*. Nejrozšířenější je Johnsonův (standardní nebo mezinárodní) fotometrický systém a jeho dlouhodobé rozšíření (viz kapitola 3.1.3). Speciální filtry zde vymezují jasnosti v barvě U (centrum v 365 nm), B (440 nm), V (550 nm), R (700 nm), I (900 nm), J (1250 nm) atd.

Měření jasnosti hvězd v řadě fotometrických barev si lze učinit uspokojivou představu nejen o celkové hustotě zářivého výkonu F , ale i o rozložení energie ve spektru hvězd, které je dáno převážně její povrchovou teplotou T_{ef} , méně pak už dalšími charakteristikami hvězd jako jsou chemické složení nebo povrchové gravitační zrychlení g .

Astronomové z tradičních i praktických důvodů vyjadřují jasnost zdroje záření pomocí tzv. *hvězdné velikosti* vyjadřované v jednotkách zvaných *magnitudy*. Hvězdná velikost m je logaritmická veličina svázaná s příslušnou jasností F_c v barvě c nebo bolometrickou jasností F v celém rozsahu spektra tzv. *Pogsonovou rovnicí*:⁵

$$m_c = -2,5 \log \left(\frac{F_c}{F_{0c}} \right) \text{ mag}, \quad m_{\text{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right) \text{ mag}, \quad (3.5)$$

kde F_{0c} je tzv. referenční jasnost, kterou má zdroj s nulovou hvězdnou velikostí.

Veličinou je tedy hvězdná velikost, jednotkou 1 magnituda, která má povolenou zkratku mag.⁶ Podle typu jasnosti rozeznáváme např. vizuální hvězdnou velikost m_V , označovanou někdy přímo V , $V = 3,18 \text{ mag}$, bolometrickou hvězdnou velikost m_{bol} aj.

Převodní vztahy mezi bolometrickou jasností F_{bol} a bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} vycházejí z definice, podle níž hvězda s bolometrickou hvězdnou velikostí $m_{\text{bol}} = 0 \text{ mag}$ působí mimo zemskou atmosféru hustotu zářivého toku $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$. Lze tedy psát:

$$F = 2,553 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} 10^{-0,4 m_{\text{bol}}}, \quad m_{\text{bol}} = (-18,9824 - 2,5 \log F) \text{ mag}. \quad (3.6)$$

V případě vizuální hvězdné velikosti m_V je referenční jasnost pro $m_V = 0 \text{ mag}$ stanovena na $F_{0V} = 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$.⁷

Hvězdy v aktivní části svého života o sobě dávají vědět především svým elektromagnetickým zářením. Množství elektromagnetické energie v dané fotometrické barvě c vyslané

⁴Maximum propustnosti filtru V leží u 554,4 nm, šířka činí 84,3 nm (Moro & Munari, 2000). Hustota zářivého toku v barvě V se tak přímo ztotožňuje hustotou světelného toku, nebo-li *jasností* j . Jednotkou jasnosti je i zde v principu W m^{-2} , vizuální jasnost lze ovšem též vyjadřovat ve speciálních jednotkách zavedených pro světlo: $[j] = 1 \text{ lumen m}^{-2}$

⁵Konstanta 2,5 v Pogsonově rovnici byla z historických důvodů vybrána tak, aby platilo, že při rozdílu 5 mag je poměr jasnosti 1:100 ($\log(100) = 2$). Pro poměr jasností dvou objektů, jejichž hvězdná veličina je vzdálena právě o 1 mag, platí: $F_{c2}/F_{c1} = 10^{0,4} = 2,511886$ Nezaměňujte prosím s výše vzpomínanou konstantou 2,5 v Pogsonově rovnici.

⁶Rčení jako: „magnituda hvězdy je 4,7 mag“ nemají smysl. Rovněž nedoporučujeme psát do exponentu malé m : 4^m , protože „ m “ v exponentu je již vyhrazeno pro vyjádření úhlů v h m s .

⁷Ve speciálních jednotkách platných jen pro barvu V to pak vypadá tak, že $j_0 = 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ lm m}^{-2} = 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ luxů}$.

za 1 sekundu do prostorového úhlu 1 steradiánu (směřujícího k pozorovateli) vyjadřuje tzv. *zářivost* zdroje, I_c , jež má rozměr $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$. Zářivost úzce souvisí s tzv. *absolutní jasností* v barvě c , J_c , což je hustota zářivého toku hvězdy $F_c = \int R_c(\lambda) f_\lambda(\lambda) d\lambda$ ve vzdálenosti $r_0 = 10 \text{ pc} = 3,08568 \cdot 10^{17} \text{ m}$, a *absolutní velikostí* M_c , což je hvězdná velikost objektu sledovaného v barvě c rovněž z 10 pc.

$$J_c = \frac{I_c}{r_0^2} = 1,050265 \cdot 10^{-35} \text{ W m}^{-2} I_c, \quad I_c = 9,521406 \cdot 10^{34} \text{ m}^2 \text{sr}^{-1} J_c. \quad (3.7)$$

$$I_c = 2,431 \cdot 10^{27} \text{ W sr}^{-1} 10^{-0,4 M_c}, \quad M_c = (68,464 - 2,5 \log I_c) \text{ mag}, \quad (3.8)$$

$$F_c = \frac{I_c}{r^2} = J_c \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad \Rightarrow \quad m_c - M_c = 5 \log \left(\frac{r}{r_0} \right) = (m - M)_0, \quad (3.9)$$

kde r je vzdálenost hvězdy. Poslední ze vztahů je důsledkem toho, že se světlo šíří přímočaře, a platí tedy plně i pro měření v jakýchkoli filtrech⁸. Veličina $(m - M)_0$ se nazývá *modul vzdálenosti*, a je tou vzdáleností plně určen.

V reálné situaci je třeba ještě uvažovat tzv. *mezihvězdnou extinkci*, neboli zeslabení světla způsobené zpravidla rozptylem na prachových částicích mezihvězdné látky A_c , jejíž velikost je zhruba nepřímou úměrná v efektivní vlnové délce dané fotometrické barvy, takže pak pro danou hvězdu platí:

$$m_c = M_c + (m - M)_0 + A_c = M_c + 5 \log r - 5 + A_c = M_c - 5 \log \pi - 5 + A_c, \quad r = \frac{1}{\pi}, \quad (3.10)$$

kde π je paralaxa v úhlových vteřinách, r je vzdálenost hvězdy vyjádřená v parsecích.

Za předpokladu, že hvězda září do prostoru rovnoměrně ve všech směrech, tedy izotropně, lze přejít od zářivosti I_c , udávané v jednotkách watt na steradián, k *zářivému toku* v barvě c Φ_c . Při izotropii⁹ pak platí:

$$\Phi_c = \int I_c(\Omega) d\Omega = I_c \int d\Omega = 4\pi I_c = 4\pi r_0^2 J_c = 1,1965 \cdot 10^{36} J_c, \quad (3.11)$$

Zářivý tok hvězdy v barvě c Φ_c měříme ve wattech, můžeme jej ale vyjádřit i pomocí *absolutní jasnosti* J_c .

V případě *zářivého výkonu hvězdy* nebo také celkového zářivého toku či luminosity L se tato veličina vyjadřuje též ve výkonech *nominálního Slunce* L_\odot , $L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$, $M_{\text{bol}\odot} = 4,750 \text{ mag}$.

$$L = 3,055 \cdot 10^{28} \text{ W } 10^{-0,4 M_{\text{bol}}} = 79,43 L_\odot 10^{-0,4 M_{\text{bol}}}, \quad (3.12)$$

$$M_{\text{bol}} = 71,2125 - 2,5 \log L = 4,750 - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right). \quad (3.13)$$

⁸Pokud bychom dokázali světlo detekovat v celém rozsahu spektra stejně dobře, pak by platilo $R_c(\lambda) = 1$, a tedy $F_c = F$. Jasnost F_c by byla rovna jasnosti bolometrické F . Z formálního hlediska je tak bolometrická jasnost zvláštním případem jasnosti v nějaké fotometrické barvě, což znamená, že na ni můžeme aplikovat všechny vztahy platné pro F_c .

⁹Zářivý tok řady proměnných hvězd, jako jsou třeba rotující hvězdy se skvrnami na povrchu nebo zákrytové dvojhvězdy se v čase nemění, a přesto pozorujeme jejich proměnnost. Uvědomme si, že proměnnost hvězdy primárně souvisí s jejich zářivostí I_c , která se může z důvodu rotace nebo oběhu cyklicky měnit.

3.1.2 Rozložení energie ve spektru hvězdy

3.1.2.1 Záření AČT. Efektivní teplota. Spektrofotometrie

Hvězdy jsou tělesa o hmotnostech od několika setin hmotnosti Slunce do několika desítek Sluncí držená pohromadě vlastní gravitací. Tvořena jsou hustým vysokoteplotním plazmatem o teplotě několika milionů kelvinu ve stavu blízkém termodynamické rovnováze. Přírozenou součástí hvězdného materiálu jsou i fotony, které v něm neustále vznikají a zanikají. Veškeré tyto procesy jsou v takřka dokonalé rovnováze, stav plazmatu i fotonového plynu lze velice přesně popsat vztahy a rovnicemi odvozenými pro stav tzv. termodynamické rovnováhy (TR). Zde je hlavním parametrem, který popisuje statistické vlastnosti systémů v TR a jejich složek *termodynamická teplota* T , počítaná v kelvinech. Tak například pro hustotu energie fotonů w v joulech na metr krychlový, jejich koncentraci n_f a zářivý tlak P_r v pascálech nebo v J m^{-3} platí:

$$w = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad n_f = 2,029 \cdot 10^7 T^3, \quad P_r = \frac{1}{3} w = \frac{4\sigma}{3c} T^4, \quad (3.14)$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, $\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Rozložení energie ve spektru fotonového plynu určuje tzv. *Planckův vyzařovací zákon* vyjadřující závislost spektrální hustoty zářivého toku (množství energie vyzařené jednotkovou plochou tělesa v jednotkovém intervalu frekvencí nebo vlnových délek za jednotku času) tzv. *absolutně černého tělesa* (AČT) B_ν , B_λ :

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad B_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} B_\nu(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}, \quad (3.15)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, $k = 1,3806505 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. Pokud platí, že $hc \gg k\lambda T$, lze jedničku ve jmenovateli zanedbat a Planckův zákon se pak změní na jednodušší *Wienův vyzařovací zákon*, s nímž pro spoustu astrofyzikálních aplikací dobře vystačíme.

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}, \quad B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)}. \quad (3.16)$$

Stav termodynamické rovnováhy se velmi brzy rozhostí v dokonale izolované soustavě, která si s okolím nevyměňuje ani částice, ani energii. Pokud by však hvězdy skutečně byly v TR, asi bychom o nich nevěděli, protože by nezářily. Reálné hvězdy však v izolaci nejsou, s okolním chladným vesmírem sousedí povrchovými vrstvami, nazývanými hvězdné atmosféry. V těchto atmosférách se pak hvězdné fotony vymaňují z těsného kontaktu s částicemi hvězdné látky a rychlostí světla se vydávají na dlouhou pouť do vesmíru. Kromě energie a hybnosti si sebou do světa nesou i informaci o stavu hvězdné atmosféry, v níž se zrodily. Veškeré rozbory vlastností světla hvězd nás tak neinformují o hvězdách samotných, ale o jejich fotosférách – tenoučkých, řídkých a chladných povrchových vrstvách hvězd, odkud k nám přicházejí hvězdné fotony.

Hvězdné fotosféry v principu nejsou a ani nemohou být ve stavu termodynamické rovnováhy popsané termodynamickou teplotou T , tak, jak tomu je ve vrstvách pod nimi. Projeví se to mj. i na spektrálním rozložení energie vystupujícího záření. V hvězdném spektru rozlišujeme emisní spojitou složku, na jejímž pozadí pak pozorujeme různě intenzivní spektrální čáry svědčící o povaze interakce záření s látkou v atmosféře. Analýza profilů spektrálních čar nám umožňuje stanovit chemické složení fotosfér, jejich hustotu, excitační a ionizační poměry, pohybový stav látky ve fotosféře, velikost magnetického pole i frekvenci srážek mezi částicemi. Těmito úkoly se zabývá zejména *hvězdná spektroskopie*. Pro světlo hvězdy, a tím i pro *hvězdnou fotometrii*

je ovšem důležitější ona spojitá emisní složka záření hvězdy, zvaná též kontinuum. Diagnostika kontinua pak umožňuje určit globální charakteristiky hvězdy, jako je její zářivý výkon, obsah těžších prvků a třeba povrchové gravitační zrychlení g .

Rozložení energie ve spektru reálných hvězd je komplikovanou funkcí vlnové délky, navíc pro každou hvězdu je specifické, podobně jako otisk palce pro lidského jedince. Nicméně v hrubých rysech je možné jej aproximovat zářením absolutně černého tělesa o teplotě několika tisíc kelvinů. Pro názornější popis tohoto rozložení zavádíme parametr nazývaný *efektivní teplota* T_{ef} , který je číselně roven termodynamické teplotě, kterou by měla koule o poloměru fotosféry hvězdy R , zářící jako absolutně černé těleso, jež do prostoru vysílá zářivý tok L , stejný jako zkoumaná hvězda. Zářivý výkon hvězdy L , i její poloměr R lze v principu přímo změřit. Efektivní teplota hvězdy T_{ef} je s nimi svázána prostřednictvím *Stefanova zákona* tak, že platí:

$$L = \sigma T_{\text{ef}}^4 4 \pi R^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{L_{\star}}{L_{\odot}} = \left(\frac{T_{\text{ef}\star}}{T_{\text{ef}\odot}} \right)^4 \left(\frac{R_{\star}}{R_{\odot}} \right)^2, \quad (3.17)$$

kde σT_{ef}^4 je zářivý výkon 1 m² plochy o termodynamické teplotě rovnající se T_{ef} , a $4 \pi R^2$ je plošná výměra koule o poloměru R . Sluneční zářivý výkon je $L_{\odot} = 3.864 \cdot 10^{26}$ W, efektivní teplota $T_{\text{ef}\odot} = 5780$ K, a poloměr $R_{\odot} = 6,969 \cdot 10^8$ m. Je zjevné, že výkon hvězdy závisí především na její efektivní teplotě, a teprve v druhé řadě na její velikosti. To je i příčinou skutečnosti, že se na hvězdné obloze tak často setkáváme s hvězdami teplejšími než Slunce, i když v Galaxii jsou ve výrazné početní menšině.

Efektivní teplota hvězdy T_{ef} , ovšem nepopisuje jenom celkový zářivý výkon hvězdy, ale informuje nás též o rozložení energie ve spektru (SED). Toto rozložení nám udává závislost spektrální hustoty zářivého toku f_{ν} či f_{λ} na frekvenci ν , případně na vlnové délce λ (viz rov. 3.2). Jistě by bylo výtečné, pokud bychom měli pro každou hvězdu tyto veličiny k dispozici, protože pomocí nich si už můžeme vypočítat, co potřebujeme, a můžeme je též srovnávat s teoretickými předpověďmi SED a meditoval nad příčinami možných rozdílů mezi teorií a skutečností. Tak tomu však není. Absolutní kalibrace spektrální hustoty zářivého toku F_{λ} patří mezi ty nejsvízelnější úkoly praktické spektrofotometrie. Naštěstí je možné postupovat tak, že velmi důkladně a odpovědně proměříme rozložení energie ve spektru jedné, kalibrační hvězdy, vůči níž už pak budeme ostatní svá pozorování ostatních hvězd vztahovat.

Za kalibrační hvězdu byla vybrána α Lyrae neboli Vega, jíž byl přisouzen nominální spektrální typ A0 V, a hvězdná velikost v barvě $V = 0$ mag. V následující tabulce jsou uvedeny naměřené hodnoty spektrální hustoty zářivého toku $f_{\lambda}(\lambda)$ v jednotkách 10^{-11} W m⁻² nm⁻¹ pro efektivní vlnové délky fotometrických barev nejužívanějších fotometrických systémů – širokopásmového rozšířeného mezinárodního systému Johnsonova a Strömgenova úzkopásmového systému *wby*:

filtr	<i>u</i>	<i>U</i>	<i>v</i>	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>y</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>H</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>
λ_{ef} [μm]	0,35	0,365	0,41	0,44	0,46	0,55	0,55	0,7	0,9	1,25	1,65	2,2	3,5	4,8
$f_{\lambda}(\lambda)$	3,25	4,22	7,18	6,40	5,81	3,70	3,75	1,70	0,83	0,307	0,12	0,041	0,0064	0,0019

Pozorovatelsky jednodušším prostředkem pro posouzení rozložení energie ve spektru hvězdy je *absolutní spektrofotometrie*, kde se poměřuje průběh spektrální hustoty zářivé energie $F_{\lambda}(\lambda)$ vztahované k spektrální hustotě zářivé energie v nějaké referenční vlnové délce, nejčastěji $\lambda_r = 500$ nm (jde tedy o jistý barevný index vztahovaný k λ_r). Pro tento účel se zavádí speciální

diferenciální *spektrofotometrická hvězdná velikost* $m(\lambda)$:

$$m(\lambda) = -2,5 \log \left(\frac{F_\lambda(\lambda)}{F_\lambda(\lambda_r)} \right). \quad (3.18)$$

Z definice plyne, že *spektrofotometrická hvězdná velikost* $m(\lambda)$ je pro referenční vlnovou délku vždy rovna nule.

Prakticky se absolutní spektrofotometrie provádí měřením jasnosti hvězdy úzkopásmovou fotometrií vymezenou filtry s velmi malou šířkou spektrální propustnosti (menší než 1 nm) v několika desítkách vybraných vlnových délek. Měření jsou to i tak dosti náročná, opírají se vždy o velmi pečlivou kalibraci měřícího přístroje a důkladné očištění o vliv atmosférické a též mezihvězdné extinkce.

Vzhled závislosti $m(\lambda)$ na vlnočtu (převrácené hodnotě vlnové délky) u konkrétní hvězdy je složitou funkcí parametrů popisujících vlastnosti její atmosféry, dané zejména její efektivní teplotou T_{ef} , chemickým složením a gravitačním zrychlením při povrchu hvězdy g^* (v m s^{-2}), které se obvykle vyjadřuje veličinou $\log g$, $\log g = \log g^* + 2$ (logaritmus gravitačního zrychlení v soustavě CGS). Odchyly od ideálního průběhu daného zářením absolutně černého tělesa téže efektivní teploty jsou zvláště markantní pro hvězdy spektrální třídy A, kde intenzita čar nejhojnějšího z prvků – vodíku, dosahuje svého maxima.

Absolutní spektrofotometrie popisující relativní rozložení energie ve spektru je jistě velmi komfortní záležitost, bohužel k dispozici je pozorování jen několik stovek těch nejjasnějších hvězd. Je totiž náročná na světlo, na pozorovací podmínky a na přístrojové vybavení, které má jen několik observatoří na světě. Naproti tomu studií, kde se rozložení energie ve spektru studuje prostřednictvím tzv. barevných indexů, jsou tisíce.

3.1.2.2 Barevné indexy

Barevný index hvězdy CI (z angl. colour index) je rozdílem hvězdných velikostí téže hvězdy určených ve dvou rozdílných barvách c_1 a c_2 (vlnových délkách), pro jejichž efektivní vlnové délky λ_{c_1} a λ_{c_2} platí: $\lambda_{c_1} < \lambda_{c_2}$.

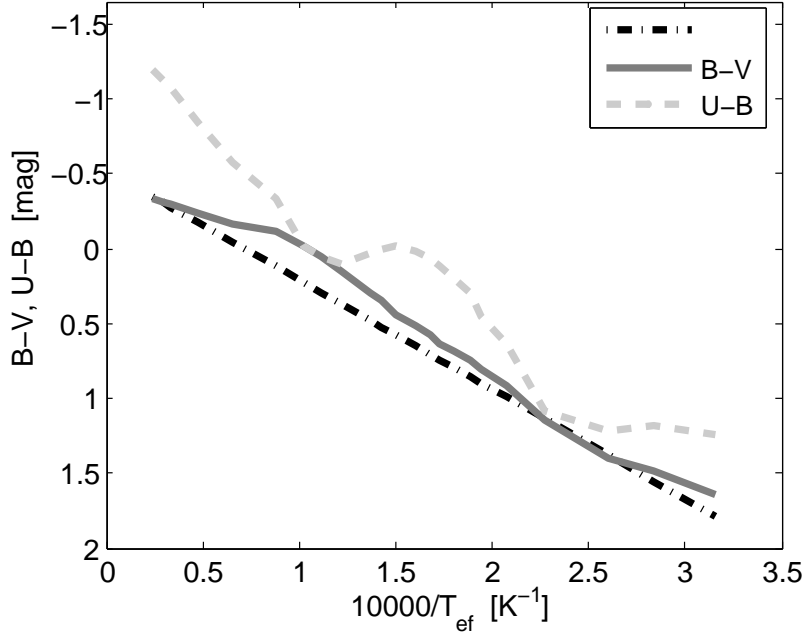
Většina používaných fotometrických systémů přitom respektuje úmluvu, podle níž by měly mít referenční hustoty toku záření F_{0c} (viz rovnice 3.5) všech fotometrických barev takové hodnoty, aby měla hvězda spektrálního typu A0V nedotčená mezihvězdnou extinkcí stejnou hvězdnou velikost ve všech barvách. Pro takovou hvězdu by přirozeně by byly všechny barevné indexy nulové.

K výpočtu barevného indexu použijeme vztahy 3.4 a 3.5

$$\begin{aligned} CI(T) = m_{c_1} - m_{c_2} &= -2,5 \log \left[\frac{F_{\lambda_{c_1}}}{F_{\lambda_{c_2}}} \frac{F_{\lambda_{0c_2}}}{F_{\lambda_{0c_1}}} \right] = -2,5 \log \left[\frac{\int R_{c_1} f_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int R_{c_2} f_\lambda(\lambda) d\lambda} \frac{F_{\lambda_{0c_2}}}{F_{\lambda_{0c_1}}} \right] \simeq \\ &\simeq -2,5 \log \left\{ \left[\frac{f_\lambda(\lambda_{\text{ef}c_1})}{f_\lambda(\lambda_{\text{ef}c_2})} \right] \left[\frac{F_{\lambda_{0c_2}} \int R_{c_1} d\lambda}{F_{\lambda_{0c_1}} \int R_{c_2} d\lambda} \right] \right\} = -2,5 \log \left[\frac{f_\lambda(\lambda_{\text{ef}c_1})}{f_\lambda(\lambda_{\text{ef}c_2})} \right] + K_{c_1c_2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde $K_{c_1c_2}$ je pro daný barevný index konstanta s jednotkou magnituda. Podíl uvedený v hranaté je funkcí teploty. Pro jeho odhad použijeme Wienův zákon, podle něhož je $f_\lambda(\lambda, T) \sim \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{k\lambda T}\right)$, kde k je Boltzmannova konstanta. Dosadíme-li znovu do rov.3.19 dostaneme po chvíli algebry takovouto funkční závislost barevného indexu na teplotě:

$$CI(T) = -2,5 \log \left\{ \frac{\lambda_{\text{ef}c_2}^5}{\lambda_{\text{ef}c_1}^5} \exp \left[\frac{hc}{kT} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{ef}c_2}} - \frac{1}{\lambda_{\text{ef}c_1}} \right) \right] \right\} + K_{c_1c_2} = \frac{C_1}{T} - C_2, \quad (3.20)$$



Obrázek 3.1: Závislost barevných indexů ($B-V$) a ($U-B$) na převrácené hodnotě efektivní teploty T_{ef} . Je patrné, že závislosti nejsou zdaleka přímkové, jak by vyplývalo ze záření AČT, ale zvlněné, což platí zejména pro závislost ($U-B$). Důvodem je zjevná odchylka záření hvězdy od záření AČT s toutéž efektivní teplotou. Čerchovanou čarou je naznačena předpověď ($B-V$) podle vztahu (3.21), pokud zaměníme barevnou teplotu za efektivní.

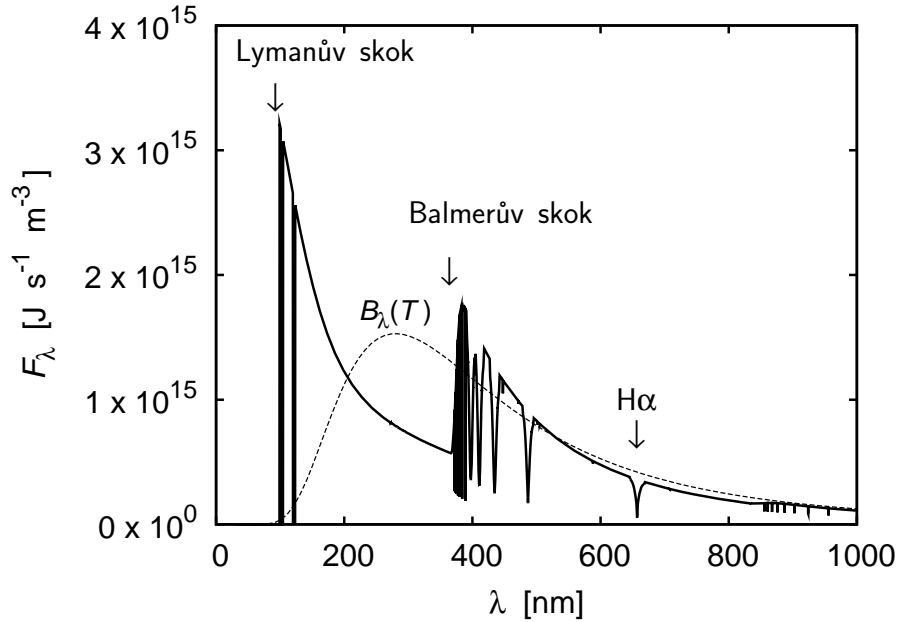
kde C_1 , C_2 jsou složité, leč konstantní funkce všech vstupních parametrů. Vzhledem k tomu, že tato teplota byla odhadnuta pomocí barevného indexu, mluví se o ní, jako o *barevné teplotě* T_b . Forma závislosti pak třeba opravňuje následující přibližný empirický¹⁰ vztah mezi indikátorem teploty – barevným indexem $B-V$ a efektivní teplotou

$$T_b = \frac{7300}{(B - V) + 0,52}. \quad (3.21)$$

Barevná teplota se obecně odlišuje od efektivní teploty T_{ef} , navíc pro každý jiný barevný index obecně dostaneme jinou barevnou teplotu. V oblasti efektivních teplot kolem 10 000 K kdy vodíkové čáry nabývají své maximální intenzity, jsou odchylky rozložení energie ve spektru hvězdy od záření AČT téže efektivní teploty velmi výrazné. Přesvědčit se o tom můžete na modelovém případě demonstrovaném na obr. 3.2. Barevné teploty jsou navíc silně ovlivněny mezihvězdnou extinkcí, kterou je nutno předem odečíst (viz kap. 3.1.4.2).

Pro lepší diagnostiku hvězd se zavádějí i složitější barevné indexy jako lineární kombinace naměřených hvězdných velikostí v rámci určitých fotometrických systémů, v nichž jsou měřeny hvězdné velikosti pro různé barvy c_i : $CI_j = \sum a_{ij} m(c_i)$. Příkladem může posloužit astrofyzikálně důležitý Strömgrenův systém $uvby$ (viz kap. 3.1.3.3), kde se

¹⁰Tento vztah byl odvozen na základě skutečně pozorovaných barevných indexů $B-V$ a efektivních teplot, AČT posloužil jen jako inspiraci.



Obrázek 3.2: Rozložení energie ve spektru hvězdy s efektivní teplotou $T_{\text{ef}} = 10\,000\text{ K}$ s atmosférou složenou pouze z vodíku a hélia. Ve spektru hvězdy dominují silné vodíkové čáry v oblasti volně-vázaných přechodů (Balmerův skok). Rozložení energie pro AČT s teplotou $10\,000\text{ K}$, $B_{\lambda}(T)$, se od hvězdného nejvíce odchyľuje v oblasti ultrafialového záření. V optické oblasti je zesíleno kontinuum za Balmerovým skokem až po barvu V , což je pak příčinou menšího barevného indexu, než by měl být – hvězda se zde jeví jako objekt s vyšší teplotou.

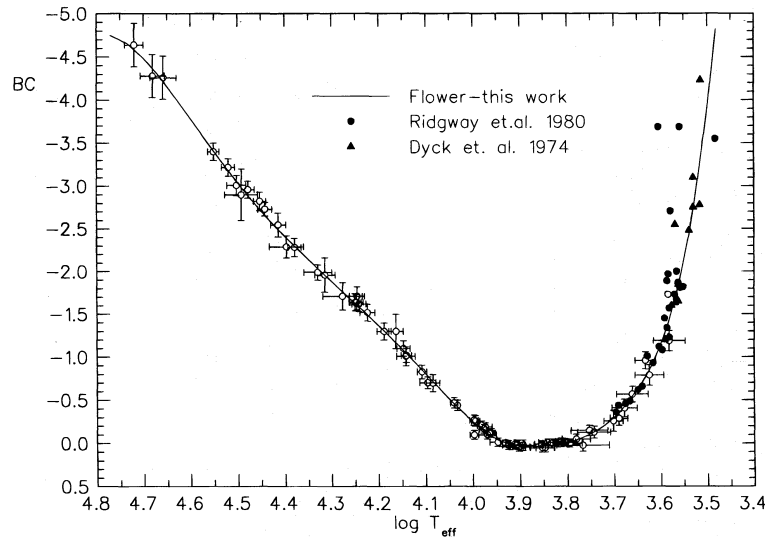
místo hvězdných velikostí v uvedených barvách často používá i složitějších barevných indexů: $y = V$, $(b - y)$, $m_1 = (v - b) - (b - y)$, $c_1 = (u - v) - (v - b)$.

Zvláštním případem barevného indexu je tzv. *bolometrická korekce BC* daná rozdílem mezi bolometrickou hvězdnou velikostí hvězdy a její vizuální hvězdnou velikostí, takže $BC = m_{\text{bol}} - m_V$. Bolometrická korekce, rovněž vyjadřuje rozložení energie ve spektru objektu, jež je v případě hvězd určeno v první řadě efektivní teplotou T_{ef} . Bolometrická korekce byla definována tak, aby byla nulová u hvězd o povrchové teplotě kolem 7000 K , jejichž záření má největší světelnou účinnost (hvězdy spektrálního typu F). Směrem k vyšším i nižším teplotám bolometrická korekce klesá, v extrémních případech dosahuje až několika magnitud! (viz obrázek 3.3). Tento fakt je vyjádřením skutečnosti, že u hvězd relativně vysoké či nízké teploty se maximum vyzařované energie přesouvá do ultrafialové, respektive infračervené oblasti spektra, kde již není lidské oko citlivé.

3.1.3 Fotometrické systémy

V astronomické praxi se pro měření jasnosti kosmických objektů používá jasně definovaná soustava speciálních fotometrických filtrů, které spolu tvoří *fotometrický systém*.

Filtry, které se vkládají do optické cesty při fotometrování, propouštějí světlo v definovaném intervalu elektromagnetického spektra a určují tak *barvy* fotometrického systému. V současnosti výběr filtrů fotometrického systému již není náhodný, dosti často bývá



Obrázek 3.3: Bolometrická korekce BC v závislosti na logaritmu efektivní teploty hvězd. Převzato z Flower (1996).

šit na míru povaze rozložení energie ve spektru zkoumaných objektů¹¹. Výběr pásem toho kterého fotometrického systému je ovšem diktován jak astrofyzikálními, tak ryze i praktickými důvody, jako jsou cena filtrů a jejich přístupnost na trhu, spektrální citlivost dostupných detektorů, nutnost vyhnout se některým spektrálním oblastem apod.

Šířka pásma propustnosti použitých filtrů dělí používané fotometrické systémy do tří tříd: jednak jsou to *širokopásmové* systémy (například Johnsonův systém *UBV*) pokrývající nejméně 30 nm v každém z filtrů, dále pak *středněpásmové* systémy, jako *uvby* s pásmy od 10 do 30 nm, a konečně víceméně monochromatické *úzkopásmové* systémy s křivkou propustnosti několika málo nm, které propouštějí jen velice úzkou část spektra hvězdy, nebo dokonce vydělují jen některé vybrané spektrální čáry.

V současné době existuje už přes dvě stě nejruznějších fotometrických systémů¹², ale jen několik z nich se dočkalo většího rozšíření.

U většiny systémů je možné provést standardizaci, tedy přepočítat výsledky naměřené určitým dalekohledem na určitém místě a s určitým detektorem na standardní podmínky (více v kap. 3.1.3.5). K tomu je nezbytné mít s dostatečnou přesností proměřené např. propustnosti užitých filtrů a citlivosti detektorů. Bohužel spousta originálních a neopakovatelných měření ztratila svou výpovědní hodnotu právě proto, že tato korekční měření nebyla provedena nebo byla provedena nepřesně a jediné originální fotometrické filtry daného fotometrického systému byly zničeny. Naštěstí se jedná jen o několik víceméně historických případů.

Se standardizací fotometrických měření se začalo víceméně až po zavedení Johnsonova systému *UBV*. Od padesátých let minulého století lze tedy pro většinu systémů

¹¹Týká se to zejména objektů s atypickým SED, jako jsou třeba extrémně červené uhlíkové hvězdy, Wolfovy Rayetovy hvězdy, chemicky pekulární hvězdy, novy či komety

¹²Přehled systémů pod názvem *Asiago Database on Photometric Systems*, který sestavili Ulisse Munari, Massimo Fiorucci a Dina Morolze, lze najít na stránce <http://ulisse.pd.astro.it/Astro/ADPS/>.

standardizaci měření provádět. Různé observatoře konečně mohly začít porovnávat své výsledky a pracovat na společných projektech. Tato unifikace přinesla své ovoce zejména při výzkumu proměnných hvězd.

Pološírka fotometrických barev by měla být co nejmenší, aby se potlačil vliv členů druhého a vyššího řádu. Současně by měla být limitní hvězdná velikost co nejvyšší. Takovýto optimální fotometrický systém by se hodil pro co nejpřesnější stanovení spektrálního typu, luminozitní třídy, typu hvězdné populace, velikosti mezihvězdné extinkce, což by bylo možné odvodit pouze pomocí těchto parametrů nebo barevných indexů. Žádný takový ideální fotometrický systém ale v principu nemůže existovat, všechny jsou jen jistým kompromisem, přiblížením se k tomuto ideálu.

Praktický fotometrický systém musí počítat s odlišnostmi instrumentálního vybavení a stavu atmosféry, takže kromě definice propustnosti idealizovaných fotometrických filtrů musí obsahovat i dostatečný počet dobře proměřených pečlivě vybraných neproměnných hvězd, *hvězdných standardů*. Bez tohoto kroku není možný převod z hvězdných velikostí změřených ve vlastním – *instrumentálním* fotometrickém systému na systém *standardní*.

3.1.3.1 Historické fotometrické systémy

Vizuální hvězdné velikosti m_{viz}

Lidské oko, jakožto detektor světla, je nejcitlivější ve žlutozelené oblasti spektra, maximum citlivosti je kolem 550 nm pro vidění denní (fotopické), 480 nm pro vidění noční (skotopické), které se uplatní jen při velice nízkém osvětlení adaptované sítnice.

První vizuální odhady jasnosti uvedl ve svém katalogu Hipparchos, který kodifikoval systém hvězdných velikostí. Vizuální odhady jsou tabelovány také v několika velkých hvězdných katalozích z 19. století, např. HD katalogu. Přesnost těchto odhadů je nevelká – desetiny magnitudy, navíc je škála hvězdných velikostí v oblasti nízkých jasností silně deformovaná.

Fotografické hvězdné velikosti m_{pg}

Po vynálezu světlocitlivých fotografických emulzí začaly být velmi brzy jasnosti hvězd proměřovány na fotografiích. Tento postup podstatně zvýšil objektivitu měření a též jejich dosah do oblastí velmi slabých hvězd. Protože běžné nesenzibilované fotografické desky byly citlivé spíše na krátkovlnné záření, lišily se fotografické hvězdné velikosti od hvězdných velikostí vizuálních v závislosti na barvě hvězd, která je zase funkcí jejich efektivní teploty. Astronomové velice brzy zjistili, že existuje velice dobře definovaná korespondence mezi spektrálním typem hvězd a barevným indexem ($m_{pg} - m_{viz}$). Vzhledem k tomu, že takový barevný index bylo možné zjišťovat i u hvězd, které pro jejich malou jasnost nebylo tehdy možné spektroskopicky zkoumat, zastupoval barevný index parametr vyjadřující teplotu hvězdy.

Fotometrie s prvními fotocitlivými diodami

První fotoelektrická měření jasností hvězd prováděli Stebbins (1916) na Lickově observatoři v USA a Guthnick a Prager (1918) v Potsdamu v Německu. Přesnost měření vzrostla až na několik setin magnitudy. Maximum citlivosti diody používané Stebbinsem se nacházelo v modrozelené barvě kolem 500 nm. Naproti tomu diody užívané v Potsdamu byly nejcitlivější v modré oblasti spektra.

Fotometrie s fotonásobiči a barevnými filtry

V období mezi dvěma světovými válkami se postupně začalo používat fotometrů, jejichž detektorem byl fotonásobič se zdrojem vysokého napětí. Zvýšená citlivost fotonásobičů dovolila

používat i různé barevné filtry vymezující sledovanou oblast elektromagnetického záření. Existují v té době i měření v několika barvách, měření však nebyla nikdy důsledně standardizována, takže jsou nyní jen těžko využitelná.

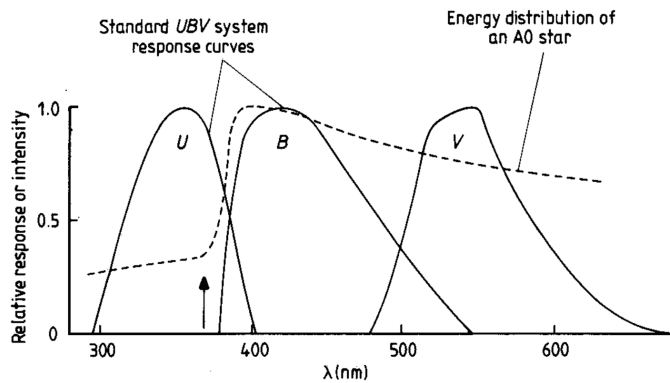
3.1.3.2 Johnsonův mezinárodní systém a jeho rozšíření

Nejznámějším a nejrozšířenějším hvězdným fotometrickým systémem založeným na třech širokopásmových filtrech je systém *UBV* zavedený Johnsonem¹³ a jeho spolupracovníky Johnson & Morgan (1953) v polovině minulého století. Ten je realizován třemi filtry:

U: propustnost od 300 nm do 420 nm s maximem propustnosti kolem 358 nm;

B: propustnost od 360 nm do 500 nm s maximem u 439 nm;

V: propustnost od 460 nm do 740 nm s maximem u 545 nm.



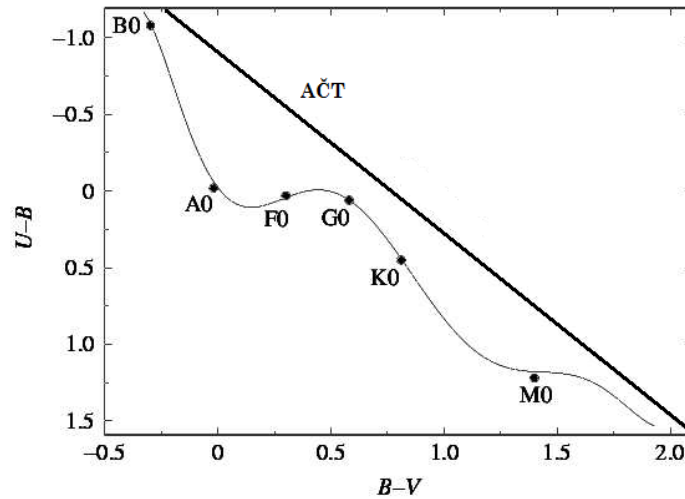
Obrázek 3.4: Propustnost filtrů v systému *UBV*

Johnson a jeho spolupracovníci proměřili pomocí amerického fotonásobiče IP21 mnoho tisíc hvězd a svá měření v *UBV* publikovali. Díky tomu a díky jasně definovaným vztahům mezi určitými fyzikálními vlastnostmi hvězd a barvami určenými barevnými indexy (*U-B*) a (*B-V*) se jejich systém stal nejužívanějším hvězdným fotometrickým systémem.

V některých aplikacích se s oblibou používá diagram závislosti barevného indexu (*U-B*), který odráží specifické vlastnosti hvězdných fotosfér, na barevném indexu (*B-V*), jež je mírou efektivní teploty. Na obrázku 3.5 je znázorněna závislost (*U-B*) na (*B-V*) pro hvězdy hlavní posloupnosti neovlivněné mezihvězdnou extinkcí. Všimněte si dohodnuté orientace os tohoto diagramu – v levém horním rohu jsou hvězdy namodralé s vysokou efektivní teplotou, v levém dolním pak pozdní načervenalé hvězdy s nízkou teplotou. Naznačena je i téměř přímková závislost pro absolutně černé těleso. Největší odchylka od tohoto průběhu je pozorována u spektrálního typu A0, s maximem Balmerova skoku a pro hvězdy chladné, kde rozložení energie silně modifikují molekulární spektrální pásy.

Pro hvězdy jiných luminozitních tříd (jiných povrchových gravitačních zrychlení) vyhlíží tento diagram dost odlišně. V zásadě tak lze pomocí polohy hvězdy na třibarevném diagramu

¹³Systém je označován jako Johnsonův, ale někdy též jako Johnsonův-Morganův.



Obrázek 3.5: Diagram $(U-B) - (B-V)$ sestavený pro hvězdy hlavní posloupnosti neovlivněné mezihvězdnou extinkcí. Šikmá čára naznačuje průběh diagramu za předpokladu, že by hvězdy skutečně zářily jako AČT.

odvodit jak její efektivní teplotu T_{ef} a tím i spektrální třídu, tak i luminozitivní třídu, tedy zářivý výkon L . Známe-li T_{ef} a L , můžeme odhadnout i poloměr hvězdy R . Neplatí to ovšem obecně (v některých případech poloha objektu na diagramu neurčuje hvězdné charakteristiky jednoznačně). Velmi negativně se zde ovšem projevuje vliv mezihvězdného zčervenání, které zeslabuje světlo hvězdy více v modré oblasti spektra než v červené (více v kap. 3.1.4.2).

Tříbarevný systém UBV byl záhy rozšířen (Johnson, 1965) do červené a infračervené oblasti spektra použitím širokopásmových filtrů R (700 nm), I (900 nm), J (1250 nm), K (2200 nm) a L (3400 nm)¹⁴. Johnson volil filtry v infračerveném oboru tak, aby pásmo jejich největší propustnosti leželo mimo oblasti se zvýšenou atmosférickou extinkcí, působenou zde především molekulárními pásy vody ($J - 1,25 \mu\text{m}$, $H - 1,62 \mu\text{m}$, $K - 2,2 \mu\text{m}$, $L - 3,4 \mu\text{m}$, $M - 5,0 \mu\text{m}$). Filtr H se objevil až roku 1967 a o jeho profilu se vedly dlouhé diskuse, tabelován byl až v práci Bessell & Brett (1988).

3.1.3.3 Strömgrenův systém $uvby(\beta)$

Nevýhodou širokopásmového Johnsonova systému je to, že filtr U se překrývá s filtrem B a zasahuje tak i do oblastí za Balmerovým skokem, což v podstatě znemožňuje využít jej k určení výšky Balmerova skoku. Astrofyzikálně šťastnější je proto středněpásmový systém $uvby$, který navrhl Bengt Strömgren (1956). Systém obsahuje čtyři filtry s těmito parametry:

u : pološířka 30 nm, efektivní vlnová délka 350 nm;

v : pološířka 19 nm, efektivní vlnová délka 411 nm;

b : pološířka 18 nm, efektivní vlnová délka 467 nm;

y : pološířka 23 nm, efektivní vlnová délka 547 nm.

¹⁴Rozšířenému Johnsonovu systému se občas říká Arizonský systém.

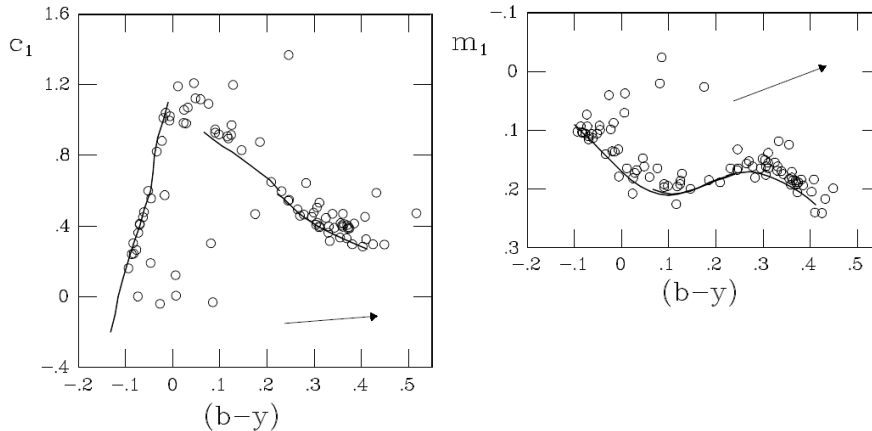
Díky užším pásům je tento systém lépe definován a poskytuje též srozumitelnější informaci o vlastnostech zkoumaných hvězd. Kalibrovaná hvězdná velikost y se přímo navazuje na johnsonovskou hvězdnou velikost V , což je umožněno díky klidnému průběhu rozložení energie ve žluté oblasti spektra. Pro astrofyzikální aplikace se nejčastěji používají barevné indexy $(b-y)$ a $(u-b)$, dále pak již zmíněné indexy velmi málo závislé na mezihvězdné extinkci:

$$c_1 = (u - v) - (v - b), \quad m_1 = (v - b) - (b - y), \quad (3.22)$$

z nichž první index přímo souvisí s velikostí Balmerova skoku, a druhý s obsahem kovových prvků (odtud *metalický index*), který se projevuje zvýšeným výskytem spektrálních čar kovů v oblasti těsně za Balmerovým skokem. Vyšší metalický index (větší v) tak zpravidla znamená vyšší obsah kovů. V některých zdrojích bývají místo hvězdných velikostí v *uvby* uvedeny veličiny: V , $(b - y)$, c_1 a m_1 . Zbývající veličiny lze dopočítat podle vztahů:

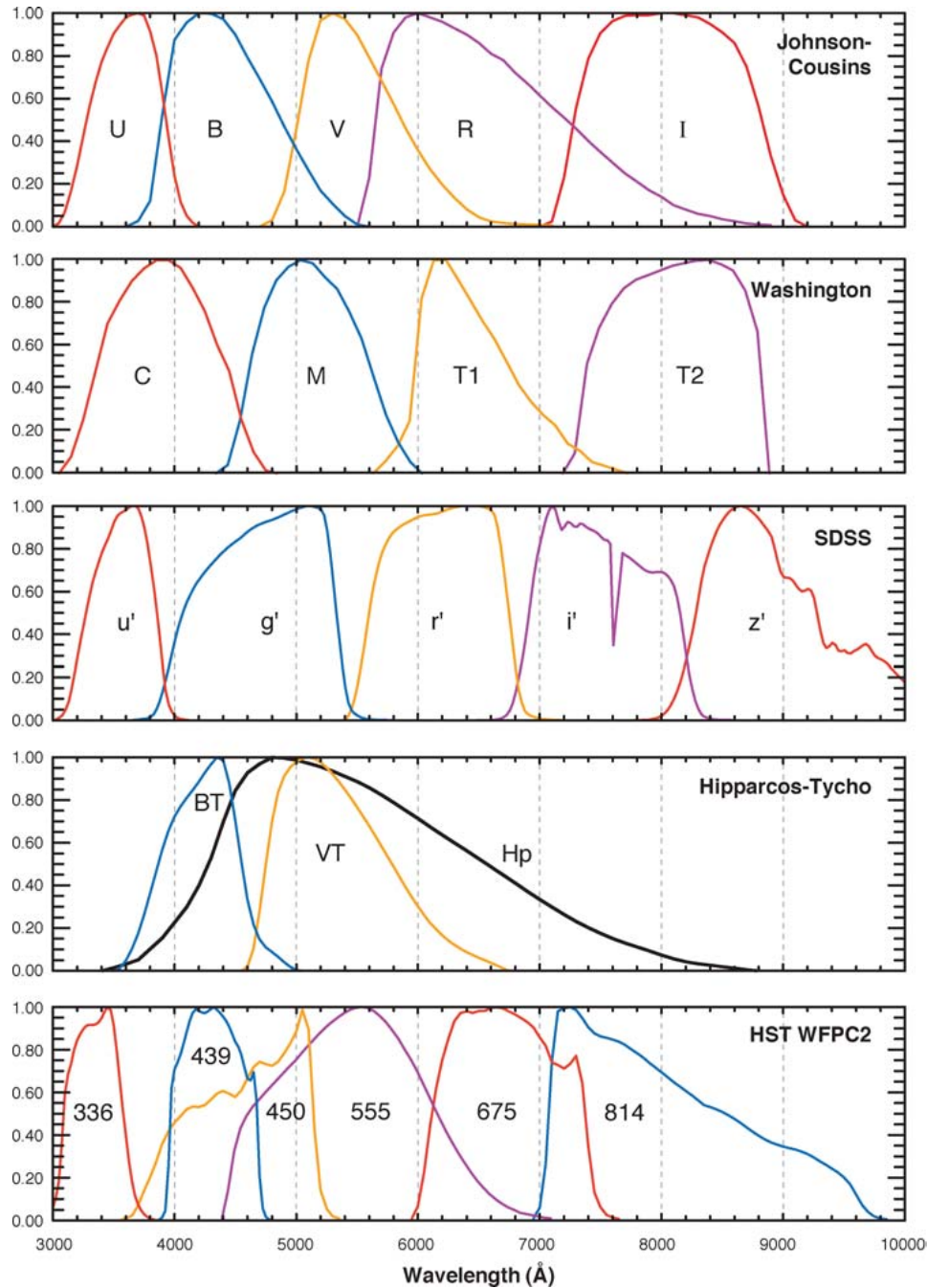
$$b = V + (b - y); \quad v = V + 2(b - y) + m_1; \quad u = V + 3(b - y) + 2m_1 + c_1. \quad (3.23)$$

Strömgrenův fotometrický systém bývá často doplněn dvěma filtry centrovaným na střed vodíkové čáry H_β (486 nm): středněpásmovým filtrem (pološířka 15 nm) a úzkopásmovým filtrem (pološířka 3 nm). Rozdíl hvězdných velikostí v těchto dvou filtrech



Obrázek 3.6: Diagramy závislostí indexů barevných c_1 a m_1 na barevném indexu $(b-y)$ ve Strömgrenově fotometrickém systému *uvby*. Nepřerušovaná čára ukazuje polohu hvězd hlavní posloupnosti neovlivněných mezihvězdnou extinkcí. Index c_1 vyjadřuje velikost Balmerova skoku, která dosahuje své maximální hodnoty pro hvězdy třídy A0 s barevným indexem $(b-y)$. Ten se běžně používá jako míra efektivní teploty, jeho velikost ale bývá silně zkreslena mezihvězdným zčervenáním – směr jeho působení naznačuje šipka. Naopak index c_1 je proti účinkům mezihvězdné extinkce takřka imunní, a proto může sloužit jako indikátor teploty hvězdy mnohem lépe. Metalický index m_1 dobře koreluje s obsahem těžších prvků, takže např. pro CP hvězdy bývá anomálně zvýšen. Nicméně u normálních hvězd jej lze jako indikátor teploty rovněž lépe použít než index $(b-y)$. Zdroj: Dave Kilkeny: Photometry – I. „All sky“

určuje tzv. index β . Pozorování v obou filtrech jsou vedena simultánně, což potlačuje atmosférické vlivy, navíc zmíněný index nezávisí na mezihvězdné extinkci. Index β je lineárně úměrný ekvivalentní šířce čáry H_β . Pro teplé hvězdy (O až A) tak představuje parametr související s luminozitou hvězdy, pro hvězdy chladnější je pak nezávislým měřítkem efektivní teploty.



Obrázek 3.7: Srovnání několika fotometrických systémů. Převzato z Bessell (2005).

3.1.3.4 Další současné fotometrické systémy

Systém družice Hipparcos

Na astrometrické družici Hipparcos se u jednotlivých hvězd prováděla též solidní fotometrie s přesností dosahující u těch nejjasnějších hvězd i několik milimagnitud. Hlavní přístroj družice měřil ve velice širokém (instrumentálním) pásmu H_P . Navíc bylo záření přicházející do mapovacího zařízení rozděleno na dva svazky a ve dvou fotonásobičích se simultánně měřilo ve filtrech B_T a V_T zhruba odpovídajících svým johnsonovským předlohám. Pro zjišťování proměnnosti se nejlépe hodí první barva, protože měření v ní jsou několikanásobně přesnější a spolehlivější, než ve zbývajících dvou barvách. Nulový bod byl definován tak tak, že $H_P = B_T = V_T = 0,000$ mag pro $V_{\text{Johnson}} = 0,000$ mag a $(B - V) = 0,000$.

Obor	λ_{ef} [nm]	FWHM [nm]
B_T	435	72
H_P	510	220
V_T	550	95

Harmanec (1998) publikoval následující převodní vztah mezi hvězdnou velikostí V a hipparcovskou hvězdnou velikostí H_P ve tvaru:

$$V = H_P - 0,2964(B - V) + 0,0050(U - B) + 0,1110(B - V)^2 + 0,0157(B - V)^3 + 0,0072.$$

CCD fotometrické systémy

CCD dnes prakticky vytlačily fotonásobiče z pozice hlavního detektoru záření hvězd. Nevýhodou tohoto přechodu na CCD techniku je ale v naprosté většině případů snížení fotometrické přesnosti zejména pro standardizovanou fotometrii. Důvodů je několik – nesoulad použitých filtrů, nedostatek vhodných standardních hvězd pro CCD, nedostatek standardních hvězd s dobrým rozsahem barev, neochota pozorovatelů věnovat se pozorování standardů.

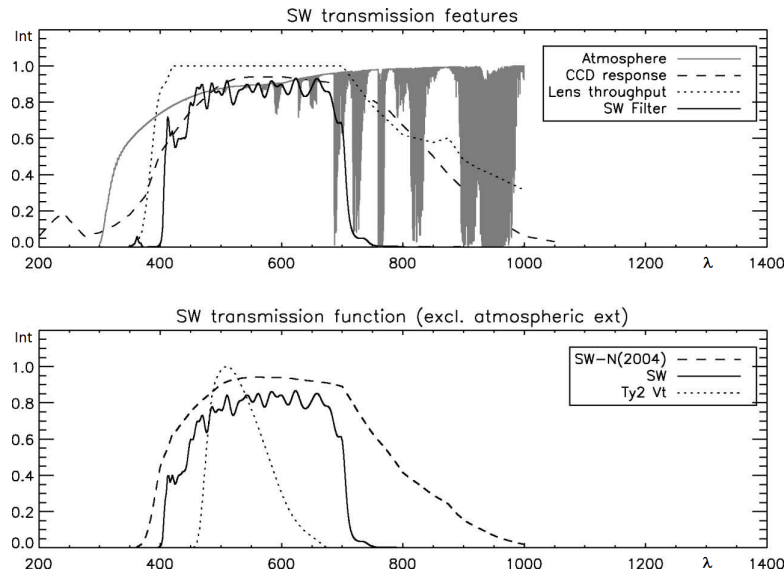
Většina uživatelů CCD kamer používá pro fotometrii širokopásmové filtry $BVRI$. Filtry B a V zpravidla vyhovují prvotní definici, zavedení Johnsona, i když i tady se někdy používají trochu odlišné filtry Besselovy. Největší rozdíly jsou ale v barvách R a I . Zpravidla se nejedná o Johnsonovy filtry, ale často o filtry R_C , I_C v Cousinsově rozšíření Johnsonova systému Cousins (1976), případně v modifikaci Besselově (1990) nebo Landoltově (1983). Zejména A. U. Landolt publikoval rozsáhlá měření standardních hvězd vhodných pro CCD fotometrii. Jeho pole standardů se používají dodnes.

Fotometrické systémy přehlídkových projektů

Přehlídkových projektů jsou dnes desítky. Bohužel jejich autoři často „objeví“, že potřebují pro své účely nový fotometrický systém. Počet fotometrických systémů narůstá, ale ne vždy je bohužel věnována péče i proměřování standardů pro kalibraci a standardizaci měření. V následujícím přehledu uvedeme jen několik málo příkladů.

Projekt *WASP* (Wide Angle Search for Planets), respektive *SuperWASP* je přehlídkový projekt zaměřený na hledání transitů exoplanet. Běží od roku 2004 na dvou

stanicích na La Palma a v Jižní Africe. Každou noc se monitoruje hvězdné nebe pomocí série CCD kamer 2048×2048 . V prvních dvou letech nepoužívali žádný filtr, takže spektrální propustnost byla definována optikou, detektory a atmosférou. Od roku 2006 byly instalovány širokopásmové filtry s šířkou pásma 400 až 700 nm (viz obr. 3.8).



Obrázek 3.8: Pásmo propustnosti filtru přehlídky SuperWASP (nahore) vykreslené souběžně s atmosférickou propustností, citlivostí CCD a propustností použitých čoček. Spodní část ukazuje originální nefiltrovaný systém spolu s SWASP filtrem a filtrem Tycho-2 V. Převzato z Pollacco et al. (2006).

Projekt digitální přehlídky pojmenovaný podle nadace A. P. Sloana (*Digital Sky Survey*, SDSS) byl zahájen v roce 2000. Jde o jeden z nejrozsáhlejších přehlídkových projektů. Data jsou získávána pomocí speciální kamery složené z třiceti CCD čipů, uspořádaných do pěti řádků, z nichž každý má před sebou jiný barevný filtr. Byly zvoleny filtry u, g, r, i, z (Fukugita et al., 1996) (viz obr. 3.7). Tyto filtry se staly v podstatě standardem pro nově budované větší přehlídkové projekty. Někdy se setkáme s označením u', g', r', i', z' . Autoři projektu poskytli identickou sadu filtrů i pro další dalekohled, ale tam nebyly filtry umístěny ve vakuu jako u hlavního přístroje projektu. U filtrů ve vakuu se totiž mírně smrštila povrchová interferenční vrstva a to způsobilo změnu charakteristik o zhruba jedno procento. Ze dvou sad jediného fotometrického systému tak de facto vznikly soustavy dvě.

3.1.3.5 Standardizace fotometrických systémů

Stěžejní součástí analýzy fotometrických dat je tzv. standardizace fotometrických barev. Pokud se nám už podaří pozorování očistit o vliv zemské atmosféry a získáme hvězdné velikosti objektů takové, jaké bychom naměřili vně ovzduší, je záhodno tyto výsledky transformovat tak, abychom je mohli porovnat i s daty, která jste pořídili před dvěma třemi lety, nebo s daty získanými z jiných pozorovacích stanovišť, jinými filtry a detek-

tory. I když měříme v nějakém dobře definovaném systému, jakým je *UBV*, případně *uvby*, nikdy se nám nepodaří dosáhnout toho, aby naše zařízení mělo relativní spektrální citlivost, která přesně odpovídá definici. I kdyby se nám to nakrásně povedlo, nebudeme se z této skutečnosti těšit déle než jednu sezónu, protože vlastnosti dalekohledu (např. spektrální odrazivost všech zrcadel), spektrální propustnosti filtrů, citlivosti detektorů apod. s časem mění. *Normální* transformace jsou ty, při nichž se od instrumentálních barev přechází do standardního fotometrického systému. Občas však potřebujeme přejít od jednoho fotometrického systému na druhý, abychom mezi sebou mohli porovnávat hvězdné velikosti, či barevné indexy získané v různých fotometrických systémech. Těmto transformacím se říká transformace *speciální*.

Pokud předem neznáme rozložení energie ve spektru hvězdy $F(\lambda)$, pak je v principu nemožné převést hvězdné velikosti získané v jedné (zpravidla instrumentální) barvě na hvězdné velikosti v barvě druhé¹⁵. Chceme-li tuto transformaci provést, musíme jasnost hvězdy zjišťovat alespoň ve dvou odlišných barvách. Platí to prosím i v tom nejjednodušším případě, kdy by sledovaný objekt zářil jako absolutně černé těleso o jisté efektivní teplotě. Lze ukázat, že v tomto případě vystačíme s jednoduchou lineární transformační rovnicí typu

$$\begin{bmatrix} m(c_1) \\ m(c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(c'_1) \\ m(c'_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

kde b_{ij} jsou koeficienty barevného systému. To znamená, že platí

$$m(c_2) - m(c_1) = B_{21} [m(c'_2) - m(c'_1)] + A_{21}. \quad (3.25)$$

Více se o transformacích dozvíte například z pojednání Harmanec et al (1977); Harmanec et al. (1994).

3.1.4 Extinkce a její eliminace

3.1.4.1 Optická tloušťka a extinkce

Prostor mezi zkoumaným objektem a měřícím přístrojem není dokonale průhledný, má nenulovou *opacitu* κ . Vyslané světelné kvantum se na své cestě dlouhé i miliony parseků může setkat s částicemi mezihvězdné látky nebo se shluky molekul vzduchu či prachem v zemské atmosféře. Tato setkání mohou dotyčné kvantum pohltit a nebo, a to vyjde na stejno, odchytil z původního směru. Jak absorpce, tak rozptyl záření pak způsobí to, že se tok záření zdroje zeslabuje, dochází k tzv. *extinkci*.

Předpokládejme, že studujeme extinkci světla o původní hustotě zářivého toku vstupujícího do prostředí, v němž jsou rovnoměrně rozptýleny částice s koncentrací n o účinném průřezu ς . Nechť záření o původní hustotě toku I_0 vstoupí do prostředí a urazí zde malou dráhu ds . Součin ($n\varsigma ds$) je bezrozměrná veličina, která vyjadřuje jaká část prostupujícího záření je na dráze ds „odstíněna“ částicemi (pohlčena nebo odchylena z původního směru — tj. „rozptýlena“.

¹⁵Toto je častá situace, kdy pozorovatelé nadšeně pozorují nějakou slabou hvězdu v tzv. integrálním světle bez použití jakéhokoli filtru. Rezignují tak zcela na možnost vypovědět cokoli o charakteristikách světelné křivky s výjimkou stanovení časových okamžiků situací, o nichž se předpokládá, že na barvě světla nezávisí (okamžik minima jasnosti zákrytové dvojhvězdy).

Odstíněním, neboli zeslabením či extinkcí ubude z procházejícího toku I jistá malá část dI :

$$dI = -I(n \zeta ds), \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -n \zeta ds = -d\tau, \quad \Rightarrow \quad I = I_0 e^{-\tau}, \quad \tau = \int n \zeta ds, \quad (3.26)$$

kde τ je bezrozměrná veličina zvaná *optická tloušťka*. Je-li optická tloušťka $\tau < 1$, říkáme, že vrstva je opticky tenká, u $\tau > 1$ mluvíme o vrstvě opticky tlusté.

Z rovnic 3.26 také plyne, že optická tloušťka je veličina aditivní – rozdělíte-li si například cestu záření na dva libovolné úseky a vyčíslete-li si jejich dílčí optické tloušťky, pak optická tloušťka obou úseků je součet jednotlivých optických tlouštěk. Dále platí, že pokud existuje pro zeslabení světla několik mechanismů, pak výsledná optická tloušťka bude rovna prostému součtu jednotlivých příspěvků. Jsou-li optické vlastnosti prostředí podél dráhy světla stejné (všude stejný součin ζn , pak bude optická tloušťka celé trajektorie přímo úměrná její délce. Pokud závisí účinný průřez rozptylujících nebo absorbujících částic na vlnové délce, pak je zřejmé, že i optická tloušťka bude funkcí efektivní vlnové délky nebo použitého filtru c .

Extinkci světla v barvě c , A_c lze ovšem též popsat i přírůstkem hvězdné velikosti vyjádřeným v magnitudách. K tomu použijeme Pogsonovy rovnice (viz rov. 3.5) a dáme do souvislosti s optickou tloušťkou v dané barvě τ_c :

$$A_c = 2,5 \log \left(\frac{I_c}{I_{0c}} \right) \text{ mag} = -2,5 \log (e^{-\tau_c}) \text{ mag} = (2,5 \log e) \tau_c \text{ mag} = 1,086 \tau_c \text{ mag} \quad (3.27)$$

Extinkce je tedy přímo úměrná optické tloušťce, při orientačních úvahách můžeme dokonce brát, že obě veličiny jsou si číselně rovny. Vše, co jsme psali výše o optické tloušťce (aditivnost apod.) platí stejnou měrou i pro extinkci A_c .¹⁶

O mechanismu, který způsobuje extinkci A_c , hodně vypovídá její závislost na vlnové délce. V astronomické praxi se setkáváme se dvěma nejdůležitějšími mechanismy, v obou případech přitom jde o rozptyl světla:

1. *Mieův rozptyl* na mikroskopických částicích prachu - uplatňuje se jak v mezihvězdném prostředí, tak v zemské atmosféře. Extinkce A_c tu je přímo úměrná koncentraci rozptylujících částic a nepřímo úměrná vlnové délce, tedy $A_c \sim n \lambda_{\text{efc}}^{-1}$. Mieův rozptyl je mj. i příčinou toho, proč je cigaretový dým namodralý a disk Měsíce při jeho úplném zatmění okrový až měděný.
2. *Rayleighův rozptyl* na náhodných shlucích molekul plynu - setkáváme se s ním v zemské atmosféře. Extinkce A_c tu je přímo úměrná hustotě plynu a nepřímo úměrná 4. mocnině vlnové délce, tedy $A_c \sim \rho \lambda_{\text{efc}}^{-4}$. Tento rozptyl je zodpovědný za blankytnou modř bezmračné oblohy.

3.1.4.2 Mezihvězdná extinkce

Pokud se zrovna nezabýváme výzkumem rozložení a optických vlastností mezihvězdného prachu, pak asi budeme považovat mezihvězdnou extinkci za přítěž. Pro badatele v oboru proměnných hvězd to ale nejsou problémy příliš velké. První sdělení je to, že až na výjimky¹⁷ se

¹⁶Pokud by tedy byla mezihvězdná látka rozložena podél dráhy světla rovnoměrně, byla by extinkce úměrná vzdálenosti objektu, v případě stejnoměrné atmosférické extinkce by pak platilo, že extinkce je úměrná vzdušné hmotě X .

¹⁷Těmi výjimkami mohou být proměnné hvězdy obklopené relativně hustými, nehomogenními oblaky mezihvězdné látky, jako jsou třeba Herbigovy hvězdy nebo uhlíkové hvězdy. Tam může docházet k variacím jasnosti i v rozsahu několika magnitud v časové škále měsíců či let, tím že hvězda občas vykoukne dírou ve svém obalu. Charakteristikou takové situace je abnormálně vysoký a někdy i proměnný barevný index hvězdy.

velikost extinkce A_c v časové škále kratší než desítky let nemění. Vzhled světelných křivek v různých barvách tak není extinkcí dotčen, dotčeny jsou pouze střední hodnoty jasnosti v jednotlivých barvách. Nicméně, chceme-li pozorovanou hvězdu nějak zařadit mezi ostatní, je nanejvýš žádoucí zjistit, jaké by byly její fotometrické charakteristiky, pokud by mezihvězdného zaprášení nebylo. Zcela nezbytné to je tehdy, chceme-li pomocí proměnných hvězd určovat vzdálenosti hvězdných agregátů, k nimž přísluší. Eliminaci mezihvězdné extinkce lze v principu provést z toho důvodu, že její velikost citelně závisí na vlnové délce, na níž dotýchnou hvězdu zkoumáme. Znamená to jediné – je naprosto nezbytné, abychom hvězdu pozorovali alespoň ve dvou, či raději hned ve třech nebo čtyřech barvách, protože jediné pak bude možné extinkci spolehlivě odečíst.

Známe-li velikost extinkce v barvě c , A_c , jsme schopni pomocí skutečně pozorované hvězdné velikosti m_c vypočítat hvězdnou velikost hvězdy m_{0c} , kterou by měla, pokud prostor mezi námi a ní byl perfektně průhledný, podle vztahu $m_{0c} = m_c - A_c$. Protože platí, že $A_c > 0$, je zjevné, že extinkce způsobuje zeslabení pozorované hvězdy, někdy o mnoho magnitud. Fakt, že valnou většinu mezihvězdné extinkce lze připsat na vrub rozptylu na prachové složce mezihvězdné látky v optické, infračervené a blízké ultrafialové oblasti spektra, tedy v oborech, kde se běžně fotometrická pozorování proměnných hvězd vedou, znamená, že toto zeslabení je větší v krátkovlnné oblasti než dlouhovlnné. Prachová extinkce tak způsobuje *mezihvězdné zčervenání*¹⁸. Znamená to mj., že na barevné indexy CI , jakožto indikátory efektivní teploty, se nelze spolehnout, poněvadž jsou zvětšeny o tzv. *barevný exces* $E(CI) = CI - CI_0$. Pro velikost barevného excesu lze v případě prachové extinkce psát:

$$E(CI) = CI - CI_0 = m_{c_1} - m_{c_2} - m_{0c_1} + m_{0c_2} = A_{c_1} - A_{c_2} \cong A_{c_2} \left(\frac{\lambda_{c_2}}{\lambda_{c_1}} - 1 \right) \geq 0,$$

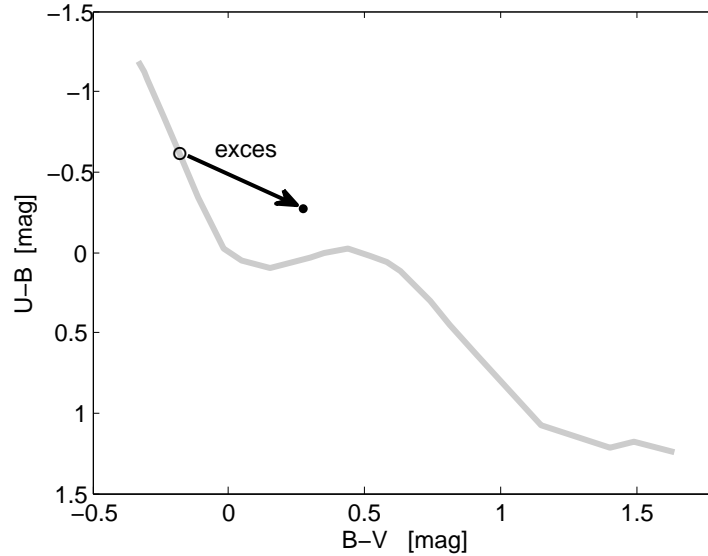
$$A_{c_2} \cong \frac{\lambda_{c_2}}{\lambda_{c_2} - \lambda_{c_1}} E(CI), \quad A_{c_1} \cong \left[1 + \frac{\lambda_{c_2}}{\lambda_{c_2} - \lambda_{c_1}} \right] E(CI), \quad m_{0c} = m_c - A_c. \quad (3.28)$$

Pokud bychom tedy nevzali v potaz barevný exces, obdrželi bychom systematicky větší odhady povrchových teplot. Ale naopak, jestliže bychom dokázali odhadnout teplotu jinak, např. ze známého spektrálního typu, mohli bychom v tabulkách najít odpovídající hodnotu nezčervenalého barevného indexu CI_0 a pomocí něj a pozorované hodnoty CI pak odhadnout nezčervenalé hvězdné velikosti v obou barvách podle vztahů uvedených v (3.28). Co si však počít, nemáme-li k dispozici spolehlivé určení spektrálního typu?

Řešením je využití měření ve fotometrickém systému s nejméně třemi barvami. Jako příklad si zde uvedeme klasický Johnsonův systém UBV .

Z pozorování velkého množství hvězd vyplývá, poměr excesů v barevných indexech $(U-B)$ a $(B-V)$ způsobených mezihvězdnou extinkcí je víceméně konstantní, a že činí $E(U-B)/E(B-V) \simeq 0,72$. Současně víme, že poměr mezi hodnotou extinkce v barvě V , A_V existuje relace: $A_V = 3,2 E(B-V)$. Způsob, jak zjistit nezčervenalé hodnoty obou barevných indexů znázorňuje obr. 3.9. Zde se využívá skutečnosti, že obrazy nezčervenalých hvězd na ploše $(U-B)-(B-V)$ vytvářejí dobře definovanou závislost. Z po-

¹⁸Tento termín je ovšem poněkud zavádějící, neboť v nás vzbuzuje pocit, jakoby někdo do světla extinkcí zeslabených hvězd přidával červené světlo. Skutečnost je jiná, extinkce jenom ubírá světlo, méně v dlouhovlnné oblasti a více v krátkovlnné oblasti. Nejde tak o zčervenání, ale spíš o „odmodrání“ světla hvězdy.



Obrázek 3.9: Na schématu je znázorněna závislost mezi johnsonovskými barevnými indexy ($U-B$) a ($B-V$) pro nezčernalé hvězdy hlavní posloupnosti. Prázdným kolečkem je naznačena poloha zkoumané hvězdy, pokud by nebylo mezihvězdné extinkce. Ta posune obraz hvězdy ve směru šipky v důsledku tzv. barevného excesu o $E(U-B)$ a $E(B-V)$, plným kolečkem je vyznačena skutečně pozorovaná poloha obrazu hvězdy. Vzhledem k tomu, že směrnicí šipky posunu známe, můžeme najít polohu obrazu nezčernalé hvězdy a současně i hodnotu extinkce ve všech třech barvách. Problémy nastávají tehdy, nemá-li úloha jediné řešení. Tam je třeba si vypomoci fotometrií v jiném vícebarevném systému.

zorovaného obrazu hvězdy lze získat polohu bodu neovlivněného extinkcí a pomocí extinkce $E(B-V)$ vypočítat extinkci a o ni opravit jasnost hvězdy ve $V_0 = V - A_V$ a současně nezčernalé barevné indexy $(B-V)_0$ a $(U-B)_0$ a pomocí nich i U_0, B_0 .

Také je možné postupovat tak, že si pro hvězdy měřené v systému (UBV) zavedeme zvláštní barevný index, který je nezávislý na mezihvězdné extinkci Q , kde $Q = (U-B) - 0,72(B-V)$. Zmíněný index se poměrně dobře hodí jako indikátor teploty u horkých hvězd.

Další možností, jak do značné míry omezit vliv mezihvězdné extinkce je používání složených barevných indexů ve čtyř a vícebarevných fotometrických systémech. Jejich příkladem mohou být balmerovský c_1 a metalický index m_1 v Strömgrenově fotometrii *wby*.

3.1.4.3 Atmosférická extinkce

Pro pozorovatele představuje zemská atmosféra jakýsi filtr propouštějící (nebo také nepropouštějící) záření zkoumaných objektů, jehož vlastnosti se v průběhu pozorování nepřetržitě mění. Atmosférická extinkce v barvě c se definuje jako rozdíl mezi pozorovanou hvězdnou velikostí m_c a hvězdnou velikostí téže hvězdy pozorované za hranicemi zemské atmosféry m_{0c} . Pro pozorovanou hvězdnou velikost m_c v prvním přiblížení platí:

$$m(c, z) = m_0(c) + k(c) X(z), \quad (3.29)$$

kde z je zenitová vzdálenost, $k(c)$ je tzv. *lineární extinkční koeficient* v příslušné barvě vyjádřený v magnitudách a X je bezrozměrná veličina nazývaná *vzdušná hmota*, která vyjadřuje relativní výšku sloupce vzduchu v zemské atmosféře vztaženou k výšce sloupce vzduchu v zenitu, kde $X(0) = 1$. Pro planparalelní atmosféru platí, že vzdušná hmota je nepřímo úměrná kosinu zenitové vzdálenosti. Ve skutečné zemské atmosféře je pro rozsah zenitových vzdáleností, v nichž se běžně pozoruje, možno použít aproximaci ve tvaru:

$$X = (1 - 0,0012 \tan^2 z) \sec z. \quad (3.30)$$

Vyneseme-li si pozorovanou hvězdnou velikost m (úměrnou např. velikosti výchylky měřicího přístroje) ve stabilní atmosféře v závislosti na vzdušné hmotě X sledovaného konstantně jasného objektu, pak bychom měli obdržet polopřímku ($1 \leq X$), jejíž sklon je roven extinkčnímu koeficientu a průsečík s osou y pak udává vněatmosférickou hvězdnou velikost objektu m_0 . Problém ovšem je, že celou tuto *Bouguerovou* polopřímku nelze obdržet z daného místa v jeden okamžik, takže zde bude hrát značnou roli proměnnost extinkčního koeficientu během pozorování. Ten se může během noci významně měnit, zejména při přechodu front. Jinak je noc v tomto ohledu přece jenom klidnějším obdobím, ve dne se extinkce mění daleko rychleji a výrazněji.

Další komplikaci přináší skutečnost, že i citlivost aparatury se během pozorování může měnit (tzv. změna nulového bodu). Vlivy tohoto druhu lze alespoň zčásti omezit *diferenciálním* měřením s vhodně zvolenou srovnávací hvězdou (hvězdami) podobného typu a vhodnou strategií pozorování. Vždy by měl pozorovatel do pořadu pozorování zařadit měření jasnosti standardních hvězd a hvězd extinkčních. Oprava o extinkci se zpravidla vztahuje k dotyčné noci.

Extinkce zemské atmosféry je způsobena jednak *Rayleighovým rozptylem*, jehož extinkční koeficient závisí jen na počtu molekul v zenitovém vzduchovém sloupci. Je tedy úměrný okamžité velikosti atmosférického tlaku. Vzhledem k tomu, že změny tlaku v daném místě o nadmořské výšce h nikdy nebývají příliš dramatické, lze pro střední hodnotu extinkční koeficient Rayleighovy složky extinkce $k_{Rc}(\lambda, h)$ psát vyjádření vycházející z modelu izotermické standardní atmosféry s výškovou škálou 7996 m.

$$k_{Rc} = 0,107 \left[\frac{\lambda_{efc}}{550 \text{ nm}} \right]^{-4} \frac{P(h)}{P(0)} \text{ mag} = 0,107 \left[\frac{\lambda_{efc}}{550 \text{ nm}} \right]^{-4} \exp \left[\frac{-h}{7996 \text{ m}} \right] \text{ mag}. \quad (3.31)$$

Předložený vztah jasně ukazuje na výhodu vysokohorských observatoří a pozorování v dlouhovlnných oblastech spektra.

Další významnou a navíc silně proměnnou složkou atmosférické extinkce je rozptyl na aerosolech o velikosti srovnatelné s vlnovou délkou světla $k_{Dc}(t)$, kde platí

$$k_{Dc}(t) = k_{DV}(t) \left[\frac{\lambda_{efc}}{550 \text{ nm}} \right]^{-1}. \quad (3.32)$$

Právě změny zaprášenosti zemské atmosféry mohou znamenat výrazné změny celkového extinkčního koeficientu. Všeobecně platí, že v nízko položených a městských observatořích je vliv prachové extinkce často převyšuje i Rayleighovu složku extinkce.¹⁹

¹⁹Prachová extinkce jeví silné sekulární a sezónní variace. Na observatořích vysokohorských je zaprášenost minimální v zimě, kdy je vrstva inverze pod úrovní hvězdárny, v létě, kdy se dostává nad pozorovací stanoviště, bývá zaprášenost značná. V Brně bývá nejčistší vzduch počátkem října, tam poprvé pronikne relativně čistý arktický vzduch. Pak zaprášenosti víceméně monotónně přibývá, aby se pak počátkem října vzduch opět výrazně vyčistil.

Vzhledem k tomu, že extinkci nikdy neměříme přesně monochromaticky, ale v určitém intervalu vlnových délek, bude situaci komplikovat skutečnost, že extinkce je závislá na vlnové délce. Důsledkem pak bude, že extinkční koeficienty určené prostřednictvím teplejších hvězd budou vždy o něco větší než koeficienty zjištěné pomocí hvězd pozdějších spektrálních tříd. Bude-li proto hvězdné pole během pozorování klesat k obzoru, relativně rychleji v něm budou slábnout vlivem atmosférické extinkce hvězdy ranějších spektrálních tříd. Tento efekt může významně ovlivnit i ta pozorování, kde jasnost proměnné hvězdy vztahujeme k většímu množství hvězd rozložených kolem ní, jak je to v případě CCD pozorování. Řada pozorovatelů se CCD vychází z toho, že u CCD pozorování jsou oproti pozorování fotometrem všechny hvězdy zaznamenané na snímku k sobě úhlově blízko. To znamená, že jsou zachyceny za prakticky identických atmosférických podmínek (stejná zenitová vzdálenost, stejná vzdušná hmota) a navíc ve stejném čase. To jsou jistě ideální podmínky pro diferenciální fotometrii, kde se jasnost proměnné hvězdy vztahuje k blízkým srovnávacím hvězdám. Jenže to neplatí zcela obecně.

V řadě případů je na CCD snímku zaznamenána oblast o rozměrech 1° a více a pak je nezbytné s extinkcí počítat. A brát v úvahu ji musíme i tehdy, jsou-li mezi hvězdami významné rozdíly v barvě srovnávacích hvězd. Pak se totiž začnou uplatňovat i extinkční členy druhého řádu. Jejich vliv je značný hlavně u širokopásmové fotometrie. Škody dané ignorováním vlivu atmosférické extinkce jsou však dosti potlačeny faktem, že se tu pozoruje zejména v červené barvě, kde atmosféra již tolik nevadí. Ale i zde se doporučuje vést pozorování tak, aby vzdušná hmota příliš nepřekročila bezpečnou hranici $X = 2$.

Při praktické fotometrii je třeba vliv atmosférické extinkce minimalizovat a co nejvíce se přiblížit ideálu pozorování mimo atmosféru. Tomu se musí podřídit i metodika pozorování tak, že se jako srovnávací hvězdy přednostně používají co nejbližší konstantní hvězdy co nejbližšího spektrálního typu i hvězdné velikosti. Za těchto okolností bude diferenciální extinkce minimální. Solidní pozorování je žádoucí přerušovat za účelem proměření vybraných tzv. extinkčních hvězd - zpravidla jde minimálně o fotometrii vždy nejméně dvou dvojic hvězd s extrémně odlišným barevným indexem a to tak, aby jedna dvojice byla poblíž zenitu, zatímco druhá dvojice zase co nejniž nad obzorem. Tato měření je vhodné opakovat po dvou třech hodinách, většinou i s jinou čtveřicí extinkčních hvězd.

Ke konečnému zpracování pak používáme speciální software, kde se k eliminaci extinkce užívá i výsledků extinkčních měření v dané pozorovací sezóně. Celá procedura se začátečníkům může jevit jako zdoluhavá a samoučelná, její oprávněnost se ale projeví zejména tehdy, jde-li nám o co nejpřesnější a nejspolehlivější pozorování a tehdy, kdy míníme společně zpracovávat pozorování získaná v různých nocích, různými přístroji a v odlišných astroklimatických podmínkách.

3.2 Astronomická polarimetrie

Až doposud jsme mlčky předpokládali, že záření, které k nám z vesmíru přichází, není polarizované nebo že jeho polarizace vzniká až teprve po vstupu do zemské atmosféry, a tudíž v sobě nenesení žádnou informaci o povaze zářícího objektu. Toto by byla pravda, ale jen tehdy, pokud bychom se na obloze setkávaly jen s objekty zářícími jako absolutně černá tělesa. Tak tomu však není, zářící vesmír je dynamický, navíc je vyplněn i mezihvězdnou látkou, která se může o polarizaci postarat. Záření takového vesmíru

je nutně polarizované, což je dobře, protože ona polarizace v sobě nese další důležitou informaci o stavu řady objektů včetně proměnných hvězd.

Prostřednictvím polarimetrie se můžeme získat dodatečné informace o geometrickém uspořádání vyvinutých astronomických zdrojů, které bychom jinak nezjistili. Ve hvězdné astronomii například můžeme studovat geometrii a dynamiku hvězdného větru, disků a výtrysků a tak zkoumat procesy ztráty hmoty, hvězdný vývoj a následně i mezihvězdné prostředí. Polarimetrická měření pomáhají při studiu těsných dvojhvězd (umožňují určení sklonu oběžné roviny vůči směru k Zemi) nebo magnetických polí bílých trpaslíků nebo chemicky pekuliárních hvězd.

První záznam v historii astronomické polarimetrie patří Aragovi, který si v roce 1811 všiml, že sluneční světlo odražené od měsíčního povrchu je polarizované. Přestože k tomuto objevu došlo před etablováním spektroskopie v astronomii, astronomická polarimetrie byla po dlouhá desetiletí zcela opomíjena. Na konci 40. let 20. století ale William Hiltner a John S. Hall objevili nezávisle polarizaci světla hvězd působenou mezihvězdnou látkou (Hiltner, 1949; Hall, 1949). Od té doby polarimetrie i v astronomii dospěla a stala se jednou ze základních metod astrofyzikálního výzkumu.

Nejprve byly vyvinuty pokročilé metody v optické a rádiové oblasti spektra. Další oblasti – ultrafialové, infračervené nebo submilimetrové, případně rentgenové jsou v těsném závěsu. Důvodem, proč trval vývoj astronomické polarimetrie o poznání déle než například spektroskopie, je to, že stupeň polarizace je v astronomických situacích obvykle malý, zpravidla méně než jedno procento, maximálně několik procent. Přesná měření takových malých signálů v sobě zahrnuje určování malých rozdílů u velkých intenzit. A kromě toho, kvůli povaze vektoru polarizace je nezbytné provést několik pozorování za pokud možno stejných podmínek, abychom získali o polarizaci úplnou informaci. Stabilita přístroje a přístrojová polarizace musí být menší než zhruba 0.1 - 0.05 %. Polarimetrická měření jsou také mnohem obtížnější. Protože je polarizace často menší než jedno procento, je třeba, aby poměr signál šum byl alespoň 10krát větší než u spektroskopie. To ale vyžaduje stokrát až tisíckrát delší expoziční časy. Dalším problémem je to, že polarimetrické pozadí ve viditelném světle může být snadno kontaminováno světelným znečištěním, zodiakálním světlem mezihvězdnou polarizací a podobně.

3.2.1 Stokesův vektor

Elektromagnetické vlnění lze charakterizovat pomocí dvou složek – vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} a vektoru magnetické indukce \vec{B} . Tyto vektory jsou přitom navzájem kolmé, kmitají kolmo ke směru šíření vlny a mají souhlasnou fázi. Polarizované záření vzniká omezením kmitů vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} .

Pokud při pohledu proti směru šíření vlny kmitá v jedné přímce, jedná se o lineární polarizaci. Jestliže však koncový bod vektoru \vec{E} opisuje elipsu, případně kružnici, jde o eliptickou, respektive kruhovou polarizaci. Obecně může být přijímané záření kombinací lineárně a kruhově polarizovaného záření. Polarizaci můžeme popsat pomocí *Stokesova vektoru*

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I_0 - I_{90} \\ I_{45} - I_{135} \\ I_l - I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{intenzita} \\ \text{lineární polarizace } 0^\circ/90^\circ \\ \text{lineární polarizace } 45^\circ/135^\circ \\ \text{kruhová polarizace levá /pravá} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Tabulka 3.1: Příklady normalizovaného Stokesova vektoru.

$(Q/I, U/I, V/I)$	popis
$(0, 0, 0)$	nepolarizované záření; $I_0 = I_{90}, I_{45} = I_{135}, I_l = I_p, p = 0$
$(1, 0, 0)$	zcela lineárně polarizované v kladném směru Q $I_0 = I, I_{90} = 0, I_{45} = I_{135}, I_l = I_p, p = 1, \theta = 0^\circ$
$(0, -1, 0)$	100% lineární polarizace ve směru 135° ; $I_0 = I_{90}, I_{45} = 0, I_{135} = I, I_l = I_p, p = 1, \theta = 135^\circ$
$(0.15, 0.26, 0)$	30% lineární polarizace ve směru 30°
$(0.001, 0, 0.01)$	1% kruhová polarizace s 0.1% složkou v lineární polarizaci

Často se používá normalizovaný Stokesův vektor

$$\begin{pmatrix} Q/I \\ U/I \\ V/I \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

kde parametry $Q/I, U/I, V/I$ lze chápat jako složky vektoru, jehož délka vyjadřuje míru částečné polarizace nebo chcete-li *stupeň polarizace*

$$p = \sqrt{(Q/I)^2 + (U/I)^2 + (V/I)^2} \leq 1. \quad (3.35)$$

Je-li záření polarizované jen lineárně, pak je stupeň polarizace

$$p_{\text{lin}} = \sqrt{(Q/I)^2 + (U/I)^2} \quad (3.36)$$

a orientaci polarizovaného vektoru \vec{E} lze vyjádřit jako

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan(U/Q), \quad \text{přičemž } Q/I = p \cos 2\theta, \quad \text{a } U/I = p \sin 2\theta. \quad (3.37)$$

Jestliže například měříme přicházející fotony od nějakého zdroje záření, pak měření polarizace znamená provést měření počtu zcela polarizovaných fotonů ve dvou opačných polarizačních módech:

- N_0 a N_{90} pro určení Stokesova parametru Q ,
- N_{45} a N_{135} pro určení Stokesova parametru U ,
- N_l a N_p pro určení Stokesova parametru V .

Je-li pozorovaný objekt izotropně zářícím tepelným zdrojem, vyzařuje nepolarizované záření a oba měřicí kanály by měly ukázat stejné počty fotonů (v rámci přesnosti Poissonovy statistiky), to znamená pro Q bude $N_0 = N_{90} = N/2$ a obdobně pro parametry U a V .

3.2.2 Polarizace záření kosmických objektů

Jak jsme již uvedli, je polarimetrické měření velmi obtížné zejména proto, že „stopa polarizace“ v astronomických datech bývá zpravidla velmi slabá. Astronomická polarimetrie má zatím „jen“ několik, ale velmi důležitých aplikací. V následujícím stručném přehledu jsou uvedeny nejdůležitější mechanismy vzniku polarizovaného záření a jejich projevy u astronomických objektů.

Nejběžnější polarizované světlo z vesmíru je výsledkem rozptylu. Procesy rozptylu se objevují prakticky všude v astronomii, ale k tomu, abychom dostali čistý a silný polarizační signál, je zapotřebí silná asymetrie v geometrii rozptylujícího objektu. Zdrojem takového lineárně polarizovaného záření je například rozptýlené sluneční světlo z Měsíce, planet a jejich satelitů, planetek, komet a dalších objektů Sluneční soustavy (polarizováno na úrovni 0,1 - 50%), plyn a prach v okolí hvězd, které ztrácejí hmotu nebo dochází teprve k jejich formování (lineárně polarizované záření až do $\approx 50\%$), případně rozptyl v okolí aktivních galaktických jader na materiálu poblíž akreující obří černé díry.

Pro emisi a absorpci atomů a molekul v magnetizovaném plazmatu je charakteristický Zeemanův jev. Úrovně energií atomů a molekul jsou rozděleny kvůli orientaci jejich úhlových momentů. Rozdílné „magnetické“ podúrovně pak produkují emise a absorpce s opačnými polarizačními signály. Typický polarimetrický profil čáry se Zeemanovým efektem je pak modré křídlo čáry s kruhovou polarizací a červené křídlo čáry s opačně orientovanou kruhovou polarizací. Lineární polarizace je zpravidla o řád slabší než kruhová polarizace. Zeemanův efekt lze pozorovat například ve sluneční atmosféře, v oblasti slunečních skvrn, u magnetických hvězd se silným a rozsáhlým magnetickým polem v podobě globálního dipólu (bílé trpaslíci, magnetické chemicky pekuliární hvězdy) nebo u rychle rotujících hvězd slunečního typu s velmi kontrastními skvrnami na povrchu, případně můžeme z polarizace emisních čar detektovat magnetická pole i v mezihvězdném prostředí.

Pokud se v magnetickém poli budou velmi rychle pohybovat částice (většinou elektrony), pak budou generovat synchrotronové, případně cyklotronové záření s lineární a kruhovou polarizací, jejíž orientace závisí na orientaci magnetického pole. S tímto typem záření se setkáme například v koronách hvězd, kde vzniká silně proměnné polarizované synchrotronové rádiové záření. S relativistickými elektrony se ale potkáme také u výtrysků z kvasarů a u gama záblesků, které produkují polarizované emise až do 30% lineární polarizace a několika procent kruhové polarizace v rádiové ale i ve vizuální oblasti. Relativistické elektrony v mezihvězdném prostředí a mezigalaktickém prostředí se pak vyskytují v oblastech srážek, rázových a podobně jako u pozůstatků po supernovách.

Pro úplnost ještě uvedeme polarizaci absorpcí nebo dvojlomem, které se v astronomii využívají při studiu mezihvězdného prostředí.

3.2.3 Polarimetrická pozorování

Požadavky na astronomická polarimetrická pozorování jsou diktovány tím, co vlastně chceme zkoumat. Měli bychom zvažovat, zda lineární nebo kruhovou polarimetrii, zda polarimetrii nebo spektropolarimetrii. Pro polarimetrii jednoho objektu může být místo fotometrických měření v několika filtrech výhodná spektropolarimetrie. Spektrum i s ní-

kým rozlišením totiž poskytne polarizační signál v širokém rozsahu vlnových délek v jednom pozorování. Spektropolarimetrická data mohou být velmi užitečná při výzkumu a odlišení polarizace různých emisních složek a příspěvku mezihvězdné polarizace. U spektroskopie pro polarimetrická měření je ale nezbytné zvážit, zda je rozlišení spektrografu dostatečné.

Pozorovatel by měl také rozhodnout, zda je nezbytná absolutní polarimetrická kalibrace a jaká je požadovaná polarimetrická citlivost pro normalizovanou polarizaci. Přesná polarimetrická pozorování relativně slabých objektů jako aktivních galaktických jader, supernov nebo gama záblesků je jednoduše limitováno statistikou fotonů. Takže jednoznačný požadavek pro lepší polarimetrická data je jednoduchý a zřejmý – prostě více fotonů.

Další otázkou ke zvážení před polarimetrickým pozorováním je prostorové rozlišení pro obrazovou polarimetrii, zejména pro prostorově rozsáhlé objekty. Polarizace totiž u nerozřešených zdrojů může mít kladnou i zápornou hodnotu signálu s opačnou polarizací, takže se složky vzájemně vyruší a žádná čistá polarizace nezůstane. Takže i objekt s velmi silnou polarizací s kladnými a zápornými znaky se může jevit jako cíl s velmi slabým polarizačním signálem při pozorování s nízkým rozlišením. Lepší situace je při Zeemanově spektropolarimetrii, kde se často jako referenční hodnota pro polarizaci bere kontinuum. Pak je možné dosáhnout i velmi vysoké polarimetrické citlivosti, i když v té chvíli odsuneme do pozadí otázku absolutní kalibrace dat. Protože ale spektrální čáry jsou složeny z kladné a záporné polarizační složky, je nutné dostatečné rozlišení spektrografu, neboť jinak se signál vyruší.

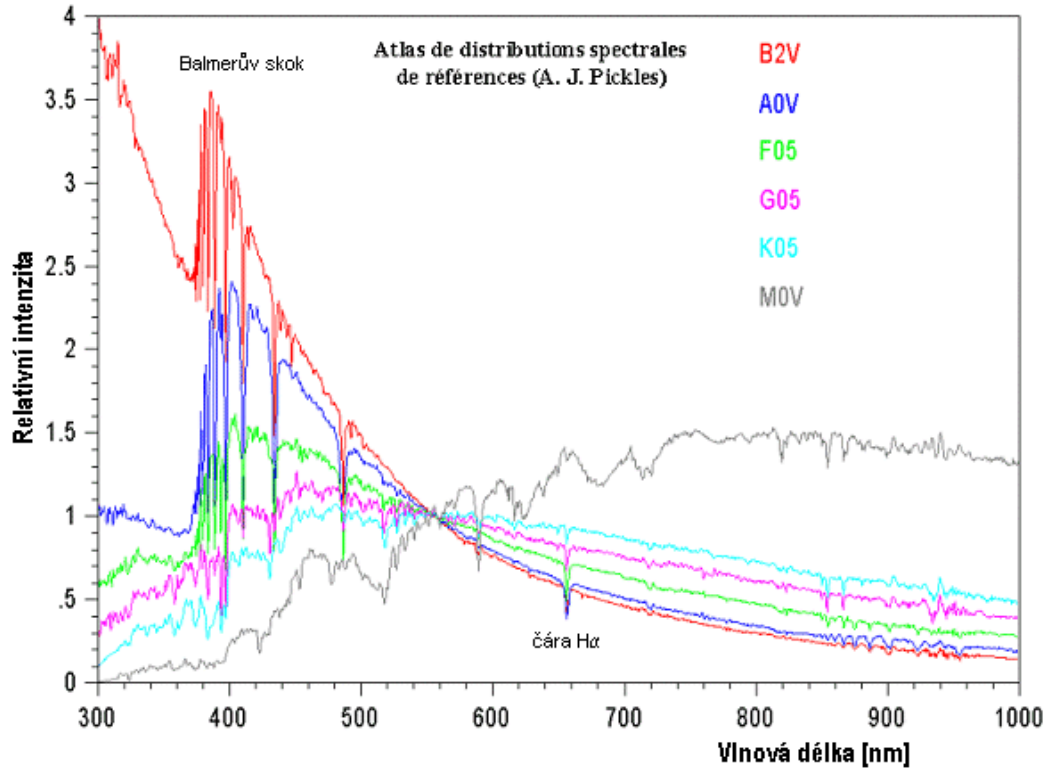
U polarimetrických měření ale více než u jiných platí, že samotný dalekohled a detektor výrazně ovlivňuje přicházející záření a jeho polarizaci. Je tedy nezbytné vzít v úvahu všechny komponenty této soustavy a výsledky měření patřičně kalibrovat. V zásadě každý skloněný povrch vnáší do signálu novou, přístrojovou polarizaci. Například rovinné zrcátko (M3) u dalekohledu typu Nasmyth s hliníkovým pokovením, skloněné vůči přicházejícím paprskům o 45° , přidává polarizaci zhruba 5% a způsobuje retardaci signálu zdroje, která přibližně 10% Stokesovy lineární složky U konvertuje do složky kruhové polarizace V .

Základní princip polarimetrických měření spočívá v určení normalizovaných Stokesových parametrů Q/I , U/I a V/I , což jak víme jsou rozdíly intenzit signálů ve dvou opačných polarizačních módech. V podstatě můžeme intenzity měřit dvěma způsoby. Pomocí jednoho svazku paprsků měříme postupně dva polarizační módy (například I_0 a I_{90}) nějakým polarimetrem. Můžeme ale také svazek paprsků rozdělit a měřit oba polarizační módy současně. Jestliže ale měříme více než jeden Stokesův parametr, musíme měřit vícekrát, alespoň třikrát pro získání Q/I a U/I a nejméně čtyři měření, jestliže určíme i V/I (Schmid, 2012).

3.3 Astronomická spektroskopie

Spektroskopie je stěžejní metodou poznávání okolního vesmíru. Historicky vlastně stála u zrodu astrofyziky. Bez spektroskopie bychom nyní měli k dispozici jen zlomek současných informací o vesmíru. Stačí si připomenout základní astrofyzikální, HR diagram nebo Hubblov vztah pro extragalaktickou astronomii.

Nástrojem studia spektroskopie je analýza spektra, respektive jeho záznamu. Spektrum můžeme definovat jako funkci spektrální hustoty zářivého toku $f_\nu(\nu) = \frac{\lambda^2}{c} f_\lambda(\lambda)$ (viz kap. 3.1.1) přicházejícího k nám od zkoumaného objektu²⁰.



Obrázek 3.10: Relativní rozložení energie ve spektru hvězd různých spektrálních typů vztažené k spektrální hustotě toku záření o vlnové délce 550 nm.

3.3.1 Charakteristiky spekter

Spektrum představuje jakousi vizitku, kterou nám posílají vesmírné objekty. Lze z něj vyčíst opravdu rozsáhlé množství informací. U hvězd jsou to například údaje o jejich efektivní teplotě, tlaku, chemickém složení nebo turbulencích ve hvězdných fotosférách, rotaci nebo pulzacích hvězd, přítomnosti souputníků, magnetickém poli, u galaxií pak jejich vzdálenost, vnitřní strukturu a pohyby a jiné. Spektroskopie se dnes využívá i ke studiu dalších objektů – (exo)planet, komet, mlhovin aj. V dalším výkladu se ale zaměříme na spektroskopii hvězd.

Hvězdná spektra, jež vznikají ve hvězdných fotosférách, jsou typicky spojitá s absorpčními, občas i emisními čarami. Čárové spektrum vzniká vázaně-vázanými přechody mezi jednotlivými energiovými hladinami atomu nebo molekul. Ve spektru vodíku čáry tvoří tzv. série, jež jsou množinou čar vznikajících při přechodech z libovolné vyšší hladiny do některé pevně zvolené hladiny. Lymanova série v ultrafialovém oboru tak odpovídá přechodům do první, čili základní energetické hladiny, Balmerova série ve

²⁰Spektrální analýze se podrobněji věnují kurzy *Fyzika hvězd a hvězdných soustav*, *Hvězdné atmosféry* nebo *Fyzika horkých hvězd*.

viditelné oblasti spektra zahrnuje přechody do druhé energiové hladiny, infračervená Paschenova série do třetí, Brackettova do čtvrté, Pfundova do páté atd. Spojité záření kontinua naproti tomu může vznikat přechody volně-volnými, vázaně-volnými nebo rekombinací.

Astrofyzikálně nejdůležitější prvek – vodík, přispívá k tvorbě spojitého spektra vázaně-volnými přechody, při nichž dochází k přechodu elektronu z některé z nižších energiových hladin do prostoru nebo naopak k zachycení kolem letícího elektronu vodíkovým iontem na některou z nižších hladin. Rozeznáváme tak např. Balmerovo kontinuum v blízké ultrafialové oblasti nebo Paschenovo kontinuum ve viditelné oblasti spektra. Nejvyšší pravděpodobnost mají ty přechody, kdy kinetická energie uniknuvšího nebo polapeného elektronu je co nejmenší. Znamená to, že nejvíce vyzářených a pohlcených fotonů v kontinuu je těsně za hranami spektrálních sérií, což je dobře patrné na obr. 3.2.

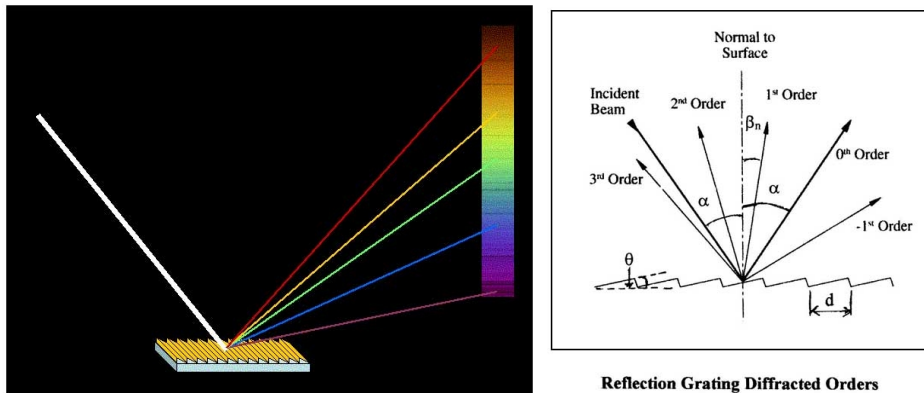
V případě chladnějších hvězd, jako je třeba naše Slunce, hraje při vzniku kontinua rozhodující roli ionizace a deionizace tzv. negativního iontu vodíku – atomu vodíku se dvěma elektrony.

3.3.2 Základní pojmy

„Spektroskop (vidmojev) jest přístroj pro pozorování a srovnávání spekter...“ tolik Ottův slovník naučný. První spektroskop, tedy přístroj, který vytvoří obraz spektra a umožní jeho vizuální pozorování, vyrobil Joseph von Fraunhofer v roce 1817. Později s vynálezem a vývojem fotografie byla část pro vizuální sledování nahrazena částí pro záznam sledovaného spektra (spektrogram) a vznikl spektrograf.

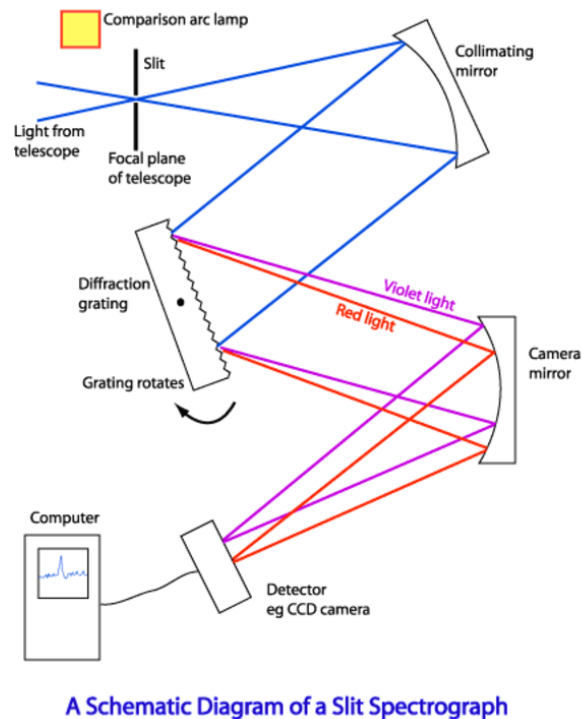
Spektrografy rozlišujeme podle disperzního členu a vzhledu tzv. disperzní funkce, což je vztah mezi polohou ve spektru x a vlnovou délkou λ :

1. hranolový (1 až 3 hranoly) – hranolový spektrograf je historicky starší; využívá rozdílů v indexu lomu materiálu hranolu pro různé vlnové délky světla. Standardně bývá připojen k dalekohledu v místech, kde se tvoří obraz. Poloha spektrální čáry ve spektru x zřejmě závisí na vlnové délce světla λ , které ji tvoří. Disperzní funkce má nejčastěji tvar: $\lambda = \lambda_0 + (x - x_0)^{-\alpha}$, kde x_0 je libovolně zvolený počátek, λ_0 , C , a α jsou konstanty proložení. Nevýhodami hranolového spektrografu je silně nelineární disperzní funkce, ztráty světla průchodem jedním nebo i více hranoly, a nemožnost pozorování ultrafialové části spektra, která je sklem hranolu pohlcována. To vše nahrává většímu rozšíření mřížkových spektrografů, právě na úkor hranolových. Nicméně v historii sehrály hranolové spektrografy velkou roli. Uplatnily se zejména objektivové hranoly, které umožňují získat záznamy spekter najednou pro všechny hvězdy v poli. Hodí se tak výborně pro spektrální klasifikaci hvězd. S jejich pomocí byly také vytvořeny spektrogramy pro HD katalog.
2. mřížkové spektrografy – K rozložení světla se využívá difrakce na mřížce a následné interference. Na rozdíl od hranolového spektrografu je disperze stejná pro všechny vlnové délky. Předpokládejme, že na mřížku s typicky 600 vrypů na mm dopadá světlo pod úhlem α . Po ohybu je paprsek odchýlen od kolmice o úhel β , přičemž platí $m\lambda = d(\sin \beta + \sin \alpha)$, kde d je vzdálenost sousedních vrypů mřížky, tzv. mřížková konstanta, m je řád spektra. Získaný záznam spektra na detektoru je tedy tvořen celou řadou spekter odpovídajících různým řádům spektra (hodnotám m). Aby nedocházelo k překryvu sousedních spekter, zužuje se rozsah vlnových délek dopadajícího záření speciálními filtry.



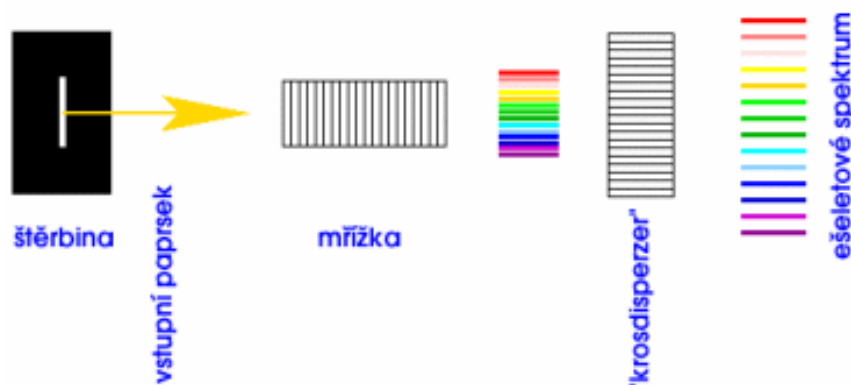
Obrázek 3.11: Vrypky na mřížce.

3. ešeletové, někdy též echelle (z angl. echellette) spektrografy – Používají se zde dvě difrakční mřížky pootočené vůči sobě o 90° . První disperzní člen (zpravidla mřížka s malým počtem vrypů) soustřeďuje záření do vysokých řádů spektra, které se však vzájemně překrývají. Proto se využije druhého disperzního členu (znovu mřížka nebo i hranol), který vysoké řády opticky naskládá nad sebou. Na výsledném snímku (zpravidla CCD je pak zachyceno velmi dlouhý úsek spektra v mnoha řádech.



A Schematic Diagram of a Slit Spectrograph

Obrázek 3.12: Schéma zachycuje klíčové komponenty moderního štěrbinového spektrografu. Zdroj: upraveno z diagramu Jamese B. Kalera, v knize "Stars and their Spectra," Cambridge University Press, 1989.



Obrázek 3.13: Schéma uspořádání a činnosti ešletového spektrografu. Převzato ze stránky <http://pleione.asu.cas.cz/slechta>.

Spektrograf může pro pořízení spektrogramu používat různé **detektory**. Když odhlédneme od oka jako detektoru u spektroskopu, pak se v astronomii setkáváme v podstatě s dvěma typy detektorů. Fotografickým detektorem může být fotografická deska, fólie nebo papír. V praxi se dnes nejčastěji setkáváme s elektronickým detektorem v podobě CCD čipu. V minulosti se používaly i lineární CCD prvky tzv. Reticon.

Od konce 90. let minulého století jsou využívány stále ve větší míře spektrografy s optickými vlákny (multifibre spectroscopy). Jejich princip spočívá v tom, že světlo je z ohniskové roviny dalekohledu rozvedeno soustavou optických vláken do spektroskopu, kde vznikají simultánně spektra pro různé objekty ze zorného pole dalekohledu. Současné pořizování spekter pro více objektů je obrovskou výhodou a velice zvyšuje využití pozorovacího času dalekohledů.

Důležitou charakteristikou spektrografu je tzv. lineární **disperze** W – bezrozměrný parametr vyjadřující, jak velký úsek spektra v jednotkách vlnové délky připadá na jeden délkový element na použitém detektoru spektrografu

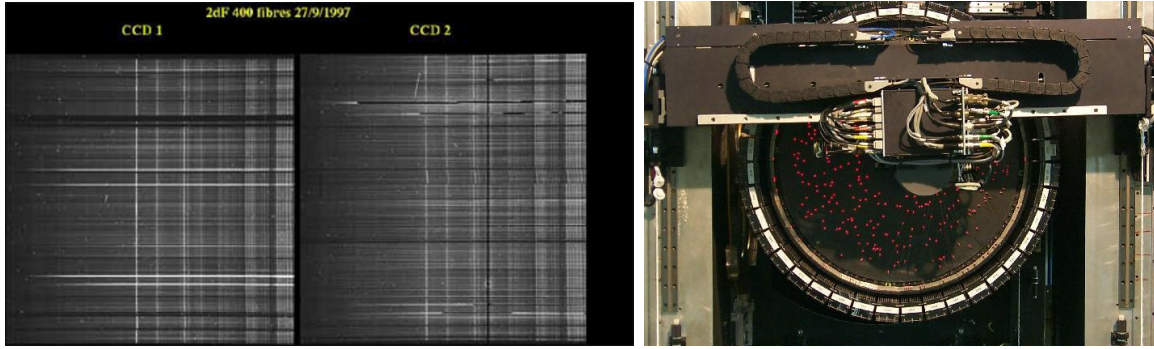
$$W = \frac{\Delta\lambda}{\Delta l}. \quad (3.38)$$

Pro fotografická spektra se udává v \AA mm^{-1} nebo nm mm^{-1} . U elektronických detektorů je běžné udávat disperze i v nanometrech na pixel. Ale pozor, čím je disperze numericky menší, tím větší detaily v profilu čar můžeme pozorovat. O spektrografu s numericky menší disperzí se pak říká, že má větší disperzi. Podle disperze rozdělujeme spektra na nízkodisperzní s 2 nm mm^{-1} a více a vysokodisperzní spektra, kde je disperze 2 nm mm^{-1} a menší. Nízkodisperzní spektra se hodí více pro spektrální klasifikaci. Nicméně i zde je lepším řešením vysokodisperzní echelle spektrum.

O kvalitě spektrografu vypovídá **rozlišovací schopnost** R , která je definována jako

$$R = \frac{\lambda}{n\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{nWs}, \quad (3.39)$$

kde λ je vlnová délka spektra v nm, W lineární disperze v nm mm^{-1} , $d\lambda$ je rozdíl vlnových délek mezi dvěma sousedními detekčními elementy zobrazeného spektra (zrny emulze nebo pixely elektronického detektoru) v nm, s je vzdálenost středů dvou detekčních elementů v mm a konečně n udává, kolikrát je promítnutá šířka štěrbin v poloviční hloubce (FWHM) větší než $d\lambda$. Zpravidla se n pohybuje mezi 2 až 3. Obvyklá hodnota parametru s činí pro fotografické emulze 0,020 až 0,025 mm a 0,010 až 0,025 mm pro elektronické detektory (Harmanec & Mayer, 2008).



Obrázek 3.14: Vlevo: 400 spekter z dalekohledu 2dF. Každá z dvojice CCD kamer zaznamenává 200 spekter hvězd, jejichž světlo je z ohniskové roviny vedeno na mřížku pomocí optických vláken. Vpravo: Detekční deska spektrografu 2dF na Anglo-Australian observatory připravovaná pro pozorování robotem. Optická vlákna jsou osvětlena červeně. Zdroj: The 2dF Galaxy Redshift Survey

Pro řadu astrofyzikálních úloh je nezbytná vysoká **kvalita spekter**. Ta je většinou dána poměrem signálu k šumu S/N , někdy SNR (z angl. *signal to noise ratio*). V minulosti byla limitujícím faktorem citlivosti fotografických desek, respektive zrnitost fotografických emulzí. Šum elektronických spekter je tvořen zejména vlastním šumem detektoru, který lze ochlazením detektoru výrazně snížit. U spekter určených pro vědecké účely se vždy snažíme dosáhnout co největšího poměru signál/šum při co nejkratší expozici. Dnes je možno dosahovat i poměrně vysokých hodnot, které umožňují provádět diagnostiku i velmi jemných efektů.

Z praxe lze poměr signál/šum pro dané spektrum jednoduše odhadnout jako poměr průměrného signálu a jeho střední kvadratické chyby určené pro vhodně zvolený úsek spektra, o kterém víme, že neobsahuje žádné spektrální čáry.

$$S/N = \left(\frac{\sum S}{m} \right) / \sqrt{\frac{(\sum S^2 - (\sum S)^2 / m)}{m - 1}}, \quad (3.40)$$

kde S je signál odpovídající dopadajícímu toku z hvězdy v dané vlnové délce, N je víceméně náhodný šum a m je počet bodů rektifikovaného spektra, ve kterých byl uvažován signál S úměrný toku záření z kontinua hvězdy (Harmanec & Mayer, 2008). Elektronická spektra dosahují běžně poměru signál/šum více než 100, s detektorem Reticon a s nejkvalitnějšími CCD detektory lze dosahovat i hodnot 2000.

Při vyhodnocování spekter z daného spektrografu je nutné brát v úvahu i tzv. **instrumentální profil**. V ideálním případě by spektrální čára měla prakticky nulovou šířku, ale v důsledku aberace a difrakce vznikne po průchodu záření optickým systémem spektrografu čára deformovaná. Při určování skutečných profilů čar musíme instrumentální profil odečíst.

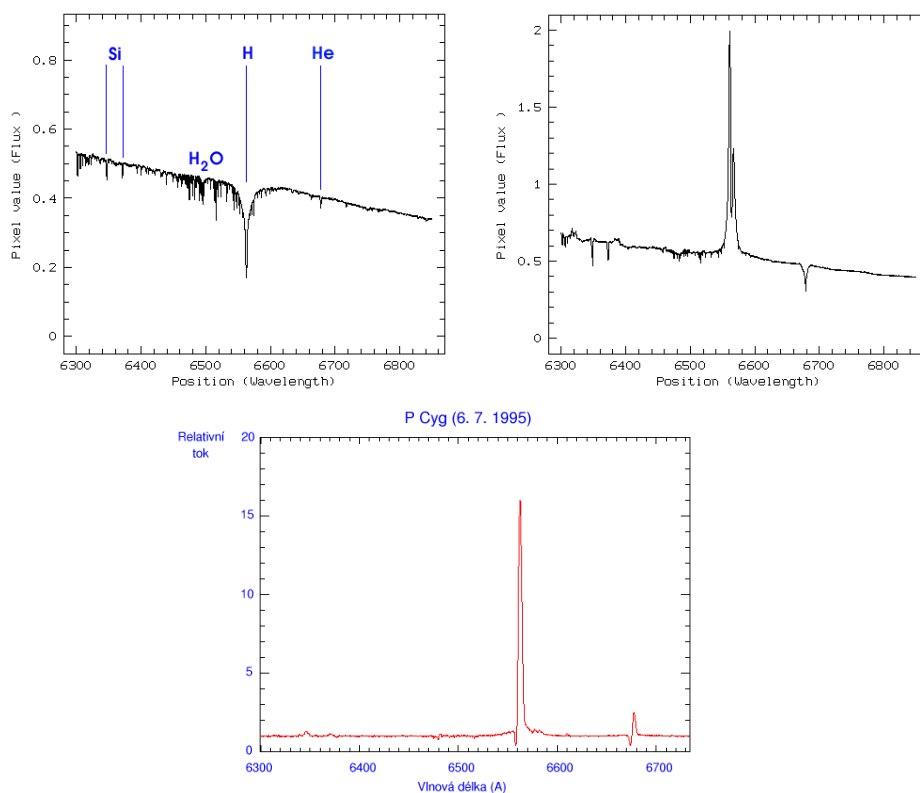
Spektrografy obecně potřebují hodně světla, jsou proto připojovány k velkým dalekohledům s průměrem alespoň 60 cm. Nicméně s vývojem detektorů se i tento limit zmenšuje. Důležité je využití spekter a pozorovací program. Velice záleží na požadované mezní hvězdné velikosti, která se odvíjí od konstrukce spektrografu, jeho účinnosti. Například 2m dalekohledem v Ondřejově lze získat po hodinové expozici spektrum hvězdy 10. velikosti. Obdobně velké dalekohledy např. v Tauntenburgu v Německu však získávají spektra pro hvězdy až do

13. velikosti. Pokud nepotřebujeme vysokou disperzi lze pořizovat spektra i hvězd 18., 19. velikosti.

3.3.3 Vzhled spektra

Na výslednou podobu spektra má vliv mnoho faktorů. Záleží nejen na pozorovaném objektu, tedy místu vzniku záření, ale svůj vliv může mít jakékoli z míst, jakým záření prochází, než se dostane až na záznamové médium detektoru ve spektrografu. Musíme tedy počítat s vlivem mezihvězdného prostředí, zemské atmosféry i použitého spektrografu, detektoru a záznamového zařízení, včetně záznamového média.

Zaznamenané spektrum kosmického objektu je závislost měřené veličiny nazývané tradičně jako intenzita $I_\lambda(\lambda)$ (nebo jen $I(\lambda)$, která souvisí s fyzikálně jasně definovanou spektrální hustotou záření $f_\lambda(\lambda)$, udávanou v jednotkách $\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1}$ následující relací: $I(\lambda) = \Psi(\lambda) f_\lambda(\lambda)$, kde $\Psi(\lambda)$ je složitá bezrozměrná funkce nejen vlnové délky, ale i času, kterou však při řešení většiny úloh spektrální analýzy můžeme v rámci krátkých úseků spektra považovat za konstantu, takže pak platí, že $I(\lambda) \sim f_\lambda(\lambda)$.



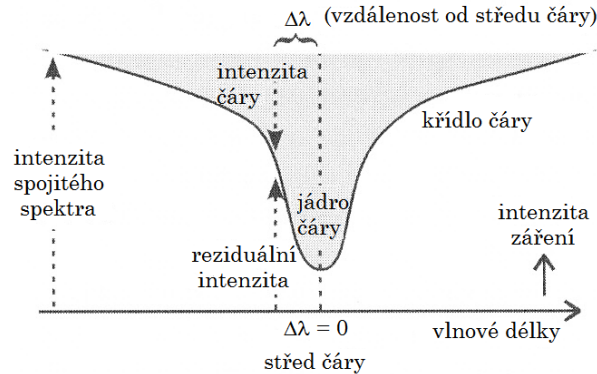
Obrázek 3.15: Spektrální čáry. Vlevo: absorpční čáry ve spektru Algolu s dominantní čarou H_α , v jejímž krátkovlnném křídle vidíme množství čar vodní páry vznikajících v zemském ovzduší; vpravo: výrazná emise v místě čáry H_α u hvězdy ζ Tauri; dole: rektifikovaný profil spektra hvězdy P Cyg (Ondřejov, 6. 7. 1995). Převzato z webu M. Šlechty <http://pleione.asu.cas.cz/slechta/spektra>.

Ve spektru se kromě kontinua nacházejí i drobnější detaily, zjasnění nebo naopak

pokles intenzity v podobě spektrálních čar. Zatímco spojitá složka spektra se mění pomalu, čárová rychle s vlnovou délkou λ . Protože v získaných záznamech spektra (spektrogramech) mají kontinua obecně různý průběh pro různé typy hvězd (viz obr. 3.10), rektifikují se tyto záznamy na kontinuum $I_c(\lambda) \equiv 1$. Pak je možné studovat rozložení spektrálních čar a jejich vlastnosti. Spektrální čáry můžeme rozdělit na temné absorpční ($I < 1$) a jasné emisní ($I > 1$). Jejich kombinací vzniká např. čára s tzv. profilem typu P Cygni (viz třetí z obrázků v obr. 3.15).

Energiové hladiny vázaně-vázaných přechodů, které dávají vznik spektrálním čarám, jsou velice přesně definovány. Dalo by se proto očekávat, že i šířka pozorovaných spektrálních čar bude dána jen instrumentálními možnostmi použitého spektrografu. Nicméně uvědomíme-li si, že vlastně takový přeskok elektronu mezi jednotlivými hladinami je fyzikálním měřením rozdílu energií probíhající v jistém časové intervalu, musí platit mezi přesnostmi obou veličin (ΔE , Δt) známá Heisenbergova relace neurčitosti, která je pak příčinou nenulové přirozené šířky každé ze spektrálních čar. Pološířka je určena zejména frekvencí srážek nabuzeného atomu s jinými ionty, tedy tlakem.

Šířku a obecně i celý její profil spektrální čáry určují i další vlivy jako Dopplerův jev (rotace, turbulence, teplotní pohyb), Zeemanův efekt (rozštěpení čar v důsledku přítomnosti magnetické pole). Pro získání detailních informací z profilů čáry je třeba provést komplexní spektrální analýzu a srovnání s vypočtenými modelovými spektry hvězdy.



Obrázek 3.16: Profil spektrální čáry v absorpčním spektru. Převzato z Kleczek (2002).

U spektrálních čar rozeznáváme jádro čáry (oblast v bezprostředním okolí středu čáry) a křídla, jak je vidět na obr. 3.16. Intenzitu nebo chcete-li mohutnost čáry se někdy označujeme jako „síla čáry“, přičemž čím více světla bylo absorbováno, tím je čára hlubší a širší a tedy silnější. Silné čáry absorbují více jak 25 % záření v dané čáře (viz obrázek 3.19). Mohutnost čáry můžeme numericky vyjádřit pomocí tzv. ekvivalentní šířky čáry EW_λ . Její měření je jedním ze základních nástrojů analýzy spektrálních čar. Nejdříve spočteme plochu vymezenou studovanou spektrální čarou a následně spočítáme šířku obdélníku (o jednotkové výšce) stejné plochy (viz obrázek 3.18). Plochu vymezenou spektrální čarou spočteme ze vztahu

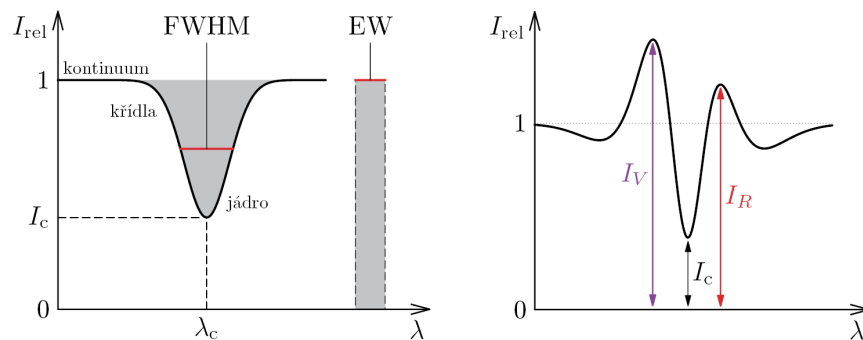
$$EW_\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{I(\lambda)}{I_{\text{kont.}}(\lambda_0)} \right) d\lambda, \quad (3.41)$$



Obrázek 3.17: Spektrum jasné veleobří hvězdy 41 Cygni spektrálního typu F5 Iab. Převzato z <http://www.astro.washington.edu/>.

kde $I(\lambda)$ je závislost intenzity na vlnové délce záření v čáře, $I_{\text{kont.}}(\lambda_0)$ je očekávaná intenzita kontinua ve středu studované čáry. Integrujeme přes šířku čáry, vymezené vlnovými délkami λ_1, λ_2 . Ekvivalentní šířka čáry se udává se v nanometrech nebo angströmech ($1\text{\AA} = 0,1\text{ nm}$).

Další charakteristikou spektrální čáry je její centrální hloubka, respektive intenzita ve středu čáry I_c , vyjádřená v jednotkách úrovně intenzity spojitého záření v daném místě. Pro absorpční čáry je tato veličina vždy menší než jedna. Čím silnější je daná absorpční čára, tím je hodnota I_c menší číslo v rozsahu 0 až 1. Veličině $1 - I_c$ se říká zbytková nebo také reziduální intenzita. U emisních čar můžeme ovšem kromě centrální intenzity měřit i intenzitu fialového I_V a červeného I_R vrcholu emise (pokud je emise dvojitá) a studovat i jejich poměr. Lze samozřejmě měřit i ekvivalentní šířku emisní čáry



Obrázek 3.18: Schematické znázornění závislosti relativní intenzity spektrální čáry $I_{\text{rel}} = I(\lambda)/I_{\text{kont.}}(\lambda_0)$ profilu spektrální čáry s vyznačením centrální relativní intenzity I_c , centrální vlnové délky λ_c , šířky čáry v poloviční hloubce (FWHM) a také ekvivalentní šířky (EW, equivalent width). Vpravo je komplikovaný profil čáry, na kterém lze rozlišit absorpce a dvojitou emisi. Relativní intenzity emisních komponent označujeme I_V (posunutou do fialova) a I_R (do červena). Převzato z Harmanec & Brož (2011).

a obvykle se používá konvekce, že je-li ve výsledné ekvivalentní šířce emisní příspěvek dominantní, udává se ekvivalentní šířka numericky záporná.

V obrázku 3.18 je vyznačen i parametr FWHM (z angl. full width at half maximum), který známe z fotometrie. U spektrální čáry jde o šířku čáry měřenou v poloviční hloubce čáry, mezi centrem čáry a úrovní spojitého záření.

3.3.4 Co lze vyčíst ze spektrogramů

Spektra hvězd nám poskytují množství informací o studovaném objektu, zejména o jeho svrchních vrstvách, tedy pokud je umíme v získaném spektrogramu číst. Analýza spekter není vůbec jednoduchou záležitostí. V pozorovaných spektrech hvězd se velmi často překrývají různé čáry a i zdánlivě „čisté“ čáry mohou být ve skutečnosti výsledky takového překryvu, tedy tzv. blendy. Autoři moderních metod spektrální diagnostiky jsou si toho vědomi. Nesnaží se proto o detailní identifikaci čar, ale o připodobnění modelového spektra reálnému pomocí vhodného astrofyzikálního modelu. Reálná, napozorovaná spektra srovnávají se spektry vypočtenými, tzv. syntetickými. Výzkumníkům jsou k dispozici celé sítě modelů hvězdných spekter.

Podle vzhledu hvězdných spekter lze určit spektrální typ včetně luminozitní třídy. Mimo jiné lze též určit nebo alespoň odhadnout: 1. Teplotu a tlak (z intenzity a šířky spektrálních čar různých prvků). 2. Chemické složení (z šířky spektrálních čar s přihlédnutím k teplotě). 3. Zářivý výkon (z spektrálních čar obvykle vodíkových nebo ze srovnání intenzity některých spektrálních čar). 4. Rotaci hvězdy a turbulentní pohyby plynů v horních vrstvách atmosféry (z Dopplerova jevu, tyto pohyby rozšiřují čáry a současně zplošťují jejich profil). 5. Radiální pohyb hvězd (z Dopplerova jevu). 6. Násobnost hvězdy (z periodického posunutí nebo rozštěpení čar). 7. Přítomnost případně polarita magnetického pole (vede k rozšíření čar, u silných polí až k rozštěpení, vše jako důsledek ze Zeemanova jevu).

Nenulová *radiální rychlost* RV (z anglického: radial velocity) je nejčastější příčinou toho, proč je jiná pozorovaná vlnová délka λ . Objekt i pozorovatel jsou ve vzájemném pohybu např. v důsledku rotace Země, jejího pohybu kolem Slunce, oběhu Slunce kolem středu Galaxie, pohybu objektu vůči Galaxii, rotaci a orbitálním pohybu objektu. RV je pak průmět rychlosti objektu do směru k pozorovateli, kterou získáme porovnáním vlnových délek známých spektrálních čar ve spektru objektu s nepohyblivým laboratorním zdrojem; kladná RV znamená, že se od nás objekt vzdaluje, jeho čáry jsou v důsledku Dopplerova jevu posunuty směrem k delším vlnovým délkám (červený posuv).

Rozbor radiální rychlosti se dříve prováděl pomocí dobře definovaných čar nebo jejich soustavy a určovala se vlnová délka centra čáry (SPEFO, Splat). V současnosti se využívá vlastně posun celého úseku spektra, kde nezávislou proměnnou není vlnová délka λ ale její přirozený logaritmus $x = \ln \lambda$. Posun v x : $\Delta x = \Delta(\ln \lambda) = \Delta \lambda / \lambda = \Delta RV / c$, což umožňuje rychle hledat změny radiální rychlosti a využívat přitom celou délku spektra, které máte k dispozici. Tímto přístupem lze úplně využít veškerou informaci o případných změnách radiální rychlosti, která je ve spektru obsažena, což výrazně přispívá ke snížení nejistoty výsledku.

Příčinou změn radiální rychlosti může být jakýkoli křivočarý pohyb, nejčastěji jde o projev dvojhvězdnosti. Pokud ve spektru pozorujeme čáry obou složek podvojně soustavy, mluvíme o dvojhvězdy typu SB2 (double line spectroscopic binary), jestliže je světlo jedné ze složek příliš slabé, najdeme ve spektru jen jeden systém spektrálních čar a hovoříme o dvojhvězde typu SB1 (single line spectroscopic binary).

3.4 Zdroje pozorovacích dat o proměnných hvězdách

Každá studie proměnné hvězdy nebo nějaké třídy proměnných hvězd vyžaduje získat pokud možno co nejvíce informací, zpravidla pozorovacích dat. V některých případech postačí vlastní pozorování, dnes získaná nejpravděpodobněji se CCD kamerou, ale mohou to být i fotoelektrická fotometrie. Méně často zřejmě budete v dnešní době provádět vizuální pozorování případně fotografická pozorování na klasický film. Ale pozorování všech typů můžete najít v dostupných zdrojích a archivech a případně použít pro vaši práci. Půjde o náročný úkol, zejména v případě, že se rozhodnete využít také data ze starších fotografických pozorování, fotografických přehlídek, skleněných archivů, případně vizuální pozorování. V každém případě je ale dobré vědět, na co si dávat pozor a jak s takovými daty zacházet.

3.4.1 Vlastní, převzatá a archivní pozorování

3.4.1.1 Vizuální odhady

Vizuální pozorování proměnných hvězd už ve vyspělých zemích takřka nikdo neprovádí. Výjimkou jsou chudší regiony, kde pozorovatelé nemají prostředky na zakoupení lepšího vybavení, CCD kamer či digitálních fotoaparátů. Zdálo by se tedy zbytečné, se touto formou pozorování věnovat. Jak už jsme uvedli, jde o pozorování zatížené různými subjektivními vlivy, jehož přesnost značně pokulháva ve srovnání s moderními metodami.

Jenže, vizuální pozorování a odhady jasnosti proměnných hvězd byly prováděny od dob Tychona Braheho. Mají tedy nejdlejší časovou základnu a pro zkoumání dlouhodobých změn proměnných hvězd jsou tak často jediným zdrojem informací. Můžeme jim ale důvěřovat? Ve světě existuje řada i vyhraněných názorů pro a proti využívání vizuálních pozorování ve studiích proměnných hvězd. Obecně lze říci, že s jistou obezřetností lze tato data použít. Než ale vizuální pozorování použijeme, měli bychom je podrobit detailnímu zkoumání. Je dobré vědět něco více i o pozorovateli. Ukazuje se, že například určení okamžiku minima jasnosti zákrytových dvojhvězd jsou u některých pozorovatelů založena jen na třech až pěti odhadech jasnosti. Takováto data jsou krajně nedůvěryhodná. A pokud je produkuje nějaký pozorovatel programově, uděláte nejlépe, když je nepoužijete. Je třeba pečlivě zkontrolovat uváděný čas pozorování, zda jde o světový, pásmový nebo dokonce pásmový letní čas. Velmi dobré je tedy mít k dispozici detailní záznam (protokol) pozorování a ne jen například výsledný okamžik minima nebo maxima nějaké periodicky proměnné hvězdy.

Vzhledem k tomu, že vizuální pozorování je silně subjektivní záležitostí, bývá dosti silně zatíženo tím, že zejména zkušenější pozorovatelé již předem vědí, jak by měl vypadat výsledek jejich počínání, tedy jaký tvar má mít světelná křivka v okolí extrému (má být hladká, symetrická a s extrémem někde hodně blízko předpovědi). Pak je to spíše otázka, jakou efemeridu okamžiků extrému ten který pozorovatel používal. Detailní rozbor využitelnosti vizuálních pozorování zákrytových dvojhvězd pro studium změn jejich periody je ukázán v článku Mikulášek et al. (2013).

Je třeba připomenout, že v tomto směru českoslovenští, čeští a slovenští pozorovatelé jsou opravdu jedni z nejlepších na světě. Ke každému publikovanému pozorování zákrytové dvojhvězdy existuje protokol v papírové nebo elektronické podobě. Z něj je možné získat jednotlivé

odhady jasnosti a revidovat například určení okamžiku minima jasnosti hvězdy. Dále naprostá většina z nich využívala předpovědi okamžiků minim zaokrouhlené na půl hodiny, takže se sice vědělo, že během této noci by mělo hlídané minimum nastat, ale kdy, to vědělo jen těch pár organizátorů, kteří tyto předpovědi vydávali.

3.4.1.2 Fotografická pozorování

Klasická fotografie je dnes v astronomii na ústupu. Nicméně je nutné připomenout, že stále jsou k dispozici velké archivy skleněných fotografických desek. Jmenujme alespoň archivy na observatořích na Harvardu, Mt. Palomaru, Sonnebergu, Asiagu, Moskvě, Petrohradu, Oděse a jinde. V těchto archivech je uloženo skutečně obrovské množství informací o proměnných hvězdách. Už řadu let se majitelé těchto skleněných desek snaží archivy zdigitalizovat a tím je i zpřístupnit široké vědecké obci. Měli bychom tedy přece jen vědět něco málo i o fotografických procesech, křivce zčernání a podobně. Tyto otázky však řeší jiný kurz. Zde už na ně není místo. Připomeňme si ale některá úskalí převzatých fotometrických dat pocházejících z fotografických přehlídek.

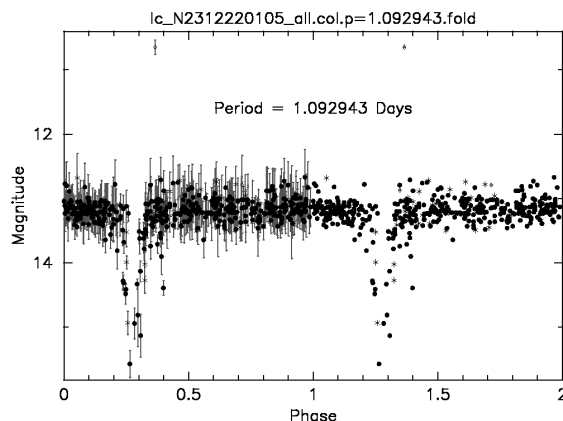
Běžné expoziční časy při získávání těchto snímků byly minuty, ale spíše desítky minut, takže je nelze využívat pro studium velmi rychle proměnných hvězd. Navíc snímky stejného hvězdného pole byly pořizovány s určitým odstupem až několika dní. Naprostou výjimkou jsou řady snímků téhož pole pořízené během jediné noci. Taková data jsou tedy vhodná pro studium dlouhoperiodických nebo nepravidelných proměnných hvězd.

U zákrytových dvojhvězd byl v minulosti místo standardního určení okamžiku minima často publikován jen čas pořízení snímku, na němž sledovaná proměnná hvězda byla slabší než obvykle, tedy v té době, kdy hvězda buď sestupovala nebo naopak vystupovala minima. Tento velice hrubý odhad okamžiku minima býval uveden jako „přibližný“ čas minima a v seznamu okamžiků minim většinou označen dvojtečkou. Tato usance ovšem zcela ignoruje informace z ostatních snímků, a její vypovídací hodnota je velice nízká. Správně bychom měli vyhodnotit všechny snímky a získat soubor hvězdných velikostí naší proměnné hvězdy. Ten pak připojit k ostatním individuálním měřením pro další zpracování, o němž je pojednáno dále. Takový postup umožňuje získat fázovou křivku z fotografických měření, přesný sezónní okamžik nebo okamžiky minima jasnosti včetně nejistot jejich určení. Výsledkem je tak mnohem více přesnějších dat než pouhé nejisté okamžiky zeslabení jasnosti.

Je třeba rovněž věnovat zvýšenou pozornost časovým údajům, které fotografické desky provází. Protože byly zřejmě pořizovány před řadou desítek let, budou se lišit zvyklostí zápisu časových údajů, bude se lišit i použitý časový standard a to, zda jde o začátek nebo střed expozice.

3.4.1.3 Fotoelektrická pozorování

Na rozdíl od fotografických nebo vizuálních pozorování jsou fotoelektrická měření většinou standardizovaná (alespoň ta, prováděná od 50. let minulého století). Znamená to mj., že při prvotním zpracování už byly nalezeny a odstraněny hrubé chyby, chybné identifikace při měření a podobně. Badatel tak dostává do ruky většinou velmi kvalitní materiál pro další studium. Jenže přílišná důvěra se ani zde nemusí vyplatit. Problémy



Obrázek 3.19: Výsledky projektu digitalizace desek Harvard Observatory v projektu DASCH. Světelná křivka zákrytové proměnné hvězdy RY Cnc s periodou 1,092943 dne. Na obrázku jsou dva cykly změn. Do prvního jsou zobrazena všechna měření včetně chybových úseček. V druhém jsou též měření. Převzato z <http://hea-www.harvard.edu/DASCH>.

jsou zejména s časovými údaji. Někdy se zde objevují opravdu nevídané věci, kdy se pozorovatel splete o jeden den nebo dokonce celý rok. Takové chyby ale snadno odhalíte, pokud si pozorování zakreslíte například do O-C diagramu. Jenže, pokud se chystáte převzít tato data například ze starší publikace, doporučujeme velmi pečlivě pročíst informace o měření času, časovém standardu. Při detailní analýze, například pro účely studia jemných posunů okamžiků minim nebo maxim proměnných hvězd oproti předpovědi, mohou i na první pohled zanedbatelné odchylky mít závažné důsledky. Ukazuje se navíc, že pro takové přesné analýzy je nezbytné provádět převod uvedených časů na barycentrický (podrobněji v kapitole 5.1.2).

3.4.1.4 CCD pozorování

S nástupem CCD techniky a jejím rozšířením mezi amatérské pozorovatele došlo k obrovskému nárůstu fotometrických dat proměnných hvězd. Bohužel tento boom přinesl také určité problémy. Fotoelektrická fotometrie byla takřka výhradně doménou profesionálních institucí, kde byla jistá záruka kvality zpracování dat. I když i tam se vyskytly výjimky, CCD pozorování jsou jednoznačně řazena k objektivním metodám studia proměnných hvězd. Bohužel různé metody zpracování dokáží i docela dobré surové snímky znehodnotit.

Prvním problémem zpracování CCD snímků jsou korekční snímky. Zejména tzv. flat snímek rovnoměrně osvětleného pole (například soumrakové oblohy bez hvězd) je často špatný a tak po jeho aplikaci klesá přesnost získané fotometrie. V řadě případů jsou publikovány pouze okamžiky minim a maxim jasnosti ze CCD pozorování. Jenže většinou se už nezkoumá, kolik měření bylo k určení okamžiku extrému jasnosti použito. A je samozřejmě velký rozdíl, pokud to bylo 10 nebo třeba 200 bodů. K tomu se přidává často chybná metoda určení okamžiku extrému a výsledkem je uměle vyrobená nejistota publikovaného okamžiku až několik minut. Nejlepším řešením je tedy shromáždit všechna dostupná individuální CCD měření a v případě nejistoty ohledně zpracování, dokonce

i původní CCD snímky.

Opět musíme apelovat na pozorovatele a zpracovatele, aby věnovali velkou pozornost časovým údajům. Vzhledem k tomu, že CCD kamery jsou řízeny osobními počítači, zpravidla z nich také přebírají čas. Tento počítačový čas je založen na časovém standardu UTC, který je synchronizován přes Network Time Protocol (NTP) server. Ale ne vždy probíhá synchronizace tak často, jak je třeba. Některé starší programy pro obsluhu CCD kamer dokonce zastavovaly čas v počítači po dobu vyčítání snímku. Během noci se tak čas v počítači stále více a více opožďoval. Takovou chybu však nezjistíme jen z okamžiku extrémů, ale porovnáním průběhu světelné křivky s jinými pozorováními.

Dalším problémem CCD pozorování je to, že většina pozorovatelů se spokojí s tzv. diferenciální fotometrií a neprovádí další zpracování, které by vedlo k navázání získaných hvězdných velikostí na mezinárodní systém. Využívá se předpokladu, že při malé velikosti zorného pole jsou rozdíly způsobené různými barevnými indexy pozorovaných hvězd a různou vzdušnou hmotou zanedbatelné. Zkušenost ale ukazuje, že tím se do pozorování, respektive výsledné fotometrické řady dat vkládají různé trendy, které mohou ovlivnit například určované okamžiky minim nebo maxim jasnosti. V případě, kdy je na CCD čipu zaznamenáno velké zorné pole (někdy až o rozměru několika stupňů) může dojít k významné deformaci získané světelné křivky, pokud nepovedeme standardizaci měření a převod do mezinárodního systému.

3.4.2 Soudobé přehlídkové projekty

Přehlídkových projektů, kde je monitorována alespoň část hvězdné oblohy, je dnes několik desítek. Není možné zde uvést kompletní přehled. Navíc řada opravdu velkých projektů se teprve chystá, například Large Synoptical Survey Telescope (LSST) (Ivezic et al., 2008), Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System (PanSTARRS) (Hodapp et al., 2004) nebo SkyMapper (SEKBO) (Keller et al., 2008). Vybereme tedy jen některé z nich, kde je možné získat dobrá data pro studium proměnných hvězd.

3.4.2.1 Pozemské projekty

ASAS

All Sky Automated Survey (ASAS) je polský projekt, který běží od roku 1997. Cílem je provádět automatickou fotometrii zhruba 20 milionů hvězd jasnějších než 14 mag na celé hvězdné obloze. Dalekohledy projektu mohou nyní pozorovat jižní objekty do deklinace $+28^\circ$, takže pokrývají tři čtvrtiny hvězdné oblohy. Stanice ASAS-jih je umístěna na observatoři Las Campanas v Chile a ASAS-sever na hawaiiském ostrově Maui na Haleakala Observatory. Strůjcem nápadu byl Bohadan Paczynski. První prototyp a nástroje na přenos a zpracování dat vytvořil Grzegorz Pojmański.

V rámci projektu bylo objeveno již několik desítek tisíc nových proměnných hvězd. Pozorování jsou prováděna ve filtrech V a I a jsou k dispozici v přehledné formě na webovských stránkách projektu <http://www.astrouw.edu.pl/asas/>. Popis projektu a zpracování dat je uveden v prvním ze série článků o výsledcích projektu Pojmanski (2002).

NSVS

Přehlídka Northern Sky Variability Survey (NSVS) vznikla vlastně jako dočasný produkt projektu Robotic Optical Transient Search Experiment (ROTSE-I). Ten spočíval v monitorování oblastí hvězdné oblohy s deklinací větší než -38° pomocí čtyř sprážených dalekohledů (teleobjektiv se CCD kamerou) v Los Alamos (New Mexico, USA). Databáze NSVS obsahuje světlené křivky zhruba 14 milionů objektů v rozmezí 8 až 15.5 mag. Data jsou nefiltrovaná, takže vzhledem k profilu citlivosti kamer budou blízka měřením ve filtru *R*. Všechna fotometrická data jsou k dispozici přes Sky Database for Objects in Time-Domain (SkyDOT) v Los Alamos National Laboratory <http://skydot.lanl.gov/nsvs/nsvs.php>.

Při použití dat je třeba dávat pozor na formát času. Je totiž uveden v podobě (MJD-50000), tedy modifikované juliánské datum zmenšené o 50000. Navíc autoři v informativním článku (Woźniak et al., 2004) neuvádějí ani přesný časový rámeček (spokojí se chybně jen s UT) ani to, zda byla aplikována heliocentrická korekce.

OGLE

Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE) je další polský projekt, který je řízen z varšavské univerzity. Jeho vedoucím je Andrzej Udalski. Zaměřuje se na hledání temné hmoty s pomocí mikročoček. Projekt byl zahájen v roce 1992 na observatoři Las Campanas v Chile. Od té doby se jako vedlejší produkt mimo jiné podařilo objevit několik exoplanet. Hlavním cílem pozorování jsou Magellanova oblaka a výduť naší Galaxie.

Fotometrická data pro zvolený objekt jsou k dispozici ve filtrech *BVI* na webovské stránce projektu <http://ogle.astrouw.edu.pl/>, respektive <http://ogledb.astrouw.edu.pl/~ogle/photdb/>. Detaily struktury dat jsou popsány v práci Szymanski (2005). Projekt probíhá v několika fázích: OGLE-I (1992–1995), OGLE-II (1996–2000), OGLE-III (2001–2009). V roce 2010 byl proveden upgrade technického vybavení a odstartovala fáze OGLE IV. Díky využití 32čipové mozaikové CCD kamery je možné nyní zvýšit kadenci snímků při zachování stejné oblasti monitorování. Hlavním úkolem této fáze je nyní detekce exoplanet.

SLOAN

Sloan Digital Sky Survey (SDSS) je velmi ambiciózní projekt. Podílí se na něm 25 institucí z celého světa. V současné době (od r. 2008) probíhá třetí fáze. Během osmi let prvních dvou částí (SDSS-I, 2000-2005; SDSS-II, 2005-2008) byly získány snímky v pěti fotometrických filtrech. Z nich byla mimo jiné vytvořena trojrozměrná mapa více než čtvrtiny hvězdné oblohy obsahující přes 930 000 galaxií a 120 000 kvasarů.

Pořízená fotometrická a spektroskopická data jsou postupně zveřejňována. V datovém balíčku 8 uvolněném počátkem ledna 2011 je fotometrie půl miliardy hvězd a galaxií a spektroskopie dvou milionů objektů. V datech zveřejněných v roce 2012 je k dispozici první část spektroskopie z Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS), což představuje přes 800 000 spekter. Podrobnější informace k projektu a zveřejněná data jsou k dispozici na <http://www.sdss.org/>.

Pi of the Sky

Tento projekt je dalším z řady polských přehlídkových fotometrických projektů. Jde o řadu plně automatických soustav se CCD kamerami s velkými zornými poli. Jeden systém je umístěn v Chile (od roku 2004) a druhý (od roku 2010) ve Španělsku. Projekt je zaměřen na hledání krátkých optických transientů, zvláště optických dosvitů gama záblesků, monitorování aktivit blazarů a obecně sledování všech proměnných hvězd v pozorované oblasti. Detaily jsou popsány v práci Burd et al. (2004).

Pozorování byla prováděna bez filtru, jen nejnovější detektory mají rovněž předřazen fotometrický filtr. Nefiltrovaná pozorování byla kalibrována na filtr V Opiela et al. (2012). Data jsou k dispozici na <http://grb.fuw.edu.pl>. Čas je udáván ve formě heliocentrického juliánského data HJD, od něhož je odečten čas $T_0=2453250$. Celý systém vyhledávání je trochu neohrabaný, ale vzhledem k tomu, že proběhl upgrade a rozšíření hardwaru, můžeme snad očekávat zlepšení i na softwarové straně a uvolnění další várky dat. Zatím jsou k dispozici data, řady fotometrických měření zejména pro jižní hvězdy v rozmezí zhruba 6 až 10 mag.

2MASS

Přehlídkový infračervený projekt Two Micron All Sky Survey ve filtrech JHK je v provozu od roku 1997 (severní část na Mount Hopkins, Arizona, USA), respektive 1998 (jižní část na Cerro Tololo, Chile). Projekt byl navržen pro výzkum rozsáhlých struktur naší Galaxie a místní skupiny galaxií, ale také jak přípravný a podpůrný pro infračervené kosmické projekty HST/NICMOS, Spitzer a James Webb Space Telescope. Měření ve filtrech JHK jsou získávána současně třemi různými HgCdTe detektory. Limitní hvězdné velikosti jsou 15.8 mag (J), 15.1 mag (H) a 14.3 mag (K). Pozorování bylo ukončeno v roce 2001 a první data byla zveřejněna v roce 2003 na <http://www.ipac.caltech.edu/2mass/>.

V použité infračervené oblasti spektra jsou efekty spojené s mezihvězdnou extinkcí zhruba desetkrát menší než je tomu ve filtru B . I když je přehlídka cílena na galaxie, protože většina z nich nejsilněji září právě v blízké infračervené oblasti, jsou data z této přehlídky velmi dobře využitelná i při studiu proměnných hvězd. K dispozici jsou totiž nejen jednotlivá měření pro daný objekt, ale řadu proměnných hvězd i celé série měření postačujících ke konstrukci kompletní světelné křivky periodicky proměnných hvězd.

V rámci 2MASS bylo získáno 4 121 439 snímků s rozlišením zhruba $2''$ /pixel. V katalogu Point Source Catalogue (PSC) je 470,992,970 objektů. Jenže 2MASS PSC obsahuje vždy jen jedno měření v každém filtru. Časovou sérii měření lze získat z 2MASS Calibration Point Source Working Database využitím serveru NASA/IPAC IRSA GATOR <http://irsa.ipac.caltech.edu/applications/Gator/>. Bližší informace o projektu lze nalézt například v práci Skrutskie et al. (2006). Fotometrickým datům projektu, jejich kalibraci a barevné transformaci se věnuje řada publikací, například Cohen et al. (2003). Informace o rozšíření projektu jsou například na http://www.ipac.caltech.edu/2mass/releases/allsky/doc/seca1_1.html.

CRTS

Catalina Real-Time Transient Survey (CRTS) se zaměřuje na hledání optických transientů s změnami v délce od minut po roky. Primárně je určený na výzkum blízkozemních

objektů NEO. Přístroje projektu pokrývají 26 000 stupňů čtverečních hvězdné oblohy v deklinacích od -35° do $+65^\circ$, ale vyhýbají se oblasti (10 až 15°) kolem galaktického rovníku. V katalogu projektu také nenajdeme objekty jasnější než 12 mag (V), kde už je příliš malá přesnost fotometrie. Pro objekty jasnější než 13 mag by fotometrie projektu měla být využívána obezřetně. Pro slabší cíle je přesnost výsledných hvězdných velikostí ve V filtru přibližně 0.06 až 0.08 mag. V rámci projektu, který běží od konce roku 2007, se už podařilo detekovat desítky supernov, kataklyzmických proměnných hvězd, aktivních galaktických jader dalších transientů, některé dosud neznámé povahy. Data projektu jsou dostupná na http://nesssi.cacr.caltech.edu/cgi-bin/getcssconedb_release.cgi. Blíže informace lze najít v Drake et al. (2009).

3.4.2.2 Kosmické přehlídky

Hipparcos

Družice Hipparcos (zkratka z High Precision Parallax Collecting Satellite) byla součástí astrometrické mise Evropské kosmické agentury (ESA), zaměřené na měření hvězdných paralax a vlastních pohybů hvězd. Projekt byl pojmenován na počest starověkého astronoma Hipparcha, konkrétní název vznikl ze zkratky z High Precision Parallax Collecting Satellite. Družice pracovala ve vesmíru od 8. srpna 1989 do 15. srpna 1993. Celý projekt byl rozdělen na dvě části. V rámci samotného experimentu Hipparcos se měřilo pět astrometrických parametrů u zhruba 120 000 hvězd s přesností 2 až 4 tisícin obloukové vteřiny (mas) a jejich hvězdná velikost ve filtru H_p . Druhý experiment Tycho se věnoval měření astrometrických parametrů a hvězdných velikostí ve filtrech B_T a V_T u dalších 400 000 hvězd s o něco menší přesností. Výsledné katalogy Hipparcos a Tycho byly publikovány Evropskou kosmickou agenturou v červnu 1997 (ESA, 1997; Perryman & ESA, 1997). O deset let později byla publikována nová redukce dat katalogu (van Leeuwen, 2007, 2008, 2009, 2010). Čas ve všech katalozích dat je uváděn v podobě (JD-2440000).

Corot

Sonda COROT (CONvection ROTation and planetary Transits) je projektem Francouzské vesmírné agentury (CNES) a ESA. Jak vyplývá z plného názvu, má tato mise dva primární cíle. Jednak má pátrat po tranzitujících exoplanetách a jednak studovat díky velmi přesné fotometrii i oscilace hvězd podobné těm slunečním, zaměřit se tedy na astroseismologii. Sonda odstartovala v prosinci 2006 a předpokládalo se, že bude v provozu přibližně dva a půl roku. Přes technické potíže, které v roce 2009 zmenšily zorné pole na polovinu, sonda pokračuje a její činnost byla prodloužena až do roku 2015. Dalekohled sondy o průměru 27 cm snímá střídavě pouze dvě pole – kruhové oblasti o průměru 10° v rovině Galaxie se středy na rektascenzi $6^h 50^m$ a $18^h 50^m$. Výsledkem je vícebarevná fotometrie ($UBVr'i'$). Blíže informace a zveřejněná data z projektu jsou k dispozici na <http://smc.cnes.fr/COROT/>. Časy jsou v případě této sondy uváděny v podobě CJD (CoRoT Julian day) a jsou uváděny i v heliocentrické podobě. Možná záludnost je zde v tom, že uváděný okamžik je konec 32sekundové expozice (u snímků s udávanou expozicí 32 s), případně konec první z 16 dvaatřicetisekundových expozic (u snímků s expozicí 512 s).

Kepler

Jedna z nejúspěšnějších kosmických sond nese jméno Kepler. Na oběžnou dráhu kolem Země ji vyslala NASA v roce 2009 s cílem měřit soustavně jasnosti hvězd ve vybraném poli na rozhraní souhvězdí Lyry a Labutě. Dalekohled o průměru 95 cm (s hlavním zrcadlem 1.4 metru) je doplněn maticí 42 CCD čipů, což je v současnosti největší CCD detektor ve vesmíru. Hlavním úkolem družice je pátrat po transituujících exoplanetách u hvězd ve vybraném zhruba 12 stupňů velkém zorném poli. Do počátku roku 2013 objevil Kepler přes 400 exoplanet a téměř 3000 kandidátů. Mimořádně přesná fotometrie a zcela unikátní délka a časové rozlišení umožňují i velmi přesné a detailní studie proměnných hvězd. Bližší informace o projektu jsou k dispozici na stránkách http://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/main/index.html. Data pro jednotlivé objekty je možné vyhledávat na http://archive.stsci.edu/kepler/data_search/search.php.

Integral

Družice INTEGRAL (International Gamma Ray Astrophysics Laboratory) je další z řady vědeckých družic ESA. Jejím cílem je získání mapy hvězdné oblohy v oboru γ záření. Na oběžné dráze pracuje od roku 2002. Pozorovatele proměnných hvězd ale více zajímá malý podpůrný projekt na palubě – Optical Monitoring Camera (OMC). Kamera se zobrazovacím polem 1024 x 1024 pixelů je nainstalována na dalekohledu o průměru 50 mm a opatřena Johnsonovým filtrem *V*. Data z této kamery jsou dostupná na https://sdscab.inta-csic.es/omc/secure/form_busqueda.jsp?resetForm=true a jsou průběžně zveřejňována. Při využití je třeba důkladně pročíst popis dat.

Časy pozorování jsou ukládány v geocentrické a barycentrické podobě a značí začátek expozice. Délka expozice se přitom mění. Navíc mohou být jednotlivé hvězdné velikosti výsledkem skládaných expozic, které jsou uvedeny v časovém rozlišení 10 minut, ale jejich délka se může měnit od zhruba 4 minut do 15 minut. Bližší informace lze najít například v Zejda & Domingo (2011). Po devíti letech práce jsou v databázi OMC světelné křivky (o více než 50 bodech) zhruba 70 000 objektů. Kolektiv autorů (Alfonso-Garzón et al., 2012) publikoval souhrnné výsledky o 5263 proměnných objektech, jejich data jsou dostupná i na serveru CDS (Strasbourg Astronomical Data Center) (<http://cds.u-strasbg.fr/>).

GAIA

Krátký přehled kosmických přehlídek jsme začali astrometrickou družicí Hipparcos a skončíme jejím nástupcem – sondou Gaia (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics). Také GAIA je evropský projekt (ESA). Její start je plánován na říjen 2013. Mezi základní cíle sondy patří shromáždění astrometrických a fotometrických dat přibližně jedné miliardy hvězd do 20 mag. Každou hvězdu by přitom během předpokládané životnosti sondy (5 let) měla změřit 70krát. Přesnost určení polohy by měla být pro hvězdy do 15 mag kolem 20 milióntin úhlové vteřiny a pro hvězdy 20 mag pak desetkrát menší.

Na palubě budou tři hlavní přístroje: kamera Astrometric Field pro astrometrii, modrý a červený fotometr pro nízkodisperzní spektroskopii a Radial Velocity Spectrometer na měření radiálních rychlostí. O zpracování dat blíže pojednává Busso et al. (2012). Pokud vše půjde, jak má tak bude výsledný katalog s daty k dispozici kolem roku 2020. Bližší informace o misi jsou na <http://sci.esa.int/science-e/www/area/>

`index.cfm?fareaid=26`.

3.4.3 Virtuální observatoř

Jak napovídá i předchozí kapitola, je současná astronomie postavena před závažným problémem – záplavou dat. Data se valí skutečně ze všech stran v takové míře, že jejich objem se zdvojnásobuje každých šest měsíců. Samozřejmě, jak už to bývá, zrovna pro vámi studovaný objekt je těch dat málo a potřebujete najít všechna dostupná měření. V oblasti proměnných hvězd vám pro prvotní přehled dobře poslouží katalog americké společnosti pozorovatelů proměnných hvězd AAVSO Variable Star Index, o němž už jsme se zmiňovali. Na adrese <http://www.aavso.org/vsx/> najdete totiž nejen samotný katalog proměnných hvězd, ale pro zvolenou hvězdu také odkazy přímo na data hvězdy v různých fotometrických přehlídkách a databázích. Samozřejmě můžete data hledat také přes SIMBAD Astronomical Database (<http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>) a nebo využít služeb virtuální observatoře (VO).

Virtuální observatoř vznikla na základě iniciativy astronomické komunity. Jejím cílem je poskytnout globální elektronický přístup ke všem astronomickým datovým archivům z přehlídkových projektů pozemských i kosmických, ale i archivům jednotlivých observatoří nebo i pozorovatelů. Ruku v ruce s otevřením archivů je i poskytnutí efektivních nástrojů pro zpracování těchto dat a práci s nimi. Ve světě existují různé národní virtuální observatoře nebo jejich mezinárodní sdružení, například Evropská virtuální observatoř EURO-VO (<http://www.euro-vo.org/>). Všechny zájemce pak sdružuje IVOA (International Virtual Observatory Alliance, <http://www.ivoa.net/>).

Metody zpracování pozorování

4 Regresní analýza

4.1 Úvodem

Objekty s proměnnými charakteristikami jsou předmětem soustředěného zájmu astrofyziků, protože svou proměnností toho o sobě prozrazují více, než objekty neproměnné. Zjištění a matematické vyjádření povahy časové proměnnosti měřených veličin (jasnost, magnetické pole, intenzita spektrálních čar, polarizace apod.), hledání trendů, cyklických změn, periodicit apod. - to jsou nejčastější úkoly, které praktická astrofyzika řeší. Nejdůležitějším nástrojem pro matematické zpracování těchto závislostí je tzv. *regresní analýza* a zejména její nejstarší a nejpropracovanější disciplína – *metoda nejmenších čtverců* (MNČ, anglicky *least square method* - LSM).

Dříve než přistoupíte ke zpracování pomocí regresní analýzy, doporučuji abyste si celou situaci nejprve zevrubně obhlédli, což mj. znamená, že si do nejružnějších grafů či schémat vynesete vzájemné závislosti všech možných veličin dotyčného objektu, ať už vámi naměřených nebo převzatých z literatury. Věřte, že tyto „obrázky“ vám o povaze vzájemných souvislostí mezi jednotlivými charakteristikami povědí více než sebedokonalejší číselné rozbory. Zjistíte-li, že zobrazené výsledky měření $\{y_i\}$ jeví jistou časovou závislost, zřejmě též pocítíte neodolatelné nutkání tuto závislost proložit (fit) nějakou elegantní hladkou křivkou. Proč? Nejspíš proto, abyste viděli, jak se daná veličina doopravdy mění, tedy jak by to asi vypadalo, pokud byste dotyčnou veličinu dokázali měřit nepřetržitě a přitom navíc absolutně přesně. K tomuto ideálu samozřejmě nedospějete nikdy, lze se mu však alespoň přiblížit. Metoda nejmenších čtverců přitom naznačuje osvědčenou cestu, jak toho dosáhnout.

Doporučuji vám, abyste ale předem zvážili, zda je vůbec třeba něco prokládat a počítat! Chceme-li totiž jen dokumentovat, že tu ona závislost existuje, tak je poctivější do grafu žádnou křivku nevkreslovat, stačí jen zvolit vhodná měřítka na osách a obrázek prezentovat v jeho originální podobě. Pouze tehdy, chceme-li s výsledky proložení dále pracovat a něco z nich vyvozovat, je záhodno pustit se do matematického zpracování.

4.1.1 Regresní model

Vyšetřujeme nejprve časovou závislost vybrané měřené veličiny y na základě *časové řady*, což je soubor n trojic $\{t_i, y_i, \sigma_i\}$. Předpokládejme přitom, že čas měření t známe naprosto přesně, lze jej tedy pokládat za *nezávislou veličinu*, zatímco jednotlivá měření *závisle proměnné veličiny* y, y_i , jsou zatížena určitou nejistotou, řekněme σ_i .

Naším záměrem nyní bude najít takovou skalární funkci času t , $f(t)$, která optimálně prochází mezi naměřenými body a co nejlépe vystihuje reálnou časovou závislost pozorované veličiny.

Triviálním řešením této úlohy v případě časové závislosti je pospojování všech po časově sobě následujících bodů lomenou čarou $\{t_i, y_i\}$, případně nějakou sice hladkou, ale dostatečně zvlněnou čarou (např. polynomem stupně $n - 1$), která by procházela důsledně všemi naměřenými body¹. Takovýto postup by měl své opodstatnění pouze tehdy, pokud bychom jak čas, tak závisle proměnnou veličinu znali absolutně přesně, což je nereálné. Mnohem hodnověrnější

¹Tímto polynomem stupně $n - 1$ může být třeba Lagrangeův nebo Newtonův interpolační polynom.

výsledky dává prostá grafická metoda, kdy mezi body vyneseny do grafu táhneme od ruky hladkou křivku, která dle našeho přesvědčení co nejlépe vyjadřuje pozorovanou závislost. Tento způsob proložení však není obecně reprodukovatelný (i vy sami nakreslíte tu svou optimální křivku pokaždé trochu jinak), navíc se s tímto grafickým řešením potom dosti špatně pracuje.

Běžně se proto dává přednost takovým metodám, které vedou k analytickému vyjádření prokládané funkce a k objektivnímu, reprodukovatelnému stanovení kritéria nejlepší shody. Obvykle si hned na počátku definujeme tzv. *regresní model* (regression model). Regresním modelem si z nekonečného množství funkcí, jimiž by bylo možno pozorovanou závislost proložit, vybereme jen jistou omezenou množinu funkcí, přičemž každá z funkcí této zvolené množiny modelových funkcí bude plně definována g předem neznámými volnými parametry, které si pracovně označíme $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_g$. Veličina g pak vyjadřuje *počet stupňů volnosti* (degree of freedom) zvoleného modelu. Na tom, jak si dokážeme zvolit ten správný regresní model, který v sobě obsahuje funkce co nejpodobnější reálné závislosti $y(t)$ a použít přitom co nejmenší počet volných parametrů, pak závisí úspěch celého našeho dalšího počínání.

Pokud nevíme o fyzikální podstatě závislosti jedné z pozorovaných veličin na druhé vůbec nic, pak jako regresní model volíme soubor co nejjednodušších funkcí - polynomy, harmonické funkce - s nimiž lze snadno pracovat. Pokud však již předem víme, jakou modelovou funkcí by měla být pozorovaná závislost popsána, měli bychom jí dát přednost, protože jinak si způsobíme zbytečné problémy při interpretaci zjištěné závislosti. Správnou a citlivou volbou regresního modelu lze ze souboru dat vytěžit spoustu informací, naopak zvolením neadekvátního modelu, lze snadno dospět i ke zcela mylným a falešným vývodům.

Regresní model představuje množinu podobných funkcí, které se od sebe liší jen jinými hodnotami volných parametrů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$: $f(t) = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g, t)$. Uspořádanou g -ticí parametrů β_j je výhodné zapisovat jako g -rozměrný vektor nebo sloupcovou matici $\boldsymbol{\beta}$ o rozměrech $g \times 1$ (g řádků a 1 sloupec): $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g)^T$.

Předpokládejme nyní, že jsme v rámci regresního modelu zvolili nějakou konkrétní hodnotu vektoru parametrů pro i -té měření $\{t_i, y_i\}$ pak lze vyjádřit odchylku e_i tohoto měření od dané závislosti vztahem

$$e_i = y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta}). \quad (4.1)$$

Je zjevné, že čím menší budou odchylky měření od modelové předpovědi, tím lepší bude proložení.

Je však třeba navíc uvážit, že jednotlivá měření mají různou kvalitu, či chcete-li váhu, která bude nějak souviset s nejistotou jejich určení σ_i . Je užitečné zavést si tzv. *modifikovanou odchylku* \tilde{e}_i , kde $\tilde{e}_i = e_i/\sigma_i$, a tu pak brát jako rozhodující při posuzování úspěšnosti modelování nějakých pozorovaných závislostí, tedy:

$$\tilde{e}_i = \frac{e_i}{\sigma_i} = \frac{y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_i}. \quad (4.2)$$

Naším úkolem nyní bude vybrat z množiny funkcí, které připouští zvolený regresní model, $f(t, \boldsymbol{\beta})$ popsaných vektorem $\boldsymbol{\beta}$, takový vektor $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$, pro nějž budou modifikované odchylky $\{\tilde{e}_i\}$ minimální. Onu podmínku minimálnosti je ovšem třeba nejprve matematicky precizovat. Nejčastěji používanou, a z mnoha důvodů nejoblíbenější (nikoli

však jedinou²), je podmínka, aby součet čtverců modifikovaných odchylek pro všechna měření, označovaný běžně jako veličina χ^2 , tedy

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.3)$$

byl minimální. Z této podmínky pak vychází moderní varianta, jinak již letité metody nejmenších čtverců, které se budeme nadále věnovat.

Metoda nejmenších čtverců je nástroj, pomocí něhož lze poměrně jednoduše stanovit hodnoty parametrů zvoleného regresního modelu tak, aby tento model co nejlépe souhlasil s tím, co jsme napozorovali. Pokud jsme měli šťastnou ruku při výběru modelu, budeme moci i předpovědět, jak se zkoumaný objekt choval, a to i v době, když jsme jej neměli pod dohledem. Budeme moci předpovědět, co by se s ním mělo dít v budoucnosti. Všechny tyto předpovědi známe i s jistou dávkou nepřesnosti, která je dána jednak tím, že zvolený model nemusí úplně přesně odpovídat realitě, ale zejména proto, že všechna pozorovací data jsou zatížena jistou nepřesností danou způsobem měření a řadou neznámých faktorů, které výsledky pozorování ovlivňují. Velkou předností MNČ je, že umožňuje nejen předpovídat, ale i odhadnout nejistotu těchto předpovědi.

4.1.2 Zdůvodnění metody nejmenších čtverců

MNČ vychází ze skutečnosti, že naprostá většina odchylek od hodnoty, kterou jsme měli v dané chvíli naměřit, má tzv. *normální rozdělení*. To znamená, že histogram těchto náhodných odchylek má zvonovitý tvar, vyjadřující skutečnost, že převážná většina měření se kupí kolem té „reálné“ hodnoty, najdou se však i měření, která se od tohoto žádoucího ideálu více či méně odchyľují. Nejistota měření pak znamená, že pravděpodobnost rozložení změřených hodnot je dobře popsána Gaussovou funkcí³, jejíž šířka - tedy míra rozmazanosti - je určena tzv. *rozptylem* σ^2 . Příčiny oné rozmazanosti jsou mnohé, souvisejí jak s kvantovou povahou měření (např. statistika fotonů apod.), turbulencí atmosféry, změnami atmosférického tlaku i stavem pozorovatele, kolísáním napětí elektrické sítě apod. Některé z těchto vlivů sice lze potlačit, nicméně úplně je odstranit nelze. Naštěstí nám vycházejí vstříc tím, že jsou předvídatelné a tím i eliminovatelné.

Kromě nich však existují i takové vlivy, které do našich měření vnášejí hrubé chyby. Mohou to být např. vlety kosmických částic, nestabilita vlastního pozorovacího přístroje, prudké změny počasí, chyby odečtu pozorované veličiny třeba z důvodu nepozornosti (záměna číslic, chybný formát) apod. Některé z hrubých chyb lze už ve výpisu naměřených hodnot snadno identifikovat, neboť se výrazně odchyľují od ostatních měření. Takovéto chyby je záhodno nemilosrdně eliminovat. Pokud se však měření zatížená hrubými chybami od ostatních měření liší jen málo, je jejich odhalení náročnější a neobejde se bez celkového statistického zhodnocení celé pozorovací série. Dostí záluďné mohou být časově proměnné systematické odchylky či kolísání, kdy lze vysledovat zjevnou korelaci odchylek.

²Jinou takovou podmínkou může být minimálnost součtu absolutních hodnot modifikovaných odchylek nebo jejich čtvrtých mocnin. Nicméně takto definované podmínky se používají jen zřídka, a ve zcela odůvodněných případech. Naopak často se používají jisté modifikace MNČ, které dokáží eliminovat hrubé chyby. Těmto modifikacím se pak říká *robustní regrese*.

³Podrobnější zdůvodnění, proč tomu tak je, nám přináší tzv. „centrální limitní teorém“.

My se teď však soustředíme jen na ty odchylky, které vznikají souhrou náhodných procesů a jejichž pravděpodobnost lze dostatečně popsat tzv. normální rozdělovací funkcí. Předpokládejme nyní, že modelujeme závislost n měřených veličin y_i na čase t_i . $f(t_i, \boldsymbol{\beta})$ nechť je modelová předpověď v čase t_i s modelovými parametry $\boldsymbol{\beta}$. Důležitým parametrem je nejistota (rozptyl) σ_i každého měření.

Soustředme se nejprve na libovolně vybrané i -té měření s naměřenou hodnotou y_i a její modelovou předpovědí $f(t_i, \boldsymbol{\beta})$. Za předpokladu, že rozdělení odchylek je normální, pak platí, že hustota pravděpodobnosti této situace $P(y_i|f(t_i, \boldsymbol{\beta}), \sigma_i)$ bude dána povědomým vztahem:

$$P(y_i|f(t_i, \boldsymbol{\beta}), \sigma_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (4.4)$$

Je zjevné, že tato dílčí hustota pravděpodobnosti bude tím vyšší, čím blíže k sobě budou mít pozorování a předpověď. Výše uvedenou hustotu pravděpodobnosti lze pro daný model a zvolenou sadu parametrů vypočítat pro všechna pozorování. Jsou-li jednotlivá pozorování získána nezávisle, pak výsledná hustota pravděpodobnosti toho, jak věrně zvolený regresní model $f(t, \boldsymbol{\beta})$ popisuje realitu, bude dána součinem dílčích hustot pravděpodobnosti. Ten součin, který si označíme $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})$, číselně vyjadřuje věrohodnost zvoleného modelu:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (4.5)$$

Budete-li si nyní vybírat mezi jednotlivými regresními modely, vyberete si jistě ten, který má maximální věrohodnost (likelihood) $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})$. Tomuto postupu se říká *metoda maximální věrohodnosti* a lze ji použít místo metody nejmenších čtverců, s níž ovšem intimně souvisí. Stačí totiž vztah pro věrohodnost (4.5) zlogaritmovat a trochu upravit

$$-2 \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) + \sum_{i=1}^n \ln[2\pi(\sigma_i)^2] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i^2 = \chi^2(\boldsymbol{\beta}). \quad (4.6)$$

Nabývá-li věrohodnost modelu $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})$ svého maxima, pak všechny výrazy v rovnicích (4.6) dosahují svého minima, přičemž suma na levé straně rovnice je konstanta. Suma čtverců podílů odchylek a jejich nejistot se běžně označuje jako $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$. Minimalizací této bezrozměrné veličiny⁴ $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ pak lze hledat ty nejlepší z regresních modelů. Od metody nejmenších čtverců nás dělí už jen docela malý krůček.

4.2 Metoda nejmenších čtverců

4.2.1 Hledání řešení metodou nejmenších čtverců

Suma $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ je bezrozměrná skalární funkce vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$:

$$\chi^2(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n e_i^2 w_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta})]^2 w_i, \quad (4.7)$$

⁴Srovnejte prosím s intuitivním tvarem χ^2 v (4.3).

jež je úměrná záporně vzatému logaritmu pravděpodobnosti daného řešení. Místo individuálních nejistot σ_i lze z výpočetních důvodů použít i *individuální váhy*⁵ dané vztahem: $w_i = \sigma_i^{-2}$.

Hledejme nyní takový vektor $\boldsymbol{\beta}$, ($\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$) pro nějž je tato suma $\chi^2 = \chi^2(\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b})$ minimální. Funkci $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ si lze představit jako zprohýbanou plochu v $(g+1)$ rozměrném prostoru, kde g rozměrů je vyhrazeno pro složky vektoru $\boldsymbol{\beta}$ a g plus první rozměr je rezervován pro funkční hodnotu $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$. Obecně může mít taková plocha dosti komplikovaný vzhled. Nicméně většinou na ní můžeme najít jedno nebo i více lokálních minim, z nichž ovšem jen některá budou mít nějaký dobrý fyzikální smysl.

Při hledání extrémů (minima nebo maxima) skalární funkce je vhodné si zavést pojem *gradient funkce*. Gradient v daném bodě je vektor orientovaný v opačném směru než spádnic, přičemž délka vektoru je tím větší, čím strměji v daném bodě funkce probíhá. Číselně jsou složky vektoru gradientu funkce χ^2 , která je funkcí g proměnných parametrů, rovny parciálním derivacím podle těchto parametrů

$$\vec{\nabla}\chi^2(\mathbf{b}) = \left(\frac{\partial\chi^2}{\partial\beta_1}, \frac{\partial\chi^2}{\partial\beta_2}, \dots, \frac{\partial\chi^2}{\partial\beta_g} \right). \quad (4.8)$$

Gradient lze takto podle potřeby chápat jako buď jako vektor o g složkách nebo řádkovou matici s g sloupci. Pomocí gradientu součtu čtverců odchylek lze podmínku pro nalezení extrému funkce nebo jeho sedlového bodu lze pak elegantně zapsat

$$\vec{\nabla}\chi^2(\mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

kde $\mathbf{0}$ je řádkový vektor o g složkách, jež jsou všechny rovny nule. Podmínka tak říká, že extrém (sedlový bod) skalární funkce nastává v takovém bodě, kde všechny složky gradientu funkce jsou rovny nule. Nás ovšem zajímají právě jen minima této funkce. Velikost vektoru gradientu je v minimu nulová, jsme totiž na dně – hlouběji se v okolí tohoto bodu dostat nelze. Popisované metodě hledání minima skalární funkce se proto říká též *gradientní metoda* (gradient method).

Dosadíme-li nyní výraz pro váhovanou sumu čtverců odchylek do (4.9) po krátkých úpravách dojdeme k jediné vektorové podmínce

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i f(t_i, \mathbf{b})}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i y_i}{\sigma_i^2},$$

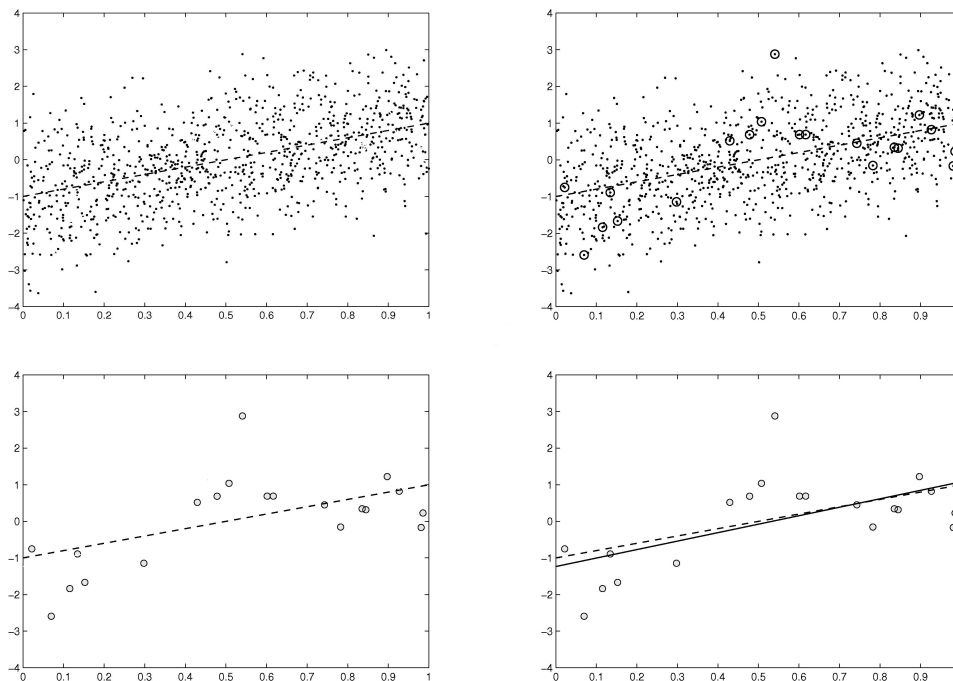
nebo

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i f(t_i, \mathbf{b}) w_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i w_i, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}_i = \vec{\nabla}f(t_i, \mathbf{b}) = \left(\frac{\partial f(t_i, \mathbf{b})}{\partial\beta_1}, \frac{\partial f(t_i, \mathbf{b})}{\partial\beta_2}, \dots, \frac{\partial f(t_i, \mathbf{b})}{\partial\beta_g} \right). \quad (4.11)$$

Vektor příslušný k i -tému měření \mathbf{x}_i s g složkami je tedy gradientem podle složek parametrů prokládané funkce v daném bodě. Složky tohoto vektoru tak lze pokládat

⁵U těchto vah je však třeba mít na paměti, že to nejsou bezrozměrné veličiny, ale že mají individuální rozměr $\dim(w_i) = [\dim(y_i)]^{-2}$.



Obrázek 4.1: Na těchto čtyřech po sobě následujících obrázcích si můžete ověřit sílu metody nejmenších čtverců. Předpokládejme, že závisle proměnná (měřená) veličina y je lineárně závislá na nezávisle proměnné veličině x (typicky na čase). Dále předpokládejme, že každý z 1000 naměřených bodů je zatížen nejistotou σ_i , která bude pro jednoduchost pro všechny body stejná. Nyní si z těchto 1000 bodů náhodně vybereme 20, které jsou na druhém obrázku zvýrazněny kroužky. Z těchto reprezentantů té původní velké množiny bodů vypočteme odhad závislosti $y(x)$. V obrázku vlevo dole si znázorníme onu závislost definovanou nyní jen těmi 20 body. V grafu je pro informaci vynesena i výsledná závislost, ovšem s vědomím, že tuto závislost v té chvíli ještě neznáme. Nyní jde o to, zvolit správný model pro tuto závislost. I když by v těchto 20 bodech bylo možné vidět i úsek paraboly, dostačujícím modelem závislosti tu bude přímka obecně neprocházející počátkem definovaná dvěma parametry. Použitím MNČ lze tyto dva parametry vypočítat a do grafu je vynést. Tato přímka se zjevně dobře shoduje se skutečnou závislostí definovanou padesátkrát více body, než kolik jich máme k dispozici. Ukazuje se tedy, že MNČ je skutečně mocným nástrojem, který ale není hned tak pro každého.

za nezávislé proměnné. Soustavu g obecně nelineárních rovnic o g neznámých, složek parametru \mathbf{b} pak řešíme běžným způsobem.⁶

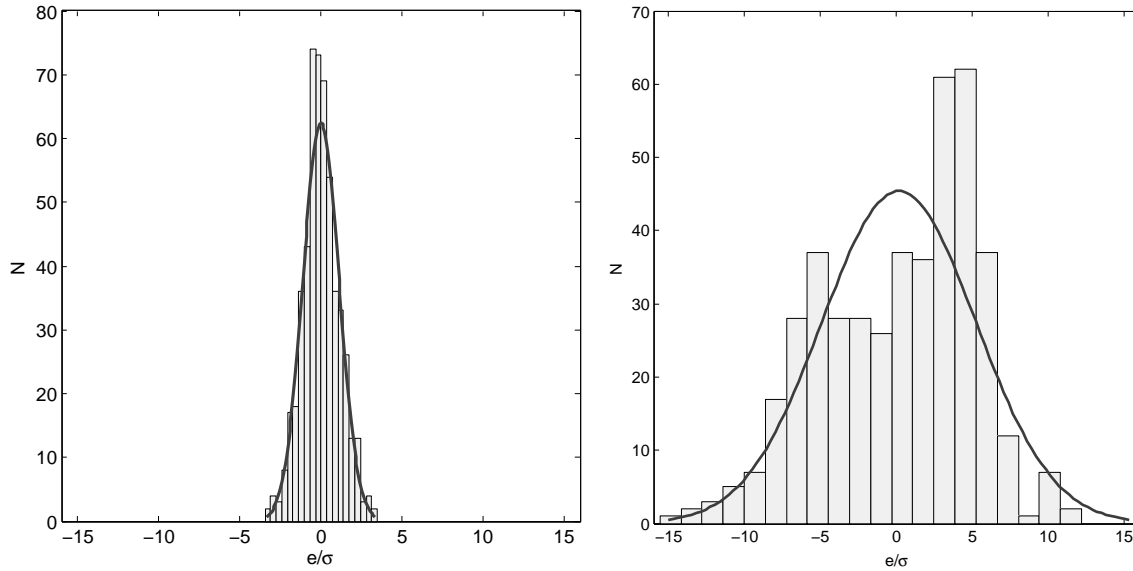
⁶Triviálním příkladem regrese řešené pomocí MNČ je nalezení střední hodnoty n naměřených hodnot $\{y_i\}$ se stejnou nejistotou σ . Model regresní funkce $f(t) = \beta$, $\mathbf{x}_i = \vec{\nabla} f_i = \partial f_i / \partial \beta = 1$, $\chi^2(\beta) = \sigma^{-2} \sum (y_i - \beta)^2$.

Minimum funkce $\chi^2(\beta)$ nastává v bodě $\beta = b$, v němž platí, že $\partial \chi^2 / \partial \beta = -2\sigma^{-2} \sum (y_i - b) = 0$, tedy $b = \frac{1}{n} \sum y_i = \bar{y}$ hledaným středem je aritmetický průměr. Suma kvadrátů modifikovaných odchylek $\tilde{\epsilon}_i^2$ pro $b = \bar{y}$, $\chi^2(\beta = \bar{y}) = \sigma^{-2} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sigma^{-2} \sum y_i^2 - 2 y_i \bar{y} + \bar{y}^2 = n \sigma^{-2} (\bar{y}^2 - \bar{y}^2)$.

Poučný je i průběh funkce $\chi^2(\beta) = \sigma^{-2} \sum (y_i - \beta)^2 = \sigma^{-2} \sum y_i^2 - 2 \beta \sum y_i + n \beta^2 = \chi^2(b) + n \sigma^{-2} (\beta - \bar{y})^2$ – jde o parabolu, křivku s minimem v $\beta = b = \bar{y}$ s minimální hodnotou $\chi^2(\beta)_{\min} = \chi^2(b)$.

4.2.2 Kritéria úspěšnosti modelování

4.2.2.1 Statistika modifikovaných odchylek \tilde{e}_i



Obrázek 4.2: Histogramy rozložení modifikovaných odchylek jasnosti v barvě I : $\tilde{e}_i = e_i/\sigma_i$ dvou hvězd ve Velkém Magellanově mračnu měřených v rámci přehlídky OGLE-III. Jejich světelné křivky byly proloženy modelem předpokládajícím konstantní jasnost. Konstatujeme, že u první z hvězd, která je obyčejným neproměnným oranžovým obrem třídy K, zmíněný model vcelku vyhovuje. Rozložení odchylek se kvalitativně shoduje s očekáváním, ale liší se v detailech, speciálně: $n = 531$, $\bar{e} = 0,01$, $s^2 = \bar{e}^2 = 1,25$; $\chi^2 = 662$. Suma χ^2 je viditelně větší než $n - g$, kde $g = 1$. Příčinou nejspíš jsou podceněné hodnoty nejistot σ_i , které by měly být o cca 12% větší. Zcela jinak je tomu u druhé z hvězd, nadobra spektrálního typu G: $n = 437$, $\bar{e} = 0,18$, $s^2 = \bar{e}^2 = 25,7$; $\chi^2 = 11230$! Suma χ^2 je mnohonásobně větší než $n - g$, $\chi^2 = 25,8$, rozptyl je též 26krát větší, než by se dalo očekávat. Závěr je ten, že model této hvězdy je vadný, hvězda není konstantní, ale proměnná. Nasvědčuje tomu i vysloveně bimodální rozdělení s výraznějším vrcholkem v kladné části \tilde{e}_i , což je příznačné pro periodicky proměnné hvězdy s ostřejšími maximy. Podrobnější rozbor ukáže, že tu jde o trpasličí cefeidu.

Předpokládejme, že se nám pro danou situaci a daný datový soubor podařilo pomocí MNČ najít adekvátní regresní model $f(t, \mathbf{b})$, který je funkcí času a g -tice volných parametrů \mathbf{b} . Pomocí tohoto modelu můžeme vypočítat pro všechna naše pozorování individuální odchylky $e_i = y_i - f(t, \mathbf{b})$ i modifikované odchylky $\tilde{e}_i = e_i/\sigma_i$. Předpokládejme ještě, že naše odhady nejistot jednotlivých měření $\{\sigma_i\}$ skutečně rigorózně vyjadřují míru rozptylu náhodné veličiny. Pak ovšem platí, že střední hodnota modifikované odchylky $\bar{e} = 0$ a rozptyl $s^2 = \overline{\tilde{e}_i^2} - \bar{e}^2 = \overline{\tilde{e}_i^2} = (n - g)/n$.

To vše je dobré otestovat, zejména pak výše uvedenou podmínku pro rozptyl $s^2(\tilde{e})$. Pokud bude roven $(n - g)/n$, pak je nejspíš vše v pořádku. Vyjde-li větší než $(n - g)/n$, pak to může znamenat dvě věci – buď může být v nepořádku nalezený model, který dostatečně nerespektuje průběh reálné závislosti měřené veličiny na čase, nebo to může být též známka toho, že je nejistota jednotlivých měření systematicky podceňována, že

nám zřejmě uniká nějaký důvod jejich rozptylu. V opačném případě, kdy je $s^2(\bar{e}) < (n - g)/n$, jsou nejistoty jednotlivých měření přeceňovány. I zde je dobré se zamyslet, proč k tomu dochází.

Pro klid duše bychom měli ještě přezkoumat, zda je rozložení modifikovaných odchylek vskutku gaussovské, tak jak by to mělo být, to znamená, je-li $\tilde{e}_i = e_i/\sigma_i$ náhodnou proměnnou. Velmi rychlým způsobem je sestavení histogramu s touto veličinou. Bude-li mít všechny atributy gaussova rozdělení, pak jsme se modelem zřejmě střefili a naše výsledky lze interpretovat nástroji MNČ. V opačném případě, pokud je jádro rozdělení příliš štihlé vzhledem ke křídům, bývá to známkou toho, že zřejmě nejsou dosti dobře určeny nejistoty jednotlivých pozorování nebo že se v materiálu objevuje dost odlehklých bodů. Za těchto okolností je záhodno data zpracovat metodami tzv. robustní regrese (např. 4.5.1). Pokud zjistíme, že je profil histogramu zjevně asymetrický nebo se v něm objevují i náznaky bimodálního rozdělení, bývá chyba v neadekvátnosti zvoleného modelu⁷.

4.2.2.2 Sumy χ^2 , χ_μ^2 a rozptyl proložení s^2

Uvážíme-li, že suma $\chi^2 = \sum \tilde{e}_i^2$, pak lze odhadnout, že $\chi^2 \simeq n - g$. Rovničko v tomto vztahu není, protože suma χ^2 je rovněž náhodná proměnná, přičemž její směrodatnou odchylku lze odhadnout na $\sigma_{\chi^2} = \sqrt{2(n - g)}$. Takže máme-li třeba $n - g = 450$, lze čekat, že $\chi^2 = 450 \pm 30$.

Ukazuje se, že je výhodné si kromě sumy χ^2 zavést i její modifikovanou podobu χ_μ^2 a rozptyl proložení zvoleným modelem s^2 podle vztahů:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(t_i, \mathbf{b})}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i^2 \simeq n - g, \quad \sigma_{\chi^2} = \sqrt{2(n - g)}$$

$$\chi_\mu^2 = \frac{\chi^2}{n - g} \simeq 1, \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\chi_\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{n - g}}; \quad s^2 = \frac{\chi_\mu^2}{\sigma^{-2}}. \quad (4.12)$$

Modifikovaná suma χ_μ^2 je tak rovna jedničce s nejistotou $\pm \sqrt{2/(n - g)}$. Položíme-li tedy $n - g = 450$ bude $\chi_\mu^2 = 1,00 \pm 0,07$. Chceme-li porovnat dva konkurenční modely, pak by měl zvítězit ten, jehož hodnota χ_μ^2 bude menší. Pokud ovšem bude rozdíl mezi oběma konkurujícími si modely menší než $\sigma_{\chi_\mu^2}$, pak to vypadá spíše na plichtu.

Rozptyl proložení⁸ časové závislosti pozorovaných veličin s^2 by se zase měl limitně blížit předpovědi $s^2 \cong (\overline{\sigma^{-2}})^{-1}$. Obecně by mělo platit $s^2 \geq (\overline{\sigma^{-2}})^{-1}$. I pomocí tohoto kritéria by bylo možno mezi dvěma modely rozhodnout.

4.2.2.3 Testování regresních modelů pomocí O-C diagramů

Jak už bylo řečeno výše, modelování skutečnosti pomocí MNČ stojí a padá se správností volby regresní funkce. Nejnázornějším kritériem adekvátnosti zvoleného modelu je grafický vzhled tzv. O-C diagramu (viz 5.3), který vznikne vynesáním odchylek pozorované veličiny (Observed) od modelové předpovědi (Calculated), tedy O-C v závislosti na

⁷Problematiku stanovení normality rozdělovací funkce zevrubně řeší text Z. Mikulášek, 2012, *Popisná statistika 2*, dostupný na <http://astro.physics.muni.cz/study/courses/f7581/>.

⁸Tato veličina má rozumný fyzikální význam pouze tehdy, mají-li měřené veličiny stejný rozměr.

nezávislé proměnné, což nejčastěji bývá čas nebo jeho funkce, např. epocha. Přeloženo do naší řeči – je to závislost odchylky $e_i = y_i - f(t, \mathbf{b})$ na čase t_i . Vysoce žádoucí je v tomto diagramu vhodným způsobem vyznačit nejistoty σ_i , jednotlivých měřených hodnot $e_i = O-C_i$; zpravidla se tak děje formou svislé úsečky⁹ se středem v $(O-C)_i$ a délkou $2\sigma_i$.

Při prohlídce O-C diagramu se nejprve zaměříme na to, zda nalezený model pozorovanou závislost v globále popisuje nebo zda se tam objevují nějaké systematické odchylky od ideálního průběhu kolem $O-C = 0$. Jakékoli trendy či dobře viditelné vlny ukazují, že zvolený model je příliš hrubý, že by mohl být zdokonalen přidáním dalších členů do regresní funkce nebo její záměnou jiným, adekvátnějším modelem, který bude skutečnost lépe vystihovat. Zvláště pěkné by pak bylo, kdyby se touto náhradou podařilo i redukovat počet stupňů volnosti.

Vždy je však třeba se při hodnocení míry náhodnosti nebo nenáhodnosti určitého vzhledu O-C diagramu držet spíše při zemi a svůj vizuální dojem vždy doplnit ještě nějakým jiným, „objektivním“ testem. Zcela náhodná seskupení mohou občas budít dojem vysoké uspořádanosti, která se pak v průběhu času může naprosto ztratit. Zejména tehdy, chceme-li své modely použít k predikci chování objektu v časových intervalech, které nejsou pokryty pozorováním, je třeba být hodně rezervovaný a dávat přednost modelům s co nejmenším počtem volných parametrů. K tomu nás konečně nabádají i tzv. informační kritéria pojednaná v následující podkapitole.

4.2.2.4 Informační kritéria AIC, AICc a BIC

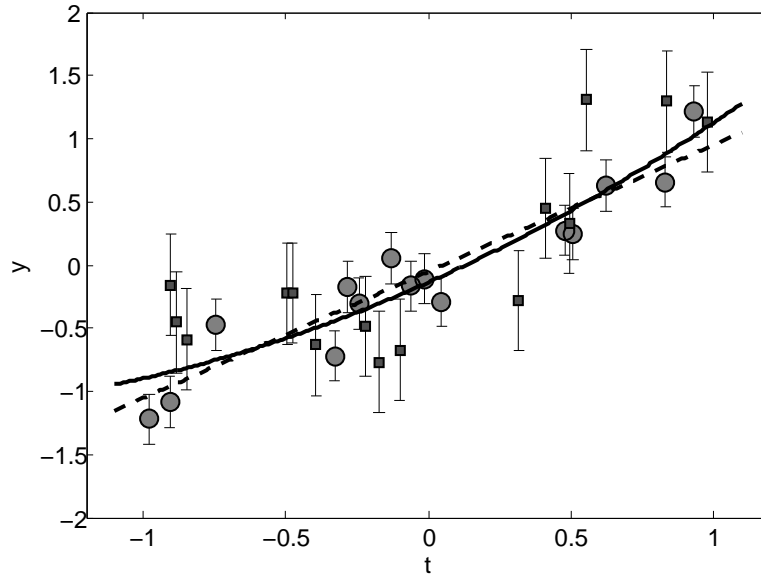
Občas se nám přihodí, že se nemůžete rozhodnout mezi dvěma modely s různým počtem stupňů volnosti. Svízelné je hlavně, když se ten složitější model od jednoduššího liší jen o nějaký aditivní člen, protože pak zaručeně platí, že χ^2 toho s větším počtem stupňů volnosti je menší, než ten jednodušší. Jiné to může být, porovnáváme-li χ^2_μ (viz rovnice 4.12). Byly však vyvinuty ještě spolehlivější indikátory správného počtu stupňů volnosti. Z množství informačních kritérií zde uvedeme jen tři: Akaikeho informační kritérium AIC, Akaikeho korigované informační kritérium AICc¹⁰ a hodně přísné bayesovské informační kritérium BIC, která jsou definována takto:

$$\text{AIC} = \chi^2 + 2g; \quad \text{AICc} = \chi^2 + 2g \frac{n}{n-g-1}; \quad \text{BIC} = \chi^2 + g \ln n. \quad (4.13)$$

Všechna tato kritéria se používají obdobně: hodnotu kritérií vypočítáme pro oba konkurenční modely aplikované na zkoumaný datový soubor. Ten z modelů, který má menší hodnotu zvoleného informačního kritéria, by měl dostat přednost.

⁹Toto tradiční označení není moc šťastné, protože náš znak upoutají spíše ty body s delší úsečkou a tedy i nižší kvalitou. Alternativně se užívá jiné označení, kdy významnost příslušného měření (váha) se znázorní plochou příslušného symbolu, přičemž jeho lineární rozměr by měl být nepřímou úměrný nejistotě $\sim \sigma^{-1}$. Bohužel pak se zase ztrácí informace, kam až sahá ona úsečka nejistoty. Řešením je pak kombinace obou způsobů - tedy jak úsečka, tak různá velikost symbolů - viz obr. 4.3.

¹⁰AICc je záhodno používat v případě, kdy počet měření n není mnohokrát větší než počet stupňů volnosti g . Pro $n \gg g$ pak kritéria AIC a AICc splývají.



Obrázek 4.3: Simulace možného vzhledu závislosti $y = t$ třiceti náhodně vygenerovaných měření, z nichž na polovinu byl aplikován šum s $\sigma = 0,2$ a na druhou polovinu šum s $\sigma = 0,4$. Rozhodnout se má mezi přímkou ((1) – správné řešení) a parabolou (2). Zde jsou pro porovnání jednotlivé charakteristiky obou modelů $\chi_1^2 = 35,0$, $\chi_2^2 = 31,7$; $\chi_{\mu 1}^2 = 1,25$, $\chi_{\mu 2}^2 = 1,17$; $AIC_1 = 39,0$; $AIC_2 = 37,7$; $AICc_1 = 39,5$; $AICc_2 = 38,6$; $BIC_1 = 41,8$; $BIC_2 = 41,9$. Odtud vyplývá jasné doporučení: pokud možno využijte poslední, nejpřísnější z informačních kritérií – ‘bayesovské’.

4.2.3 Odhad nejistot jednotlivých měření

Výše uvedená informační kritéria ovšem občas selhávají z toho důvodu, že v praxi nemáme vždy spolehlivou informaci o nejistotách $\{\sigma_i\}$ pro jeden každý bod měření. Přitom většinou jde o měření provedená v minulosti, tedy neopakovatelná a tudíž unikátní. Někdy o nejistotách vstupních údajů nevíme zhora nic. Jenže ony nejistoty k výpočtu χ^2 nutně potřebujeme. Nebylo by poctivější oprášíit starou dobrou *prostou metodu nejmenších čtverců* se sumou čtverců odchylek v podobě: $S(\mathbf{b}) = \sum [y_i - f(t_i, \mathbf{b})]^2$, v níž není ani nejistoty σ_i ani váhy w_i zapotřebí? Lze to ale vůbec takto udělat?

Lze to učinit, ale jen v tom případě, kdy máme co do činění s daty stejného druhu, o nichž víme, že všechna mají zaručeně stejnou nejistotu $\sigma_i = \sigma$. Pokud by tato podmínka splněna nebyla, neměli bychom MNČ používat nebo alespoň bychom neměli tvrdit, že jsme k nějakým závěrům dospěli pomocí této metody. Výsledky, které bychom dostali, by byly nutně zkreslené, zejména by nebylo možné se spolehnout na odhady nejistot.

Připustíme-li, že v souboru zpracovávaných dat se nacházejí data nebo skupiny dat s rozdílným rozptylem, s rozdílnou kvalitou¹¹, je naší povinností vše udělat pro to, abychom ony nejistoty či váhy nějak odhadli a použili vztahy zohledňující rozdílné nejistoty, respektive váhy jednotlivých měření.

Jak tedy onu nejistotu měření veličiny σ_i odhadnout? Předně je třeba se smířit

¹¹Zde úplně stačí, když používáme data od různých pozorovatelů, získaná různou pozorovací technikou, v různých fotometrických filtrech, v různých klimatických podmínkách atp.

se skutečností, že onu nejistotu individuálního měření nikdy nedokážeme určit přesně: každé měření je jedinečné, neopakovatelné a nikdy zpětně nebudeme znát všechny okolnosti, které v tu chvíli mohly vlastní měření ovlivnit. Jistým vodítkem nám sice může být udávaná vnitřní nejistota (chyba), která ovšem zpravidla představuje jen dolní odhad skutečné nejistoty. Zde je třeba si uvědomit, že ona nejistota by se měla vztahovat k právě použitému regresnímu modelu, který nemusí realitu popisovat ideálně.

Východiskem tu může být použití prosté metody nejmenších čtverců s jednotkovými váhami a s následnou analýzou kvality proložení jednotlivými podskupinami v celém datovém souboru. Zlepšený odhad nejistot pak lze učinit za předpokladu, že přesnost měření v rámci určité relativně homogenní podskupiny dat bude nejspíš zhruba stejná (např. měření z určité noci v určitém filtru atp.). Tato nejistota pro j -tou podskupinu měření – σ_j je pak dána rozptylem měření podskupiny vzhledem k modelové předpovědi. Platí tedy: $\sigma_{ji} = \sigma_j$. Takto lze upřesnit váhy všech měření ve zpracovávaném souboru a celou regresi zopakovat. Po několika iteracích dojdeme k ustálenému stavu, kdy se již výsledky nebudou dále měnit.

Odhadujeme-li nejistoty jednotlivých pozorování takto, musíme se smířit s tím, že se vážou na daný regresní model. Při volbě jiného modelu, můžeme dostat poněkud odlišné hodnoty odhadů $\sigma_{ji} = \sigma_j$ a tím i vah jednotlivých měření. Zkušenost však ukazuje, že tyto rozdíly povedou jen k marginálním změnám ve výsledku, takže je můžeme zanedbat.

4.3 Lineární regrese

Řešení soustavy rovnic (4.10) v jejich obecnosti bývá dosti komplikované, takže není divu, že se vyhledají takové regresní modely, s nimiž by se dalo zacházet jednodušeji. Příjemná práce je s tzv. *lineárními regresními funkcemi* $f(t, \boldsymbol{\beta})$, které je možné vyjádřit jako lineární kombinaci g funkcí času $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_g(t)\}$, které tvoří vektorovou funkci $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_g)$. Hovoříme pak o lineární regresní funkci nebo o lineárním regresním modelu. Platí tedy

$$f(t, \boldsymbol{\beta}) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \dots + \beta_g x_g(t) = \sum_{j=1}^g \beta_j x_j(t) = \boldsymbol{\beta} \mathbf{x}(t) \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(t, \boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}, \frac{\partial f}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \beta_g} \right) = \mathbf{x}(t). \quad (4.15)$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (4.10) za $f(t, \boldsymbol{\beta})$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}(t_i) w_i \sum_{j=1}^g b_j x_j(t_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}(t_i) y_i w_i, \quad (4.16)$$

kde váha $w_i = \sigma_i^{-2}$. k -tou složku předchozí soustavy rovnic lze po roznásobení sum přepsat do tvaru

$$\sum_{j=1}^g b_j \sum_{i=1}^n x_k(t_i) x_j(t_i) w_i = \sum_{i=1}^n y_i x_k(t_i) w_i. \quad (4.17)$$

Celou soustavu g lineárních rovnic o g neznámých, jimiž jsou složky hledaného vektoru \mathbf{b} lze zapsat takto:

$$\begin{aligned} V_{11}b_1 + V_{12}b_2 + \dots + V_{1g}b_g &= U_1 \\ V_{21}b_1 + V_{22}b_2 + \dots + V_{2g}b_g &= U_2 \\ &\vdots \\ V_{g1}b_1 + V_{g2}b_2 + \dots + V_{gg}b_g &= U_g, \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde

$$V_{kj} = V_{jk} = \sum_{i=1}^n x_k(t_i) x_j(t_i) w_i; \quad U_k = \sum_{i=1}^n y_i x_k(t_i) w_i. \quad (4.19)$$

Soustavu g rovnic o g neznámých (b_j) pak lze standardním způsobem řešit. Nalezením všech hledaných koeficientů je pak nalezena i regresní funkce, kde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$. Pokud nás dále nezajímá přesnost měření, hodnověrnost proložení, chyby parametrů a neurčitost předpovědi, pak jsme hotovi.

4.3.1 Lineární regrese užitím maticového počtu

Lineární regresi lze elegantně řešit použitím maticového počtu. Ten budeme přednostně používat i v následujícím textu.

Pozorovaný vztah mezi závisle proměnnou (nepřesně měřenou veličinou, nejčastěji hvězdnou velikostí, ale i třeba radiální rychlostí, teplotou aj.) y a nezávislou proměnnou (přesně měřenou veličinou – typicky časem) t může být proložen vhodnou **modelovou funkcí** f . Matematický model závislosti nechť je určen uspořádanou g -ticí volných parametrů β_j , ve formě sloupcového vektoru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g)^T$. Pokud je možné modelovou funkci f zapsat jako lineární kombinaci g různých funkcí času $x_k(t)$, tak hovoříme o tzv. lineární modelové funkci a lze psát

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_g), \quad f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^g \beta_k x_k = \mathbf{x} \boldsymbol{\beta}. \quad (4.20)$$

Zavedme sloupcový vektor závislé veličiny \mathbf{y} s délkou n a matici \mathbf{X} s rozměrem $n \times g$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1g} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{ng} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

kde y_i je hodnota i -tého pozorování, x_{ik} je funkční hodnota k -té funkce pro i -té pozorování, $\mathbf{f}(t_i)$ je hodnota řádkového vektoru definovaného v (4.15)¹².

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}; \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

¹²Standardně používanými modely lineárních regresních funkcí jsou běžné nebo trigonometrické polynomy vhodných stupňů. Jako příklad lze zvolit parabolický model, jenž je nejjednodušším modelem části světelné křivky s extrémem. Parabolický model lze předpokládat ve formě: $f(t) = \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3$, $\mathbf{f}(t) = [t^2, t, 1]$, $\mathbf{X} = [\{t_i^2\} \{t_i\} \{1\}]$.

kde \mathbf{W} je diagonální matice $n \times n$ s vahami jednotlivých měření v diagonále, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})$ je sloupcový vektor s jednotlivými hodnotami modelové funkce $f_i(\mathbf{x}_i)$ pro i -té pozorování pro zadané $\boldsymbol{\beta}$.

Jako objektivní míru úspěšnosti proložení modelovou funkcí s parametry $\boldsymbol{\beta}$ použijeme součet váhovaných čtverců odchylek pozorovaných hodnot od předpověděných $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$

$$\begin{aligned} \chi^2(\boldsymbol{\beta}) &= [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})]^T \mathbf{W} [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})] = (\mathbf{y}^T - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T) \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - 2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

\mathbf{U} je řádkový vektor s délkou g , \mathbf{V} je čtvercová matice $g \times g$, jejíž inverzní matice \mathbf{H} je tzv. *kovarianční matice*:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1}. \quad (4.24)$$

Při proložení modelovou funkcí $f(t, \boldsymbol{\beta})$ metodou nejmenších čtverců se bere za optimální takové, pro něž je suma $\chi^2 = \chi^2(\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b})$ minimální. V případě lineární modelové funkce $f(t, \boldsymbol{\beta})$ platí, že takové minimum je jen jediné. Pro řešení v podobě sady parametrů \mathbf{b} a sumu kvadrátů odchylek $\chi^2(\mathbf{b})$ platí:

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}} = \mathbf{0} = -2 \mathbf{U} + 2 \mathbf{V} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{U} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}. \quad (4.25)$$

Předpověď hodnot modelové lineární funkce pro $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$, \mathbf{y}_p je dána následujícím vztahem:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{X} \mathbf{b} = [\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}] \mathbf{y} = \boldsymbol{\Xi} \mathbf{y}. \quad (4.26)$$

Výraz v hranaté závorce – symetrická matice $\boldsymbol{\Xi}$ o rozměru $n \times n$, která zde vystupuje jako operátor, který každé hodnotě pozorování přiřadí její „vyhlazenou“ hodnotu. Toto zobrazení je tím věrnější, čím více se matice $\boldsymbol{\Xi}$ blíží jednotkové matici $\mathbf{E}(n, n)$.

Minimální sumu kvadrátů odchylek χ^2 lze pro lineární regresi zapsat různě

$$\chi^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b}) = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}_p^T \mathbf{W} \mathbf{y}_p. \quad (4.27)$$

V posledních dvou variantách vystupuje i váhovaná suma čtverců funkčních hodnot, což je veličina vstupní, vyplývající z pozorování, tudíž zcela nezávislá na modelování. Metodu nejmenších čtverců tak lze alternativně chápat i jako metodu největších čtverců modelových předpovědí. Tento pohled lze s výhodou využít např. při hledání nejlepších period, tedy při tvorbě LSM periodogramů.

Sumu čtverců odchylek $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ pro lineární regresní model lze po určitých úpravách zapsat v následujícím instruktivním tvaru:

$$\chi^2(\boldsymbol{\beta}) = \chi^2 + \sum_{k=1}^g (\beta_k - b_k)^2 \sum_{i=1}^n \frac{x_{ki}^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.28)$$

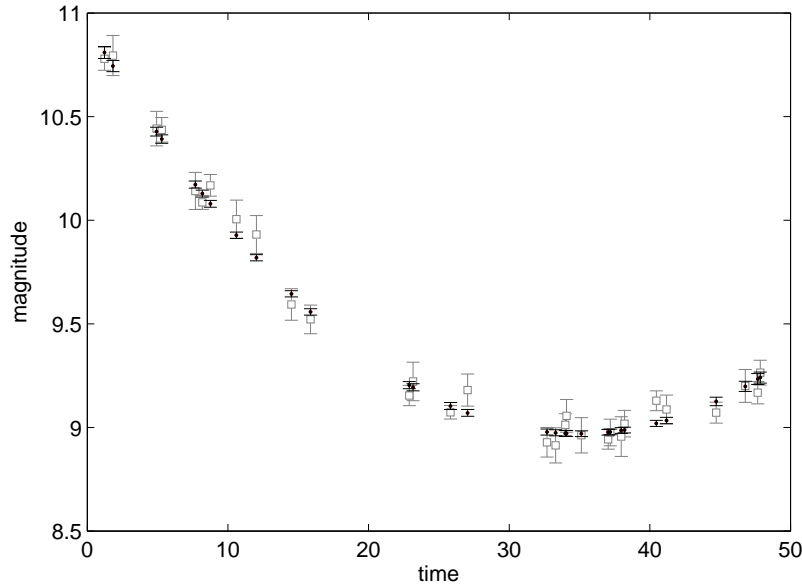
Ze zápisu je okamžitě patrné, že funkce $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ má tvar paraboloidu s minimem v bodu $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$. Má tedy jediné a tudíž absolutní minimum.

4.3.2 Nejistoty parametrů modelu a předpovědí

V rámci řešení úlohy lineární regrese lze též odhadnout střední *rozptyl měření*¹³ s^2 , dále odhad nejistoty předpovědi jednotlivých vstupních dat $\delta \mathbf{y}_p$ a odhad nejistot parametrů modelu $\delta \mathbf{b}$

$$s^2 = \frac{\chi_\mu^2}{w}; \quad \delta \mathbf{y}_p = \sqrt{\chi_\mu^2 \text{diag}(\mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{X}^T)}; \quad \delta \mathbf{b} = \sqrt{\chi_\mu^2 \text{diag}(\mathbf{H})}, \quad \text{kde } \chi_\mu^2 = \frac{\chi^2}{n - g}. \quad (4.29)$$

χ_μ^2 je pomocná bezrozměrná funkce, jejíž velikost závisí na adekvátnosti volby regresního modelu a správnosti odhadu nejistot použitých dat. Operátor „diag“, aplikovaný na čtvercovou matici, vytvoří sloupcový vektor sestavený z prvků nacházejících se na její diagonále; operátor může fungovat i v opačném směru, aplikací na sloupcový vektor obdržíme čtvercovou matici, jejíž diagonálu tvoří prvky vektoru v odpovídajícím pořadí. Je-li vše v pořádku, pak platí $\chi_\mu^2 \approx 1 \pm \sqrt{2/(n - g)}$.



Obrázek 4.4: Na obrázku jsou čtverečky znázorněna simulovaná pozorování proměnné hvězdy v okolí jejího minima jasnosti. Vnitřní přesnost jednotlivých měření je znázorněna šedými chybovými úsečkami. Proložená parabola je naznačena černými tečkami s chybovými úsečkami odpovídajícími nejistotě předpovědi pomocí zvoleného parabolického lineárního modelu.

Složky sloupcového vektoru $\delta \mathbf{b}$ se často uvádějí jako rigorózní odhad nejistot jednotlivých parametrů modelu. Bohužel, tento význam mají jen výjimečně, nicméně na nich občas trvají recenzenti odborných článků a oponenti diplomových prací. Naproti

¹³Tato veličina má ovšem fyzikální význam pouze tehdy, zpracováváme-li měření stejného druhu (se stejnou fyzikální jednotkou - mag, km/s apod.). V opačném případě je význam veličiny s^2 čistě formální.

tomu velmi cenný je následující odhad předpovědi modelu $\delta f(t, \mathbf{b})$

$$\delta f(t, \mathbf{b}) = \sqrt{\chi_\mu^2 \mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x}^T} = \sqrt{\bar{w} s^2 \mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x}^T} = \sqrt{\chi_\mu^2 \vec{\nabla} f \mathbf{H} (\vec{\nabla} f)^T}. \quad (4.30)$$

Odhady nejistoty jednotlivých parametrů obsažených ve vektoru řešení \mathbf{b} , $\delta \mathbf{b}$ se zdají být důležité, neboť přece pomocí nich lze odhadnout i nejistotu libovolného výrazu $Q(\boldsymbol{\beta}, t)$, a to podle notorického *zákona o šíření chyb*

$$\delta Q(\boldsymbol{\beta}, t) = \sqrt{\sum_{k=1}^g \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta_k} \delta b_k \right)^2}, \quad (4.31)$$

který lze přepsat do elegantnějšího tvaru zahrnujícího i výpočet vektoru chyb $\delta \mathbf{b}$

$$\delta Q(\boldsymbol{\beta}, t) = \sqrt{\chi_\mu^2 \vec{\nabla} Q \text{diag}(\mathbf{H}) (\vec{\nabla} Q)^T}, \quad \text{kde } \vec{\nabla} Q(\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta_1}, \frac{\partial Q}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \beta_g} \right), \quad (4.32)$$

kde $\vec{\nabla} Q(\boldsymbol{\beta})$ je řádkový vektor gradientu funkce Q podle jednotlivých parametrů.

Jenže výrazy (4.31,4.32) platí pouze tehdy, je-li kovarianční matice \mathbf{H} diagonální, jinými slovy – jednotlivé parametry v daném výrazu nejsou korelované. V obecném případě takto dostaneme jen horní hranici nejistoty. Chcete-li postupovat korektně, měli byste použít následující, jistě ještě elegantnější vztah

$$\delta Q = \sqrt{\chi_\mu^2 \vec{\nabla} Q \mathbf{H} (\vec{\nabla} Q)^T}. \quad (4.33)$$

Funkcí Q může být i první nebo druhá derivace modelové funkce podle času \dot{f} , \ddot{f} , což jsou veličiny nezbytné např. k výpočtu nejistoty určení okamžiku extrému světelné křivky:

$$\delta \dot{f}(t, \mathbf{b}) = \sqrt{\chi_\mu^2 \vec{\nabla} \dot{f} \mathbf{H} (\vec{\nabla} \dot{f})^T} = \sqrt{\chi_\mu^2 \dot{\mathbf{x}} \mathbf{H} \dot{\mathbf{x}}^T}; \quad (4.34)$$

$$\delta \ddot{f}(t, \mathbf{b}) = \sqrt{\chi_\mu^2 \vec{\nabla} \ddot{f} \mathbf{H} (\vec{\nabla} \ddot{f})^T} = \sqrt{\chi_\mu^2 \ddot{\mathbf{x}} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{x}}^T}, \quad (4.35)$$

kde $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_g(t))$ a $\ddot{\mathbf{x}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \dots, \ddot{x}_g(t))$.

4.3.3 Základní regresní modely - aplikace lineární regrese

Následuje několik praktických příkladů aplikace lineární regrese metody nejmenších čtverců, které mají ilustrovat způsob, jak lze metodu lineární regrese v maticové podobě používat. Pokud tyto příklady někomu připadnou jako triviální, pak se nemýlí, neboť jde o záměr. Pokud ovšem zvládnete toto, můžete si troufnout na složitější modely.

V řadě příkladů budou s výhodou použity některé střední veličiny, nezávislých i závislých veličin t a y :

$$\overline{t^m y^l} = \sum_{i=1}^n t_i^m y_i^l w_i / \sum_{i=1}^n w_i, \quad (4.36)$$

$$u_{tt} = \overline{t^2} - \bar{t}^2, \quad s_t = \sqrt{u_{tt}}, \quad u_{yy} = \overline{y^2} - \bar{y}^2, \quad s_y = \sqrt{u_{yy}}, \quad u_{ty} = \overline{ty} - \bar{t} \bar{y}, \quad (4.37)$$

$$r = \frac{\overline{ty} - \bar{t} \bar{y}}{s_t s_y} = \sqrt{\frac{u_{ty}^2}{u_{tt} u_{yy}}} = \frac{u_{ty}}{s_t s_y} \quad (4.38)$$

Korelační koeficient r je bezrozměrná veličina nabývající hodnotu mezi -1 a 1, přičemž 0 je roven tehdy, kdy mezi veličinami t a y neexistuje žádná lineární korelace, ± 1 je roven tehdy, kdy jsou všechny hodnoty $\{t_i, y_i\}$ vyskládány na jediné přímce. Individuální váha souvisí s nejistotou takto: $w_i = \sigma_i^{-2}$.

4.3.3.1 Průměrná hodnota

V případě, že mezi n dvojicemi t a y datového souboru $\{t_i, y_i, \sigma_i\}$ neexistuje žádná závislost (korelační koeficient je blízky nule), bude hodnota $y(t)$ v mezích chyb nejspíš konstantní. Regresní model pak můžeme sestavit takto: $y_i = \beta + e_i$, $f(\beta) = \beta$. Optimální hodnotu β , při níž je vážená suma čtverců modifikovaných odchylek $\tilde{e}_i = e_i/\sigma_i$ minimální, b , nazveme váženou střední hodnotou. Můžeme ji najít přímo minimalizací výrazu $\chi^2(\beta)$:

$$\chi^2(\beta) = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - 2\beta \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \chi^2(b)}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} + 2b \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = 0; \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sum y_i \sigma_i^{-2}}{\sum \sigma_i^{-2}} = \frac{\sum y_i w_i}{\sum w_i} = \bar{y}; \quad (4.40)$$

$$\chi^2(\bar{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - \bar{y}^2}{\sigma_i^2}; \quad \chi^2(\beta) = \chi^2(\bar{y}) + (\beta - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}. \quad (4.41)$$

Grafem funkce $\chi^2(\beta)$ je parabola s minimem v $\beta = \bar{y}$ a funkční hodnotou $\chi^2(\bar{y})$ (viz (4.41)).

I když minimalizací funkce $\chi^2(\beta)$ lze střední hodnotu vypočítat přímo, zkusme si nyní ze cvičných důvodů všechny potřebné vztahy odvodit pomocí maticových vztahů.

$$\mathbf{X} = [1, 1, \dots, 1]^T, \quad \mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T, \quad \mathbf{W} = \text{diag}[\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_n^{-2}]; \quad (4.42)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} = \sum \sigma_i^{-2}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\sum \sigma_i^{-2}}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{U} = \sum y_i \sigma_i^{-2}, \quad b = \mathbf{H} \mathbf{U} = \frac{\sum y_i \sigma_i^{-2}}{\sum \sigma_i^{-2}} = \bar{y}, \quad (4.44)$$

$$\chi^2(\bar{y}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} = \sum (y_i^2 - \bar{y}^2) \sigma_i^{-2}; \quad s^2 = \frac{\chi^2(\bar{y})}{\sigma^{-2} (n-1)} = s_y^2 \frac{n}{n-1}, \quad (4.45)$$

$$\chi_\mu^2 = \frac{\chi^2}{n-1}, \quad \delta b = \sqrt{\chi_\mu^2 \text{diag}(\mathbf{H})} = \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \delta y_p = s \sqrt{\chi_\mu^2 \text{diag}(\mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x}^T)} = s. \quad (4.46)$$

Za povšimnutí jistě stojí, že vztahy pro $b, \sigma, \delta b$ a δy_p jsou formálně stejné jako v případě bez vah. Rozdíl ovšem je v tom, jak jsou definovány střední veličiny, z nichž se při výpočtu vychází.

4.3.3.2 Přímka jdoucí počátkem

Občas se můžeme setkat se situací, kdy je jeden nebo více bodů závislosti pevně fixováno. Z této skutečnosti musíme při volbě regresního modelu vycházet. Nejjednodušším příkladem toho druhu je naše očekávání, že n bodů o souřadnicích $[t_i, y_i]$ se stejnými váhami lze proložit přímkou jdoucí bodem o souřadnicích $[0, 0]$, neboli počátkem. Regresní model je pak: $y_i = \beta t_i + e_i$, $f(\beta, t) = \beta t$. Optimální hodnotu $\beta = b$, při níž je vážená suma kvadrátů odchylek e_i minimální, nazveme tentokrát koeficientem úměrnosti.

I zde budeme předpokládat, že každému z bodů měření bude přisouzena určitá individuální váha $w_i = 1/\sigma_i^2$.

$$\mathbf{X} = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T, \quad \mathbf{W} = \text{diag}[w_1, w_2, \dots, w_n], \quad (4.47)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} = n \bar{w} \bar{t}^2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{n \bar{w} \bar{t}^2}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i t_i = n \bar{w} \bar{t} \bar{y}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{U} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i w_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2 w_i} = \frac{\bar{t} \bar{y}}{\bar{t}^2}, \quad (4.49)$$

$$y_p = b t, \quad R = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} = n \bar{w} \left(\bar{y}^2 - b \bar{t} \bar{y} \right) = n \bar{w} \left[\bar{y}^2 - \frac{(\bar{t} \bar{y})^2}{\bar{t}^2} \right], \quad (4.50)$$

$$s^2 = \frac{\chi^2}{\bar{w}(n-1)} = \frac{n \left[\bar{t}^2 \bar{y}^2 - (\bar{t} \bar{y})^2 \right]}{(n-1) \bar{t}^2}, \quad \delta b = s \sqrt{\bar{w} \bar{H}} = \frac{s}{\sqrt{n \bar{t}^2}}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = t; \quad \delta y_p = s \sqrt{\bar{w} \mathbf{x}(t) \mathbf{H} \mathbf{x}(t)^T} = s \sqrt{\frac{t^2}{n \bar{t}^2}}. \quad (4.52)$$

4.3.3.3 Proložení obecnou přímkou

Při zpracování časově proměnných pozorovacích dat se můžeme často setkat s úlohou nalezení parametrů časové trendu, přičemž se v prvním přiblížení nejčastěji předpokládá, že mezi závislou veličinou y a nezávislou veličinou t (standardně časem měření) existuje lineární závislost. Jinými slovy body v grafu lze proložit přímkou. Regresní model pro takovou situaci je zřejmý: $y_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + e_i$.

Přímka nechť je prokládána n body o souřadnicích $[t_i, y_i]$, přičemž každému z bodů je přisouzena jeho individuální váha w_i . Řešením úlohy je nalezení vektoru \mathbf{b} se složkami b_1, b_2 , pro něj je suma $\chi^2(\beta_1, \beta_2)$ minimální:

$$\chi^2(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \beta_1 - \beta_2 t_i)^2, \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_1 - b_2 t_i) = 0, \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_1 - b_2 t_i) t_i = 0. \quad (4.54)$$

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých (4.54) řešíme prostředky maticového počtu:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}; \quad (4.55)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} = n \bar{w} \begin{bmatrix} 1 & \bar{t} \\ \bar{t} & \bar{t}^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} = n \bar{w} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{t} \bar{y} \end{bmatrix}; \quad (4.56)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{n \bar{w} u_{tt}} \begin{bmatrix} \bar{t}^2 & -\bar{t} \\ -\bar{t} & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{U} = \frac{1}{u_{tt}} \begin{bmatrix} \bar{t}^2 \bar{y} - \bar{t} \bar{t} \bar{y} \\ -\bar{t} \bar{y} + \bar{t} \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Přesvědčte se, že platí: $y_p = \bar{y}$, tedy, že regresní přímka prochází těžištěm.

$$\chi^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} = n \bar{w} (\bar{y}^2 - b_1 \bar{y} - b_2 \bar{t} \bar{y}), \quad \chi_\mu^2 = \frac{\chi^2}{n-2}, \quad (4.58)$$

$$s^2 = \frac{\chi_\mu^2}{w}, \quad \mathbf{x} = [1, t]; \quad y_p = \mathbf{x} \mathbf{b}, \quad \delta y_p = \sqrt{\chi_\mu^2 \mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x}^T} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(t - \bar{t})^2}{s_t^2}}, \quad (4.59)$$

$$\delta b_2 = \sqrt{\chi_\mu^2 H_{22}} = \frac{s}{s_t \sqrt{n}}, \quad \delta b_1 = \sqrt{\chi_\mu^2 H_{11}} = \frac{s}{s_t} \sqrt{\frac{t^2}{n}} = \delta b_2 \sqrt{t^2}. \quad (4.60)$$

Nejistota směrnice přímky δb_2 tedy nezávisí na umístění počátku, zatímco chyba absolutního členu δb_1 ano. Minimální je tato chyba v případě, kdy počátek souřadnic ztotožníme s těžištěm. Nejistota pak bude $\delta b_1 = s/\sqrt{n}$. Absolutní člen b_1 lze geometricky interpretovat jako úsek na ose y , který na ní vytíná regresní přímka. Neurčitost polohy tohoto průsečíku udává chyba předpovědi $\delta y_p(t=0)$ v bodě 0. Číselně je tato chyba rovna chybě absolutního členu δb_1 , tak jak je uvedeno v (4.60).

Korelační koeficient r je dobrou mírou toho, jak dobře právě přímka vystihuje pozorovanou časovou závislost

$$r = \frac{\bar{t} \bar{y} - \bar{t} \bar{t}}{s_t s_y} = \frac{u_{ty}}{s_t s_y}. \quad (4.61)$$

4.3.3.4 Proložení časových řad polynomem

Při zpracování delších časových řad často aproximujeme vývoj pozorované veličiny y polynomem řádu řádu $g-1$. Lineární regresní model předpokládáme ve tvaru: $y_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \dots + \beta_g t_i^{g-1} + e_i$.

Polynomiální závislost nechť je prokládána n body o souřadnicích $[t_i, y_i]$, přičemž každému z bodů je přisouzena jeho individuální váha w_i . Řešením úlohy je nalezení sloupcového vektoru \mathbf{b} s g složkami b_1, b_2, \dots, b_g , pro něž je suma váhovaných čtverců odchylek $\chi^2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g) = \chi^2(\boldsymbol{\beta})$ minimální. Řešíme pomocí maticového počtu. Definice matic \mathbf{W} a \mathbf{y} je též jako v (4.55), jediný rozdíl je v matici \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{g-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{g-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{g-1} \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

nazývané též matice Vandermondova.

4.3.3.5 Proložení časových řad harmonickým polynomem

Řada astrofyzikálních dějů probíhá více či méně periodicky. Známe-li z dřívějšíka parametry periodicity, lze si zavést tzv. *fázovou funkci* ϑ , kterou dostanete jako součet běžné fáze φ a epochy E . Pokud je perioda P konstantní, lze si fázovou funkci vypočítat jednoduchým vztahem:

$$\vartheta = \frac{t - M_0}{P}, \quad (4.63)$$

kde t je juliánské datum pozorování, M_0 je juliánské datum počátku počítání fázové funkce, P je fixní perioda ve dnech.

Pozorované periodicky se měnící veličiny y (jasnosti, radiální rychlosti, intenzity spektrálních čar, indukce magnetického pole aj.) vytvářejí *fázovou křivku*, kterou nejčastěji znázorňujeme jako závislost proměnné veličiny na fázi $\varphi = \text{frac}(\vartheta)$. Fázové křivky zpravidla prokládáme harmonickým polynomem stupně $q = (g - 1)/2$, kde g je počet stupňů volnosti. Matematický model s harmonickým polynomem stupně q lze zapsat: $y_i = \beta_1 + \sum_{k=1}^q \beta_{2k} \cos(2k\pi\vartheta_i) + \beta_{2k+1} \sin(2k\pi\vartheta_i) + e_i$.¹⁴ Odpovídající matice \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi\vartheta_1) & \sin(2\pi\vartheta_1) & \cos(4\pi\vartheta_1) & \sin(4\pi\vartheta_1) & \cdots & \cos(2q\pi\vartheta_1) & \sin(2q\pi\vartheta_1) \\ 1 & \cos(2\pi\vartheta_2) & \sin(2\pi\vartheta_2) & \cos(4\pi\vartheta_2) & \sin(4\pi\vartheta_2) & \cdots & \cos(2q\pi\vartheta_2) & \sin(2q\pi\vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi\vartheta_n) & \sin(2\pi\vartheta_n) & \cos(4\pi\vartheta_n) & \sin(4\pi\vartheta_n) & \cdots & \cos(2q\pi\vartheta_n) & \sin(2q\pi\vartheta_n) \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

4.3.4 Zobecnění lineární regrese I - vektorová závislá proměnná

Občas se stane, že měřená veličina není skalár, ale m -rozměrný řádkový vektor nebo uspořádaná m -tice několika veličin: $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})$, veškerá měření bude představovat matice \mathbf{Y} s rozměrem $n \times m$. Řešením regrese bude

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{B}) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \dots + \beta_g x_g(t) = \sum_{j=1}^g \beta_j x_j(t) = \mathbf{x}(t) \mathbf{B}, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{B} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{U} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}; \quad \mathbf{y}_p = \mathbf{x}(t) \mathbf{B}. \quad (4.67)$$

4.3.5 Zobecnění lineární regrese II - více nezávisle proměnných

Až doposud jsme jako jedinou nezávislou proměnnou brali čas a vše jsme nahlíželi z hlediska časové proměnnosti. Složky vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_g)$ pak byly funkcemi času. To však metoda nejmenších čtverců vůbec nevyžaduje. Jednotlivé položky mohou být třeba funkcemi prostorových souřadnic, rychlosti nebo to mohou být jen indikace popisující povahu měření (zda šlo třeba o fotometrické měření či měření radiálních rychlostí nebo intenzity spektrálních čar). Vše to jsou nezávislé, nenáhodné veličiny charakterizující konkrétní měření v rámci zvoleného komplexního modelu. Proto má smysl dívat se na celý soubor veličin obsažených ve vektoru $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ig})$ přímo jako na soubor g nezávislých veličin, které mohou nabývat různých hodnot. Pro určitý typ měření mohou být některé z nezávislých proměnných rovny 0, pro jiný typ měření mohou být nulové jiné nezávislé proměnné. Ve vektoru $\mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ s naměřenými veličinami jsou pak jednotlivé položky řazeny často v pořadí, v jakém byly naměřeny.

¹⁴Zde je třeba mít na paměti skutečnost, že fázová funkce je funkcí periody, která se může v průběhu času měnit. Úlohu, kde bychom kromě tvaru světelné křivky řešili i časový vývoj periody, lze zvládnout až prostředky nelineární regrese.

Příklad: Takovým lineárním modelem může být funkce se dvěma stupni volnosti popisující měření šířky a délky nějakého obdélníku. V případě, že v i -tém měření měříme šířku, je $\mathbf{x}_i = (0, 1)$, jde-li naopak o měření délky, pak je $\mathbf{x}_i = (1, 0)$, y_i je ona naměřená veličina. Modelová funkce pro i -té měření pro $f_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}$, β_1 je délka, β_2 je šířka. Cílem zpracování je najít střední velikost těchto parametrů \mathbf{b} na základě n měření. Při výpočtu budeme předpokládat, že váhy všech měření jsou jednotkové - tedy že je měříme se stejnou chybou.

$$\begin{array}{l|l} 3.16 & \check{s} \\ 2.15 & d \\ 2.18 & d \\ 3.13 & \check{s} \\ 2.15 & d \\ 2.19 & d \\ 3.13 & \check{s} \end{array} ; \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3.16 \\ 2.15 \\ 2.18 \\ 3.13 \\ 2.15 \\ 2.19 \\ 3.13 \end{pmatrix} ; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{matrix} 2.168 \pm 0.009 \\ 3.140 \pm 0.010 \end{matrix} \cdot (4.68)$$

Výhodou tohoto přístupu je, že můžeme solidně odhadnout směrodatnou odchylku a tedy i nejistotu určení hledané délky a šířky. Vzhledem k tomuto zobecnění se takto mohou pod sebe dostat i velmi odlišné typy měření s velmi odlišným rozsahem měřených veličin. Proto je důležité, aby byly jednotlivé typy měření správně oceněny svou vahou w_i nepřímo úměrnou své disperzi.

Nalezení okamžiku minima ze dvou sad pozorování - domácí úloha

Cílem této domácí úlohy je aplikace zobecněné lineární regrese na problém, který simuluje situaci, do níž se pozorovatelé proměnných hvězd často dostávají.

Představme si, že dva pozorovatelé v odlišných časových pásmech spolupracovali při pozorování minima jasnosti určité dlouhoperiodické proměnné hvězdy, přičemž spolupracujícímu Číňanovi ($q = 1$) se podařilo provést celkem 15 pozorování, vesměs na sestupné větvi. Český pozorovatel ($q = 2$) zachytil až výstup světelné křivky z minima v 30 pozorováních ovšem s poněkud horší kvalitou. Samotné minimum žádný z pozorovatelů nezachytil.

V obou případech se pozorování vedla ve filtru V , hvězdné velikosti se vztahovaly k vybrané srovnávací hvězdě, pozorovatelé se však neshodli na její volbě, takže světelné křivky na sebe nenavazovaly. Světelné křivky byly simulovány parabolou

$$\Delta m(t) = a_1 (t - t_{\min})^2 + a_5 \delta_{i1} + a_6 \delta_{i2} = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \delta_{i1} + a_4 \delta_{i2}, \quad t_{\min} = -\frac{a_2}{2a_1}, \quad (4.69)$$

kde a_1 je koeficient parabolického členu (pro simulaci zvoleno $a_1 = 1$), t_{\min} je okamžik minima (zvoleno $t_{\min} = 0,350$), a_5 , a_6 jsou rozdíly hvězdné velikosti v minimu jasnosti pro čínského a českého pozorovatele (zvoleno $a_5 = 0,000$, $a_6 = 0,400$). Funkce $\delta_{i1} = 1$, pokud jde o pozorování Číňana, jinak $\delta_{i1} = 0$, naproti tomu $\delta_{i2} = 1$, pokud jde o pozorování Čecha, jinak $\delta_{i2} = 0$. a_2 je lineární člen, a_3 , a_4 jsou hodnoty $\Delta m(t = 0)$ pro jednotlivé pozorovatele. Okamžiky pozorování jsou udávány ve dnech od začátku určitého juliánského dne. Jednotlivé okamžiky t_i byly voleny náhodně v intervalu 0 až 0,3 ($q = 1$) a 0,4 až 0,8 ($q = 2$). K simulovaným hodnotám rozdílu hvězdné velikosti $\Delta m(t_i)$ určeným vztahem (4.69) pro dané hodnoty časů t_i byl přičten náhodný gaussovský šum o standardních odchylkách postupně: $s_1 = 0.005$ mag a $s_2 = 0.007$ mag. Tabulka s takto nasimulovanými časy t_i a hodnotami $\Delta m(t_i)$ včetně příznaku q následuje.

t_i	Δm_i	q	t_i	Δm_i	q	t_i	Δm_i	q
0,013	0,117	1	0,428	-0,037	2	0,596	0,014	2
0,039	0,093	1	0,455	-0,035	2	0,609	0,015	2
0,053	0,086	1	0,473	-0,042	2	0,623	0,026	2
0,100	0,058	1	0,486	-0,036	2	0,623	0,002	2
0,112	0,054	1	0,488	-0,031	2	0,634	0,033	2
0,114	0,055	1	0,489	-0,024	2	0,672	0,049	2
0,120	0,056	1	0,502	-0,035	2	0,672	0,056	2
0,131	0,041	1	0,502	-0,032	2	0,681	0,063	2
0,132	0,051	1	0,543	-0,017	2	0,697	0,086	2
0,206	0,014	1	0,549	-0,005	2	0,739	0,102	2
0,220	0,020	1	0,561	0,005	2	0,740	0,095	2
0,248	0,019	1	0,568	-0,005	2	0,743	0,097	2
0,252	0,006	1	0,572	0,006	2	0,743	0,101	2
0,264	0,005	1	0,573	0,005	2	0,761	0,123	2
0,294	-0,006	1	0,587	0,007	2	0,772	0,133	2

Vaším úkolem bude:

- Nakreslit graf pozorovaných světelných křivek.
- Pomocí lineární regrese se stejnými vahami jednotlivých měření vypočítat zvlášť pro 1. a 2. sadu pozorování hodnotu koeficientů a_1, a_2, a_3 , případně a_4 , včetně odhadu jejich nejistot, hodnoty standardní odchylky. Výsledné hodnoty mezi sebou porovnejte a srovnajte je se zadanými parametry simulace.

Vypočítejte dále okamžiky t_{\min} , včetně nejistoty jejich určení, přičemž využijete vztah uvedený v (4.69) a vztah pro výpočet odhadu chyby funkce koeficientů (4.33) a funkční hodnotu v minimu proložené paraboly a_5 a a_6 , včetně nejistoty. Výsledné hodnoty mezi sebou porovnejte a srovnajte je se zadanými parametry simulace.

- Spojte obě pozorování dohromady a předpokládejte, že absolutní členy lineární regrese jsou různé. Předpokládejte nejprve, že váhy všech pozorování jsou identické, rovné 1. Vypočítejte koeficienty a_1, a_2, a_3, a_4 , včetně odhadu jejich nejistot, hodnotu standardní odchylky. Výsledné hodnoty mezi sebou porovnejte a srovnajte je se zadanými parametry simulace.
- Vypočítejte standardní odchylky vzhledem k předpovědi vůči tomuto modelu zvlášť pro čínské a české pozorování. Pomocí nich vypočítejte normalizovanou váhu jednotlivých čínských a českých pozorování. S těmito vahami pak opakujte výpočet parametrů a_1, a_2, a_3, a_4 , včetně odhadu jejich nejistot, hodnotu standardní odchylky. Výsledné hodnoty mezi sebou porovnejte a srovnajte je se zadanými parametry simulace.
- Vypočítejte okamžik t_{\min} , včetně nejistoty jeho určení, a funkční hodnotu v minimu proložené paraboly a_5 a a_6 , včetně nejistoty. Výsledné hodnoty mezi sebou porovnejte a srovnajte je se zadanými parametry simulace.
- Pro spojené sady pozorování předpovězte funkční hodnoty a jejich nejistoty pro obě sady pozorování. Diskutujte, vyneste do grafu.

4.4 Nelineární regrese

Je třeba se smířit se skutečností, že naprostá většina regresních modelů dobře popisujících reálné astrofyzikální situace prostě není lineární a ani ji nelze na lineární převést. Řešení nelineární regrese už není tak přímočaré, mj. i proto, že taková regrese může mít i více řešení, z nichž jen některá jsou fyzikálně přijatelná. Nicméně, lze ukázat, že ve většině fyzikálně akceptovatelných řešení lze v okolí minima plochu sumy kvadrátů $\chi^2(\boldsymbol{\beta})$ nahradit paraboloidem – lze tedy nelineární model v okolí minima nahradit jeho linearizovanou aproximací. K tomu ovšem musíme mít dobrý odhad řešení, v jehož okolí budeme skutečné řešení hledat. K odhadu se lze dopracovat třeba použitím údajů z literatury spolu se zjednodušením modelu, tak abyste pomocí něj k odhadu řešení dospěli.

4.4.1 Linearizace nelineárních regresních modelů

Připusťme nyní, že se nám podařilo se k takovému odhadu v podobě výchozího vektoru parametrů \mathbf{b}_0 dopídit. Minimum pak budeme hledat v bezprostředním okolí tohoto startovního odhadu. Jakmile se nám podaří výchozí regresní model linearizovat, hned se můžeme začít těšit z vymožeností poskytovaných lineární regrese.

Při linearizaci modelu zpravidla používáme jeho Taylorův rozvoj prvního řádu podle parametrů, v nichž je model nelineární.

$$f(\mathbf{b}_0, \Delta\boldsymbol{\beta}) \cong f(\mathbf{b}_0) + \sum_{k=1}^g \Delta\beta_k \frac{\partial f(\mathbf{b}_0)}{\partial \beta_k} = f(\mathbf{b}_0) + \Delta\boldsymbol{\beta} \mathbf{x}. \quad (4.70)$$

Takto přepsaná modelová funkce je pak lineární vzhledem k nově zavedeným parametrům $\Delta\boldsymbol{\beta}$, přičemž vektor nezávisle proměnných \mathbf{x} je dán vztahem:

$$\mathbf{x} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}, \frac{\partial f}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \beta_g} \right). \quad (4.71)$$

Vidíme, že situace je velmi podobná té, co známe u lineární regrese, rozdíly tu ale jsou, a to významné. Vektor \mathbf{x}_i příslušející i -tému měření je opět gradientem, a proto se této metodě řešení nelineární regrese také říká metoda gradientní (viz 4.11). Z vektorů \mathbf{x}_i si vytvoříme matici \mathbf{X} (viz rovnice (5.81)), $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{f}$, \mathbf{W} a vypočteme řešení v podobě diferenčního vektoru $\Delta\mathbf{b}$.

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}; \quad \mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \Delta\mathbf{y}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1}; \quad \Delta\mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{U}. \quad (4.72)$$

Tento korigující vektor přičteme k počátečnímu odhadu vektoru volných parametrů \mathbf{a}_0 modelové funkce a obdržíme tak další, zlepšený odhad uspořádané g -tice parametrů $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b}$. S novou hodnotou parametrů pak můžeme celý popsany postup znovu opakovat. V průběhu iterativního procesu se absolutní velikost vektoru $\Delta\mathbf{b}$ zpravidla rychle zmenšuje a již po několika krocích se přiblíží nule, což znamená, že jsme již našli hledané řešení celé úlohy.

A ještě poznámka: není třeba linearizovat všechny parametry, některé z nich bývají lineární a lze je tak počítat přímo. Lze to ukázat na následujícím příkladu.

Příklad – linearizace parabolického modelu

Náš kvadratický model můžeme linearizovat podle rovnice (4.70), vycházející z našeho počátečního odhadu parametrů \mathbf{a}_0

$$f = [a_{02} (t - a_{01})^2 + a_{03}] + \Delta a_1 2 a_{02} (t - a_{01}) + \Delta a_2 (t - a_{01})^2 + \Delta a_3. \quad (4.73)$$

Je zjevné, že modelová funkce je v parametrech a_2, a_3 lineární. Znamená to, že tyto dva parametry není třeba linearizovat, ale počítat přímo, pouze první parametr, a_1 je třeba hledat iterativně, tedy:

$$f(t, \mathbf{a}) = \Delta a_1 2 a_2 (t - a_{01}) + a_2 (t - a_{01})^2 + a_3. \quad (4.74)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 a_2 (t_1 - a_{01}) & (t_1 - a_{01})^2 & 1 \\ 2 a_2 (t_2 - a_{01}) & (t_2 - a_{01})^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 a_2 (t_n - a_{01}) & (t_n - a_{01})^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Parametry a_2, a_3 popisující vzhled světelné křivky neiterujeme.

4.4.1.1 Odhad nejistoty okamžiků extrémů

Nejistota volných parametrů včetně okamžiků extrémů je dána vztahem

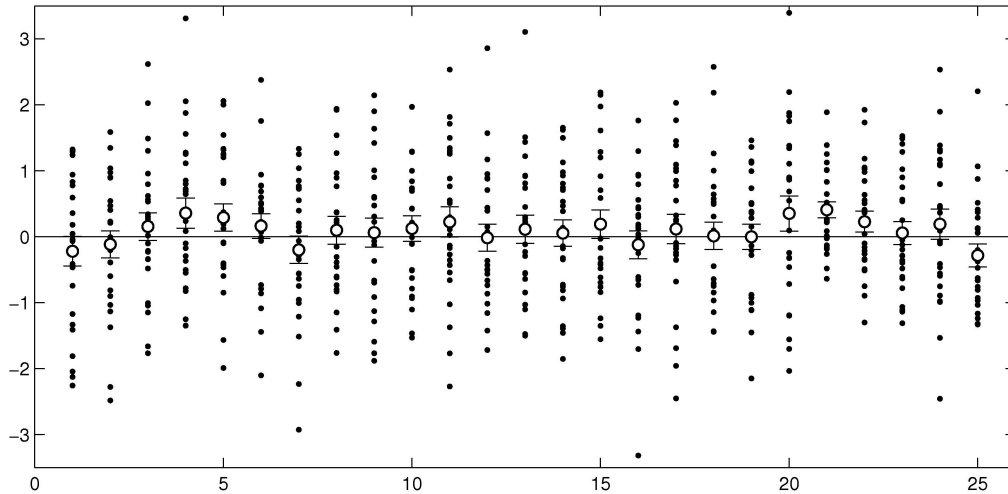
$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{b}); \quad \chi^2 = \Delta \mathbf{y}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{y}; \quad s = \sqrt{\chi^2 / (n - g)}; \quad \delta \mathbf{b} = s \sqrt{\text{diag}(\mathbf{H})}. \quad (4.76)$$

Jakkoli je výsledný soubor korekčních parametrů téměř čistě nulový, jejich nejistota nulová není a odpovídá nejistotě jednotlivých parametrů. To nám umožňuje učinit spolehlivý odhad neurčitosti, s níž známe okamžik, kdy proložená funkce nabývá svého extrému.

4.5 Robustní regrese

Metoda nejmenších čtverců je výtečným nástrojem pro modelování skutečnosti na základě měření či pozorování s množstvím aplikací, ale to jen tehdy, jsou-li splněny základní předpoklady, na jejichž základě byla metoda odvozena. Zde je na prvním místě premisa normálního rozdělení v odchylkách pozorování od modelových očekávání, zejména pak neexistence tzv. *odlehklých bodů* (outliers) či hrubých chyb. Jediné takové pozorování, pokud by se dostalo až do konečného zpracování, dokáže naprosto znehodnotit celou analýzu.

Řešení se zdá být nasnadě – stačí přece všechna taková měření identifikovat a vyloučit ze zpracování. Tak by se vskutku mělo postupovat, zejména tehdy, jsou-li i jiné indikace, že se tu jedná o nedopatření, vadné měření. Problém však nastane, pokud takových odlehklých bodů máme v pozorovací sérii více a zejména tehdy, když se tyto odlehklé body začnou mísit s těmi body, co se poslušně řídí zákony normálního rozdělení. Jak potom rozhodnout, které z těch měření, jež se hodně odchyľují od centra je správné a které již nikoli?



Obrázek 4.5: Simulace výsledků 25 měření pro normální rozdělení s centrem v 0 a standardní odchylkou 1. Jednotlivá měření jednotlivých sad jsou znázorněna nad sebou plnými kroučky, průměr s jeho nejistotou je naznačen větším prázdným kroužkem a chybovou úsečkou. Povšimněte si, jak odlišné může být rozložení těchto bodů v jednotlivých sadách, rovněž tak, že body s odchylkou 3σ jsou poměrně běžné – v tomto případě tedy nejde o odlehlé body.

Zastánci tvrdého postupu obvykle nelítostně ořezávají všechna měření odchylovající se o více než 3σ , domnívajíce se, že tímto krokem metodě nejmenších čtverců prospívají. Ale jediné, čeho tak dosáhnou, je to, že zejména odhady nejistot modelových výsledků budou zbytečně podceněny¹⁵. Body odchylovající se o 3σ a více jsou kořením normálního rozdělení a likvidovat by se rozhodně neměly. Jiná věc je, když je pokrm překořeněn a těchto odchýlených bodů je přespříliš.

V zásadě je možné se úplně rozloučit s metodou nejmenších čtverců a začít pracovat například s absolutními hodnotami. Příkladem takového postupu je například následné zjištění středu a míry rozptýlení určitého souboru. Jde o velmi robustní metodu, která na přítomnosti odlehlých bodů závisí jen okrajově. Střední hodnotu lze odhadnout prostřednictvím mediánu funkčních hodnot $\bar{y} \sim \text{median}(y)$ a standardní odchylku σ známou z MNČ lze nahradit její robustní variantou σ_r pomocí *mediánu absolutní odchylky* takto:

$$\sigma_r = 1.482 \text{mad}(\Delta y) = 1.482 \text{median}(|\Delta y - \text{median}(\Delta y)|). \quad (4.77)$$

Nevýhodou zmíněného postupu je menší přesnost určení středu souboru a velikosti rozptylu v případě normálního rozdělení. Vyskytnou-li se ale v souboru nějaké odlehlé body, je výše uvedená metoda mnohem jistější. Mimořádně vhodná je pro zjištění prvního odhadu pro další sofistikovanější metody založené na metodě nejmenších čtverců.

¹⁵Takže ať jsme konkrétní: v případě normálního rozdělení tak přijdeme o cca 0,27% měření a, což je horší, standardní odchylka se nám tak „sníží“ o 1,33%!

4.5.1 Vlastní metoda robustní regrese

Nyní si popíšeme názornou a obecně použitelnou metodu robustní regrese, která vychází z metody nejmenších čtverců. Tato robustní regrese byla již mnohokrát odzkoušena a plně se osvědčila i v případech, kdy odlehlých bodů bylo v souborech 5 a více procent. Zatímco v obecné metodě nejmenších čtverců velikost váhy na velikosti odchylky nezávisí, v této variantě robustní regrese je váha funkcí odchylky. Pro body silně odchýlené od předpověděné hodnoty tato váha klesá až nule, což mírně preferuje body v bližším okolí předpovědi. Je pravda, že zmenšením váhy vzdálenějších bodů mírně poklesne formální přesnost metody, ale to je daň, kterou se hodí zaplatit, pokud se rozdělení odchylek liší od normálního.

Předpokládejme, že nejistoty jednotlivých měření $\{\sigma_i\}$ jsou v mezích možností určeny korektně a lze se na ně spolehnout. To neplatí o odlehlých bodech, které se od proložené funkce vzdalují více, než by bylo zdrávo. Upravíme si proto hodnoty nejistot $\{\sigma_i\}$ tak, že je vynásobíme skalární funkcí $\Psi(\Delta y/\sigma) \geq 1$. S takto upravenými nejistotami σ_{ri} pak pracujeme stejně, jako předtím. Definujme si též robustní sumu $\chi_r^2(\boldsymbol{\beta})$

$$\sigma_{ri} = \sigma_i \Psi\left(\frac{\Delta y_i}{\sigma_i}\right) = \sigma_i \exp\left[\left(\frac{\Delta y_i}{5\sigma_i}\right)^4\right], \quad \chi_r^2(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})}{\sigma_{ri}}\right]^2. \quad (4.78)$$

Nyní pomocí standardní metody nejmenších čtverců minimalizujeme sumu $\chi_r^2(\boldsymbol{\beta})$ a najdeme novou sadu parametrů \mathbf{b} a výpočet opakujeme, dokud se nalezená sada parametrů \mathbf{b} neustálí. Pak je na čase spočítat i další veličiny, jako např. robustní počet měření n_r , váhovanou sumu čtverců odchylek χ_r^2 a pomocnou veličinu $\chi_{r\mu}^2$

$$n_r = n \frac{1,06 \sum \sigma_{ri}^{-2}}{\sum \sigma_i^{-2}}; \quad \chi_r^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{\sigma_{ri}}\right]^2; \quad \chi_{r\mu}^2 = \frac{1,23 \chi_r^2}{n_r - g}. \quad (4.79)$$

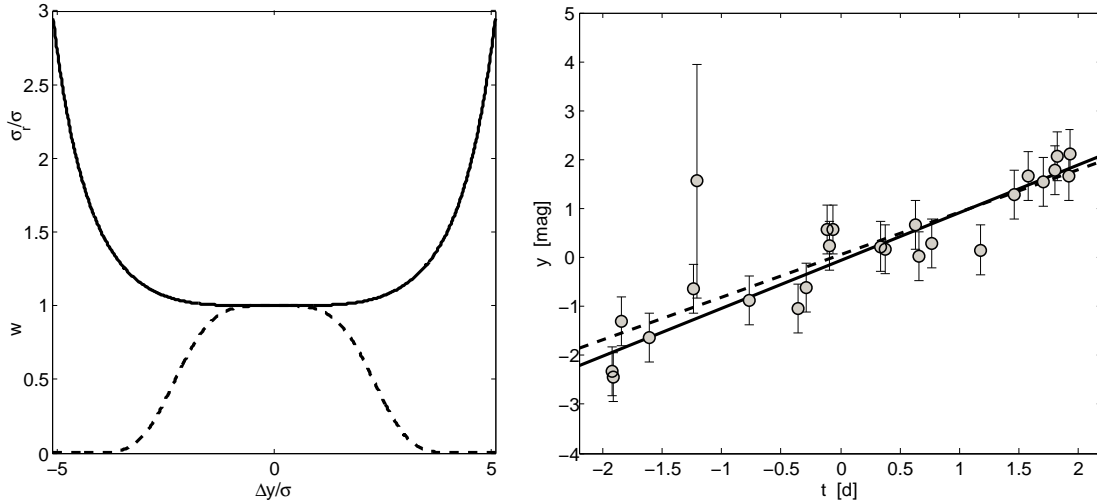
Koeficienty 1,06 a 1,23 vyskytující se ve vztazích (4.79) jsou voleny tak, aby při normálním rozdělení byl robustní počet měření n_r roven počtu měření n , stejně jako $\chi_{r\mu}^2$ je roven veličině χ_μ^2 . Běžně platí, že robustní počet měření n_r není větší než n , prostě proto, že v souboru bývají nějaké odlehlé body. V praxi se ale setkáme s opačnou situací, a to tehdy, když byl soubor již předem „očištěn“ o odlehlé body a přitom byla ořezána i reálná měření. I zde je na místě použít robustní regresi, která tento neoprávněný zásah do značné míry eliminuje.

Střední robustní standardní odchylku s_r , nejistotu předpovědi $\delta \mathbf{y}_p$ a nejistotu sady parametrů vypočteme prostřednictvím následujících vztahů:

$$s_r^2 = \frac{\chi_{r\mu}^2}{\sigma_r^2}; \quad \delta \mathbf{y}_p = \sqrt{\chi_{r\mu}^2 (\mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{X}^T)}; \quad \delta \mathbf{b} = \sqrt{\chi_{r\mu}^2 \text{diag}(\mathbf{H})}. \quad (4.80)$$

Ke konečnému výsledku se ovšem nedostaneme hned, ale postupnými iteracemi. To je přirozené, neboť vlastně upřesňujeme individuální velikosti vah, které mj. závisí i na poměru individuální odchylky e_i a předpokládané nejistoty určení σ_i . K tomu je ovšem nezbytné pro začátek znát alespoň hrubý odhad oné odchylky. Zde rozlišujeme dva případy. V tom prvním, jednodušším, budete znát předem nejistoty jednotlivých měření σ_i a budete jim důvěřovat. Pak v prvním kole můžeme určit hodnotu \mathbf{b}_0 přímo MNČ a

postupovat podle naznačeného schématu a postupně měnit hodnoty \mathbf{b} a individuálních robustních vah. Po třech, čtyřech iteracích dospějeme k víceméně neměnnému odhadu všech veličin, které nás zajímají.



Obrázek 4.6: Na obrázku vlevo je naznačena závislost poměru vah u bodů upravovaných robustní regrese a poměru robustní nejistoty σ_r a nejistoty σ v závislosti na odchylce vyjádřené v jednotkách σ . Na obrázku vpravo je ukázka toho, jak se v průběhu robustní regrese změní nejistota jednotlivých bodů. Patrné je to zejména u odlehlého bodu vlevo. Čárkovaně je naznačen výsledek lineární regrese bez robustní regrese a plnou čarou je vykreslena táž lineární regrese po čtvrté iteraci robustní regrese.

V případě, že nejistoty σ_i pro jednotlivá měření předem neznáme, což je dosti běžné, vypočteme první odhad sady parametrů \mathbf{b}_0 pomocí MNČ, kde váhy všech měření budou stejné, a pro jednotlivé podskupiny měření vypočteme jejich robustní standardní odchylky σ_{rj} podle vztahu (4.77), a všechny individuální nejistoty členů podskupiny s touto robustní standardní odchylkou ztotožníme: $\sigma_{ij} = \sigma_{rj}$. Pak už můžeme postupovat podle výše uvedeného postupu.

5 Analýza časových řad

5.1 Základní pojmy a úvahy

5.1.1 Světelná křivka

Povahu proměnnosti nějakého objektu na hvězdné obloze zpravidla posuzujeme podle vzhledu jeho tzv. *světelné křivky*, což je závislost hvězdné velikosti či jasnosti sledovaného objektu na čase udávaném nejčastěji v juliánských dnech. Hvězdná velikost se udává v magnitudách, někdy též v jejích zlomcích (milimagnitudách – mmag). Hvězdnou velikost proměnné hvězdy určujeme zpravidla relativně pomocí poměru jasnosti zkoumané hvězdy j_v a jasnosti jiné, vhodně zvolené *srovnávací hvězdy* j_c , o níž předpokládáme, že je hvězdou s konstantní jasností. Na vertikální osu pak vynášíme veličinu Δm :

$$\Delta m = -2,5 \log \frac{j_v}{j_c}, \quad (5.1)$$

běžně však v opačném směru tak, aby při vzrůstu jasnosti šla světelná křivka vzhůru. Pokud je známa hvězdná velikost srovnávací hvězdy (tu můžeme určit i fotometrickým měřením vůči tzv. standardním hvězdám se známou hvězdnou velikostí), pak můžeme vynášet přímo hvězdnou velikost proměnné hvězdy v závislosti na čase.

Vždy bychom ale měli také uvádět, v jakém spektrálním oboru jsme jasnosti obou hvězd porovnávali. Měření sice můžeme provádět v instrumentálním fotometrickém systému, kde je spektrální citlivost určena jen vlastnostmi zemské atmosféry, přístroje a detektoru, mnohem lepší je však měření jasnosti vést ve vhodně zvoleném mezinárodním fotometrickém systému (např. *UBV*, *uvby* aj.).

U proměnných hvězd však nemusí být závisle proměnnou veličinou jenom jasnost nebo jasnosti příbuzná veličina, ale i jiná veličina, například radiální rychlost, indukce magnetického pole, intenzita nějaké spektrální čáry nebo výška Balmerova skoku. Postup zpracování takového pozorování bývá velmi často podobný jako zpracování klasické světelné křivky. Hlavním důvodem, proč jsou světelné křivky preferovány před jinými časovými řadami, je skutečnost, že relativní přesnost fotometrických změn vzhledem k jejich amplitudě zpravidla bývá mnohem větší než u jiných typů proměnných veličin (např. radiální rychlosti, intenzity spektrálních čar nebo indukce magnetického pole).

Pomocí vzhledu a amplitudy světelných křivek proměnných hvězd lze určit o jaký typ proměnnosti se u ní jedná, mnohé se dozvíme i o hvězdách samotných. Optimální by jistě bylo, kdybychom měli k dispozici co nejdélší, souvislý úsek světelné křivky, protože pak budeme mít možnost realisticky celou hvězdu zhodnotit a popsat. Tomuto ideálu se ovšem lze přiblížit jen tehdy, budeme-li mít k dispozici taková pozorování vedená z paluby speciálních astronomických družic. I když takových měření v poslední době přibývá, valná většina proměnných hvězd byla, je a bude pozorována z povrchu rotující Země obklopené atmosférou navíc nedokonalými přístroji, vnášejícími do pozorování větší či menší rozptyl. Toto vše limituje povahu pozorování proměnných hvězd, která typicky jsou jen útržkovitá, navíc složená z množství kratičkých úseků, kdy se skutečně příslušné měření provádí. Kompletní světelnou křivku astronomové

sice dokážou vytvořit, ale rozhodně to nebývá jednoduchá úloha s jediným řešením. Základem pro konstrukci světelných křivek jsou tzv. *časové řady* pozorování nějaké vybrané veličiny zkoumaného objektu.

Připomeňme, že za časovou řadu budeme považovat soubor uspořádaných dvojic obsahující okamžik i -tého měření jistého druhu, t_i , a naměřenou veličinu y_i . Velmi žádoucí je doplnit každou z těchto dvojic i odhadem nejistoty příslušného měření σ_i , případně jeho vahou w_i , která se standardně volí tak, aby byla rovna čtverci převrácené hodnoty nejistoty, tedy $w_i = \sigma_i^{-2}$.

5.1.2 Čas pozorování

Většina publikací o pozorování proměnných hvězd se věnuje technikám, jak zvýšit přesnost měření jasnosti či hvězdné velikosti, ale velmi často se zapomíná na druhou veličinu, která přesnost a hodnověrnost měření ovlivňuje zcela zásadním způsobem, a to je čas. Abychom mohli zařadit a popsat v čase nějakou událost, například měření, opatřujeme ji časovou značkou (v angličtině „time stamp“). Ta definuje přesnost s jakou je událost zaznamenána a je určena kombinací tzv. referenčního rámce a časového standardu.

Referenční rámec (v angličtině „reference frame“) se vztahuje ke geometrické poloze události, v našem případě k místu pozorování. Je tedy zřejmé, že různé referenční rámce se liší o dobu, kterou potřebuje světlo na cestu mezi nimi. Časový standard (time standard) se pak vztahuje ke způsobu chodu určitých hodin použitých pro měření času a jejich nulového bodu definovaného mezinárodními standardy.

Mezi nejstarší časové standardy používané v astronomii patří GMT (Greenwich Mean Time), jehož základem byl střední sluneční čas na observatoři v anglické Greenwichi.¹ V roce 1884 byly zavedeny pásmové časy a greenwickský poledník byl ustanoven nultým poledníkem, na němž se měří UT (Universal Time). Termín UT byl ale zaveden až roku 1928 (po změně definice počátku astronomického dne od 1. 1. 1925). Na základě rozhodnutí IAU se tento čas UT od 1. ledna 1956 přejmenoval na UT0 a znamená čas odvozený z rotace Země pro konkrétní místo pozorování, přepočítaný pomocí známé zeměpisné délky na greenwickský poledník. Postupně byly zaváděny různé opravy, například o vliv pohybu pólů na zeměpisnou délku místa pozorování (čas UT1), o krátkodobé odchylky s periodou kratší než 35 dní (UTR1), sezónní změny v rychlosti rotace Země (UT2). Jako základ pro občanské měření času a mezinárodní standard dnes slouží čas UTC (Coordinated Universal Time), který je definován pomocí atomových hodin tak, že se ale nesmí odchýlit od času UT1 o více než 0,9 sekundy. Z toho ovšem vyplývá velmi nepříjemná vlastnost UTC. Tento čas není plynulý! Přibližně každých šest měsíců je korigován zařazením tzv. přestupné sekundy. Od doby, kdy se tento institut začal používat, už doba korekcí činí přibližně půl minuty a takový rozdíl už se projeví v řadě astronomických pozorování. Musíme s ním tedy počítat. Času UTC využívá většina pozorovatelů, kteří časy ve svém počítači, z něhož řídí CCD kameru, synchronizují se standardem pomocí Network Time Protocol (NTP). Časových standardů je celá řada, od standardu atomových hodin TAI (International Atomic Time), přes různé varianty terestrického času TT (Ter-

¹GMT byl roku 1847 přijat na britských ostrovech železniční společností Railway Clearing House jako „železniční čas“ („railway time“). Oficiálním časem pro Velkou Británii se stal v r. 1880.

restrial Time) až po *barycentrický dynamický čas* TDB (Barycentric Dynamical Time), který opravuje TT na barycentrum Sluneční soustavy. V každém případě by pozorovatel měl vždy uvádět jaký časový standard pro svá měření použil. V astronomii se čas zpravidla převádí a publikuje v juliánském datování. Jedná se o volně plynoucí časový údaj odpovídající počtu dnů, které uplynuly od jistého, časově dostatečně vzdáleného počátku. Jeho užití v astronomii navrhnul John Herschel v *Outlines of Astronomy* (1849) a poprvé v praxi použil Pickering (1890). Jenže i tady je třeba si uvědomit, že na juliánské datování přecházíte z určitého časového standardu. Doporučujeme zásadně nepoužívat pásmové časy, letní časy a podobně. Pokud budete vycházet z UTC, vždy je třeba to zaznamenat a uvést při publikaci dat. Ale nezapomínejme na referenční rámec. Udaný čas pozorování vychází z polohy pozorovatele. Pokud bychom chtěli být zcela přesní, měli bychom vyjadřovat časovou značku měření v barycentrickém dynamickém čase a přepočítat jej na aktuální polohu barycentra Sluneční soustavy. Správná časová značka by pak měla obecný tvar

$$BJD_{\text{TDB}} = JD_{\text{UTC}} + \Delta R_{\odot} + \Delta C_{\odot} + \Delta S_{\odot} + \Delta E_{\odot}, \quad (5.2)$$

kde BJD značí *barycentrické juliánské datování*, ΔR_{\odot} Rømerovo zpoždění, ΔC_{\odot} korekci hodin, ΔS_{\odot} Shapirovo zpoždění, ΔE_{\odot} Einsteinovo zpoždění². Pokud nepožadujeme přesnost větší než 1 sekunda, můžeme poslední dvě relativistické korekce zanedbat. Rømerovo zpoždění je dáno konečnou rychlostí světla. Jak Země obíhá kolem Slunce, mění se její vzdálenost od sledovaného objektu a v důsledku toho může dojít ke zpoždění signálu až o 8,3 minuty. Běžně se setkáme s tzv. heliocentrickou korekcí, která řeší Rømerovo zpoždění „posunutím“ Země do středu Slunce. Taková korekce však nestačí pokud požadujeme přesnost lepší než 8 sekund. Pak je třeba provést přepočet na barycentrum Sluneční soustavy³. Navíc si musíme uvědomit, že ke stejnému zpoždění signálu může docházet i v pozorovaném objektu, pokud je jím například vzdálená planetární soustava, vícenásobný hvězdný systém a podobně.

Z praktického hlediska je třeba časovým údajům opravdu věnovat pozornost, kterou si zaslouží. Ať už v budeme v odborné práci uvádět juliánské datování geocentrické JD_{geoc} , heliocentrické JD_{hel} nebo barycentrické JD_{bar} , vždy je třeba uvést také použitý časový standard, nejčastěji UTC a případnou korekci hodin. Pro výpočet barycentrické korekce můžeme například využít kalkulátor na <http://astrutils.astronomy.ohio-state.edu/time/utc2bjd.html>. Ale nesmíme v našich záznamech a výpočtech zapomínat ani na to, že expoziční nebo integrační čas není nulový. Je tedy třeba uvádět, zda časová značka přísluší začátku, středu nebo konci expozice a také délku použité expozice. Například u snímků kamery OMC družice Integral je uváděn čas začátku expozice a přitom každá expozice má obecně různou délku, které se liší v rádech minut. Nepozorný uživatel dat tak může prostým opomenutím silně „zašumět“ jinak velmi kvalitní data.

²Detailní informace lze nalézt v článku Eastman et al. (2010).

³Heliocentrické juliánské datování HJD bylo formálně odmítnuto rezolucí A4 Mezinárodní astronomické unie v roce 1991, která doporučuje nadále používat BJD vztažené k barycentru Sluneční soustavy

5.2 Periodicita proměnnosti

U řady typů proměnných hvězd se pozorované světelné i jiné změny opakují se značnou pravidelností. Proměnnost hvězdy určuje nějaký *periodický děj*, jehož perioda pak odpovídá *periodě světelných změn* příslušné proměnné hvězdy. V některých případech se můžeme setkat i s kombinací několika periodických dějů, případně periodického děje s nějakými aperiodickými změnami či trendy.

V pozorovatelské praxi se lze setkat s rozličnými modifikacemi i stupni periodicity proměnnosti:

- a) ideální proměnnost – světelné křivky získané v různých cyklech jsou v rámci přesnosti měření zcela identické;
- b) sekulární (dlouhodobé) změny – tvar světelné křivky nebo délka periody se dlouhodobě mění;
- c) více period – světelná křivka je výsledkem superpozice několika periodických změn, probíhajících nezávisle a s různými, zpravidla nesoudělnými periodami nebo frekvencemi;
- d) aperiodické (neperiodické) změny, trendy – přes periodické změny se překládají aperiodické změny a trendy, které periodické změny modulují a mění jejich úroveň.

Ukazuje se, že většina proměnných hvězd mění svou jasnost (ale také i radiální rychlost, intenzitu spektrálních čar nebo indukci magnetického pole) více či méně periodicky, s jednou *periodou* P nebo chcete-li *frekvencí* ν ($\nu = 1/P$) nebo *úhlovou rychlostí* ω , $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/P$. Dále platí, že tvar i amplituda světelných křivek většiny proměnných hvězd zůstávají po mnoho cyklů konstantní, zatímco jejich periody $P(t)$ se mohou z řady příčin pozvolna měnit.

Studiem těchto změn se zabývá tzv. *periodová analýza*, která změny periody zkoumá prostřednictvím více či méně složitých a sofistikovaných modelů. Vysledování periodicity proměnné hvězdy a nalezení délky periody⁴ hodně vypovídá o fyzikální podstatě pozorovaných změn i o proměnné hvězdě samotné. Navíc umožňuje stanovit předpověď chování hvězdy směrem do budoucnosti i do minulosti.

5.2.1 Příčiny změn periody periodicky proměnných hvězd

5.2.1.1 Pulzující hvězdy

Periodicky proměnné hvězdy se podle mechanismu jejich základní proměnnosti dělí do tří hlavních skupin. Především jsou to fyzicky proměnné pulzující hvězdy, kde příčinou proměnnosti jsou kmity vnějších a podpovrchových částí hvězdy. Perioda proměnnosti je dána okamžitým stavem těchto vrstev, jejich rozměrem, hustotou a teplotou, způsobem buzení a tlumení pulzací a jejich celkovou amplitudou. Pulzace mohou současně probíhat i v několika módech, jejichž perioda je obecně různá. V souvislosti s postupnou přestavbou vnějšku hvězdy danou vnitřním (nukleárním) vývojem pulzující hvězdy se mění například její rozměr, což se pak odrazí v postupné změně periody. V průběhu změn může též dojít k poměrně náhlým událostem, jako je třeba podstatné utlumení pulzací či nasazení nových pulzačních módů.

⁴Jeví-li hvězda periodické změny s periodou P , pak jsou tyto změny periodické i v celistvých násobcích této periody ($2P$, $3P$, $-P$, ...). Periodou změn proměnné hvězdy budeme myslet tu nejmenší kladnou z množiny takových period.

Nicméně lze očekávat, že zmíněné změny periodicity pulzujících proměnných budou probíhat v tzv. nukleární časové škále, kterou lze podle typu hvězdy odhadnout na milióny let. Jsou ovšem etapy vývoje hvězdy, kdy se i změny periody pulzací značně urychlí. Například u cefeid je to tehdy, když právě procházejí hranicemi pásu nestability. Tak třeba Berdnikov & Turner (2010) zjistili rozbořem pozorování klasické cefeidy II Car ($P = 64,4$ d), že se její perioda soustavně prodlužuje tempem $dP/dt = 719(15)$ s/rok.⁵

5.2.1.2 Rotující hvězdy

Další skupinou jsou rotující hvězdy s neizotropním vyzařováním do prostoru. To bývá standardně způsobeno buď výskytem fotometrických skvrn ve fotosféře nebo způsobem generace elektromagnetického záření, jak je tomu v případě magnetosfér pulsarů. Pakliže hvězda rotuje jako tuhé těleso, pak její úhlová rychlost ω souvisí s celkovým momentem hybnosti L a momentem setrvačnosti J vztahem $L = J\omega$. Ke změnám úhlové rychlosti rotujícího tuhého tělesa může dojít ze dvou důvodů – může se měnit moment hybnosti L nebo moment setrvačnosti J , který je dán rozložením hmoty v těle hvězdy.

Jako příklad rotující proměnné hvězdy si vezměme třeba chemicky pekulární hvězdu hlavní posloupnosti s fotometrickými skvrnami na povrchu. Předpokládejme, že zvolená hvězda o hmotnosti M a poloměru R jeví sférickou symetrii, takže hustota $\rho(r)$ v ní je funkcí je vzdálenosti r od centra hvězdy. Užitečné je ještě zavést bezrozměrnou veličinu $u = r/R$, kde R je poloměr hvězdy. Závislost hustoty látky $\rho(u)$ na u nám udává jiná bezrozměrná funkce $\Omega(u) = \rho(u)/\bar{\rho}$, kde střední hustota $\bar{\rho} = M/\frac{4}{3}\pi R^3$ a M je celková hmotnost hvězdy. Pro moment setrvačnosti sféricky symetrické hvězdy pak obdržíme vztah

$$J = \int_M h^2 dM = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 4\pi \rho(r) r^2 dr = \left[2 \int_0^1 \Omega(u) u^4 du \right] MR^2 = \alpha MR^2, \quad (5.3)$$

kde h je vzdálenost vybraného elementu o hmotnosti dM od osy rotace hvězdy. Omezíme-li se nyní jen na hvězdy hlavní posloupnosti, pak vychází, že bezrozměrná konstanta α související s rozložením uvnitř hvězdy je zhruba $\alpha \approx 0,05$. Během vývoje hvězdy hlavní posloupnosti dochází ke dvěma protichůdným procesům – předně se neustále zahušťuje centrální jádro obsahující stále větší podíl hélia, čímž klesá „konstanta“ α , ale současně roste poloměr hvězdy R .

Z modelů odborníků na hvězdný vývoj Meyneta a Maedera plyne přibližný vztah $\alpha(t) \sim R(t)^{-1}$, takže moment setrvačnosti bude s časem růst úměrně poloměru, $J(t) \sim R(t)$. Budeme-li předpokládat, že moment hybnosti hvězdy se během vývoje na hlavní posloupnosti zachovává, pak bude úhlová rychlost hvězdy $\omega(t)$ nepřímo úměrná poloměru $R(t)$, $\omega(t) \sim R^{-1}$. Rotační perioda hvězdy P bude úměrná poloměru $P \sim R$, takže by měla s časem růst, naproti tomu rovníková rychlost hvězdy by měla během celého vývoje hvězdy na hlavní posloupnosti zůstat konstantní: $V_{\text{eq}} = \omega R = \text{konst.}$

Předpokládejme nyní, že poloměr hvězdy během fáze na hlavní posloupnosti roste, a to tak, že platí $\dot{R}/R(t) = \gamma$, kde γ je kladná konstanta. Vyřešením této diferenciální rovnice obdržíme $R(t) = R_0 \exp(\gamma t)$, kde R_0 je poloměr hvězdy na počátku jejího vývoje na hlavní posloupnosti, tedy v čase $t = 0$. Vidíme tedy, že poloměr hvězdy exponenciálně roste, což odpovídá

⁵U tohoto zjištění je však žádoucí se trochu pozastavit. Časová škála tohoto zpomalování τ , jež je dána poměrem $\tau = P/\dot{P} = 7700$ let, je o mnoho řádů kratší, než by odpovídalo očekávání vyplývající z tempa vývoje hvězdy. Vysvětlení se nabízejí hned dvě – zjištěné zpomalování pulzace není důsledkem nukleárního vývoje v centru hvězdy, ale má možná prozaičtější vysvětlení - cefeida třeba může být složkou dvojhvězdy, nebo, což je ještě pravděpodobnější, při zpracování se zanedbal nějaký efekt, třeba sekulární změna světelné křivky...

i výsledkům modelování hvězdného vývoje. Z modelů pak vyplývá, že hvězda se během fáze hvězdy hlavní posloupnosti, která trvá τ_{HP} , zvětší zhruba e -krát. Takto pak dostaneme:

$$R(t) = R_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_{\text{HP}}}\right) \Rightarrow \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{\tau_{\text{HP}}} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \frac{\dot{P}}{P}, \quad \dot{\nu} = -\frac{\nu}{\tau_{\text{HP}}}. \quad (5.4)$$

Dosazením konkrétních hodnot pro nejhmotnější CP hvězdy: $\tau_{\text{HP}} = 10^7$ let by se dalo očekávat, že relativní změna periody v důsledku vývoje by mohla činit nejvýše $\dot{P}/P \sim 10^{-7} \text{ rok}^{-1}$, což je těsně na hranici detektovatelnosti.

U horkých hvězd je produkce hvězdného větru přímo úměrná zářivému výkonu hvězdy, maximálně dosahuje až $10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$, u CP hvězd však nikdy tak silný vítr nepozorujeme. Hvězdný vítr vanoucí z povrchu hvězdy je schopen velmi účinně odnášet ze hvězdy moment hybnosti a tím i brzdít rotaci hvězdy. Můžeme si vyjádřit časovou změnu celkového momentu hybnosti \dot{L} . Je-li $\Gamma R^2 \omega$ specifický moment hybnosti připadající na jednotku hmoty odcházející do prostoru, \dot{M} změna hmotnosti hvězdy v důsledku hvězdného větru a platí, že $\dot{M} < 0$ a tedy $\dot{L} < 0$, pak

$$\dot{L} = \Gamma \dot{M} R^2 \omega = \frac{\Gamma}{\alpha} \dot{J} \omega, \quad \dot{L} = \frac{d(J\omega)}{dt} = \dot{J} \omega + J \dot{\omega} \Rightarrow \frac{\dot{P}}{P} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha}\right) \frac{\dot{M}}{M} \quad (5.5)$$

Pokud vystupuje hvězdný vítr rovnoměrně z povrchu, pak je $\Gamma = \frac{2}{3}$, pochází-li však z rozsáhlé magnetosféry, může být ještě mnohonásobně vyšší.

Magnetosféra hvězdy udržuje hvězdný vítr v korotaci⁶ s hvězdným povrchem, a to až do vzdálenosti r_c . Protože poloměr korotace je větší než poloměr hvězdy $r_c > R$, dochází k přenosu momentu hybnosti z hvězdy na hvězdný vítr prostřednictvím magnetického pole pevně spojeného s hvězdou. Tím pak by mělo docházet k brzdění celé hvězdy nebo alespoň jejích svrchní vrstev, do nichž je magnetické pole zamrzlé. Poloměr korotace je omezen u obyčejných hvězd indukcí magnetického pole, u pulsarů pak podmínkou $\omega r_c \leq c$.

Závěrem je tedy možné říci, že únik látky z hvězdy ve formě hvězdného větru je docela účinný prostředek k brzdění zejména těch hvězd s rozsáhlou magnetosférou jako jsou magnetické chemicky pekuliární hvězdy a neutronové hvězdy.

5.2.1.3 Interagující dvojhvězdy

Dalším typem často studovaných periodicky proměnných hvězd jsou zákrytové dvojhvězdy, kde periodou proměnnosti je perioda oběhu složek dvojhvězdy kolem společného těžiště. Pozorování okamžiků minim jasnosti při vzájemných zákrytech složek umožňují s mimořádnou přesností testovat případné změny orbitální periody v průběhu mnoha desetiletí. Ukazuje se, že orbitální perioda řady z těchto zákrytových dvojhvězd se systematicky prodlužuje nebo naopak zkracuje. Zpravidla se to týká tzv. těsných nebo také interagujících párů, mezi nimiž dochází k přenosu látky a momentu hybnosti. Pokud se žádná látka nedostane ven ze soustavy tvořené dvěma hvězdami o hmotnostech M_1 a M_2 , pak se jedná o tzv. *konzervativní přenos hmoty*.

Při konzervativním přenosu zůstává konstantní celkový orbitální moment hybnosti soustavy $L = L_1 + L_2$ a součet hmotností obou složek $M = M_1 + M_2$, takže $\dot{M} = \dot{L} = 0$. Budeme přitom předpokládat, že veškerá hmotnost i veškerý moment hybnosti je uložen v dvojici hvězd, mezi nimiž přenos hmoty probíhá. Dále budeme mít za to, že složky

⁶Úhlová rychlost tu nezávisí na vzdálenosti od centra, tedy $\omega(r) = \text{konst.}$

dvojhvězdy obíhají kolem společného těžiště po kruhových drahách o poloměrech a_1 , a_2 , $a = a_1 + a_2$. Ze vztahu pro polohu těžiště dvou hvězd, reprezentovaných zde dvojicí hmotných bodů plyne $a_1/a_2 = M_2/M_1$ a tedy $a_1 = a M_2/M$, $a_2 = a M_1/M$. Pro moment hybnosti L lze pak psát

$$L = L_1 + L_2 = \omega(M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) = \omega a^2 \frac{M_1 M_2}{M} = \frac{2\pi}{P} a^2 \frac{M_1 M_2}{M}. \quad (5.6)$$

Vztah pro moment hybnosti nyní zlogaritmujeme a poté zderivujeme podle času (tomuto postupu se říká „logaritmická derivace“)

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln(2\pi) - \ln(P) + 2 \ln(a) + \ln(M_1) + \ln(M_2) - \ln(M), \quad \Rightarrow \\ \frac{\dot{L}}{L} &= -\frac{\dot{P}}{P} + 2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\dot{M}_2}{M_2} - \frac{\dot{M}}{M} = -\frac{\dot{P}}{P} + 2 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{M}_1 \frac{M_2 - M_1}{M_1 M_2} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Obdobně lze naložit s 3. Keplerovým zákonem, který spolu váže hmotnost soustavy M , vzdálenost složek a a oběžnou periodu P , a sloučit jej s rovnicí (5.7) do tvaru

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} P^2, \quad 3 \ln(a) = \ln\left(\frac{G}{4\pi^2}\right) + \ln(M) + 2 \ln(P), \quad (5.8)$$

$$3 \frac{\dot{a}}{a} = 2 \frac{\dot{P}}{P}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{P}}{P} = -\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \dot{M}_1. \quad (5.9)$$

Budeme-li předpokládat, že M_1 je hmotnost primární, v tomto případě hmotnější složky⁷, pak pozorované prodloužování periody ($\dot{P} > 0$) znamená, že ($\dot{M}_1 > 0$) tedy, že hmotnost primární složky ještě roste a vzdálenosti složek se s časem zvětšují, takže se látka sekundární složky přenáší na složku primární. V případě, že by se perioda naopak zkracovala ($\dot{P} < 0$), musela by látka téct z primární složky na složku sekundární ($\dot{M}_1 < 0$). Složky dvojhvězdy by se k sobě přibližovaly ($\dot{a} < 0$), což by pokračovalo až do okamžiku, kdy by se hmotnosti složek vyrovnaly, a složky si vyměnily role. V tom okamžiku by dvojhvězda měla nejkratší periodu a složky by k sobě měly absolutně nejbliž. Pak by přenos látky pokračoval, látka by z nyní již sekundární složky tekla směrem k složce primární a perioda dvojhvězdy by rostla ($\dot{P} > 0$), vzdálenosti mezi složkami by rostly taktéž ($\dot{a} > 0$).

Tempo změny periody \dot{P}/P tak přímo ukazuje na velikost toku hmoty mezi komponentami $\dot{M}_1 = -\dot{M}_2$.

5.2.1.4 LiTE a apsidální pohyb

Kromě výše zmíněných mechanismů, které mění periodu víceméně monotónně, známe i mechanismy změny pozorované periody, které mění periodu periodicky. Jedná se jak o tzv. light-time efect (LiTE), jež je důsledkem přítomnosti dalšího tělesa (těles) v soustavě, tak i apsidální pohyb, při němž se cyklicky mění perioda zákrytové dvojhvězdy, která je odrazem rovnoměrného posouvání přímky apsid (spojnice mezi periastrum a

⁷Taková volba neplatí vždy. Někdy je jako primární složka označována větší (rozměrnější) hvězda, někdy ta, která je v primárním minimu zakrývána. Označení primární složka tedy rozhodně není jednoznačné.

apoastrem). Tento pohyb způsobuje jak změnu periody, tak i změnu vzhledu světelné křivky. Nejviditelnějším efektem je vzájemný pohyb primárních a sekundárních minim. Při LiTE zůstává světelná křivka neproměnná.

Cílem následujících kapitol bude sestavit modely periody a ukázat, jak souvisejí s pozorováním. K tomu je však nezbytné zavést a definovat několik důležitých pojmů.

5.2.2 Epocha, fáze, fázová funkce a okamžitá perioda

Stav periodicky se měnící proměnné hvězdy se zpravidla popisuje dvěma funkcemi času t : neklesající schodovitou funkcí, zvanou *epocha* $E(t)$, jež vyjadřuje počet cyklů, které uplynuly od okamžiku začátku počítání epochy $t = M_0$, a pilovitou funkcí $\varphi(t)$, zvanou *fáze*, jež nabývá svého minima ($\varphi(t) = 0$) v okamžiku začátku nového cyklu, pak monotónně roste aby nabyla svého maxima v okamžiku konce příslušného cyklu ($\varphi(t) = 1$). Fáze se užívá pro sestrojení tzv. *fázové křivky* nejrůznějších veličin charakterizujících okamžitý stav proměnného objektu. Časový interval mezi po sobě následujícími okamžiky nulové fáze pro vybranou epochu E nebo jinak řečeno délka trvání této vybrané epochy je pak tzv. *okamžitá perioda* $P(E)$.

Místo těchto dvou, „matematicky nepěkných“ funkcí, je lepší pracovat s tzv. *fázovou funkcí* - $\vartheta(t)$ definovanou následujícím způsobem

$$\vartheta(t) = E(t) + \varphi(t); \quad \varphi(t) = \text{frac}[\vartheta(t)]; \quad E(t) = \text{floor}[\vartheta(t)]. \quad (5.10)$$

Operator ‘frac’ odstraňuje z reálného čísla jeho celou část, zatímco ‘floor’ zaokrouhluje toto číslo směrem k nejbližšímu nižšímu celému číslu.

Fázová funkce proměnné hvězdy $\vartheta(t)$ je monotónně rostoucí hladká funkce času procházející počátkem v okamžiku $t = M_0$; $\vartheta(M_0) = 0$. Užitím rovnic (5.10) lze z fázové funkce $\vartheta(t)$ vypočítat jak epochu, tak fázi v libovolný okamžik. Derivace fázové funkce podle času $\vartheta(t)$ je pak rovna okamžité frekvenci $\nu(t)$, která je rovna převrácené hodnotě okamžité periody $P(t)$, takže platí $\dot{\vartheta}(t) = \nu(t) = 2\pi\omega(t) = P(t)^{-1}$, kde $\omega(t)$ je úhlová rychlost v čase t .

Fázová funkce $\vartheta(t)$ a okamžitá perioda jsou pak svázány následující diferenciální rovnicí (detaily poprvé zavedeny v Mikulášek et al., 2008) a počáteční podmínkou, takže platí

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \nu(t) = \frac{1}{P(t)}; \quad \vartheta(t = M_0) = 0; \quad \Rightarrow \quad \vartheta(t) = \int_{M_0}^t \nu(\tau) d\tau = \int_{M_0}^t \frac{d\tau}{P(\tau)}. \quad (5.11)$$

Je užitečné si zavést mimo fázovou funkci $\vartheta(t)$ i její inverzní funkci $T(\vartheta)$, kterou můžeme použít např. k výpočtu okamžiků nulové fáze⁸ $\Theta(E) = T(E)$. Funkci $T(\vartheta)$ vypočteme buď tak, že najdeme inverzní funkci k $\vartheta(t)$, nebo ji můžeme odvodit ze vztahu

$$\begin{aligned} \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} &= P(\vartheta) = \frac{1}{\nu(\vartheta)}; \quad T(0) = M_0; \quad \Rightarrow \\ T(\vartheta) &= M_0 + \int_0^\vartheta P(\zeta) d\zeta = M_0 + \int_0^\vartheta \frac{d\zeta}{\nu(\zeta)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

⁸Obvykle jde o okamžiky minima či maxima jasnosti.

5.2.3 Základní dvouparametrický model – lineární efemerida

Nejjednodušší myslitelný model periody, který budeme používat jako první aproximaci, předpokládá, že perioda změn je konstantní: $P(t) = P_0$. Pak užitím rovnic (5.11) a (5.12) obdržíme pro fázovou funkci $\vartheta_1(t)$, její inverzi $T_1(\vartheta)$ a předpověď okamžiků nulové fáze $\Theta_1(E)$

$$\vartheta_1(t) = \frac{t - M_0}{P_0}; \quad T_1(\vartheta_1) = M_0 + P_0 \vartheta_1; \quad \Theta_1(E) = M_0 + P_0 E. \quad (5.13)$$

Fázová funkce $\vartheta_1(t)$ i její inverze pro případ konstantní periody jsou přímky se směrnice-mi $1/P_0 = \nu_0$ a $P_0 = 1/\nu_0$ a k jejich úplnému popisu stačí dva základní parametry tzv. *lineární efemeridy* – základní okamžik nulové fáze M_0 a perioda P_0 , respektive frekvence ν_0 . Tyto parametry lze určit například z grafu závislosti okamžiků nulové fáze (zpravidla maxima nebo minima jasnosti) na epoše.

Lineární dvouparametrický model, nazývaný též lineární efemerida, má v praxi každého, kdo se zabývá více výzkumem jakýchkoli více či méně pravidelně se měnících objektů, zcela základní význam. Nalezení periody změn a základního okamžiku, od něhož se počítají fáze, nově objevených objektů či následné zpřesňování nebo úprava těchto elementů bývá nejčastější úloha, jíž se proměňáři zabývají. K složitějším analýzám případných změn periody je možné sáhnout zpravidla až poté, kdy je příslušný objekt řadu let monitorován.

Fázová funkce $\vartheta_1(t)$ narůstá rovnoměrně s časem, takže ji lze s výhodou použít místo času samotného. Vztahy (5.11) a (5.12) s $\vartheta_1(t)$ nabudou symetričtějšího vzhledu.

$$\frac{d\vartheta(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} = \frac{\nu(\vartheta_1)}{\nu_0} = \frac{P_0}{P(\vartheta_1)}; \quad \vartheta(0) = 0; \quad \vartheta(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} \frac{\nu(\tau)}{\nu_0} d\tau = \int_0^{\vartheta_1} \frac{P_0}{P(\tau)} d\tau. \quad (5.14)$$

$$\frac{d\vartheta_1(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{P(\vartheta)}{P_0} = \frac{\nu_0}{\nu(\vartheta)}; \quad \vartheta_1(0) = 0; \quad \vartheta_1(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{P(\zeta)}{P_0} d\zeta = \int_0^{\vartheta} \frac{\nu_0}{\nu(\zeta)} d\zeta. \quad (5.15)$$

5.2.4 Modely s pozvolnými změnami periody proměnnosti

Stěžejním cílem analýzy časových změn periody proměnnosti vybraných objektů je nalezení mechanismu těchto změn a jeho parametrů, které pak zpětně mohou prozradit mnohé o fyzikální podstatě samotného objektu. Těch základních mechanismů je několik, přičemž zvláštní skupinu mezi nimi tvoří ty, u nichž dochází k pozvolné monotónní změně frekvence proměnnosti ν podle *mocninného zákona* v závislosti na okamžité hodnotě periody P , kde lze psát

$$\dot{\nu}(t) = -K \nu^q \quad \Rightarrow \quad \dot{P}(t) = K P^{2-q}, \quad (5.16)$$

kde q je tzv. *decelerační parametr*, charakteristický pro dominující mechanismus změny periody a K je konstanta úměrnosti vlastní danému objektu. Je-li $K > 0$, jde o pokles frekvence a prodlužování periody.

$$K = -\frac{\dot{\nu}}{\nu^q} = -\frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0^q} = \frac{\dot{P}}{P^{2-q}} = \frac{\dot{P}_0}{P_0^{2-q}} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \dot{\nu}_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^q, & \frac{d\nu}{d\vartheta_1} &= \frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^q, & \ddot{\nu} &= q \left(\frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0^q}\right)^2 \nu^{2q-1}, & \Rightarrow & \frac{\nu \ddot{\nu}}{\dot{\nu}^2} = q, \\ \dot{P} &= \dot{P}_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{2-q}, & \frac{dP}{d\vartheta_1} &= \dot{P}_0 P_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{2-q}, & & & & (5.18) \\ \ddot{P} &= (2-q) \left(\frac{\dot{P}_0}{P_0^{2-q}}\right)^2 P^{3-2q}, & \frac{P \ddot{P}}{\dot{P}^2} &= 2-q. \end{aligned}$$

Pomineme-li základní, tedy dvouparametrický model popsáný dvěma veličinami (viz rovnice 5.13), zpravidla základním okamžikem nulové fáze M_0 a konstantní periodou P_0 , přecházíme teď ke složitějším modelům, kde se perioda, případně frekvence mění podle zákona (5.16). Probereme si postupně případy, kdy parametr q bude nabývat celočíselné hodnoty od 0 do 3.

5.2.4.1 Příklady

$q = 0$

Použitím vztahů uvedených v rovnicích (5.17) lze pro případ $q = 0$ psát

$$\dot{\nu} = \dot{\nu}_0, \quad \frac{d\nu}{d\vartheta_1} = \frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0}, \quad \Rightarrow \quad \nu(\vartheta_1) = \frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0} \vartheta_1 + \nu_0, \quad \frac{\dot{P}}{P^2} = \frac{\dot{P}_0}{P_0^2}, \quad \frac{dP}{d\vartheta_1} = \frac{\dot{P}_0 P^2}{P_0}, \quad P = \frac{P_0}{1 - \dot{P}_0 \vartheta_1}. \quad (5.19)$$

Zde tedy je časová změna frekvence konstantní, perioda se mění komplikovaněji. Naším cílem je vypočítat fázovou funkci $\vartheta(\vartheta_1)$ a její inverzi.

$$\vartheta(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} \frac{\nu(\tau)}{\nu_0} d\tau = \vartheta_1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0^2} \vartheta_1^2 = \int_0^{\vartheta_1} \frac{P_0}{P(\tau)} d\tau = \vartheta_1 - \frac{1}{2} \dot{P}_0 \vartheta_1^2, \quad (5.20)$$

$$\vartheta_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2 \dot{P}_0 \vartheta}}{\dot{P}_0} \doteq \vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2 + \frac{1}{2} \dot{P}_0^2 \vartheta^3 \dots, \quad (5.21)$$

$$\Theta(E) \doteq M_0 + P_0 E + P_0 \dot{P}_0 \frac{E^2}{2} + P_0 \dot{P}_0^2 \frac{E^3}{2} \dots \quad (5.22)$$

Zde jsou též zapotřebí tři parametry modelu proměnnosti M_0 , P_0 , $\frac{\dot{P}_0}{P_0^2}$ nebo M_0 , ν_0 , $\dot{\nu}_0$.

$q = 1$

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = \frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0} = -\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{\dot{P}_0}{P_0}, \quad \frac{d\nu}{d\vartheta_1} = \frac{\dot{\nu}_0 \nu}{\nu_0^2}, \quad \nu = \nu_0 \exp\left(\frac{\dot{\nu}_0 \vartheta_1}{\nu_0^2}\right), \quad (5.23)$$

$$\frac{dP}{d\vartheta_1} = \dot{P}_0 P, \quad P = P_0 \exp(\dot{P}_0 \vartheta_1), \quad (5.24)$$

$$\vartheta = \int_0^{\vartheta_1} e^{-\dot{P}_0 \tau} d\tau = \frac{1}{\dot{P}_0} \left(1 - e^{-\dot{P}_0 \vartheta_1}\right); \quad \vartheta_1 = \frac{1}{\dot{P}_0} \ln \left(\frac{1}{1 - \dot{P}_0 \vartheta} \right); \quad (5.25)$$

$$\vartheta \doteq \vartheta_1 - \frac{1}{2} \dot{P}_0 \vartheta_1^2 + \frac{1}{6} \dot{P}_0^2 \vartheta_1^3; \quad \vartheta_1(\vartheta) \doteq \vartheta + \frac{1}{2} \dot{P}_0 \vartheta^2 + \frac{1}{3} \dot{P}_0^2 \vartheta^3 \quad (5.26)$$

$$\Theta(E) \doteq M_0 + P_0 E + P_0 \dot{P}_0 \frac{E^2}{2} + P_0 \dot{P}_0^2 \frac{E^3}{3}. \quad (5.27)$$

Zde jsou též zapotřebí tři parametry modelu proměnnosti M_0 , P_0 , \dot{P}_0/P_0 .

$q = 2$

V tomto případě je perioda lineární funkcí času, takže platí

$$\dot{P} = \dot{P}_0 = -\frac{\dot{\nu}}{\nu^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\nu} \right) = -\frac{\dot{\nu}_0}{\nu_0^2}. \quad (5.28)$$

Nejdříve si pomocí rovnic (5.11) celý problém vyřešíme exaktně.

$$P(t) = P_0 + \dot{P}_0 (t - M_0) = P_0(1 + \dot{P}_0 \vartheta_1), \quad (5.29)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dT} = \frac{dP}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dT} = \frac{dP}{d\vartheta} \frac{1}{P} = \dot{P}_0; \quad P(\vartheta) = P_0 e^{\dot{P}_0 \vartheta}; \quad (5.30)$$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\dot{P}_0} \ln(1 + \dot{P}_0 \vartheta_1); \quad T(\vartheta) = M_0 + \frac{P_0}{\dot{P}_0} \left(e^{\dot{P}_0 \vartheta} - 1 \right). \quad (5.31)$$

Protože časová změna periody \dot{P} bývá zpravidla pomalá, můžeme nahradit skutečnou fázovou funkcí $\vartheta(t)$ a její inverzní funkci jejich Maclaurinovým rozvojem

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\dot{P}_0} \ln(1 + \dot{P}_0 \vartheta_1) \doteq \vartheta_1 - \dot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2} + \dot{P}_0^2 \frac{\vartheta_1^3}{3} - \dots; \quad (5.32)$$

$$T(\vartheta) = M_0 + \frac{P_0}{\dot{P}_0} \left(e^{\dot{P}_0 \vartheta} - 1 \right) \doteq M_0 + P_0 \left(\vartheta + \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!} + \dot{P}_0^2 \frac{\vartheta^3}{3!} \dots \right), \quad (5.33)$$

$$\vartheta_1 = \frac{T(\vartheta) - M_0}{P_0} = \frac{1}{\dot{P}_0} \left(e^{\dot{P}_0 \vartheta} - 1 \right) \doteq \vartheta + \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!} + \dot{P}_0^2 \frac{\vartheta^3}{3!} \dots, \quad (5.34)$$

$$\Theta(E) = M_0 + \frac{P_0}{\dot{P}_0} \left(e^{\dot{P}_0 E} - 1 \right) \doteq M_0 + P_0 E + P_0 \dot{P}_0 \frac{E^2}{2!} + P_0 \dot{P}_0^2 \frac{E^3}{3!} \dots \quad (5.35)$$

K popisu fázové funkce, respektive její inverze, potřebujeme celkem tři parametry: M_0 , P_0 , \dot{P}_0 .

$q = 3$

Je-li součin $\dot{P}P$ konstantní, dostaneme jiné řešení:

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu_0} = \frac{\nu^3}{\nu_0^3}, \quad \frac{d\nu}{d\vartheta_1} = \frac{\dot{\nu}_0 \nu^3}{\nu_0 \nu_0^3}, \quad \frac{\dot{P}}{\dot{P}_0} = \frac{P_0}{P}, \quad \frac{dP}{d\vartheta} = \text{konst.}; \quad (5.36)$$

$$\frac{dP}{d\vartheta} = \text{konst.}; \quad P = P_0 (1 + \dot{P}_0 \vartheta) = P_0 \sqrt{1 + 2 \dot{P}_0 \vartheta_1}; \quad (5.37)$$

$$\vartheta(\vartheta_1) = \frac{1}{\dot{P}_0} \left(\sqrt{1 + 2 \dot{P}_0 \vartheta_1} - 1 \right) \doteq \vartheta_1 - \frac{\dot{P}_0}{2} \vartheta_1^2 + \frac{\dot{P}_0^2}{2} \vartheta_1^3 - \dots; \quad (5.38)$$

$$\vartheta_1(\vartheta) = \int_0^\vartheta (1 + \dot{P}_0 \tau) d\tau = \vartheta + \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \Theta(E) = M_0 + P_0 E + P_0 \dot{P}_0 \frac{E^2}{2}. \quad (5.39)$$

Zde jsou zapotřebí tři parametry modelu proměnnosti: M_0 , P_0 , $\dot{P}_0 P_0$.

5.2.4.2 Diskuse. Prostý tříparametrický model periody

Porovnejme nyní výsledky všech těchto, jinak odlišných modelů předpokládajících, že změnu periody lze popsat jedním parametrem. Předně jsme diskutovali vývoj period/frekvencí třídy modelů, u nichž platí, buď $\dot{\nu} \nu^{-q} = \text{konst.}$ nebo $\dot{P} P^{q-2} = \text{konst.}$, kde q je bezrozměrný decelerační parametr popisující daný mechanismus změny periody/frekvence. Pokud se omezíme ve vztazích pro fázovou funkci $\vartheta(\vartheta_1)$, respektive na předpověď okamžiků nulové fáze $\Theta(E)$ jen na prvních několik členů Maclaurinova rozvoje, včetně kubického členu, lze psát obecně pro libovolné q

$$\vartheta(\vartheta_1) \doteq \vartheta_1 - \frac{\dot{P}_0}{2} \vartheta_1^2 + \frac{q \dot{P}_0^2}{6} \vartheta_1^3, \quad \Theta(E) = M_0 + P_0 E + \frac{P_0 \dot{P}_0}{2} E^2 + \frac{(3-q) P_0 \dot{P}_0^2}{6} E^3. \quad (5.40)$$

Všimněte si prosím, že na deceleračním parametru q závisí pouze poslední, kubické členy Maclaurinova rozvoje. Odhadněme jak velké, a tudíž důležité tyto členy jsou.

Vezměme si jako příklad extrémní případ krátkoperiodické dvojhvězdy BS Vulpeculae s výměnou hmoty mezi složkami (Zhu et al., 2012) působící změnu periody $\dot{P} = 6.7 \times 10^{-11}$ při periodě $P_0 = 0.476 \text{ d}^9$. Za 100 let od počátku měření zde kubický člen $P_0 \dot{P}_0^2 E^3$ naroste na několik setin sekundy! Je tedy neměřitelný a lze jej zanedbat. Hvězda V 901 Ori má mezi chemicky peculiárními hvězdami největší hodnotu brzdění rotace $\dot{P} = 1.0 \times 10^{-8}$. Při periodě $P_0 = 1.538 \text{ d}$ naroste za 100 let kubický člen na necelou minutu. Přesnost určování okamžiku maxima u CP hvězd u jedné série měření ale dosud nepřesáhla 10 minut. Vzhledem k tomu, že pro naprostou většinu hvězd s proměnnou periodou platí, že $\dot{P} \Delta t \ll P$, kde Δt celková doba sledování hvězdy, mohou být všechny členy rozvoje obsahující \dot{P}_0^2 a vyšší mocniny zanedbány.

To je možná dobrá zpráva pro výpočty, horší zpráva je to pro ty, kteří by z rozboru plynule se měnící hodnoty (O-C) veličiny chtěli usuzovat na mechanismus změny periody – ti se musí smířit s tím, že k tomu, aby se jemné nuance související s různým q projevily, museli bychom proměnnou hvězdu sledovat několik století a ještě navíc trnout, zda je onen mechanismus dostatečně čistý.

Na většinu případů objektů s proměnnou periodou tak lze aplikovat následující prostý tříparametrický model periody:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &\doteq \frac{t - M_0}{P_0} - \frac{\dot{P}_0}{2} \left(\frac{t - M_0}{P_0} \right)^2; & T(\vartheta) &\doteq M_0 + P_0 \vartheta + P_0 \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!}; \\ P(t) &= P_0 + \dot{P}_0 (t - M_0); & P(\vartheta) &= P_0 \left(1 + \dot{P}_0 \vartheta \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\vartheta(\vartheta_1) = \vartheta_1 - \dot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2}; \quad \vartheta_1(\vartheta) = \vartheta + \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \Theta(E) = M_0 + P_0 E + P_0 \dot{P}_0 \frac{E^2}{2}. \quad (5.42)$$

Je třeba se smířit s tím, že pozvolné monotónní změny periody řídicí se mocninným zákonem probíhají zpravidla natolik pomalu, že mezi modely popsanými různými deceleračními parametry q nelze jen na základě pozorování rozhodnout. Z pozorování ale

⁹Dobrou mírou tempa, v němž se ony změny periody odehrávají, je časová škála $\tau = P/\dot{P}$, která ukazuje, za jak dlouho dojde při současném tempu změn k výraznější změně periody. Dosadíme-li sem hodnoty pro BS Vul, dojdeme k velmi vysoké hodnotě 20 miliónů let. To je doba dostatečně dlouhá, aby se v ní nitru hvězdy odehrály zcela zásadní přeměny. Jedině pozorování prováděná ve srovnatelně dlouhé době by byla s to odhalit rozdíly v chodu O-C diagramu a tím i mechanismy změn periody.

lze poměrně spolehlivě určit parametr \dot{P}_0 a ten pak srovnat s předpověďmi pro různé mechanismy periodových změn, které se mohou i řádově lišit, a mezi nimi rozhodnout na základě znalosti fyziky té které proměnné hvězdy.

5.2.5 Modely s marginálními změnami periody

V naprosté většině případů představují změny periody periodicky proměnných hvězd jen nepatrnou odchylku od nějaké střední, lineární periody, vlastní základnímu mechanismu proměnnosti (rotace, oběh složek či pulzace). Okamžité periody se mohou měnit i skokově, případně u nich lze vysledovat i dlouhodobý trend. Odchylky od střední periody však nejčastěji mají povahu oscilací, které mohou být jak nepravidelné, tak i přísně periodické, jak je tomu třeba v případě tzv. light-time efektu působeného oběhem rušícího tělesa kolem proměnné hvězdy nebo dvojhvězdy.

Marginálnost (malíčkost) změn základní periody se promítá do vlastností fázové funkce $\vartheta(t)$ či $\vartheta(\vartheta_1)$ a inverzní fázové funkce $T(\vartheta)$ či $\vartheta_1(\vartheta)$, které se jen nepatrně odlišují od přímků a přechod mezi nimi je tak poměrně snadný. Inverzní fázovou funkci zapíšeme nyní ve tvaru $\vartheta_1(\vartheta) = \vartheta + \psi(\vartheta)$, kde $\psi(\vartheta)$ vyjadřuje malou odchylku od dokonalé lineárnosti. Chci-li vyjádřit fázovou funkci $\vartheta(\vartheta_1)$ pomocí ϑ_1 , dostanu

$$\vartheta = \vartheta_1 - \psi(\vartheta) \doteq \vartheta_1 - \psi(\vartheta_1 - \psi(\vartheta)) \doteq \vartheta_1 - \psi(\vartheta_1) \left(1 - P_0 \dot{\psi}\right) \doteq \vartheta_1 - \psi(\vartheta_1). \quad (5.43)$$

Vzhledem k tomu, že v případě marginálních změn periody je splněno, že $P_0 \dot{\psi} \ll 1$, platí výše uvedená relace. Ta umožňuje velmi rychle sestavit modely i pro složitější případy, než které byly uvedeny v předcházející podkapitole.

Modelem s marginálními změnami periody je i výše uvedený prostý tříparametrický model periody. Pro něj platí

$$\psi(\vartheta) = \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2}, \Rightarrow \vartheta \doteq \vartheta_1 - \psi(\vartheta_1) = \vartheta_1 - \dot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2}, \quad (5.44)$$

což je ve shodě se vztahy (5.42).

5.2.5.1 Kubický model změn periody

Zjistíme-li, že se při popisu fázové funkce bez kubického členu neobejdeme, musíme připustit, že mechanismus pozorovaných změn periody je složitější, že obsahuje děje, které nepopisuje zákon $\dot{\nu} = -K \nu^q$, nebo $\dot{P} = K P^{2-q}$ diskutovaný výše.

Nejjednodušší takový model periody předpokládá, že perioda je kvadratickou funkcí času¹⁰

$$P(t) = P_0 + P_0 \dot{P}_0 \vartheta_1 + P_0^2 \ddot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2}; \quad \dot{P}(t) = \frac{dP}{d\vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} = \dot{P}_0 + P_0 \ddot{P}_0 \vartheta_1. \quad (5.45)$$

Užitím vztahů (5.11) můžeme najít pro fázovou funkci $\vartheta(t)$ exaktní řešení. Bohužel, vztah pro tuto funkci je natolik složitý a nepřehledný, že je téměř nepoužitelný. Proto

¹⁰Přísně vzato, i v případě, kdy platí, že $\dot{P} = K P^{2-q}$, je $\ddot{P} = (2-q) \dot{P}_0^2 P_0^{2q-4} P^{3-2q}$ obecně různá od nuly. V tomto případě nám ovšem jde o situace, kdy druhá derivace periody je mnohem větší, než tato, víceméně zanedbatelná veličina.

se již od počátku omezíme jen na první tři členy Maclaurinova rozkladu.

$$\vartheta(t) \doteq \vartheta_1 - \dot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2!} - (P_0 \ddot{P}_0 - 2\dot{P}_0^2) \frac{\vartheta_1^3}{3!} \doteq \vartheta_1 - \dot{P}_0 \frac{\vartheta_1^2}{2!} - P_0 \ddot{P}_0 \frac{\vartheta_1^3}{3!}; \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} T(\vartheta) &\doteq M_0 + P_0 \vartheta + P_0 \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!} + (P_0^2 \ddot{P}_0 + P_0 \dot{P}_0^2) \frac{\vartheta^3}{3!} \\ &\doteq M_0 + P_0 \vartheta + P_0 \dot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!} + P_0^2 \ddot{P}_0 \frac{\vartheta^3}{3!}; \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$P(\vartheta) \doteq P_0 + P_0 \dot{P}_0 \vartheta + (P_0^2 \ddot{P}_0 + P_0 \dot{P}_0^2) \frac{\vartheta^2}{2!} \doteq P_0 + P_0 \dot{P}_0 \vartheta + P_0^2 \ddot{P}_0 \frac{\vartheta^2}{2!}. \quad (5.48)$$

Ve výrazech v závorkách v rovnicích (5.46), (5.47) a (5.48) můžeme zanedbat členy s \dot{P}_0^2 z již výše uvedených důvodů.

K popisu fázové funkce tak v případě kvadraticky se měnící periody potřebujete celkem čtyři parametry: M_0 , P_0 , \dot{P}_0 , \ddot{P}_0 . K tomu, abyste zejména ten poslední z členů určili s dostatečnou přesností (doporučuji nejméně 4,5 σ), musíte mít k dispozici vynikající pozorovací materiál pokrývající několik desítek let.

5.2.5.2 LiTE

Jako efekt rozdílné dráhy světla (Light-Time Effect) se zpravidla označuje vliv oběžného pohybu periodicky proměnné hvězdy nebo hvězdné soustavy kolem společného těžiště s dalším členem systému (např. v případě pulsaru druhého tělesa, v případě zákrytové dvojhvězdy třetího tělesa). Celý problém lze sice řešit zcela exaktně, ale pro účely stanovení efemeridy v naprosté většině případů vystačíme s fenomenologickým modelem změn periody.

$$T = M_0 + P_0(\vartheta + \psi); \quad \psi = \frac{1}{P_0} \left[b_1 \sin \vartheta_3 + b_2 \sin 2\vartheta_3 + b_3(\cos 2\vartheta_3 - \cos \vartheta_3)/\sqrt{2} \right], \quad (5.49)$$

kde b_1, b_2, b_3 jsou koeficienty ve dnech. ϑ_3 a ϑ jsou pak dány vztahem:

$$\vartheta_3 = \frac{t - M_3}{P_3}, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \psi, \quad (5.50)$$

kde M_3 je okamžik, kdy $\psi = 0$, a P_3 je oběžná perioda třetího (druhého) tělesa v soustavě. Pro tento fenomenologický model změn periody je zapotřebí celkem 7 parametrů, které je možno najít podstatně snáz než při exaktním řešení problému.

5.3 Periodová analýza okamžiků extrémů

Jednou z úloh, kterou badatel v oboru výzkumu proměnných hvězd musí opakovaně řešit, je zjišťování a případné zpřesňování parametrů modelu proměnnosti (tedy fázové funkce $\vartheta(t, \mathbf{a})$ a její inverzní funkce $\vartheta_1(\vartheta, \mathbf{a})$ nebo $\Theta(E, \mathbf{a})$), případně jeho zdokonalování či modifikace. Spolehlivá znalost těchto základních parametrů je totiž základním předpokladem pro další úvahy o fyzice objektu a mechanismu jeho proměnnosti, eventuálně k zobecněním, která by bylo možné vztáhnout na hvězdy jako na celek.

Vektor \mathbf{a} chápeme jako uspořádanou g -tici volných parametrů popisujících model proměnných hvězd. K jeho hledání přikročíme až tehdy, budeme-li mít k dispozici pozorování dotyčné hvězdy pořízená v co nejdélším časovém intervalu. Všeobecně platí, že přesnost určení lineárního členu je nepřímo úměrná délce intervalu sledování hvězdy, kvadratického členu s \dot{P} kvadrátu této délky a kubického členu s \ddot{P} dokonce třetí mocnině této délky.

Nejčastější způsob, jak diagnostikovat případné změny periody a vytipovat vhodný model její proměnnosti, stanovit, případně zlepšit jeho parametry, je založen na analýze tzv. O-C diagramu. V zásadě tu jde o určení parametrů inverzní fázové funkce $T(\vartheta, \mathbf{a})$, respektive $\Theta(E, \mathbf{a})$ na základě dat, která udávají okamžiky určitých speciálních hodnot fázové funkce ϑ (většinou jde o okamžiky extrémů jasnosti – tedy $\Theta(E)$).

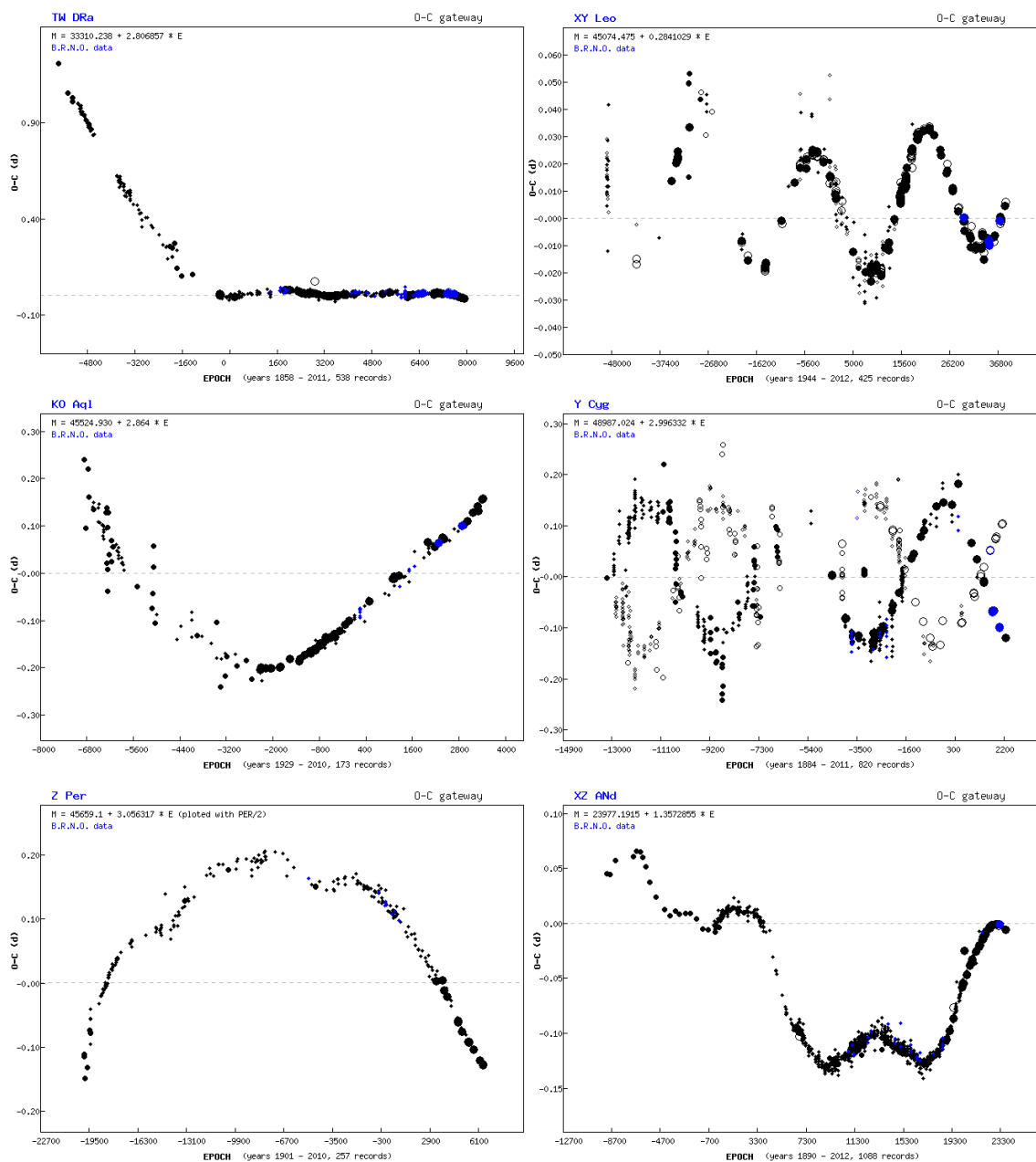
Předpokládejme, že u vybrané periodicky proměnné hvězdy alespoň zhruba známe její světelné elementy, tedy základní okamžik nulové fáze M_0 , který zpravidla klademe do okamžiku extrému jasnosti, a střední periodu světelných změn P_0 . Pro libovolnou epochu¹¹ E pak lze vypočítat odpovídající předpověď nulové fáze podle vztahu: $\Theta(E) = M_0 + E \times P_0$. Rozdíly mezi časem, kdy určitá fáze $T_{\text{ext}}(E)$ skutečně nastala, a vypočteným okamžikem téže fáze ve stejné epoše $\Theta(E)$ se nazývají hodnoty O-C(E). Jejich závislost na epoše nebo obecně čase je pak nazývána jako O-C diagram. Tento diagram slouží zejména k zlepšování lineárních efemerid nebo ke zdůvodnění volby složitějšího modelu změn periody $P(t)$.

V případě, že grafem O-C je:

1. vodorovná přímka procházející O-C = 0, pak je to indikace skutečnosti, že hvězda má jen jednu periodu světelných změn a že použité světelné elementy jsou v pořádku. Tyto „bezproblémové“ hvězdy je možno bez obav na několik let opustit a věnovat se jiným.
2. vodorovná přímka neprocházející O-C = 0. To znamená, že perioda je jediná, určena je správně, zato okamžik základního minima nebo maxima si opravu vyžaduje.
3. šikmá přímka procházející bodem $E = 0$, O-C = 0, ukazuje, že okamžik základního extrému je určen správně, periodu je nutno opravit o směrnici přímky proložené závislostí O-C na epoše E , $\Delta P = d(T_{\text{ext}}(E) - \Theta(E))/dE$.
4. parabola svědčí o tom, že se perioda lineárně zkracuje nebo prodlužuje (parabola otevřená vzhůru – například při tzv. pomalém přenosu látky mezi složkami algolidy.)
5. polynom vyššího stupně. Změny periody jsou komplikovanější, do vzorce pro předpověď okamžiku extrému nutno zavést další členy, jde v podstatě o Taylorův rozvoj se středem v epoše $E = 0$. Viz poslední část podkapitoly 5.2.4.
6. sinusoida nebo podobná funkce. Zde je nejpřirozenějším vysvětlením fakt, že proměnná hvězda obíhá kolem společného těžiště v soustavě s jinou hvězdou, která se jinak spektrálně nebo i světelně nemusí projevovat. Jde o tzv. light-time effect.

Je třeba si ale uvědomit, že běžné jsou i kombinace výše uvedených jevů, jak je vidět i na obr. 5.1. Zpravidla, čím déle je hvězda sledována, tím složitější průběh graf O-C ukazuje.

¹¹Zpravidla je tato epocha vyjádřena celým číslem, v případě zákrytových dvojhvězd s nulovou výstředností, se epoše přidává 0,5, vztahuje-li se dotyčné pozorování k okamžiku sekundárního minima.



Obrázek 5.1: Ukázky různých průběhů hodnot O-C. Zdroj: O-C brána. <http://var.astro.cz/ocgate/>.

Je třeba si uvědomit, že pro samotnou periodovou analýzu, založenou na okamžicích extrémů světelných křivek proměnných hvězd, v zásadě žádný O-C diagram nepotřebujeme. Stačí, když budeme vyšetřovat jen závislost naměřených okamžiků extrémů $T_{\text{ext}}(E)$ na epoše. Nicméně, právě k určení oné epochy $E(t)$ tu počáteční efemeridu potřebujeme. Při periodové analýze pak zjišťujeme vlastnosti $T_{\text{ext}}(E)$, která se vždy jenom minimálně bude lišit od ideální přímky se směrnicí P_0 . Právě tato skutečnost nás vede k zavedení O-C diagramu, který je osvědčenou vizualizací celé situace.

5.3.1 Řešení metodou nejmenších čtverců

Předpokládejme, že u určité periodicky proměnné hvězdy známe už z dřívějšíka (např. z katalogu nebo z literatury) její lineární světelné elementy P_0 , M_0 a dále máme k dispozici soubor celkem n odhadů okamžiků jejích extrémů $\{T_i\}$, dejme tomu primárních minim, jde-li o zákrytovou dvojhvězdu.

V prvním kroku pro nalezené hodnoty okamžiků minim $\{T_i\}$ najdeme odpovídající epochy, a to jednoduchým předpisem $E_i = \text{round}[(T_i - M_0)/P_0]$. Na takto určené epochy $\{E_i\}$ budeme nahlížet jako nezávisle proměnnou (x -ovou souřadnici) a okamžiky $\{T_i\}$ jako závisle proměnnou (y -ovou souřadnici). Předpokládáme, že okamžiky minima lze vystihnout modelem $\Theta(E, \mathbf{a})$, popsáným g parametry uspořádanými do sloupcového vektoru $\mathbf{a} = [a_1; a_2; \dots; a_g]$. Tyto parametry lze určit pomocí metody nejmenších čtverců, podle nichž má platit, že vážená suma čtverců odchylek $\chi^2(\boldsymbol{\alpha})$ je minimální, takže

$$\chi^2(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{T_i - \Theta(E_i, \boldsymbol{\alpha})}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^n [T_i - \Theta(E_i, \boldsymbol{\alpha})]^2 w_i, \quad (5.51)$$

kde σ_i je nejistota určení okamžiku extrému T_i , přičemž platí, že váha w_i je dána vztahem $w_i = \sigma_i^{-2}$.

Minimum funkce $\chi^2(\boldsymbol{\alpha})$ nastane, bude-li splněna vektorová podmínka $\vec{\nabla} \chi^2(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Dosadíme-li tam za $\chi^2(\boldsymbol{\alpha})$ z rovnice (5.51) dostaneme g rovnic ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(E_i, \mathbf{a})}{\partial \alpha_k} \Theta(E_i, \mathbf{a}) w_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(E_i, \mathbf{a})}{\partial \alpha_k} T_i w_i. \quad (5.52)$$

Regresní funkce $\Theta(E, \mathbf{a})$ s parametry \mathbf{a} je pak onou modelovou funkcí, pomocí níž lze mj. i odvodit, jak se mění perioda. Rovnice (5.52) platí obecně pro jakýkoli model $\Theta(E)$ a je třeba je řešit iterativně s tím, že na počátku musíte mít poměrně dobrý odhad řešení, který pak v dalších krocích doladíte. Podrobný popis, jak si při tom počínat, lze najít v kapitole 4.4.

Podarí-li se nám proložit závislost okamžiků extrému na epoše předem zadaným modelem, měla by následovat etapa zhodnocení, sebereflexe. Pozornost je přitom nutné věnovat jak kvalitě použitého datového souboru a zejména pak hodnověrnosti použitých nejistot okamžiků extrémů, tak i adekvátnosti použitého modelu regresní funkce $\Theta(E, \mathbf{a})$, zejména v tom, že si vykreslíme závislost jednotlivých odchylek zadaných hodnot okamžiků extrému a jejich předpovědi $\Delta T_i = T_i - \Theta(E_i, \mathbf{a})$. V případě, že tyto odchylky budou odpovídat jen náhodnému rozptylu a budou tedy stejnoměrně rozprostřeny kolem

kolem přímky $\Delta T = 0$, jsme u cíle. V opačném případě je nutno se zamyslet, zda nejsou některé hodnoty okamžiků zatíženy hrubou chybou. Těch je pak lépe se zbavit, případně zda by nebylo na místě změnit nebo zdokonalit prokládaný model proměnnosti. Zde je zapotřebí velmi kriticky posoudit zejména to, zda počet volných parametrů zvolené regresní funkce vsutku odpovídá kvalitě a početnosti dat, která zpracováváme¹². V opačném případě by nás to vedlo k falešným závěrům a hlavně k chybným předpovědím budoucího vývoje. Rovněž je třeba přehodnotit nejistoty, které jednotlivým hodnotám přisuzujeme a případně znovu celé proložení zopakovat.

5.3.1.1 Nejistoty jednotlivých okamžiků extrémů

Zkušenost ukazuje, že jen málo věcí je při analýze časových řad okamžiků T_i extrémů proměnných hvězd tak nejistých, jako právě nejistoty jejich určení σ_i . 1) Ze své dlouholeté praxe se zpracováním převzatých výsledků víme, že zatímco na publikované okamžiky extrémů se lze jakž takž spolehnout (u výsledků vizuálních pozorování je třeba být ostražitý neustále), odhady jejich nejistot bývají téměř vždy citelně podceněny, často mnohonásobně, takže bývají takřka nepoužitelné. Navíc u řady pozorování není ona nejistota určení vyčíslena vůbec. 2) I kdyby odhady určení okamžiků extrémů σ_i byly signifikantní, může být jejich „rozptyl“ o dost větší, než by vyplývalo z přesnosti jejich nalezení, prostě z toho důvodu, že zvolený model proměnnosti periody nemusí onu proměnnost periody popisovat adekvátně, a teprve v průběhu výpočtu je budeme diverzifikovat.

Vyplatí se proto v první iteraci počítat s tím, že nejistoty určení okamžiků veškerých extrémů, respektive jejich váhy w_i jsou si rovny, řekněme jednotkové. Po nalezení parametrů modelové fázové funkce $\vartheta(E, \mathbf{a})$ pak spočítáme odchylky pro jednotlivé okamžiky pozorování ΔT_i . Pak si všechna data rozdělíme do h skupin podle typu pozorování (vizuální, fotografické, CCD, fotoelektrické), případně podle jednotlivých pozorovatelů nebo jiných atributů, přičemž je třeba dohlédnout, aby v každé z těchto ad hoc vybraných skupin bylo nejméně 5 okamžiků extrémů. Pro každou z těchto skupin vypočteme standardní odchylku z ΔT_i , $Z_j = \text{sdv}\{\Delta T_{ij}\}$. Členům každé skupiny pak přisoudíme nejistotu $\sigma_{ij} = Z_j$. S těmito novými nejistotami, případně vahami, provedeme výpočet znovu a znovu pak zopakujeme evaluaci nejistot pro jednotlivé skupiny pozorování a iterujeme dokud se takto určené nejistoty nepřestanou měnit. V průběhu výpočtu můžeme jednotlivé skupiny spojovat nebo rozdělovat.

Úporným nešvarem je zadávat váhy předem, jen podle zvykového práva – např. CCD a fotoelektrická minima $w = 10$, fotografická $w = 3$ a vizuální $w = 1$. Takovéto váhování k ničemu neposlouží, jen způsobí to, že nejistoty výsledků už vůbec nebude možné nějak rozumně interpretovat. Maximálně lze toto váhování přijmout jako první odhad, ale ke správnému ováhování je třeba vycházet z nově zjištěných nejistot, tak jak jsme to popsali výše.

¹²Pokud si nejsme stoprocentně jisti, že námi zvolený regresní model má ten správný tvar a adekvátní počet stupňů volnosti, a zda by se nedalo uvažovat i o jiném modelu s menším arsenálem volných parametrů, můžeme použít třeba bayesovské informační kritérium BIC definované v (4.3).

5.3.1.2 Určování parametrů lineárních regresních modelů

Pokud je regresní model lineární ve všech svých parametrech, pak se systém rovnic (5.52) výrazně zjednoduší a lze jej řešit jednoznačně a navíc bez iterací. Všechny modely $\Theta(E, \mathbf{a})$ diskutované v oddílu 5.2.4 lineární jsou (jde o polynomy), takže je radost je používat. Jejich regresi lze elegantně provést použitím maticového počtu. Popsána je dostatečně podrobně v kapitole 4.3.

5.3.2 Standardní určování okamžiků extrémů

Spolehlivost modelů proměnnosti jednotlivých proměnných hvězd kriticky závisí na přesnosti naší znalosti časového vývoje pozorované periody $P(t)$ a tedy na přesnosti a spolehlivosti časové řady okamžiků extrémů nebo chcete-li na hodnověrnosti výchozího O-C diagramu. Ta primárně záleží na spolehlivosti použitých určení okamžiků extrémů a dobré znalosti jejich nejistoty.

Zachycení reálného okamžiku extrému jasnosti proměnné hvězdy není zrovna triviální pozorovatelská úloha. Chceme-li určit moment extrému vskutku spolehlivě, musíme hvězdu pozorovat nejen v samotný okamžik extrému, ale i v jeho širokém časovém okolí. Musíme zachytit dostačující části vzestupné a sestupné větve světelné křivky. Takto je ovšem určení polohy jednotlivých bodů v ploše grafu O-C výsledkem obvykle několika desítek pozorování v okolí pozorovaného okamžiku $T_{\text{ext}}(E)$, přičemž hodnota pozorování v bezprostřední blízkosti okamžiku extrému je paradoxně nejmenší.

Určení skutečného okamžiku extrému a stanovení jeho nejistoty je tak v principu mlhavé a sporné. Existuje řada vzájemně si konkurujících metod určení okamžiku minima/maxima světelné křivky, jejichž výsledky jsou až překvapivě různé a ještě horší je to s odhadem nejistoty určení hodnoty $T_{\text{ext}}(E)$. Nicméně je vhodné se seznámit s běžnými postupy při určování okamžiků minima nebo maxima světelné křivky, protože tak byla určena naprostá většina výsledků, s nimiž se v praxi setkáte.

Nejběžnější metodou užívanou pro určování okamžiků minim dosud byla Kweeova-van Woerdenova metoda Kwee & van Woerden (1956), která je vlastně jen lehce inovovanou verzí, již publikoval už Hertzprung (1928). Tato metoda však dává korektní výsledky jen při správném použití. Je-li použita např. na asymetrické světelné křivky, křivky se zjevným trendem nebo nestejnou délkou sestupné a vzestupné větve, nejsou získané výsledky a ani jejich nejistota v pořádku. Bohužel právě nesprávné použití je jednou z nejčastějších příčin chyb v určení okamžiků minim jasnosti u zákrytových dvojhvězd.

Obecně bývají techniky určování okamžiků extrémů zpravidla dosti podezřelé, nejčastěji jsou založeny na proložení paraboly nebo jiné symetrické funkce v bezprostředním okolí extrému jasnosti. Takto určené okamžiky extrémů dávají spolehlivé výsledky jen výjimečně, zpravidla však bývají deformovány z řady důvodů. Předně, zmíněné metody selhávají v případě neúplných nebo asymetrických světelných křivek. Nejistoty nalezených okamžiků extrémů jsou běžně nedůvěryhodné, protože prokládané křivky většinou nejsou podobné skutečně pozorovaným světelným křivkám. Hlavní nedostatek těchto standardních metod tkví ve skutečnosti, že zcela opomíjejí ten fakt, že světelné křivky jsou periodické funkce!

5.3.3 Prosté modely světelných křivek

Další metody periodové analýzy jsou založeny na využití přímo pozorovaných změn, nejčastěji světelných změn, čili světelných křivek. Zde je nezbytné umět reprezentovat pozorovanou světelnou křivku periodické proměnné hvězdy jejím vhodným fenomenologickým modelem, jehož parametry obecně nemusí mít vztah k fyzickým charakteristikám hvězdné proměnnosti.

Dosti často stačí předpokládat, že tvar světelné křivky periodicky proměnného objektu lze aproximovat kosinusovkou případně harmonickým polynomem řádu r , kterýžto model lze aplikovat např. na chemicky pekuliární hvězdy (tam stačí $r = 2$), zákrytové dvojhvězdy s plynulou změnou jasnosti jako jsou hvězdy typu W UMa, RR Lyr apod. Světelnou křivku v určité barvě pak lze vyjádřit ve tvaru

$$F(\vartheta, b_0, b_1, \dots, b_{2r}) = b_0 + \sum_{j=1}^r b_{2j-1} \cos(2\pi j \vartheta) + b_{2j} \sin(2\pi j \vartheta). \quad (5.53)$$

Vektor parametrů \mathbf{b} má $g_b = 2r + 1$ složek a model světelné křivky tak má g_b stupňů volnosti. Zvyšováním řádu použitého polynomu lze stále přesněji vyjadřovat tvar pozorované světelné nebo obecně fázové křivky. Je však žádoucí nepodlehout tomuto lákadlu a zastavit se v aproximovaní na takovém stupni, který dostatečně dobře popisuje vzhled světelné křivky, zejména v oblastech, kdy dochází k nejrychlejším změnám jasnosti. Zvětšování počtu volných parametrů ve všeobecnosti vede k nestabilitám v prokládání a zhoršuje interpretovatelnost nalezených výsledků a jejich nejistot.

Uvedený způsob prostého modelování světelných křivek ovšem naráží u klasických *algolid*, jejichž jasnost se výrazně mění jen relativně krátce, a to jen tehdy, probíhají u nich zrovna zákryt složek. Sestup do minima a pak následující vzestup je přitom víceméně lineární, světelné křivky kolem minima lze v prvním přiblížení považovat za symetrické funkce. V minimu se algolidy zpravidla dlouho nezdržují, existuje však řada algolid, u nichž můžete pozorovat tzv. zastávku v minimu, kdy se jasnost hvězdy mění jen minimálně. K vyjádření takových křivek bychom potřebovali použít harmonický polynom nejméně 13. řádu, což by ovšem šlo proti našemu požadavku vyjádřit pozorované světelné křivky modelem s co nejmenším počtem parametrů.

Z hlediska periodové analýzy jsou nejdůležitější právě ty úseky světelné křivky, kdy se jasnost hvězdy mění nejrychleji, tedy části kolem tzv. inflexních bodů¹³, zatímco na dění v bezprostředním okolí minima už tolik nesejde. Nejjednodušší matematickou křivkou, která tyto požadavky splňuje, je Gaussova křivka, která ovšem má tu nevýhodu, že to není křivka periodická, ale jistým trikem ji můžeme periodickou funkcí učinit. Prvním přiblížením pro světelnou křivku zákrytové dvojhvězdy s kruhovými orbitami složek je následující funkce se čtyřmi volnými parametry b_0, b_1, b_2, b_3

$$F(\vartheta, \mathbf{b}) = b_0 + b_1 \Psi_1(\vartheta, b_3) + b_2 \Psi_2(\vartheta, b_3), \quad (5.54)$$

$$\Psi_{1,2} = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{b_3} \right)^2 \right], \text{ kde } \varphi_1 = \vartheta - \text{round}(\vartheta); \varphi_2 = (\vartheta - \frac{1}{2}) - \text{round}(\vartheta - \frac{1}{2}).$$

¹³V inflexních bodech funkce je druhá derivace rovna 0, takže rychlost změny daná absolutní hodnotou první derivace zde nabývá svého maxima.

Parametry mají názorný význam: b_0 je hvězdná velikost dvojhvězdy mimo zákryty, b_1 je hloubka primárního minima kolem fáze 0, b_2 je hloubka sekundárního minima kolem fáze 0.5 a b_3 je parametr vyjadřující pološířku zákrytů.

Pokud bychom chtěli světelnou křivku zákrytové dvojhvězdy modelovat věrněji, můžeme použít řadu některý z dalších fenomenologických modelů světelných křivek nabízených v kapitole věnované speciálně modelování světelných křivek zákrytových dvojhvězd (viz kap. 5.5.2).

5.3.4 Precizní určování okamžiků extrémů světelných křivek

Pokud máte k dispozici pozorovací řady v okolí extrému jasnosti určitého proměnného objektu, jeho přibližné světelné elementy (stačí lineární, tedy M_0, P) a znáte jeho vzorovou světelnou křivku, můžeme provést precizní odhad okamžiků extrémů pomocí fázových posunů pozorované světelné křivky vůči vzorové světelné křivce. Použitím této metody se přesnost určení jednotlivých okamžiků extrémů výrazně zlepší. Tento přístup poprvé nastíněný v publikaci Mikulášek et al. (2006) a později precizovaný v Mikulášek et al. (2011) se osvědčil nejen v případě, že máme co do činění s nepřerušovanou časovou řadou měření v okolí extrému světelné křivky, ale hlavně tehdy, když zpracováváme jednotlivá pozorování pocházející z různých přehlídek jako jsou pozorování z družice Hipparcos nebo projektu ASAS, pořízená v časech, které nijak nesouvisí s okamžiky extrémů příslušných objektů.

Pustíme se do periodové analýzy proměnné hvězdy na základě rozboru jejich n jednotlivých fotometrických pozorování rozdělených do N libovolných skupin. Je výhodné popsat příslušnost jednotlivých měření k jednotlivým skupinám maticí o rozměru $N \times n$ složenou z nul a jedniček, s členem matice η_{ik} . Jestliže i -té měření, kde ($i = 1, 2, \dots, n$) patří ke k -té skupině, kde ($k = 1, 2, \dots, N$), pak $\eta_{ik} = 1$, jinak je $\eta_{ik} = 0$. Nechť t_i je juliánské datum okamžiku i -tého pozorování, y_i je naměřená veličina (nejčastěji hvězdná velikost nebo jejich rozdíl) a w_i je váha i -tého měření.

Pozorované hvězdné velikosti vynesené v závislosti na čase vytvářejí světelnou křivku, kterou vyjadřuje funkce F . Předpověděná (vypočtená) hvězdná velikost y_{pi} pro i -té měření je pak dána funkční hodnotou $F(\mathbf{b}, \vartheta_i)$, kde $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_g]$ je g parametrů určujících model světelné křivky v okolí extrému. ϑ_i je pak individuální fázová funkce v čase t_i daná vztahem

$$\vartheta_i = \frac{t_i - M_0 - \sum_{k=1}^N \eta_{ik} \Delta T_{mk}}{P_0}, \quad (5.55)$$

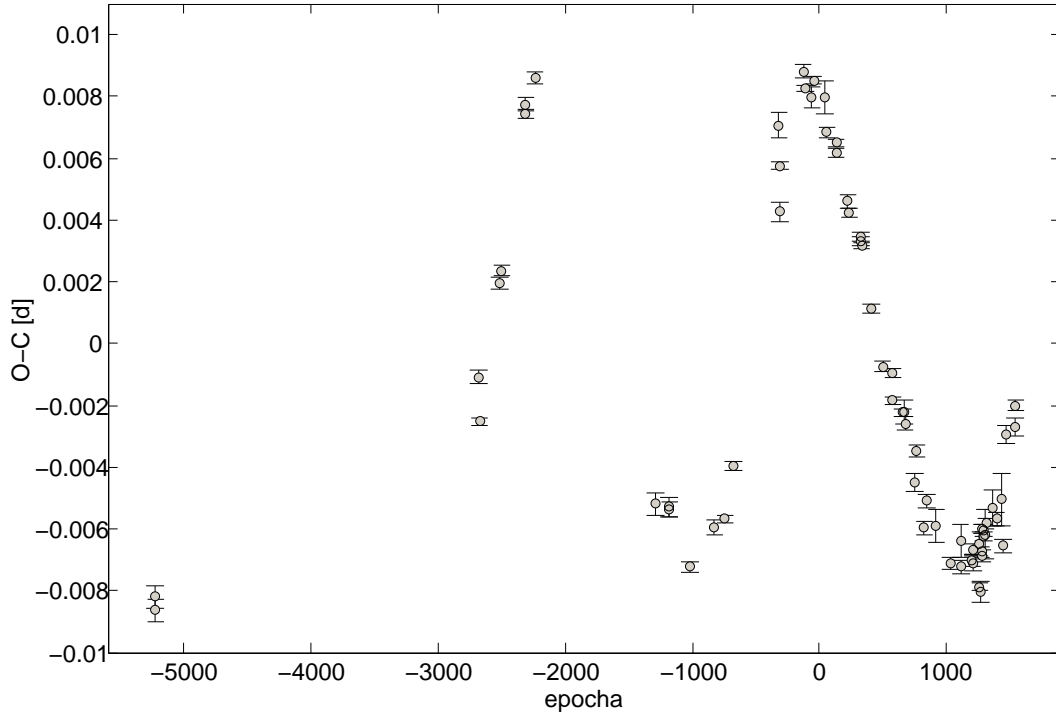
kde M_0 a P_0 jsou počáteční odhady pro parametry lineární efemeridy proměnné hvězdy a ΔT_{mk} je konkrétní časová korekce okamžiku extrému pro k -tý extrém světelné křivky vzhledem k předpovědi dané lineární efemeridou M_0 a P_0 .

Všech $(g + N)$ volných parametrů \mathbf{b} a $\{\Delta T_{mk}\}$ hledáme simultánně standardní metodou nejmenších čtverců, kde hledáme volné parametry modelu minimalizací sumy χ^2

$$\chi^2(\mathbf{b}, \mathbf{T}_m) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - F(\mathbf{b}, \vartheta_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta y_i}{\sigma_i} \right)^2; \quad \vec{\nabla} \chi^2 = \mathbf{0} \Rightarrow \quad (5.56)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F}{\partial b_j} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \Delta T_{mk}} = - \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i} \frac{\eta_{ik}}{P_0} = 0, \quad (5.57)$$

kde $\Delta y_i = y_i - F(\mathbf{b}, \vartheta_i)$, $j = (1, 2, \dots, g)$ a σ_i jsou odhady nejistoty jednotlivých měření. Soustava g a N (viz 5.55) rovnic se řeší zpravidla iterativně použitím zobecněné Newtonovy-Raphsonovy



Obrázek 5.2: O-C diagram zákrytové dvojhvězdy AR Aurigae sestavený pomocí okamžiků minim jasnosti zjištěných metodou precizního určování okamžiků extrémů. Chybová úsečka naznačuje nejistotu určení daného okamžiku. Při výpočtu se všechny okamžiky vypočítávaly simultánně spolu se zjišťováním parametrů světelné křivky. V modelu se předpokládá i jistý lineární trend během noci. Je zjevné, že hodnoty O-C se kupí kolem jisté periodické křivky, která svědčí o tom, že zákrytová soustava je ve skutečnosti trojhvězdou, kde zákrytová dvojhvězda oběhne s třetím tělesem kolem společného těžiště za několik desítek let. Tato křivka demonstrující LiTE je jedním z nejlépe takto doložených případů prokázání existence třetí složky v soustavě.

nebo Levenbergovy-Marquartovy metody. Celá procedura vede k určení g parametrů \mathbf{a} popisujících vzhled světelné křivky (nebo soustavy světelných či obecně fázových křivek) a souboru N hodnot ΔT_{mk} . Okamžik k -tého extrému je dán vztahem $T_{mk} = M_0 + P_0 E_k + \Delta T_{mk}$, kde E_k je střední epocha pozorování z k -tého intervalu zaokrouhlená na celé číslo. Nejistota stanovení $\delta \Delta T_{mk}$ je pak i rigorózním odhadem nejistoty určení T_{mk} .

Funkci $F(\vartheta)$ volíme tak, aby byla periodická s minimem nebo maximem ve fázi $\varphi = 0$. V úvahu připadají jak harmonické polynomy (5.58), tak i symetrické zvonovité funkce (5.59) ve tvaru:

$$F(\vartheta) = b_1 + b_2 \cos(2\pi\vartheta) + b_3 \cos(4\pi\vartheta) + b_4 \left[\sin(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2} \sin(4\pi\vartheta) \right]; \quad (5.58)$$

$$F(\vartheta) = b_1 + b_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{b_3} \right)^2 \right], \quad F(\vartheta) = b_1 + b_2 \exp \left[1 - \cosh \left(\frac{\varphi}{b_3} \right) \right], \quad (5.59)$$

kde $\varphi = \vartheta - \text{round}(\vartheta)$. První funkce je vhodná i pro asymetrické profily, poslední dvě (5.59) vcelku dobře vystihují vzhled minim jasnosti většiny zákrytových dvojhvězd (bez totality) i tvar světelné křivky hvězd s jednou víceméně symetrickou fotometrickou skvrnou.

Celá situace se značně zjednoduší, pokud již známe tvar světelné křivky (světelných křivek), třeba máme-li k dispozici velmi dobrou fotometrii hvězdy z dřívější doby nebo solidní modelovou křivku odvozenou z fyzického modelu proměnnosti hvězdy. V tomto případě můžeme zcela vynechat g rovnic (viz 5.56) a přímo řešit jen soustavu N rovnic (viz 5.57). Takto získáme soubor s N hodnotami ΔT_{mk} a dobře definované odhady jejich nejistot δT_{mk}

$$\delta T_{mk} = -P_0 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_{ik} \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}}{\sum_{i=1}^n \eta_{ik} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2 \sigma_i^{-2}}; \quad \delta T_{mk} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}}{n \sum_{i=1}^n \eta_{ik} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)^2 \sigma_i^{-2}}}, \quad (5.60)$$

kde s je směrodatná odchylka jednoho měření.

Výše uvedený postup s výhodou použijeme tehdy, máme-li k dispozici řadu odhadů okamžiků extrémů a pak i nějaké časové řady pozorování jasnosti a chcete-li toto vše zpracovat nějakou jednotnou technikou, tedy čistě pomocí okamžiků extrémů. Lze však postupovat i jinak a mezikroku určení okamžiků minima či maxima se vyhnout.

5.4 Přímá periodová analýza

V minulosti byla většina periodových analýz provedena užitím okamžiků extrémů světelné křivky. Historické časy T_m a někdy i jejich nejistoty lze najít buď přímo v literatuře nebo i ve speciálních databázích. Hodnověrnost takových periodových analýz je odvislá od spolehlivosti určení okamžiků extrémů a jejich nejistot. Většina publikovaných okamžiků extrémů proměnných hvězd byla získána pomocí notoricky známé Kweeovy-van Woerdenovy metody a jejích modifikací. Bohužel, tato metoda je často užívána jako magická skříňka na libovolná pozorovací data, tedy i pro případy, kdy předpoklady, za nichž byla odvozena, neplatí. Navíc vůbec nelze použít odhad nejistoty určení okamžiku extrémů, který poskytuje – bývá totiž oproti skutečnosti silně podceněn.

Rozhodující nedostatek běžného způsobu určování okamžiků extrémů však tkví v tom, že nezohledňuje fakt, že světelná křivka je periodická funkce. Přitom znalost tvaru světelných křivek odvozená z pozorování učiněných v minulosti může zcela zásadním způsobem zlepšit hodnověrnost určení hodnot T_m . Pak lze okamžik extrémů určit metodou fázového posuvu pozorované světelné křivky vzhledem k očekávané, vzorové světelné křivce, která zajišťuje mnohem spolehlivější údaj o okamžiku extrémů a jeho nejistotě. Bohužel, tato dlouho známá metoda se dosud používá jen vzácně.

Jak zlepšit spolehlivost periodových analýz? Můžeme zdokonalit vstup výše diskutované metody tím, že budeme pracovat se spolehlivějšími výchozími pozorovanými momenty extrémů s využitím vzorových světelných křivek (viz. kapitola 5.3.4). Nebo lépe, můžeme mezikrok s výpočtem okamžiků extrémů zrušit úplně. Časový vývoj periody totiž lze sledovat přímo a ještě přitom zpracovávat pozorování nejrůznějšího druhu! Je zde pouze jediné omezení – k použití oné níže popsané metody je nezbytné znát původní data, získaná pozorováním. V některých případech ale nejsme schopni původní měření dohledat a pak nám nezbyde, než se spolehnout na pouze na nespolehlivá publikovaná data v podobě okamžiků T_m .

Postupy používané k analýze dat jsou založeny na rigorózní aplikaci nelineární, váhované metody nejmenších čtverců užívané naráz pro všechna relevantní data obsahující fázovou informaci. Naše technika vůbec nevyužívá O-C diagram jako mezistupeň při zpracování dat. O-C diagramy se ovšem s výhodou používají pro vizuální

kontrolu adekvátnosti použitých modelů. Metoda se může úspěšně aplikovat jak pro časově sevřené časové řady, tak i na pozorování přehlídek oblohy.

5.4.1 Popis metody

Předpokládejme, že veškeré pozorované *fázové křivky* proměnné hvězdy lze uspokojivě popsat jedinou obecnou modelovou funkcí $F(\vartheta, \mathbf{b})$, popsanou zde g_b parametry tvořícími tzv. vektor parametrů křivky \mathbf{b} , kde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_{g_b})$. Při našich výpočtech předpokládáme, že tvar všech fázových křivek je konstantní a časová proměnnost je zcela dána fázovou funkcí $\vartheta(t, \mathbf{a})$, jejíž vlastnosti byly probrány v podkapitole 5.2.2 i pro případ proměnné periody. Budeme předpokládat, že fázová funkce $\vartheta(t, \mathbf{a})$ bude popsána nějakým vhodným modelem určeným uspořádanou g_a -ticí parametrů $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_j, \dots, a_{g_a})$.

Pro realistické modelování fázových změn pro data všech typů potřebujeme g_b volných parametrů pro popis modelové funkce $F(\vartheta, \mathbf{b})$ a g_a volných parametrů pro popis fázové funkce $\vartheta(t, \mathbf{a})$. Výpočet volných parametrů je iterativní a to se základní podmínkou MNC, že suma $\chi^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ kvadrátu podílu $(\Delta y_i / \sigma_i)^2$ je minimální, přičemž σ_i je individuální nejistota i -tého měření, zatímco $\Delta y_i = y_i - F(\vartheta_i, \mathbf{b})$ je rozdíl i -tého měření y_i a jeho modelové předpovědi $F(\vartheta_i)$. Tedy

$$\Delta y_i = y_i - F(\vartheta_i); \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta y_i}{\sigma_i} \right)^2; \quad \vec{\nabla} \chi^2 = \mathbf{0}; \quad \Rightarrow \quad (5.61)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F(\vartheta_i, \mathbf{b})}{\partial b_j} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\sigma_i^2} \frac{\partial F(\vartheta_i, \mathbf{b})}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta(t_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0.$$

Celkem získáme $g = g_a + g_b$ rovnic s g neznámými volnými parametry. Systém rovnic je nelineární, což m.j. znamená, že parametry modelu nelze určit přímo, ale pomocí iterací. Nejčastěji postupujeme tak, že si funkci $F(\vartheta, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ linearizujeme tak, že ji nahradíme jejím Taylorovým rozvojem kolem odhadu parametrů \mathbf{a} a \mathbf{b} , \mathbf{a}_0 a \mathbf{b}_0 . Pak platí:

$$F[\vartheta(t, \mathbf{a}), \mathbf{b}] \simeq F[\vartheta(t, \mathbf{a}_0), \mathbf{b}_0] + \vec{\nabla}_{\mathbf{b}} F(\vartheta, \mathbf{b}) \Delta \mathbf{b} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \vec{\nabla}_{\mathbf{a}} \vartheta(t, \mathbf{a}) \Delta \mathbf{a}, \quad (5.62)$$

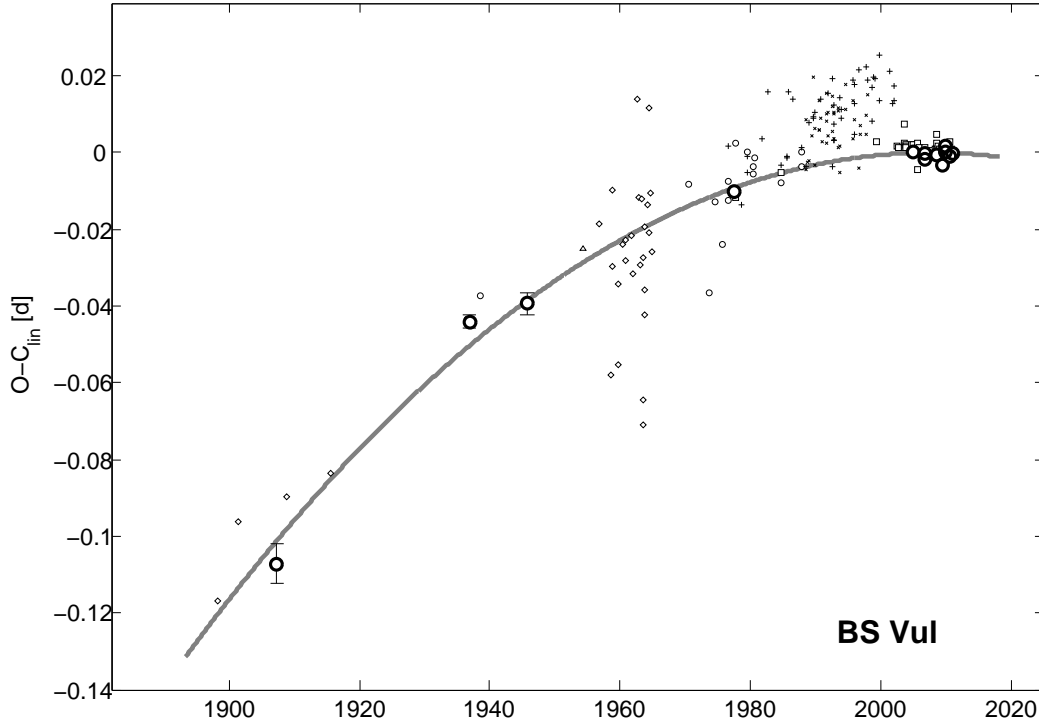
kde $\vec{\nabla}_{\mathbf{b}}$ a $\vec{\nabla}_{\mathbf{a}}$ jsou označení gradientů skalárních funkcí $F(\vartheta, \mathbf{b})$ a $\vartheta(\mathbf{a})$ podle vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} . V rovnici (5.62) se místo g parametrů \mathbf{a} a \mathbf{b} objeví nových g parametrů $\Delta \mathbf{a}$ a $\Delta \mathbf{b}$, v nichž ovšem je rovnice pro funkci $F(t, \Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{b})$ již lineární a umíme ji tedy řešit maticovými metodami lineární regrese. K novému odhadu hodnot hledaných parametrů \mathbf{a} a \mathbf{b} dojdeme tak, že k předcházejícím odhadům korekci $\Delta \mathbf{a}$ a $\Delta \mathbf{b}$ korekci prostě přičteme¹⁴, tedy $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \Delta \mathbf{b}$. S těmito novými odhady parametrů výpočet znovu a znovu opakujeme až se přiblížíme k hodnotám sady parametrů, které se už v dalších iteracích nemění (vektory $\Delta \mathbf{a}$ a $\Delta \mathbf{b}$ se blíží k nulovým). Ukazuje se, že máte-li pro vektory parametrů \mathbf{a}_0 a \mathbf{b}_0 k dispozici dobrý počáteční odhad, konvergují tyto iterace rychle. Běžně potřebujeme pouze několik iteračních cyklů, abychom celou iterační proceduru dokončili.

Nejistoty nalezených parametrů jsou tytéž jako nejistoty odpovídajících korekčních členů $\Delta \mathbf{a}$ a $\Delta \mathbf{b}$. Podrobnější popis celé procedury najdete v kapitole 4.4.

¹⁴Ukazuje se, že není záhodno přičítat hned celou korekci, stačí, když korigujeme sadu parametrů jen o polovinu vypočtené korekce. Zvýší se tím sice počet nutných iterací, ale podstatně se tím zvýší stabilita řešení, které by jinak mohlo i divergovat.

5.4.2 Virtuální O-C diagram

Jakkoli k vlastnímu výpočtu hodnot parametrů modelu O-C diagram nepotřebujeme, bylo by nerozumné zbavovat se jej nadobro. O-C diagram nám totiž může účinně pomoci, a to zejména ve fázi, kdy se snažíme najít adekvátní modely pro pozorované změny periody. V tomto případě použijeme tzv. virtuální O-C hodnoty pro libovolný podsoubor pozorovacích dat. Navíc můžeme snadno sestavit diagram ilustrující časové změny okamžité periody $P(t)$.



Obrázek 5.3: Virtuální O-C diagram těsné, téměř kontaktní zákrytové dvojhvězdy BS Vulpeculae sestavený pomocí veškerých dostupných pozorovacích dat. Různými znaky jsou zde vynesena pozorování různých typu. Pověšimněte si, že poměrně silně se od střední křivky odchyli vizuální pozorování (+ a x), což prokazuje subjektivní charakter a tudíž i nespolehlivost tohoto typu informace o světelném chování zákrytové dvojhvězdy. Periodová analýza jasně nasvědčuje tomu, že perioda soustavy se zkracuje, což je důsledkem stacionárního přetoku látky směrem od primární složky k složce sekundární. Soustava se zřejmě v blízké budoucnosti stane kontaktní. Bližší informace v Zhu et al. (2012).

Použitím reziduí pozorovaných dat vzhledem k předpovědi pozorovaných hodnot Δy_j můžeme vytvořit jednotlivé fázové posuny vyjádřené ve dnech $(O-C)_j$ s individuální vahou W_j pro každé pozorování. Váhováný aritmetický průměr fázových posunů pak definuje pro libovolně sestavenou dílčí skupinu měření střední hodnotu $\overline{(O-C)}_i$ nebo odchylku okamžité periody pro danou skupinu měření od okamžité periody predikované modelem $\Delta P_k(t_k)$

$$(O-C)_j = -P(t_j) \Delta y_j \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)^{-1}; \quad W_j = \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)^2 \sigma_j^{-2}; \quad (5.63)$$

$$\overline{(O-C)}_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} (O-C)_j W_j}{\sum_{j=1}^{n_k} W_j}; \quad \Delta P_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} (O-C)_j \vartheta_j W_j}{\sum_{j=1}^{n_k} \vartheta_j^2 W_j}.$$

Výpočty $\overline{(O-C)}_k$ a ΔP_k následují až po nalezení modelových parametrů; tedy nemají, a ani nemohou mít žádný vliv na řešení modelu. Používají se pouze pro vizualizaci řešení. Obdobně můžeme vypočítat virtuální ‘pozorované’ hodnoty okamžité periody ze skupiny pozorování, které lze s výhodou použít pro vytváření působivých obrázků změn periody.

5.5 Fenomenologické modely fázových křivek

Teorie proměnnosti hvězd se pokouší s větším či menším úspěchem vytvářet tzv. *fyzické modely* proměnných hvězd. Cílem fyzických modelů je poznat příčiny proměnnosti a najít fyzické vlastnosti proměnných objektů. Pomocí modelů často dokážeme docela věrohodně předpovědět tvary světelných křivek. V astrofyzice je ovšem velice důležitá i obrácená úloha, kdy se snažíme z tvaru pozorovaných světelných křivek určit fyzické parametry proměnného objektu. Tato úloha občas nemá řešení, pokud dotyčný model nezohledňuje veškeré příčiny proměnnosti, dosti často pak nemá jednoznačné řešení, zejména pokud samotné pozorování není extrémně přesné. Důvodem je skutečnost, že nejrůznější kombinace parametrů dokáží zhruba stejně dobře popsat pozorovanou skutečnost.

Jak jsme již ukázali, pro periodovou analýzu nepotřebujeme znát jaké jsou skutečné fyzické parametry proměnného objektu, postačí jen najít takový model světelné křivky, který by pozorovanou realitu dostatečně přesně vystihl, a to s nejmenším počtem parametrů, přičemž vůbec nesejde na tom, jaké jsou příčiny toho, že ona křivka vyhlíží tak, jak vyhlíží. Cílem tedy není řešit otázku proč?, ale jak? Zajímá nás nyní jen jevová stránka věci, jde nám o fenomenologický popis skutečnosti, o vytváření tzv. *fenomenologických modelů*.

5.5.1 Rotující hvězdy s fotometrickými skvrnami

Existuje velká skupina rotujících proměnných hvězd, které mění svoji jasnost, protože se na jejich povrchu vyskytují rozsáhlé tzv. ‘fotometrické’ skvrny, jasnější nebo tmavší než okolní povrch. Zkušenost ukazuje, že pokud zrovna neanalyzujete data pořízená s přesností 0.0003 mag a lepší, postačí k popisu jejich světelné křivky harmonický polynom 2. stupně. Doporučujeme přitom počátek počítání fázové funkce ϑ v okamžiku M_0 umístit do jednoho z extrémů následujícího modelu světelné křivky rotující skvrnitě hvězdy v určité barvě

$$\begin{aligned} F_c(\vartheta) &= A_c \Psi_c(\vartheta, b_{1c}, b_{2c}) + m_{0c}, \text{ přičemž} \\ \Psi_c(\vartheta) &= \sqrt{1 - b_{1c}^2 - b_{2c}^2} \cos(2\pi\vartheta) + b_{1c} \cos(4\pi\vartheta) + \frac{2}{\sqrt{5}} b_{2c} \left[\sin(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2} \sin(4\pi\vartheta) \right], \end{aligned} \quad (5.64)$$

kde m_{0c} je střední hvězdná velikost, případně rozdíl hvězdné velikosti vzhledem ke srovnávací hvězdě, A_c je v tomto případě efektivní semiamplituda (poloviční amplituda) a $\Psi_c(\vartheta)$ je normovaná funkce vyjadřující tvar světelné křivky, pro niž platí, že $\int_0^1 \Psi_c^2 d\vartheta = \frac{1}{2}$. Parametr funkce Ψ , b_{1c} vyjadřuje špičatost fázové funkce v okolí základního extrému, zatímco b_{2c} kvantifikuje míru její asymetrie. Takto zapsaný model má výhodu v tom, že vzájemně odděluje amplitudu a tvar světelné křivky. Dosti často se totiž stává, že existuje jen jeden dominantní mechanismus způsobující kontrast fotometrických skvrn, které tak budou kontrastní stejnou měrou ve všech studovaných fotometrických filtrech. Z hlediska blízkého pozorovatele to znamená, že struktura povrchu nebude mít výrazné barvy, vzdálený pozorovatel odkázaný na pozorování

celkových změn jasnosti právě viditelného hvězdného disku to pak pozná podle toho, že tvary světelných křivek ve všech fotometrických barvách budou v rámci pozorovacích chyb totožné.

Za těchto okolností bude v modelu světelné křivky v libovolné barvě normovaná funkce tvaru světelné křivky totožná, tedy $\Psi_c(\varphi) = \Psi(\varphi)$, kde

$$\Psi(\vartheta, b_1, b_2) = \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2} \cos(2\pi\vartheta) + b_1 \cos(4\pi\vartheta) + \frac{2}{\sqrt{5}} b_2 \left[\sin(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2} \sin(4\pi\vartheta) \right], \quad (5.65)$$

kde koeficienty b_1, b_2 , popisující tvar světelné křivky, budou stejné pro všech použité filtry. Tím se výrazně sníží počet volných parametrů, což zlepší hodnověrnost výsledků.

Pokud se asymetrický člen b_2 blíží nule, znamená to, že buď je na povrchu přítomna jen jediná dominantní víceméně symetrická fotometrická skvrna nebo jsou tam dvě symetrické dominantní fotometrické skvrny se středy na polednicích s délkou odlišnou o 180° .

$$\Psi_c(\vartheta) = \sqrt{1 - b_{1c}^2} \cos(2\pi\vartheta) + b_{1c} \cos(4\pi\vartheta) \text{ nebo } \Psi(\vartheta) = \sqrt{1 - b_1^2} \cos(2\pi\vartheta) + b_1 \cos(4\pi\vartheta). \quad (5.66)$$

U chemicky pekuliárních hvězd se často setkáváme s tím, že se tvary jejich světelných křivek liší, jejich skvrny jsou pestrobarevné. Znamená to, že se zde uplatňují srovnatelnou měrou dva i více mechanismů vytvoření jasových kontrastů. U naprosté většiny CP hvězd ale lze vystačit s modelem, kde pozorovaný tvar světelné křivky předpokládáme ve tvaru lineární kombinace dvou tvarových funkcí

$$\Psi_c(\vartheta) = d_{1c} \psi_1(\vartheta) + d_{2c} \psi_2(\vartheta), \quad \text{kde} \quad (5.67)$$

$$\psi_j(\vartheta) = \sqrt{1 - b_{1j}^2 - b_{2j}^2} \cos(2\pi\vartheta) + b_{1j} \cos(4\pi\vartheta) + \frac{2}{\sqrt{5}} b_{2j} \left[\sin(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2} \sin(4\pi\vartheta) \right].$$

Bázi funkcí ψ_1 a ψ_2 lze pootočít tak, že tyto funkce budou vzájemně ortogonální. Automaticky to tak vyjde, pokud zmiňované elementární funkce hledáme metodou hlavních složek (PCA). V tom případě bude i výsledná funkce tvaru světelné křivky normovaná.

Bázi však lze pootočít i tak, že elementární funkce budou symetrické, s centry ve fázích φ_{01} a φ_{02} :

$$\psi_j = \sqrt{1 - b_j^2} \cos[2\pi(\vartheta - \varphi_{0j})] + b_j \cos[4\pi(\vartheta - \varphi_{0j})], \quad \text{kde } j = (1, 2). \quad (5.68)$$

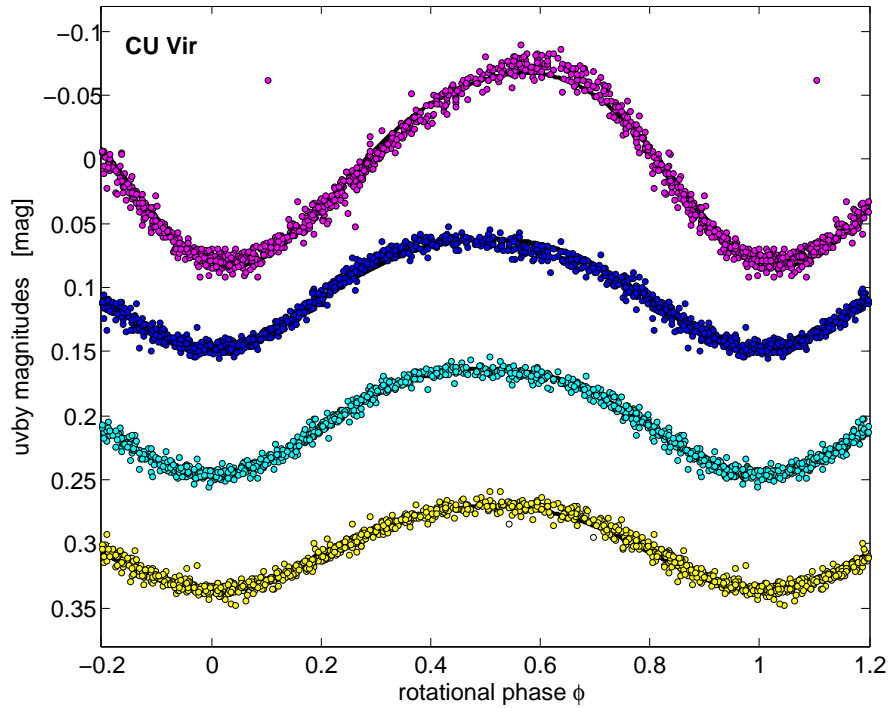
Takový model lze velmi snadno interpretovat jako výsledek existence dvou víceméně symetrických skvrn s fotocentry v příslušných fázích φ_{01} a φ_{02} . Jistý problém nastává při interpretaci hrbolek v protilehlých fázích, které jsou zjevně artefaktem zvoleného, příliš jednoduchého modelu harmonické funkce. Zde je východiskem zvolení jiného, ‘fyzikálnějšího’ fenomenologického modelu pro elementární tvarové funkce. Dosti se nám osvědčila prostá gaussova funkce

$$\psi_j(\vartheta, b_j, \varphi_{0j}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_j}{b_j} \right)^2 \right], \quad \text{kde } \varphi_j = (\vartheta - \varphi_{0j}) - \text{round}(\vartheta - \varphi_{0j}). \quad (5.69)$$

Model světelné křivky za těchto okolností vyhlídí odlišně, odlišný je význam parametrů v něm:

$$F_c(\vartheta) = A_{c1} \psi_1(\vartheta, \varphi_{01}, b_1) + A_{c2} \psi_1(\vartheta, \varphi_{02}, b_2) + m_{0c}, \quad (5.70)$$

kde A_{c1}, A_{c2} jsou amplitudy změn jasnosti v příslušném fotometrickém filtru pro první a druhou skvrnu, parametry b_1, b_2 jsou pološířky těchto skvrn vyjádřené ve zlomcích periody, m_{0c} je hvězdná velikost hvězdy v barvě c ve chvíli, kdy žádná ze skvrn není viditelná. Při určitých konfiguracích skvrn se ovšem zhusta stává, že tuto hodnotu nedosáhne hvězda nikdy, protože vždy bývá aspoň kousek ze skvrny viditelný.



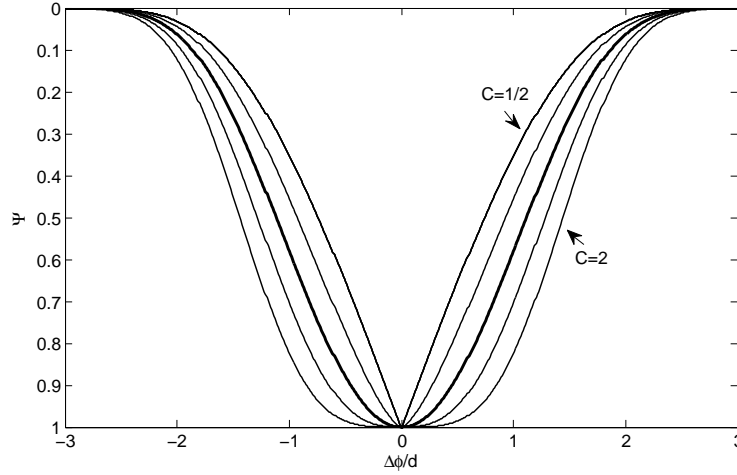
Obrázek 5.4: Fázová křivka světelných změn chemicky pekulární hvězdy CU Virginis podle pozorování Diany Pyperové provedených ve Strömgenově středně-pásmovém fotometrickém systému *uvby*. Proložení světelných křivek bylo realizováno jako součet dvou gaussových křivek s centry kolem fáze 0.4 a 0.6 (viz 5.69). Stejně dobrého proložení bychom dosáhli, pokud bychom světelné křivky v každém z filtrů zvlášť proložili harmonickým polynomm 2. stupně. Problém by ovšem byl s interpretací takového fitu. Poznamenejme, že i v tak perfektním materiálu, jakým toto pozorování bezesporu je, se najde několik odlehlých bodů.

A ještě důležitou poznámku. Je třeba se rozhodnout, které parametry vlastně budeme hledat. Když půjdeme po dvojici fází centra skvrn φ_{01} a φ_{02} , pak je třeba zafixovat počátek počítání fázové funkce M_0 . Lze postupovat i tak, že si počátek M_0 ztotožníme s centrem jedné z skvrn, dejme tomu s tou první. Pak ovšem fixujeme parametr $\varphi_{01} \equiv 0$. Pokud bychom tohoto doporučení nedbali, pak by hledání parametrů modelu nezadržitelně divergovalo.

5.5.2 Zákrytové dvojhvězdy

Většina studií týkajících se studia změn oběžných period zákrytových dvojhvězd je založena na technice rozboru O-C diagramu, i když několik nejpropracovanějších programů řešení světelných křivek jako jsou např. PHOEBE, FOTEL nebo Wilsonův-Devineyho program nabízí přímou periodovou analýzu ve smyslu výše nastíněné metody. Doporučuji všem použít tyto utility, kdyby už k ničemu jinému, tak aspoň k simulování světelné křivky, kterou pak lze použít jako vzorovou světelnou křivku příslušné zákrytové dvojhvězdy.

Ovšem mnohem jednodušší je použít k její reprezentaci fenomenologický model světelné křivky zákrytové dvojhvězdy. Vypracovali jsme soubor modelů světelných křivek zákrytových soustav, který je schopen popsat většinu pozorovaných světelných křivek s použitím minimálního počtu volných parametrů. Např. následující fenomenologický model může být aplikován



Obrázek 5.5: Obrázek ukazuje jak odlišné normalizované typy světelných křivek $\Psi(\Delta\varphi/d, C)$ v okolí středu zákrytu náš fenomenologický model nabízí. Předělová křivka s $C = 1$ je zvýrazněna tučnější čarou. Pro hodnoty parametru $C < 1$, má modelová křivka v nule skok v derivaci, jinak se všude chová mravně. Pomocí modelu lze realisticky modelovat i světelné křivky se zastávkou $C > 1$. Při srovnání reálných a modelových světelných křivek vyplývá, že největší odchylky nacházíme v centru zákrytu a na vzdálených křídlech. Pro periodovou analýzu jsou zcela rozhodující oblasti kolem inflexních bodů, a tam naše modelová světelná křivka modeluje skutečnost velmi dobře.

na většinu těsných dvojhvězd s kruhovými drahami (minima ve fázích $\varphi = 0; 0,5$). Model dobře popisuje vzhled obou minim jasnosti způsobených zákrytem, včetně minim se zastávkou, efekty blízkosti složek (elipticita složek, efekty odrazu a gravitačního ztemnění) lze popsat zavedením dalších fenomenologických členů.

$$\psi_{1,2}(\vartheta) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[1 - \cosh \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right) \right] \right\}^{C_{1,2}}; \quad (5.71)$$

$$F_c(\vartheta) = m_{0c} + b_{1c} \psi_1(\vartheta, C_{1c}, d_{1c}) + b_{2c} \psi_2(\vartheta, C_{2c}, d_{2c}), \quad (5.72)$$

kde

$$\vartheta = (t - M_0) / P; \quad \varphi_1 = \vartheta - \text{round}(\vartheta); \quad \varphi_2 = (\vartheta - \frac{1}{2}) - \text{round}(\vartheta - \frac{1}{2}). \quad (5.73)$$

b_{1c} a b_{2c} jsou hloubky primárního a sekundárního minima v barvě c , $d_{1,2}$ jsou parametry popisující šířku zákrytů, $C_{1,2}$ vyjadřuje špičatost minim světelné křivky během zákrytu.

V první aproximaci lze křivku minim vyjádřit jednodušeji, např. pomocí Maclaurinova rozvoje 4. řádu funkce \cosh

$$\psi_{1,2}(\varphi_{1,2}) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right)^4 \right] \right\}^{C_{1,2}} \quad (5.74)$$

nebo

$$\psi_{1,2}(\varphi_{1,2}) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right)^2 \right] \right\}^{C_{1,2}} \quad (5.75)$$

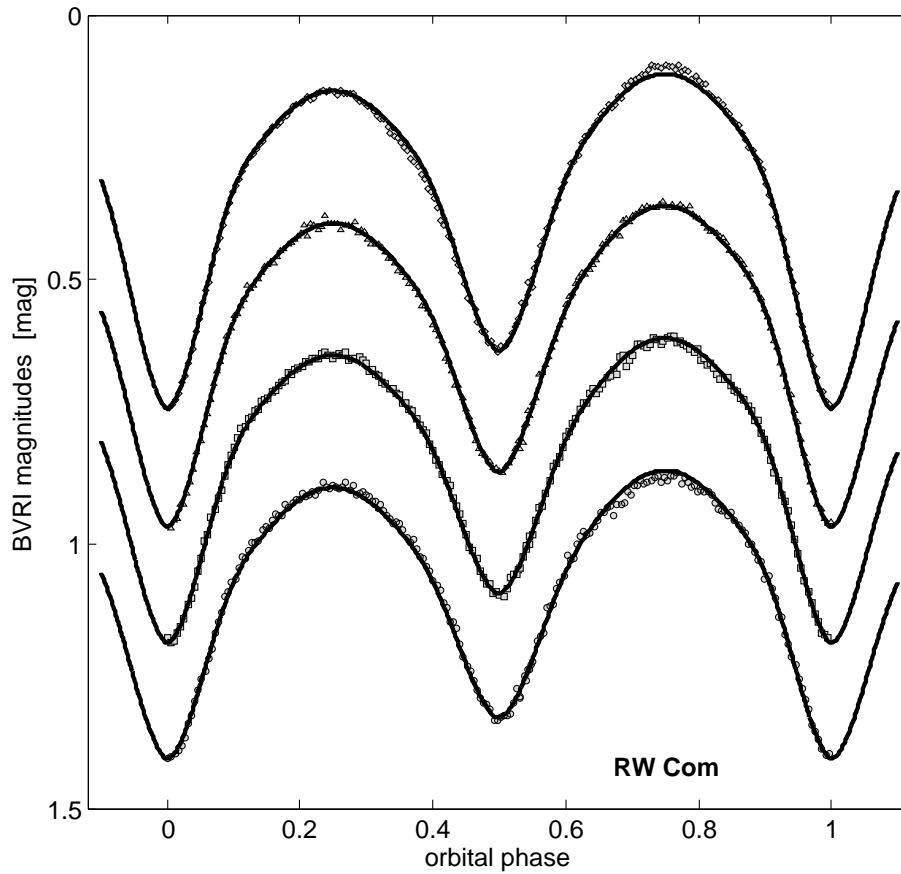
případně

$$\psi_{1,2}(\varphi_{1,2}) = \exp \left[1 - \cosh \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right) \right]; \quad (5.76)$$

$$\psi_{1,2}(\varphi_{1,2}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d_{1,2}} \right)^2 \right]; \quad (5.77)$$

$$\psi_{1,2}(\varphi_{1,2}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{1,2}}{d} \right)^2 \right]. \quad (5.78)$$

Obecně to vše platí jen pro určitou vlnovou délku, ale často lze model funkce $\psi_{1,2}(\varphi_{1,2})$ světelné křivky použít i pro různé filtry. Nestejná teplota zakrývajících se složek a tím i různé hloubky primárních a sekundárních minim v různých barvách se dobře vyjádří nestejnými hloubkami b_{1c} , b_{2c} ve vztahu (5.72).



Obrázek 5.6: Světelné křivky téměř kontaktní zákrytové dvojhvězdy RW Com ve filtrech *BVRI*. Je zřejmé, že světelné křivky v různých barvách jsou si dosti podobné, tedy i v tom, že jasnost dvojhvězdy se nemění jen při zákrytech, ale neustále. Z toho důvodu je potřeba zavést ještě harmonické křivky, jimiž lze tzv. “proximity effect” poměrně obstojně reprezentovat. Povšimněte si, že výšky maxim jasnosti se od sebe liší, nejvíce v modré oblasti spektra, nejméně v infračerveném oboru. Jde o tzv. O’Connellův jev, který se nejčastěji vysvětluje výskytem temných fotosférických skvrn. Poměrné výšky obou maxim se během času mění.

5.5.3 Spektroskopická proměnnost

Další důležitou součástí komplexní fázové informace, kterou nám proměnné hvězdy poskytují, představují změny spektra. Obecně vzato i dosud probírané světelné změny jsou změnami spektroskopickými, s tím, že rozhodující zde jsou variace spojitého spektra. Nicméně, např. u hvězd se silnými spektrálními čarami a spektrálními pásy či hranami, mohou fotometricky důležitou roli hrát změny v intenzitě těchto čar. Zde záleží jak na typu hvězdy, tak i na spektrálním oboru. Zatímco v optickém oboru lze zmíněné efekty tohoto tzv. ‘line blockingu’ zpravidla zanedbat, v blízkém a zejména vzdáleném ultrafialovém oboru mohou být změny intenzit čar velmi důležité a prostřednictvím přerozdelení energie mezi jednotlivými částmi spektra mohou způsobovat změny úrovně spojitého spektra. Tato poznámka se týká především CP hvězd, ale také i hvězd chladnějších s molekulárními pásy ve spektru.

Spektroskopickou proměnností se běžně myslí proměnnost profilů vybraných spektrálních čar, speciálně pak nějakých kvantitativních charakteristik zmíněné čáry, s nimiž se pak pracuje, jako jsou např. radiální rychlost příslušné čáry, změny centrální intenzity čáry nebo její ekvivalentní šířky. Příčiny změn bývají rozličné, může jít o změny vlastností právě přivrácené části hvězdné atmosféry, důležitou roli zde sehraává i hvězdná rotace, která v podstatě určuje tvar profilu většiny absorpčních čar většiny proměnných hvězd. Ze změn profilů spektrálních čar ve vysokodisperzním spektru lze pomocí tzv. Dopplerovy tomografie odvodit např. rozložení chemických prvků na povrchu hvězd. Tyto techniky patří k vrcholům v interpretaci spektroskopických změn a k jejím výsledkům je dobré se vždy stavět s určitou rezervovaností, vyplývající z celého procesu zpracování spektroskopické informace.

Naopak studie změn radiálních rychlostí změřených zpravidla z polohy dobře definovaných čar či všech čar v pozorovaném spektru, jsou většinou dosti spolehlivé, navíc techniky změn radiálních rychlosti dozrávají do svého zlatého věku, protože se jejich prostřednictvím jednak určují hmotnosti v hvězdných systémech, jednak se jimi detekuje přítomnost dalších, zpravidla temných složek násobných systémů tvořených nejen hvězdami, ale i planetami. V případě, že nepozorujeme žádné změny světelné, bývá spektroskopická proměnnost velmi solidní náhražkou fotometrické proměnnosti.

Další informaci poskytuje polarizace světla a její změny v různých úsecích spektra, které dávají informace o změnách magnetického pole, případně alespoň jeho konfiguraci vzhledem k pozorovateli.

5.6 Simultánní modelování nestejnorodých zdrojů fázové informace

Výhodou přímé metody periodové analýzy je, že dokáže využít a zkombinovat veškeré zdroje fázové informace, a to bez ohledu na jejich faktickou odlišnost a rozdílnou kvalitu. Právě toto modelování fázové proměnnosti je její nejdůležitější a na výsost kreativní etapou periodové analýzy pomocí přímé metody. Všechny další části se dají zautomatizovat, ale modelování proměnnosti vždycky zůstane ukázkou toho, jak dokážete vytěžit z dat, která máte k dispozici, maximum informací, jak dokážete být kritičtí, předvídaví a pružní ve vašem pohledu na daný objekt. A protože data jsou pokaždé jiná a jiný je i objekt zkoumání, nemohou být výpočetní programy nikdy stejné, musí se lišit případ od případu. Nemožnost algoritmizace práce je pak hlavním důvodem, proč přímou metodu

periodové analýzy používá jen zlomek počtu astronomů zabývajících se výzkumem proměnných hvězd.

Zásadou je, že se veškerá měření daného objektu y_i , týkající se jednoho objektu zpracovávají simultánně, a že kdykoli je možné do zpracování přidat nová data libovolného původu. Vtip toho přístupu spočívá v tom, že pro modelování pozorovaných časových změn daného objektu nejrůznějšího druhu použijeme **jedinou** speciálně sestavenou modelovou funkci $F[\vartheta(t, \mathbf{a}), \mathbf{b}]$, která ale popisuje fázové změny **všech typů** použitých dat¹⁵. Modelovou funkci žádoucích vlastností můžeme vytvořit jako skalární součin sloupcového vektoru dílčích modelových funkcí pro i -té měření s q složkami: $\mathbf{F}_i = [F_{1i}, F_{2i}, \dots, F_{ki}(\vartheta(t_i, \mathbf{a}), \mathbf{b}), \dots, F_{qi}]^T$ a vektoru přepínačů $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{ik}, \dots, \eta_{iq}]$ se složkami nabývajících hodnot 0 nebo 1. Proložená fázová funkce pro i -té měření v čase t_i a její gradient podle parametrů \mathbf{a} a \mathbf{b} pak budou dány vztahem:

$$F_i[\vartheta(t_i, \mathbf{a}), \mathbf{b}] = \boldsymbol{\eta}_i \mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^q \eta_{ik} F_{ki}[\vartheta(t_i, \mathbf{a}), \mathbf{b}], \quad (5.79)$$

$$\vec{\nabla} F_i[\vartheta(t_i), \mathbf{a}), \mathbf{b}] = \boldsymbol{\eta}_i \vec{\nabla} \mathbf{F}_i = \quad (5.80)$$

kde výrazem $\vec{\nabla} \mathbf{F}_i$ je myšlena matice $q \times g$, kde g je počet stupňů volnosti (počet volných parametrů), $\vec{\nabla} \mathbf{F}_i = [\vec{\nabla} F_{1i}, \dots, \vec{\nabla} F_{qi}]^T$.

Nejnáročnějším úkolem je příprava výpočtu - regrese, tedy vytipování vhodných dílčích modelových funkcí, jejich matematická formulace, kde je třeba hledět např. i na to, aby se v jejich vyjádření nevyskytovaly lineárně závislé parametry a správně sestavení matice přepínačů pro každé z měření. Ostatní kroky a spuštění iterací je už pak jen věcí rutiny.

Vhodnou formulací modelu proměnnosti lze například v jednom výpočtu současně zpracovávat informace skryté v přímém pozorování příslušné proměnné hvězdy a zprostředkované informace dané např. okamžiky extrémů světelných křivek. Jednotlivá „měření“ se zpracovávají prostředky metody nejmenších čtverců ve tvaru se sumou χ^2 . Rozhodující roli zde ovšem hraje nutnost odhadu nejistoty příslušné veličiny, což lze standardně zvládat pomocí iterací, kde přisuzujeme konkrétní nejistotu definovaným skupinám měření - pozorování od jednoho pozorovatele, nebo třeba podle metody pozorování. Zmíněné přístup má značnou výhodu v tom, že dokáže zpracovat simultánně takřka vše, co máme k dispozici. Důležité ovšem je, abychom si takto do našich kalkulací nezanášeli příliš mnoho odlehlých bodů, s nimiž si samotná metoda nejmenších čtverců neporadí. V této situaci je dobré sáhnout po některé z variant robustní regrese, třeba po té, co je popsána v 4.5.1.

5.7 Hledání period. Periodogramy

Hledáním periodických jevů v časových řadách se zabývá řada vědních disciplín. Tam se zpravidla daří získávat souvislé pozorovací řady s konstantním rozestupem po sobě následujících měření. V takových případech se s velkou výhodou k rozborům periodicity využívá klasické

¹⁵Tak třeba pro jistou nejmenovanou proměnnou hvězdu máme k dispozici fotometrii UBV od dvou různých pozorovatelů, dále pozorování v CCD v R a I, dále křivku radiálních rychlostí a třeba magnetického pole. Všechny fázové křivky se vzájemně liší, ale týkají se jednoho objektu, byť pozorovaného v různou dobu.

Fourierovy analýzy. V případě studia hvězd se s podobnou situací prakticky nesetkáme, proto o ní ani nebudeme mluvit.

V astronomické literatuře najdeme celou řadu matematických, zpravidla počítačových metod k hledání periodicity, a nové se stále objevují. Jsou však vždy obměnou dvou základních principů, pomocí nichž lze v datech s nepravidelným časovým rozložením hledat:

1. Metody, které pro každou zkoušku periodu setřídí data do fázového diagramu a v jednotlivých malých fázových intervalech (binech) pak zkoumají míru rozptylu bodů. Za nejlepší se považuje ta perioda, pro níž je rozptyl ve všech fázích intervalu minimální. Tyto metody *minimalizace fázového rozptylu* mají tu výhodu, že o tvaru světelné křivky se toho předpokládá velice málo, a jsou tedy vhodné pro situaci, kdy o dotyčné proměnné hvězdě nevíme prakticky nic.
2. Metody, které předem předpokládají určitý tvar světelné křivky, zpravidla ve formě jejího modelu, a pak hledají takovou periodu, pro níž je shoda modelové funkce s pozorovanými daty nejlepší. Ona shoda se hledá nejčastěji regresními metodami založenými na metodě nejmenších čtverců. Výhodou tohoto přístupu je, že dostaneme kromě odhadu periody i odhad nejistoty jejího určení, jakož i matematický popis tvaru proložené křivky změn, což se může pro další zpracování hodit. Musíme se však strejit do tvaru světelné křivky. Kdybychom třeba pro zákrytovou dvojhvězdu předpokládali světelnou křivku ve tvaru sinusovky, což je jinak docela běžný předpoklad, asi bychom se k reálné oběžné periodě tak snadno nepropracovali.

Doporučený postup je tedy jasný: nejprve použít některou z variant metody minimalizace fázového rozptylu, najít periodu, ze tvaru světelné křivky odhadnout typ proměnné hvězdy a pro model její světelné křivky upřesnit nalezenou periodu a zjistit další charakteristiky světelné křivky a získat předpověď světelného chování hvězdy.

Při hledání periody zcela neznámé proměnné hvězdy metodou minimalizace fázového rozptylu je nezbytné zadat minimální a maximální předpokládanou periodu změn. Zde se nejčastěji klade za nejdelší možnou periodu délka celé časové řady, za minimální pak minimální časová vzdálenost mezi po sobě následujícími měřeními. Stejně ovšem je správná volba kroku prohledávání, s nímž měníme zkoušku periodu. Pokud bychom zvolili ten krok příliš velký, mohlo by se stát, že bychom správnou periodu mohli přeskočit. Na druhou stranu nemá smysl volit tento krok příliš krátký, neboť bychom si tak zbytečně prodlužovali celý výpočet. Pokud očekáváme sinusoidální světelnou křivku, pak stačí volit tak velký krok, že se rozdíl fází na začátku a na konci časové řady změní právě o desetinu periody. Je zřejmé, že za těchto okolností je rozumné od period přejít ke frekvencím, kde prohledávací krok je lineární. Je-li T délka časové řady a $\Delta\varphi$ požadovaný krok ve fázi (v případě sinusovky 0.1), pak krok pro prohledávání ve frekvencích je $\Delta f = \Delta\varphi/T$.

Je potřeba si uvědomit, jaké nároky tato podmínka klade. Jestli např. máme pozorování pokrývající 100 dní s minimální vzdáleností 0,1 dne, pak pro $\Delta\varphi = 0,1$ musíme zvolit frekvenční krok $0,001 \text{ d}^{-1}$ (cyklů za den) v intervalu možných period od 100 dní do 0,1 dne to bude $(1/0,1 - 1/100)/0,001 = 9990$ zkoumých frekvencí. Budou-li ale data pokrývat 1000 dní (3 roky), bude zapotřebí zkoumých frekvencí desetkrát víc. Existují-li v datech výrazné sezónní přestávky, je

účelné časovou řadu rozdělit na menší skupiny. Je-li v datech periodicitu, měla by se projevit i při zpracování v menších skupinách. Pak se můžeme opět vrátit k hromadnému zpracování ale interval prohledávaných frekvencí lze významně zúžit.

5.7.1 Metody minimalizace fázového rozptylu

V literatuře se setkáme s množstvím metod, z nichž ovšem většina je dosti náročná na čas, a proto se používají jen zřídka. Jsou však i výjimky...

Dosti známou variantou metody minimalizace fázového rozptylu je *Morbeyho varianta* z roku 1973 (Morbey, 1973). Spočívá v tom, že se data znormují a zkvantují na celočíselné hodnoty od 1 do 11. Pro každou zkoušku periodu se pak znormují fáze do intervalu celočíselných hodnot 1 až 10 (např. fázím 0,0 až 0,1 se přidělí index 1, apod.). Fázový rozptyl pro danou periodu se pak definuje jako součet rozdílů maximální a minimální hodnoty proměnné pro každou skupinu dat se stejným indexem normované fáze. Ideálně by pak měl být celkový fázový rozptyl nulový, pro neseříděná data pak dostáváme hodnotu $10 \times (11-1) = 100$. Vtip metody spočívá v tom, že data není nutno pro každou zkoušku periodu řadit vzestupně podle fáze, což je náročné na výpočetní čas.

Dnes nejrozšířenější a nejznámější je metoda navržená Stellingwerfem (1978), která spočívá v minimalizaci bezrozměrného parametru Θ , charakterizujícího míru kvality proložení střední světelnou křivkou. Rozšířenou a používanou metodou z této skupiny je i metoda, kterou publikoval Jurkevich (1971).

5.7.2 Periodogramy jako aplikace metody nejmenších čtverců

Periodogramy jsou vyhledávanými nástroji periodové analýzy, které velmi rychle ukážou, zda jsou změny studované proměnné hvězdy čistě aperiodické, nepředvídatelné, nebo zda jeví alespoň náznak periodicity. Periodogramy jsou v podstatě grafy závislosti určité veličiny charakterizující úspěšnost proložení modelu světelné křivky pro fixní hodnotu periody (nebo lépe její převrácené hodnoty, nebo-li frekvence) v závislosti na této periodě, či frekvenci. Zkušenost ukazuje, že reálná perioda (reálné periody) jsou blízké té periodě, pro niž jsme našli nejlepší shodu se správně zvoleným modelem.

Při hledání period na základě dat nerovnoměrně rozložených v čase se nám osvědčily periodogramy, k jejichž sestavení jsme využili modelování světelných křivek metodou nejmenších čtverců. Zde ovšem hodně záleží na adekvátnosti volby modelu světelné křivky daného objektu a také na definici kritéria úspěšnosti. To by mělo být zvoleno tak, aby bylo odolné proti očekávané nerovnoměrnosti rozložení pozorovaných dat v čase, aby respektovalo možnou rozdílnou povahu a kvalitu zpracovávaných dat, a zejména, aby jeho výsledky byly invariantní vzhledem ke změně počátku času.

5.7.2.1 Lineární regrese a její nástroje

Pro jednoduchost předpokládejme, že dokážeme předpokládanou světelnou křivku při fixní periodě P aproximovat vhodně vybraným lineárním modelem, tedy, že platí:

$$y(t) \cong y_p(t, P) = \sum_{j=1}^g \beta_j x_j(t, P) = \mathbf{x} \boldsymbol{\beta},$$

$$\mathbf{x}(t, P) = [x_1(t, P), x_2(t, P), \dots, x_g(t, P)], \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g]^T,$$

kde $y(t)$ je pozorovaná veličina v konkrétním čase t , $y_p(t, P)$ její předpověď zvoleným modelem, g je stupeň volnosti tohoto modelu, $x_j(t, P)$ jsou vhodně vybrané funkce, závislé na čase a také na zvolené periodě, která zde zastává funkci nezávislé proměnné. β je pak vektor parametrů se k j -té zvolené funkci.

Nejjednodušším a nejčastěji používaným lineárním modelem světelné křivky periodicky proměnného objektu je regresní funkce popsaná třemi parametry:

$$y_p(t, P) = \beta_1 \cos(2\pi t/P) + \beta_2 \sin(2\pi t/P) + \beta_3 = \mathbf{x} \beta,$$

$$\mathbf{x}(t, P) = [\cos(2\pi t/P), \sin(2\pi t/P), 1], \quad \beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T.$$

Model lze ještě více zjednodušit, pokud předem upravíme pozorovaná data tak, aby jejich střední hodnota byla rovna nule; tím nám odpadne absolutní člen β_3 .

K dalším výpočtům s výhodou využijeme maticového počtu, kde si zavedeme sloupcový vektor závislé veličiny \mathbf{y} s délkou n , matici \mathbf{X} s rozměrem $n \times g$ a čtvercovou diagonální \mathbf{W} matici s hodnotami $n \times n$, dále pak pomocné matice \mathbf{U} ($g \times 1$), \mathbf{V} ($g \times g$), čtvercovou kovarianční matici \mathbf{H} ($g \times g$) a vektor předpovědí pro jednotlivá měření \mathbf{y}_p ($n \times 1$):

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \\ \vdots \\ y_{np} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{y}_p = \mathbf{X} \beta.$$

V metodě nejmenších čtverců hledáme vektor volných parametrů modelu β tak, aby byla splněna podmínka, že suma váhovaných čtverců odchylek modelových hodnot a hodnot pozorovaných $\chi^2(\beta, P)$ je minimální:

$$\chi^2(\beta, f) = (\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta)^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta) = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - 2 \beta^T \mathbf{U} + \beta^T \mathbf{V} \beta,$$

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial \beta} \right|_{\beta=\mathbf{b}} = \mathbf{0} = -2 \mathbf{U} + 2 \mathbf{V} \mathbf{b}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_p = \mathbf{X} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{U}. \quad (5.81)$$

\mathbf{b} je pak vektor řešení příslušné regrese.

5.7.2.2 Varianta I - suma čtverců odchylek

Periodová analýza vycházející z metody nejmenších čtverců nabízí elegantní možnost jak zkonstruovat periodogram, a totiž sledovat jako parametr úspěšnosti proložení daným modelem přímo onu veličinu, kterou se při regresi minimalizujeme, a totiž sumu vážených kvadrátů odchylek, čili sumu $\chi^2(f)$. Ta bude funkcí zvolené frekvence f či odpovídající úhlové rychlosti ω či periody P , vzájemně svázanými vztahem $f = 2\pi\omega = 1/P$. Minimální sumu váhovaných čtverců odchylek $\chi^2(f)$, která je funkcí frekvence, lze pak pro případ lineární regrese zapsat takto:

$$\chi^2(f) = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} = \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{y}_p^T \mathbf{W} \mathbf{y}_p, \quad s(f) = \sqrt{\frac{\chi^2(f)}{\bar{w}(n-g)}}. \quad (5.82)$$

Pro zkonstruování periodogramu lze použít buď přímo sumu $\chi^2(f)$ nebo standardní odchylku $s(f)$, což má názornější význam¹⁶. Reálné periody se zde hledají v minimech závislosti.

¹⁶Někdy se též používá čtverec standardní odchylky - zvýrazní se tím minimální hodnoty.

Prohlédneme-li si pečlivěji vztah pro sumu čtverců odchylek $\chi^2(f)$ v první části (5.82), vidíme, že se zde nachází výraz $\mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$, který součtem váhovaných čtverců měřené veličiny (jasnosti), takže nijak nezávisí ani na modelu, jímž světelné křivky prokládáme, ani na frekvenci - je to tedy konstantní člen, který můžeme odečíst. „Živou“ částí vztahu je součin $\mathbf{b}^T \mathbf{U}$, který lze přepsat do mnoha zajímavých podob: $\mathbf{b}^T \mathbf{U} = \mathbf{b}^T \mathbf{V} \mathbf{b} = \mathbf{U}^T \mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{y}_p^T \mathbf{W} \mathbf{y}_p$, z nichž nejnázornější je asi ta poslední, kdy jde o sumu vážených čtverců předpovědí jednotlivých měření.

Alternativně tedy lze periodogram pojmout jako závislost této veličiny na periodě, či frekvenci a jejich reálné hodnoty hledat v maximech závislosti. Pokud pracujeme s pozorovacím daty, upravenými tak, že je jejich střední hodnota nulová, a světelné křivky modelujeme prostými sinusovkami, pak platí, že odpovídající amplituda změn s periodou P , $A_I(f) = \sqrt{8 \mathbf{y}_p^T \mathbf{W} \mathbf{y}_p / \sum W}$.¹⁷

Vzniká otázka, zda by nebylo lepší vynášet do periodogramů přímo onu amplitudu křivky, kterou dostaneme proložením světelné křivky. Předpokládáme-li, že modelem budou opět sinusovky, pak by taková amplituda mohla být vyjádřena velice elegantně: $A(f) = 2\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}$. Bohužel toto řešení, jakkoli i ono nezávisí na volbě počátku času, funguje dobře jen tehdy, budete-li mít velmi bohatý pozorovací materiál. V opačném případě se vám v periodogramu objeví řada falešných period, takových kde se při dané periodě shlukne většina bodů kolem jedné nebo dvou fází.

Pokud byste přece jen chtěli takový periodogram zkoušet, doporučuji vám vždy si vykreslit fázový obrázek pro nalezená maxima a hodně vážít, zda maximum v periodogramu není jen výsledkem náhodného shluknutí bodů, kde extrémy nalezené světelné křivky nejsou dostatečně pokryty pozorováním. Vhodným řešením, které poměrně úspěšně eliminuje takové situace, je níže popsaná Lombova-Scargleova metoda

5.7.2.3 Varianta II - Lombova-Scargleova metoda

Lombova-Scargleova metoda se osvědčuje při hledání period i v případech, kdy jiné metody selhávají. Nejdříve se vypočte takový posuv času, při němž se matice \mathbf{V} a tím i \mathbf{H} stanou diagonální. Veličina $Q(f)$ je volena tak, že dává stejné hodnoty jako bychom

¹⁷Je třeba se ještě přesvědčit, že ani suma vážených čtverců odchylek $R(f)$, ani standardní odchylka $s(f)$, ba ani amplituda změn $A_I(f)$ nejsou závislé na volbě počátku času. Budeme přitom předpokládat, že modelem světelné křivky bude $y_p = \mathbf{x} \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x}(f) = [\cos(2\pi ft), \sin(2\pi ft)]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$. Posuneme-li počátek času o interval Δt , $t' = t - \Delta t$, přejdeme k čárkovaným veličinám: $y'_p = \mathbf{x}' \mathbf{b}'$, kde $\mathbf{x}'(f) = [\cos(2\pi ft'), \sin(2\pi ft')]$, $\mathbf{b}' = [b'_1, b'_2]^T$. Model \mathbf{x}' lze vyjádřit pomocí \mathbf{x} takto: $\mathbf{x}'(f) = [\cos(2\pi ft - \varepsilon), \sin(2\pi ft - \varepsilon)] = [\cos(\varepsilon) \cos(2\pi ft) + \sin(\varepsilon) \sin(2\pi ft), \cos(\varepsilon) \sin(2\pi ft) - \sin(\varepsilon) \cos(2\pi ft)] = \mathbf{x} \mathbf{O}$, kde \mathbf{O} je matice otočení o úhel $\varepsilon = 2\pi \Delta / P$.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O} \mathbf{O}^T = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}' = \mathbf{X} \mathbf{O}; \quad \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}^T \mathbf{X}^T \Rightarrow \quad (5.83)$$

$$\mathbf{y}'_p(f) = [\mathbf{X}' (\mathbf{X}'^T \mathbf{W} \mathbf{X}')^{-1} \mathbf{X}'^T \mathbf{W}] \mathbf{y} = [\mathbf{X} \mathbf{O} \mathbf{O}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{O} \mathbf{O}^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}] \mathbf{y} = \mathbf{y}_p(f).$$

Z výše uvedených úprav plyne, to, co jsme nejspíš čekali, a totiž, že hodnoty modelových předpovědí $\mathbf{y}_p(f)$ zjevně nezávisí na konkrétní poloze počátku počítání času. Vzhledem k tomu, že jak suma vážených čtverců odchylek $R(P)$, tak standardní odchylka $s(f)$, i amplitudy změn $A_I(f)$ bezprostředně souvisejí s těmito předpověďmi, platí o nich totéž. Lze uzavřít, že periodogramy navržené v této sekci jsou matematicky korektní.

dostali v případě zcela rovnoměrného rozložení bodů.

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} \arctan \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sin(4\pi f t_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(4\pi f t_i)} \right] \quad (5.84)$$

$$Q(f) = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n y_i \cos[2\pi f(t_i - \tau)] \right\}^2}{\sum_{i=1}^n \cos^2[2\pi f(t_i - \tau)]} + \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n y_i \sin[2\pi f(t_i - \tau)] \right\}^2}{\sum_{i=1}^n \sin^2[2\pi f(t_i - \tau)]} \quad (5.85)$$

Podrobné zdůvodnění najdete např. v Press & Rybicki (1989).

5.7.2.4 Varianta III - signál/šum

Možný je i jiný přístup, jak potlačit ty frekvence, v nichž nejsou dostatečně pokryty všechny fáze. Amplitudy těchto frekvencí mají větší nejistotu. Tu dokážeme odhadnout, známe-li standardní odchylku proložení s a kovarianční matici \mathbf{H} . Dejme tomu, vyšetřujeme nejistotu amplitudy $Q(f) = \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}$, kterou budeme chápat jako signál, zatímco $\delta Q(f)$ zde bude zastupovat šum. Jejich poměrem dostaneme bezrozměrnou veličinu S/N .

$$\delta Q(f) = \frac{s \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b}}}{Q(f)}; \quad \frac{S}{N} = \frac{Q(f)}{\delta Q(f)} = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}{s \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b}}}. \quad (5.86)$$

5.7.3 Složitější situace

Pozor, ani po opravě na heliocentrický čas obecně nemusí pozorovaná perioda (frekvence) dějů souhlasit s periodou (frekvencí) tohoto děje, kterou by udal pozorovatel spojený s pozorovaným objektem, a to v důsledku Dopplerova jevu. V prvním přiblížení je tu rozhodující hodnota radiální rychlosti RV . Je-li P' pozorovaná perioda, f' pozorovaná frekvence a P vlastní perioda, f vlastní frekvence, pak platí jednoduchá relace:

$$\frac{P}{P'} = \frac{f'}{f} = 1 - \frac{RV}{c}. \quad (5.87)$$

Jestliže se k nám objekt blíží, jeví se nám frekvence dějů, které tam probíhají, vyšší, vzdaluje-li se, je tomu naopak. Tento vztah je důležitý i v situaci, kdy se radiální rychlost mění – třeba v důsledku oběžného pohybu Země nebo složek dvojhvězdy.

V katalogích jsou však výhradně uváděny periody pozorované, a to z toho důvodu, že u řady objektů velikost radiální rychlosti neznáme. Ta se standardně měří z posunu spektrálních čar, jejichž laboratorní frekvence (vlnové délky) známe.

Reálná pozorování je zpravidla obtížné hned správně rozšifrovat, a to hned z několika důvodů:

- pozorování jsou vždy zatížena chybami, ať už *náhodnými*, s nimiž se dokáže dosti dobře vyrovnat teorie chyb nebo tzv. *vyrovňovací počet*, nebo *systematickými*, jež nelze redukovat bez znalosti příčin toho, proč vznikají;
- zřídka se nám *podarí* pozorováním v jednom kuse získat celou světelnou křivku dostatečně dobře pokrytou body.

Jen výjimečně si můžeme být hned od počátku jisti, že perioda světelných změn, kterou se nám podařilo stanovit, je skutečně reálná. Nejčastěji se dopustíme těchto přehmatů:

- a) reálná perioda je ve skutečnosti dvojnásobná, ve světelné křivce jsou dvě na první pohled nerozeznatelné vlny. Zde je vhodné buď zpřesnit pozorování (zvětšit jejich počet), nebo získat dodatečnou informaci o periodicitě změn jinak než fotometricky;
- b) skutečná perioda je s fiktivní periodou v poměru malých přirozených čísel – to byl i případ periody Merkuru, o němž se původně soudilo, že jeho oběžná perioda se shoduje s rotační;
- c) perioda může být zdánlivá v důsledku určitého pravidelného rozložení okamžiků pozorování – hovoříme tu často o tzv. aliasech – více viz kapitola 5.7.4.

5.7.3.1 Dlouhodobý trend

Je zcela běžné, že se na světelných změnách konkrétní hvězdy uplatňuje více mechanismů, z nichž jen jeden vede k periodickým změnám, další se projevují nejčastěji systematickým poklesem nebo naopak vzestupem světelné křivky, který je modulován periodickou složkou. Při hledání periody je vhodné tento sekulární člen odečíst (týká se to zejména metod minimalizace fázového rozptylu) (a) nebo ještě lépe – přímo vtělit do modelu světelné křivky (b).

V případě (a) lze velikost sekulárního členu odhadnout tak, že hodnotami celé časové řady proložíme vhodnou funkci – nejčastěji polynomem, jehož funkční hodnoty pak odečteme. Nevýhodou tohoto postupu je, že je dosti háklivý na rozložení okamžiků pozorování v čase. V případě použití modelu světelné křivky lze tento model doplnit o člen odpovídající dlouhodobému trendu např. takto:

$$y(\beta, P, t) = A_0 + \sum_{j=1}^k [A_j \cos(2\pi t/P) + B_j \sin(2\pi t/P)] + \sum_{l=1}^p C_l \left(\frac{t - \bar{t}}{t_s} \right)^l,$$

kde \bar{t} je aritmetický průměr okamžiků pozorování, t_s je standardní odchylka okamžiků pozorování (většinou v JD). Polynom v tomto tvaru nevnese v dalším zpracování problémy v práci s příliš velkými čísly – hodnota zlomku $(t - \bar{t})/t_s$ i jeho mocnin bývá rozumně veliká.

5.7.3.2 Multiperiodické změny

Některé proměnné hvězdy mění své charakteristiky v několika periodách (např. hvězdy typu δ Sct). Za těchto okolností nejčastěji postupuje tak, že se pro výraznější z nich najde střední periodická světelná křivka a její hodnoty se odečtou od příslušných pozorovaných hodnot a hledají se další periody. Tento postup ale bývá občas nestabilní a přináší rozporuplné výsledky.

5.7.4 Zdánlivé periody (aliasy)

Budeme-li prohledávat periodicitu v určitém rozsahu frekvencí, lze očekávat, že se nám nabídne více period. V zásadě to může znamenat, že zkoumaná veličina vykazuje složitější periodické chování popsané kombinací změn v několika periodách. Dříve než ovšem k takovému závěru dojdeme, měli bychom se přesvědčit, zda tyto nabízené periody nejsou ve skutečnosti periody jen zdánlivé, které jsou výsledkem určitého rozložení zkoumaných dat v prostoru frekvencí. Je tedy nutno předem identifikovat všechny očekávané zdánlivé, falešné a přidružené (konjugované) periody.

Vznik falešných period si můžeme demonstrovat na následujícím příkladu. Představte se, že sledujeme proměnnou hvězdu, která má periodu přesně $P = 10/11$ dne, pravidelně každý den přesně o půlnoci světového času. Fázi v den 0 si označme 0,0. Příštího dne, $t = 1,00$ d, bude fáze $t/P = 1,10$, čili 0,10, další den pochopitelně 0,20 atd. Bude-li ovšem perioda 10 dní, pak dostaneme týž výsledek, stejně jako v případě, kdy perioda bude 10/21 dne, 10/31 dne nebo dokonce $-10/9$ dne(!) (světelná křivka je zde časově obrácená). Co mají všechny tyto periody společného? Vypočtěme si kolik cyklů uplyne po jednom dni u základní periody: 1,100, u první z falešných (spurious) period (desetidenní) je to pak 0,100 cyklů, u další 2,100 cyklu, případně 3,100 cyklu nebo $-0,900$ cyklu. Liší se tedy od základního cyklu o celé číslo k .

Předpokládejme, že měření provádíme s nějakou obecnou vzorkovací periodou P_v (třeba jednoho hvězdného dne: $365,2442/366,2442 = 0,99727$ tropického dne), pak během něj hvězda vykoná c_0 cyklů: $c_0 = P_v/P$. Pro falešné periody P_k spřažené (konjugované) se vzorkovací periodou P_v , pak platí: $c_k = P_v/P_k = c_0 + k = P_v/P + k$, kde $k = \pm 1, \pm 2$. Úpravou pak dostaneme pro hodnoty falešných period známý *Tannerův vztah* ve tvaru:

$$\frac{1}{P_k} = \left| \frac{1}{P} + \frac{k}{P_v} \right|; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

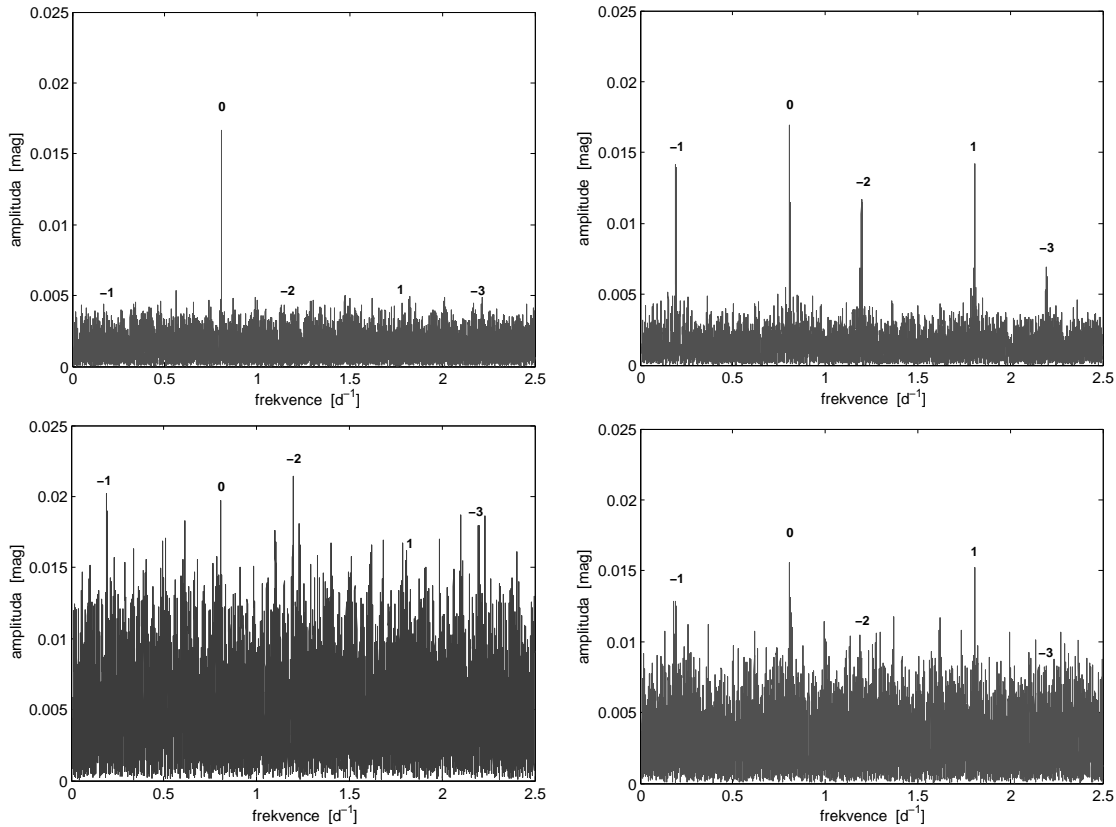
Pokud je světelná křivka se dvěma vlnami (eliptické proměnné, některé dvojhvězdy typu W UMa), je to efektivně totéž, jako by byla poloviční, a pro k tedy platí: $k = \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$ Snad každá pozorovací řada pozemských pozorování je vzorkována s frekvencí jednoho hvězdného dne $P_v = 0,99727$ d, při pozorování slabých hvězd, kdy se pozorovatelé vyhýbají úplňkům by se mohlo projevit vzorkování s periodou synodického měsíce $P_v = 29,5$ d a pravidelně se projevuje sezónní vzorkování s periodou tropického roku $P_v = 365,2442$ d.

Jak se bránit proti vzniku zdánlivých period? Důsledným narušováním vzorkování. V případě hvězdného dne je účinné sledování hvězdy i v době několika hodin před a po její horní kulminaci nebo ještě lépe sledováním hvězdy z jiné zeměpisné délky či z kosmického prostoru¹⁸. Se sezónním vzorkováním je to horší, zde platí, že hvězda by se měla sledovat souvisle po co nejdelší období v roce, a navíc nezávisle na fázi Měsíce.

5.7.4.1 Falešné periody

Je dobré odlišovat zdánlivé periody vzniklé přítomností určité periodicity v časovém rozložení jednotlivých pozorování a mezi falešnými periodami, které rovněž lze rozбором materiálu nalézt. Ty vznikají jako důsledek určité periodicity v *systematických chybách* měření, nejčastěji posunech. Falešná perioda o délce jednoho hvězdného dne se např. projeví tehdy, pozorujeme-li celou noc hvězdu a nekorigujeme-li její jasnost (špatně korigujeme) o extinkci. Stejně tak občas v materiálu najdeme falešnou periodu o délce 1 roku. Obecně bychom měli být vždy ostražití, objeví-li se nám v analýze periody jednoho dne, roku a jejich zlomků. Jinak test na falešné periody je prostý – měly by se totiž stejnou měrou projevit i v měřeních kontrolních neproměnných hvězd podobných vlastností a polohy na obloze.

¹⁸Všelékem na problémy se zdánlivými periodami je použití fotometrie z družice Hipparcos, kde okamžiky pozorování žádnou periodicitu nejeví.



Obrázek 5.7: Na těchto čtyřech obrázcích si můžete prohlédnout, jak vypadají *aliases* v periodogramu. První tři obrázky byly vytvořeny matematickou simulací skutečnosti, ten čtvrtý obrázek je ze života - zachycuje periodogram jedné z hvězd ve Velkém Magellanově mračnu podezřelé z příslušnosti k tzv. chemickým pekulárním hvězdám, jež jeví nevelké sinusovité změny. U zmíněné hvězdy byly nalezeny periodické změny o frekvenci $f_b = 0.8075 \text{ d}^{-1}$ a amplitudě necelé 0,02 mag. Na prvním obrázku je simulace situace, kdy objekt vykazuje přesně sinusovité změny s frekvencí $f_b = 0.8075 \text{ d}^{-1}$, přičemž doby pozorování jsou v intervalu 8 let rozesety zcela nahodile (tj. ve dne i v noci, kterýkoliv den v roce). Šum je roven nule. V periodogramu bezkonkurenčně dominuje vrcholok u zadané frekvenci, žádné další aliasy tu nejsou ani naznačeny. „Šum“ v periodogramu je dán skutečností, že doby pozorování jsou rozloženy nahodile. Pokud by byla pozorování rozložena zcela rovnoměrně, zmizel by i ten a v grafu by byl viditelný pouze ten základní pík. V případě, že tentýž signál pozorujeme z povrchu Země, a to tedy v noci, pokud je objekt dostatečně vysoko nad obzorem, pak dostaneme daleko zajímavější periodogram s řadou aliasů, pro jejichž frekvenci platí Tannerův vztah, že $f_a(k) = |f_b + k f_v|$, kde k je celé číslo kolem 0, f_v je tzv. vzorkovací frekvence, u pozemních pozorování nejčastěji převrácená hodnota délky hvězdného dne $f_v = 366.2442/365.2442 = 1.00274 \text{ d}^{-1}$. V třetím obrázku kromě sinusového signálu uvažujeme navíc i jistý nahodilý šum, který pak v obrázku vytvoří řadu dalších falešných píků a také může změnit relativní intenzitu „pravých“ aliasů. Některé z nich mohou v šumu zcela zaniknout. Poslední obrázek znázorňuje skutečnou situaci, kde vše může být ještě komplikovanější. Všimněte si prosím, že na rozdíl od hlavního vrcholku bývají aliasy rozdvojeny, což je způsobeno další vzorkovací frekvencí, rovnou převrácenou hodnotou délky tropického roku ve dnech.

Fyzika proměnných hvězd

6 Proměnnost periodicky proměnných hvězd

6.1 Rotující proměnné hvězdy

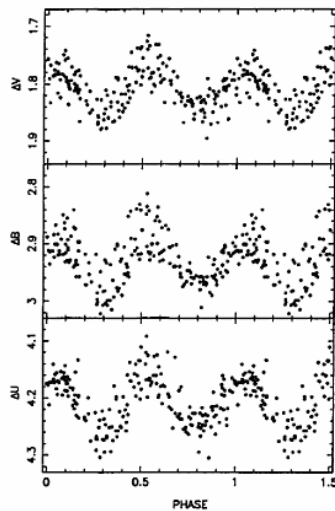
Mezi geometricky proměnné samozřejmě patří i rotující proměnné hvězdy, kdy ke změnám geometrie (úhlu pohledu) proměnné hvězdy vůči pozorovateli dochází ze dvou základních důvodů:

- sledovaná hvězda rotuje, což je ovšem zcela standardní situace;
- hvězda je členkou podvojně soustavy, což je rovněž velmi časté.

Má-li se při těchto změnách jasnost pozorovaného objektu (hvězda nebo dvojhvězda) měnit, musí jeho záření vykazovat jisté odchylky od přísně osové symetrie. Fakt, že některé rotující hvězdy a dvojhvězdy viditelné světelné variace nevykazují, je dán skutečností, že záření těchto hvězd je nesmírně izotropní, jejich fotosféry jsou fotometricky značně homogenní a jejich tvar je velmi přesně osově symetrický. V případě dvojhvězd také nesmí docházet k vzájemným zákrytům.

Tvary světelných křivek některých rotujících proměnných hvězd a možné změny periody rotace byly již diskutovány v kapitolách 5.5.1, resp. 5.2.1.2

6.1.1 Asférické hvězdy



Obrázek 6.1: Diferenciální *UBV* světelné křivky elipsoidální proměnné hvězdy V350 Lac (2446599.82 + 17.755*E*) vůči hvězdě HR8541. Převzato z Sterken & Jaschek (1996).

Tvar hvězd není obecně přesně kulově symetrický, ale může docházet k deformacím tohoto ideálního tvaru. Osamělé, rychle rotující hvězdy budou mít tvar rotačního elipsoidu, přičemž zploštění na pólech může být i velmi výrazné. Příkladem může být Achernar (α Eri). Provedená interferometrická měření pomocí Very Large Telescope Interferometr (VLTI) ukázala, že rychlost rotace až 230 km/s způsobuje silné zploštění, kdy rovníkový průměr hvězdy je 1,56krát větší než polární průměr (Domiciano de Souza et al., 2003). Rotační osa Achernaru je vůči směru k Zemi skloněná o 65° . Jenže pokud je sklon rotační osy stálý, nebude pozorována žádná změna jasnosti hvězdy v důsledku změny velikosti plochy orientované směrem k Zemi. K takovým variacím jasnosti by byl nutný nějaký precesní pohyb. Jinak budou případné změny způsobeny spíše přítomností skvrn na povrchu, ale o tom až v další kapitole.

K deformaci ideálního kulového tvaru hvězd ale také dochází u složek těsných dvojhvězd. Nejenže mají složky elipsoidální tvar deformovaný gravitačním působením souputníka (například β Per, α Vir), ale pokud složka vyplní svůj Rocheův lalok, může mít tvar jakési protáhlé kapky (viz kap. 6.2.1). Oběžná rovina dvojhvězdy může být orientována tak, že pro

pozorovatele ze Země nedochází k zákrytům, ale mění se průřez složek ve směru k Zemi a v důsledku toho dochází k malým změnám jasnosti s amplitudou do 0,1 mag v barvě V . Perioda změn jasnosti přitom odpovídá orbitální periodě, neboť složky mají zpravidla synchronní rotaci.

6.1.2 Skvrny na hvězdách

Hvězdy nejenom, že nemusí mít obecně ideální kulový tvar, ale povrch hvězd není ani stejnorodý. Vyskytující se na něm nehomogenity v jasnosti, barvě, magnetickém poli a jiné. Jednoduše řečeno, hvězda má na povrchu skvrny. Co je ale způsobuje? Pro vznik velké skvrny v podstatě stačí, aby hvězda rotovala dostatečně rychle a došlo k jejímu zploštění. Pak bude hvězda o něco teplejší na pólech a o něco chladnější na rovníku. Taková nerovnoměrnost povrchové jasnosti je ovšem symetrická vůči rotační ose, takže pokud bude poloha osy vůči směru k Zemi stálá, žádné pozorované změny jasnosti tato nehomogenita nezpůsobí. Fotometrické skvrny, tedy oblasti na hvězdě, které září jinak ostatní části povrchu hvězdy, mohou mít nejrůznější rozměry a mohou se vyskytovat se na ní mohou v podstatě kdekoli. V principu jsou dvojího druhu. U hvězd slunečního typu a chladnějších se pravidelně setkáváme s fotometrickými skvrnami s odlišnou efektivní teplotou, která je pak příčinou vzniku kontrastu skvrny vůči jejímu okolí. Zpravidla jde o temné, chladnější útvary nalézající se v aktivních oblastech se silnými lokálními magnetickými poli, která se generují v podpovrchových vrstvách hvězdy a postupně vzlínají na povrch, kde zvolna disipují. Životnost jednotlivých skvrn zde závisí na jejich mohutnosti a také na typu hvězdy – počítá se na dny až na roky.

Zcela jinou povahu mají fotometrické skvrny v oblastech s odlišným zastoupení některých chemických prvků, nacházejících se na povrchu většiny magnetických chemicky pekuliárních (mCP) hvězd. Skvrny na nich mají stejnou efektivní teplotu jakou má jejich okolí, liší se však stavbou atmosféry, která ovšem závisí na lokálním chemickém složení na povrchu. Záření vystupující z takových skvrn má jiné spektrální složení než záření zbytku hvězdy. Fotometrické na mCP hvězdách tak nejsou ani temné ani jasné, jsou jen jinak barevné.

V obou případech je proměnnost hvězd relativně malá, jde řádově o setiny až desetiny magnitudy. Periodicita přitom odpovídá době rotace hvězdy. Je třeba si však uvědomit, že skvrny mohou být samy zdrojem proměnnosti ale mohou také přispívat k proměnnosti jiného druhu.

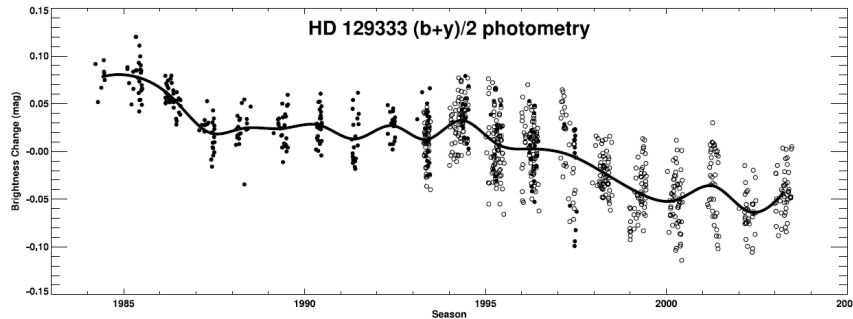
Kromě již zmíněných velkých skupin rotujících skvrnitých proměnných hvězd lze podle společných charakteristik rozdělit hvězdy se skvrnami do následujících skupin:

- Slunce a hvězdy slunečního typu
- Hvězdy typu FK Com
- Hvězdy typu BY Dra
- Hvězdy typu RS CVn – skvrnití psi
- Magnetické chemicky pekuliární hvězdy (mCP)

6.1.2.1 Slunce a hvězdy slunečního typu

Lidé si Slunce všímali už od úsvitu dějin, ale jako k vesmírnému tělesu, které by se mělo systematicky a dlouhodobě sledovat, k němu začali přistupovat teprve nedávno, vlastně až s nástupem spektroskopie v astronomii. Eberhard & Schwarzschild (1913) objevili emise v čarách H a K vápníku Ca II u hvězd slunečního typu, čímž dokázali existenci jejich rozsáhlých *chromosfér*. Překvapením však bylo, že oproti očekávání má řada hvězd nesrovnatelně vyšší aktivitu než Slunce. V té době se navíc předpokládalo, že mohutnost projevů hvězdné aktivity je *pouze* funkcí jejich spektrálního typu. Ale tento předpoklad byl uvedenou prací vyvrácen. O 65 let později přišel Olin C. Wilson (1978) se studií chování vápníkových čar u několika desítek hvězd slunečního typu (tj. hvězd hlavní posloupnosti spektrálního typu G a K), v níž popisuje dva typy změn v intenzitách pozorovaných centrálních emisí:

- krátkodobé, v časové škále několika dní, které nepochybně souvisejí s pohybem aktivních oblastí na disku rotující hvězdy;
- dlouhodobé, s periodou od 8 do 12 let, které jsou obdobou slunečního základního jedenáctiletého cyklu.



Obrázek 6.2: Světelná křivka hvězdy slunečního typu HD 129333 ve fotometrických filtrech b,y Strömgenova systému. Zdroj: Lockwood et al. (2007).

Kromě O. C. Wilsona se v 70. a 80. letech minulého století studiem hvězd slunečního typu zabývali též George Preston a Arthur Vaughan (například Vaughan et al. 1978; Vaughan & Preston 1980), kteří proměřili celkem jeden a půl tisíce hvězd slunečního typu v hvězdokupách a asociacích různého stáří a dospěli k několika charakteristikám hvězd slunečního typu, které později potvrdily další studie.

Messina & Guinan (2002, 2003) ve svém dlouhodobém projektu „The Sun in Time“ charakterizovali průběh aktivity hvězd slunečního typu takto:

- intenzita hvězdné aktivity souvisí s rychlostí rotace, protože rotace hvězdy je odpovědná za magnetické pole hvězdy. Hvězdy s rychlou rotací vykazují vysokou, spíše chaotickou, nepravidelnou aktivitu.
- nově se rodící hvězda, která se přibližuje do stadia hvězdy hlavní posloupnosti, se smršťuje a v důsledku zachování momentu hybnosti svou rotaci zrychluje;
- hvězdy slunečního typu mají po svém zrození relativně vysokou rotační rychlost, která klesá, s tím, jak hvězda stárne. V prvních miliónech let je brzdění poměrně rychlé v důsledku magnetického pole a pozůstatků původní látky v akrečním disku. Později je moment hybnosti odnášen hvězdným větrem.

- hvězdy s periodou rotace delší než 20 dní, mají aktivitu podobnou Slunci. Délka cyklu je zhruba 10 let nezávisle na jiných vlastnostech hvězdy.

Mírou aktivity hvězd je množství skvrn na povrchu. Byly však pozorovány i hvězdy slunečního typu, u nichž se neprojevoval ani náznak aktivity. Za přijatelné se pokládá vysvětlení, že tyto hvězdy právě procházejí stadiem jisté deprese hvězdné aktivity, obdobné Maunderovu, resp. Spörerovu minimu sluneční aktivity.¹

Vzhledem k tomu, že jsme u Slunce velmi blízko, sledujeme jeho aktivitu doslova „z první řady“. Na povrchu jsou jasně patrné sluneční skvrny. Vzdálenému pozorovateli by se naše Slunce jevilo jako hvězda se změnami do 0,01 mag ve V a periodou zhruba 30 dní. Amplituda změn by se podle fáze slunečního cyklu mohla mírně měnit, ale perioda, která je vlastně rotační periodou, zůstává přibližně stejná.

6.1.2.2 Typ FK Comae Berenices

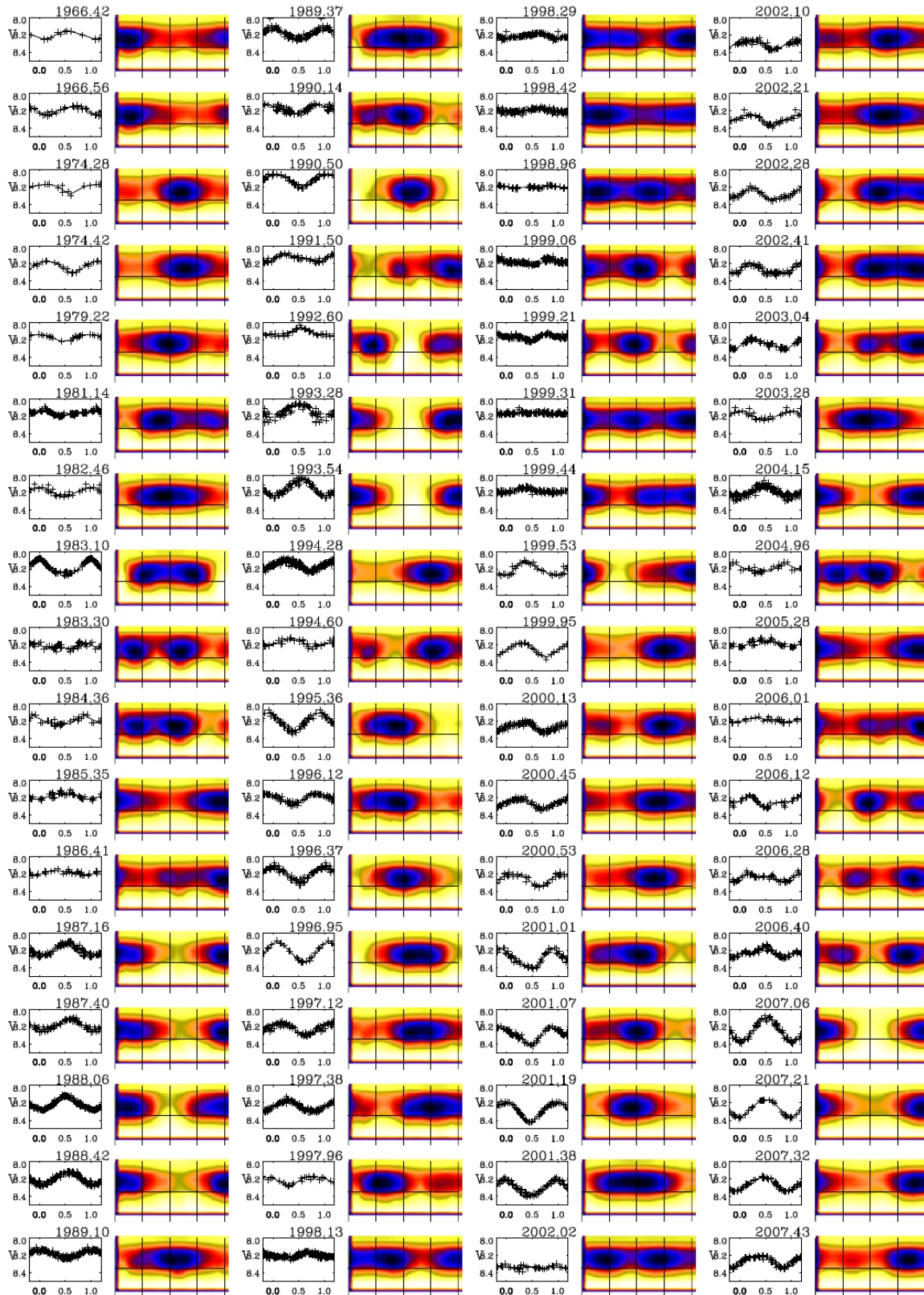
V 80. letech minulého století si astronomové při rentgenových přehlídkách oblohy povšimli skupiny hvězd pozdních spektrálních typů, které vykazovaly vysokou aktivitu. Jedná se o obry spektrálního typu G a K se silnou chromosférickou a koronární aktivitou. Zpočátku byly vymezeny jako samostatné hvězdy s podobnou aktivitou jako těsné dvojhvězdy typu RS CVn, ale v současnosti jsou v této skupině i dvojhvězdy (např. UZ Lib). Hvězdy typu FK Com velmi rychle rotují, samotná představitelka je z nich zatím nejrychlejší ($v \sin i \approx 160$ km/s). Důsledkem rychlé rotace je samozřejmě zploštění, elipsoidální tvar hvězd, ale možná i vysoká aktivita těchto hvězd. Perioda světelných změn odpovídá době rotace hvězdy, řádově dny. Amplituda světelných změn činí až několik desetin magnitudy.

Nevyřešený zůstává dosud původ těchto hvězd a jejich vývojový status. Nejvíce uznávaná teorie pokládá hvězdy typu FK Com za možný výsledek splynutí dvojhvězdného kontaktního systému typu W UMA. Objevily se ale i názory, že jde o velmi mladé hvězdy s neobyčejně rychlou počáteční rotací, případně, že je hvězda roztáčená přetokem hmoty z neviditelného průvodce.

6.1.2.3 Typ RS Canum Venaticorum – skvrnití psi

První studie jednotlivých hvězd typu RS Canum Venaticorum se objevily v polovině šedesátých let minulého století. Astronomy upoutaly zejména neobvyklé změny mimo zákryty. V polovině 70. let byly objeveny další zvláštnosti těchto hvězd: emise v rádiové oblasti, rádiové záblesky, tepelná emise v rentgenové oblasti svědčící o teplotách až 10^7 K, silné a proměnné emisní čáry ionizovaného vápníku H a K, vodíku a hořčíku. Hall (1976) definoval hvězdy typu RS CVn jako dvojhvězdy s orbitální periodou jednoho dne až dvou týdnů, s teplejší složkou spektrálního typu F až G IV-V a silnou emisí v čarách H a K mimo zákryt. Nicméně nyní už je zřejmé, že existují i dvojhvězdy podobného chování s kratší a delší periodou. Hvězdy typu RS CVn dnes tvoří početnější skupinu s pěti podskupinami:

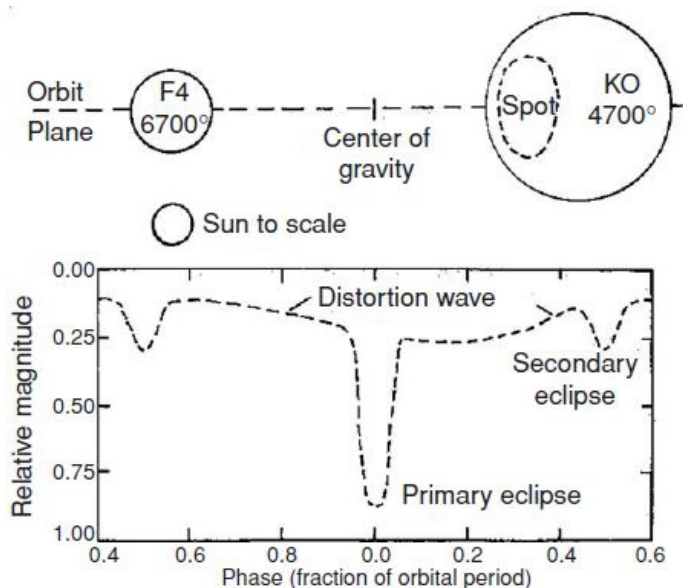
¹Maunderovo minimum sluneční aktivity nastalo v letech 1645-1715. Před ním je potvrzeno i Spörerovo minimum z let 1400-1510.



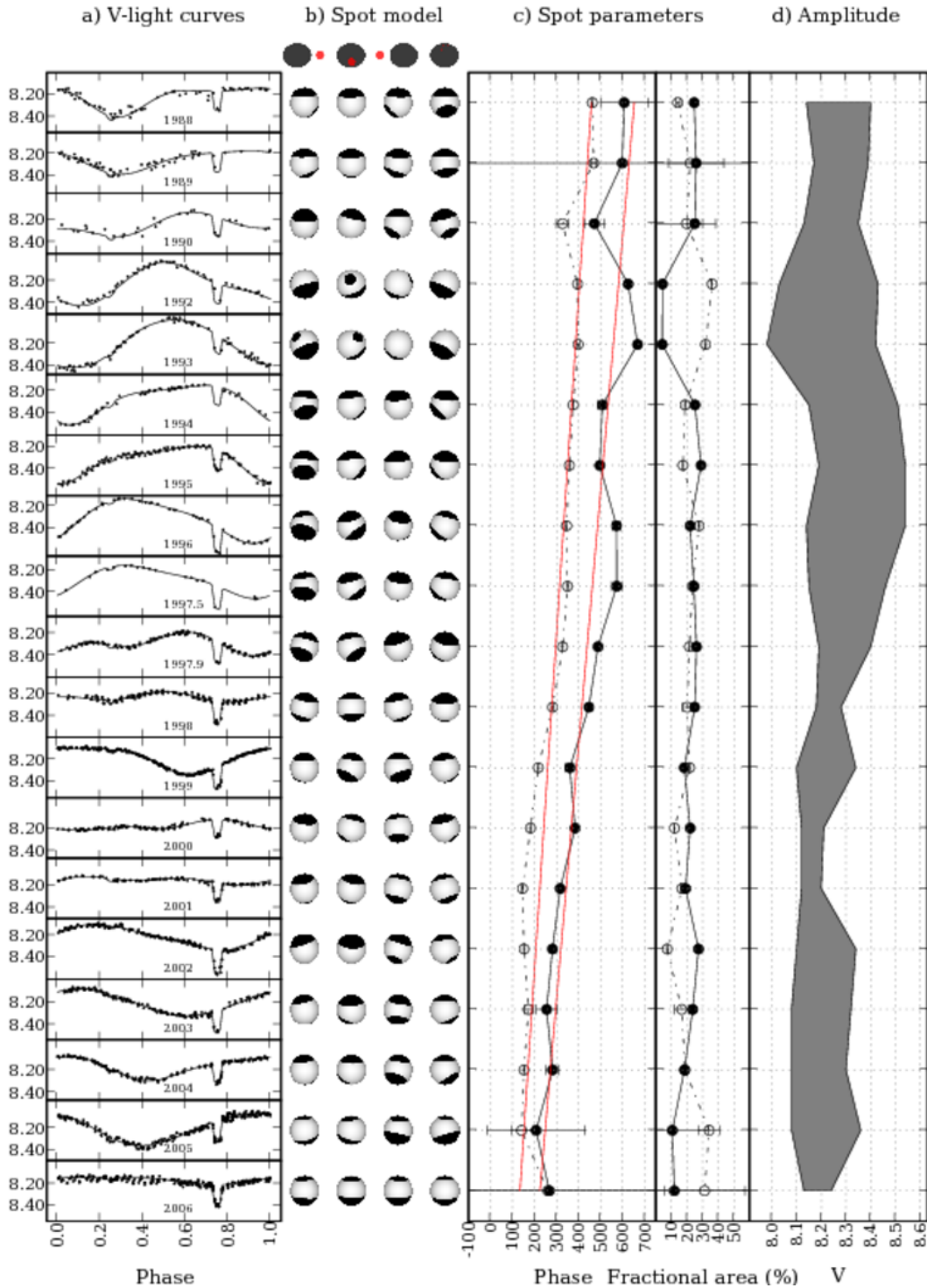
Obrázek 6.3: Výsledky pozorování a modelu hvězdy FK Com. Tmavší barvy vyznačují výskyt aktivních oblastí se skvrnami. Síť v mapách ukazuje rovník a čtyři délky oddělené po 90° . Na světelných křivkách křížky značí pozorované hodnoty ve V , čáry jsou spočtené hvězdné velikosti podle modelu. Zdroj: Korhonen et al. (2009).

1. Normální systémy: Orbitální periody mezi 1 až 14 dny. Teplejší složka je spektrálního typu F nebo G třídy V nebo IV. Silné emise v čarách Ca II H a K je patrna vidět mimo zákryty.
2. Krátkoperiodické systémy: Složky jsou oddělené. Orbitální periody kratší než 1 den. Teplejší složka je spektrálního typu F nebo G třídy V nebo IV. Emise Ca II H a K jsou u jedné nebo obou složek.
3. Dlouhoperiodické soustavy: Orbitální periody jsou delší než 14 dní. Složky mohou být spektrálního typu G až K a třídy od II až po IV. Silné emise v čarách Ca II H a K jsou vidět mimo zákryty.
4. Eruptivní systémy: Teplejší složka je spektrálního typu dKe nebo dMe. Emise se vztahuje k silným čarám Ca II H a K.
5. Soustavy typu V471 Tau: Teplejší složka je bílý trpaslík. Chladnější složka spektrální třídy G až K vykazuje silné emisní čáry Ca II H a K.

Světelné křivky hvězd typu RS CVn jsou zpravidla kombinací několika změn. Jsou zde patrné periodické změny vznikající v důsledku orbitálního pohybu složek těsné dvojhvězdy (může jít i o zákryty). Přes ně se překládají polopravidelné nebo nepravidelné změny s amplitudou až 0.2 mag na časové škále dní až let způsobované skvrnami na povrchu složek. Skvrny jsou důsledkem podobné aktivity jako u našeho Slunce, jen jsou mnohem rozsáhlejší a intenzivnější. Také proto si tato skupina hvězd vysloužila přezdívku „skvrnití psi“. Fotosférické skvrny spolu s aktivitou chromosféry a koronálních magnetických smyček způsobují vznik „deformační vlny“, která se překládá přes orbitální křivku (se zákryty), jak ukazuje obrázek 6.4. Deformační vlna se přitom v čase posouvá vůči orbitální fázi, respektive zákrytům, jak je vidět na obrázku 6.5.

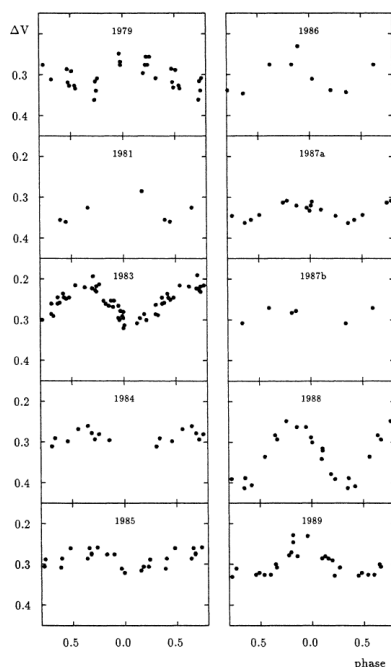


Obrázek 6.4: Světelná křivka a schematický model RS CVn v porovnání se Sluncem. Na světelné křivce je kromě zákrytů patrná i deformační vlna, která se překládá přes celou křivku. Zdroj: Percy (2011).



Obrázek 6.5: Světelné křivky a modely skvrn proměnné hvězdy BE Psc, aktivního elipsoidálního, zákrytového, trojného systému typu RS CVn v letech 1988-2006. (a) Pozorované světelné křivky ve V a proložené modelové křivky. (b) Rozložení skvrn podle modelů pro jednotlivé sezóny. (c) Vývoj parametrů skvrn v čase. Levý panel ukazuje délku středu každé skvrny (severní jako kolečka, jižní kroužky) v jednotkách rotační fáze vyjádřené jako povrchová délka ve stupních. Posun odráží průměrný rozdíl 0,5 % mezi orbitální a rotační periodou primární složky. Vpravo je velikost skvrn v jednotkách povrchu hvězdy. (d) Amplituda změn ve V vyvolaná skvrnami, minimum a maximum jasnosti (Strassmeier et al., 2008).

6.1.2.4 Typ BY Draconis



Obrázek 6.6: Světelná křivka BY Dra v letech 1979-89 ve V , perioda $P = 3.8285$ dne (Pettersen et al., 1992).

Hvězdy typu BY Draconis jsou chladné hvězdy hlavní posloupnosti (KVe–MVe) se silnou hvězdnou aktivitou ve fotosféře a chromosféře. Zejména pro hvězdy M platí, že jde o plně konvektivní objekty, takže jejich dynamo jako zdroj magnetického pole, aktivity a proměnnosti bude zřejmě jiného typu než u Slunce. Jejich rotace je zpravidla rychlejší než u jiných hvězd spektrálního typu K a M. Hvězdy tohoto typu mohou být jak samostatné, tak se může jednat i o dvojhvězdy, takže rychlá rotace může být i indukovaná přítomností další složky v soustavě. Změny jasnosti jsou diktovány tempem rotace. Periody změn jsou od zlomků dní až po několik dnů; jejich amplitudy mohou dosáhnout až 0.5 mag, ale typicky jsou jen kolem 0.1 mag ve V . Občas dochází k erupcím podobným jako pozorujeme u eruptivních trpaslíků typu UV Ceti.

Samotná představitelka BY Dra je dvojhvězda K4V + K7,5 s oběžnou periodou 5,975 dní. Kromě samotného prototypu patří mezi hvězdy tohoto typu např. zákrytový systém YY Gem (Castor C) tvořený složkami M1Ve + M2Ve s orbitální periodou 0,814 d a také známá dvojhvězda Prokyon.

6.1.2.5 Chemicky pekuliární (CP) hvězdy

Povrchové vrstvy hvězd hlavní posloupnosti, v nichž vzniká jejich spektrum, mají chemické složení odpovídající složení zárodečného mračka, z něhož se před lety zformovaly. Jasně zde dominují vodík a hélium, v menší míře jsou tu pak přítomny i těžší prvky s obsahem do 5%. Relativní zastoupení prvků těžších než hélium zhruba odpovídá jejich zastoupení ve sluneční atmosféře. Vzhled spekter hvězd hlavní posloupnosti je určen zejména efektivní teplotou jejich atmosféry. Spektrální klasifikace takových je pak víceméně rutinní záležitostí, kterou lze i automatizovat.

Nicméně už na sklonku 19. století, si řada spektroskopistů povšimla, že zhruba 10% spekter horkých hvězd spektrálních tříd B2V až F5 nelze jednoznačně spektrálně klasifikovat. Tato spektra byla označena jako neobvyklá – pekuliární a odhadnuté spektrální typy byly označeny přídomkem p. Mluví se pak o Ap, Bp a Fp hvězdách. Podrobnější rozbor těchto pekuliárních spekter nás přivádí k přesvědčení, že příčinou jejich anomálního vzhledu je neobvyklé, tedy pekuliární chemické složení atmosfér těchto hvězd. Od té doby se hovoří o tzv. *chemicky pekuliárních hvězdách* (CP hvězdách). Složení jejich atmosfér se liší v relativním zastoupení jednotlivých prvků, některé jsou vzhledem ke slunečnímu složení v deficitu, jiné naopak v nadbytku, který se od normálu může lišit až o několik řádů. Dalším znakem chemicky pekuliárních hvězd je celkově pomalejší rotace těchto hvězd, což ve svých důsledcích znamená, že svrchní vrstvy těchto hvězd jsou

o poznání klidnější než hvězd rychleji rotujících. Na řadě chemicky pekulárních hvězd bylo objeveno silné globální magnetické pole² s dipólovou strukturou, kde osa dipólu obecně nesouhlasí osou rotační. U několika mála hvězd byly zjištěny i složitější konfigurace magnetických polí. Všeobecně se soudí, že magnetická pole jsou fosilního původu a ve hvězdě přetrvávají asi po celou dobu jejich života na hlavní posloupnosti. Hvězdy s magnetickým polem vytvářejí mezi CP hvězdami svébytnou skupinu tzv. *magnetických chemicky pekulárních hvězd* (mCP hvězdy), které se vyznačují mj. i tím, že chemické prvky na jejich povrchu se shlukují do kontrastních spektroskopické skvrny, jsou zde patrné i rozsáhlé fotometrické skvrny, které jsou příčinou fotometrické proměnnosti taktované periodou jejich rotace.

Chemicky pekulární hvězdy se od sebe vzájemně liší natolik, že jen stěží bychom mohli najít dvě CP hvězdy, o nichž bychom mohli prohlásit, že jsou podobné. Nicméně se ukazuje alespoň to, že chemické odlišnosti atmosfér CP hvězd silně korelují s efektivní teplotou a přítomností či nepřítomností silného globálního magnetického pole, a z toho také vychází jejich klasifikace.

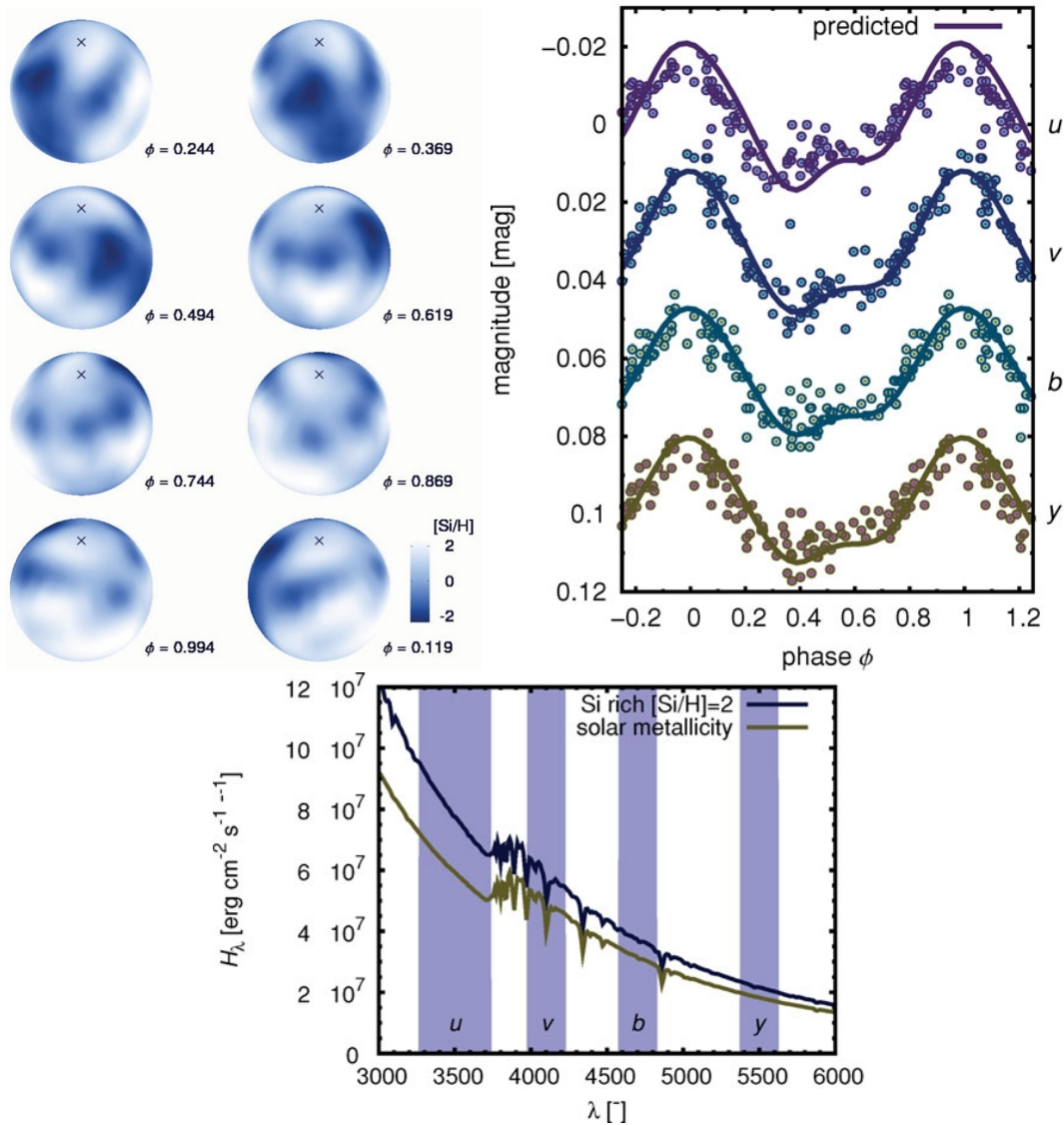
Pro roztřídění chemicky pekulárních hvězd se v současnosti nejčastěji používá tato varianta Prestonovy-Maitzenovy klasifikace verze

- CP1 – metalické hvězdy nebo též Am (metallic-line) hvězdy, jejichž spektra vykazují slabé čáry Ca II a/nebo Sc II, a současně vykazují zvýšenou abundanci Fe, Cr, Ti, Ni a Co. kovů. Zpravidla se jedná o pomalu rotující hvězdy, často složky dvojhvězd s teplotou mezi 7 000 K až 10 000 K, tedy spektrálního typu A až časně F. Magnetické pole slabé nebo žádné. Mezi CP1 hvězdy se řadí i hvězdy typu λ Bootis.
- CP2 – klasické mCP hvězdy nebo též Ap a Bp hvězdy, jsou charakterizovány silným globálním magnetickým polem, jehož intenzita dosahuje typicky 0,1 T, ale někdy až 1 T.³ Povrchové teploty jsou v rozmezí zhruba 7 200 K až 15 000 K (F6-B8). Jejich rotace je také pomalá. Ve spektru jsou známky zvýšeného obsahu iontů jako Si II, Fe II a Fe I, Fe II, u chladnějších CP2 hvězd pak i Cr II, Sr II, Eu II a dalších vzácných zemin.
- CP3 – tzv. rtuťovo-manganové, HgMn hvězdy se vyznačují zesíleným obsahem těchto dvou chemických prvků. Lze je chápat jako prodloužení CP1 hvězd do oblasti vyšších teplot. Mají pomalou rotaci a zpravidla nemají silné globální magnetické pole. Patří mezi chladnější hvězdy třídy B, jejich efektivní teploty spadají do rozmezí 10 000 K až 15 000 K.
- CP4 – označované též jako He-weak hvězdy patří mezi magnetické CP hvězdy. Typicky vykazují přebytek křemíku a naopak deficit nuklidu He⁴, a zvýšený poměr abundance nuklidů He³/He⁴. Spektrální typy běžně B5-B8, jde o teplotní prodloužení CP2 hvězd.
- CP6 – označované též jako He-strong hvězdy patří mezi magnetické CP hvězdy. Typicky vykazují přebytek He⁴ normální poměr He³/He⁴. Spektrální typy běžně B2-B4, jde o teplotní prodloužení CP2 hvězd a CP4 hvězd.

Příčinou pozorované anomálie v chemickém složení povrchových vrstev CP hvězd je nejspíš zářivá difúze (Michaud, 1970), která v mimořádně klidných atmosférách, stabilizovaných někdy i magnetickým polem, vynáší některé ionty s velkým účinným průřezem směrem nahoru, zatímco jiné ionty zvolna sestupují na dno vrstvy, kde k

²Silné magnetické pole Ap hvězdy objevil Babcock (1947) u CW Vir (78 Vir). K detekci použil Zeemanova jevu, který rozštěpí spektrální čáry na tři skupiny složek, s odlišnou polarizací. Tak lze z polarimetrických měření určit nejen intenzitu, ale i periodicitu změn magnetického pole.

³Pro srovnání, globální pole Slunce má indukci desetitisíckrát menší. O několik řádů silnější magnetická pole se vyskytují jen lokálně v tzv. aktivních oblastech.



Obrázek 6.7: Nahoře vlevo: Změna rozložení obsahu křemíku na disku hvězdy HD 37776 pro různé rotační fáze podle Khokhlova et al. (2000). Kolem fáze 0 je abundance křemíku největší. Nahoře vpravo: Srovnání předpovězených světelných změn HD 37776 spočtených podle povrchového rozložení křemíku a hélia (viz Khokhlova et al. 2000) a pozorovaných světelných křivek v barvách *uvby* Strömgenova fotometrického systému (Adelman & Pyper 1985, Adelman 1997b). Dole: vypočtené toky záření z atmosféry HD 37776 s různým zastoupením křemíku. Skvrny s větším zastoupením křemíku jsou v *uvby* jasnější než oblasti s malou abundancí křemíku. Převzato z Krtička et al. (2010).

takovéto chemické separaci dochází. Teorii ještě zbývá vysvětlit některé detaily, např. jak je role hvězdného větru při vzniku chemické pekuliarit hvězd třídy CP6 nebo z jakého důvodu dochází ke vzniku spektroskopických skvrn.

Jak již bylo řečeno, magnetické chemicky pekuliární hvězdy jsou hvězdy proměnné, mění se s periodou rotace ve své jasnosti, spektru i magnetickém poli. Vše lze vysvětlit konceptem tuhé rotující hvězdy s persistentními spektroskopickými a fotometrickými

skvrnami a globálním magnetickým polem vmraženým do plazmatu hvězdy, s nímž jako první přišli Stibbs (1950) a Deutsch (1958).

Spektroskopická proměnnost, při níž se mění profil jednotlivých spektrálních čar, byla odhalena až spektroskopii s vysokým rozlišením. Z profilů spektrálních čar lze odvodit nejen průměrnou abundanci jednotlivých chemických prvků, ale i jejich rozložení po hvězdě, a to pomocí tzv. Dopplerovy tomografie. Z analýz vyplývá mj. i to že zejména ty prvky, jež jsou v přebytku, jsou po hvězdě rozloženy krajně nerovnoměrně - jejich zastoupení se zde může lišit až o 2 řády.

Fotometrická proměnnost byla objevena až po spektroskopické, a to proto, že amplitudy světelných změn jsou takřka vždy menší než dvě desetiny magnitudy, typicky setiny magnitudy. Analýza světelných změn je proto docela náročnou disciplínou, detailněji je popsána v podkapitole 5.5.1. Krtička et al. (2010) ukázali, že příčinou vzniku fotometricky kontrastních skvrn je nejspíš přerozdělení energie ve spektru způsobené zesílenou absorpcí ve spektrálních čárách nebo páscech volně-vázaných přechodů chemických prvků, které jsou v dané spektroskopické skvrně v přebytku.

6.1.3 Magnetické pole

(Ne)přítomnost magnetického pole a případně jeho podoba a intenzita hraje velmi důležitou roli ve vývoji hvězd. U rotujících proměnných hvězd bývá příčinou osové asymetrie přítomnost silného magnetického pole. Je-li magnetické pole zhruba dipólové, musí ještě platit, že osa tohoto dipólu nesmí souhlasit osou rotační, což je však většinou splněno. Pozorované změny jsou přísně periodické, perioda odpovídá rotační periodě objektu. Ta bývá velmi rozmanitá: od 10^{-4} s u těch nejrychlejších *pulsarů* až po několik let u zvláště pomalu rotujících chemicky pekuliárních hvězd. V proměnných hvězdách bychom mohli vymezit vliv magnetického pole zejména na:

- magnetické chemicky pekuliární hvězdy,
- hvězdy typu α^2 Canum Venaticorum,
- pulsary.

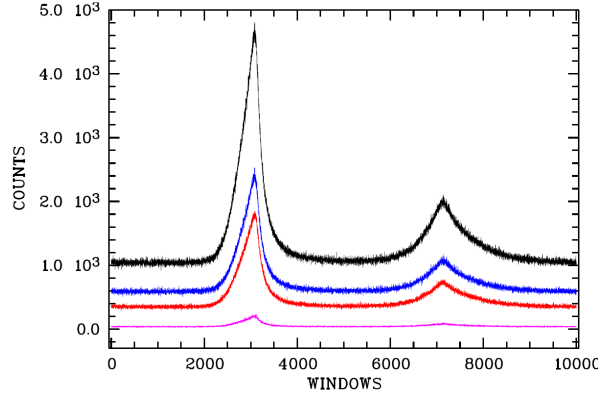
6.1.3.1 Pulsary

Přestože samotné slovo *pulsar* vzniklo z anglických slov „pulse“ a „star“, nejedná se o pulzující hvězdu. Zdrojem pulsů je velmi rychle rotující neutronová hvězda vysílající do prostoru zejména rádiové záření v úzkém kuželu. Jakmile se pozorovatel ocitne ve směru kuželu pozoruje krátký, intenzivní záblesk (tzv. majákový model). Doba mezi záblesky tak odpovídá periodě rotace hvězdy. Pulsar je tedy rotující proměnná hvězda.

Pulsary byly objeveny náhodou při přehlídce extragalaktických rádiových zdrojů na frekvenci 81 MHz. Při vyhodnocování záznamů si zvláštních periodických signálů povšimla Jocelyn Bellová (dnes Burnellová). Spolu s tehdejšími školiteli a dalšími kolegy pak publikovali objevový článek (Hewish et al., 1968)⁴. Pulsary byly nejdříve

⁴Antony Hewish obdržel v roce 1974 se Sirem Martinem Rylem Nobelovu cenu za fyziku za průkopnický výzkum v oblasti rádiové astrofyziky, především za rozhodující úlohu při objevu pulsarů. Jocelyn Bellová přišla zkrátka.

značeny podle zkratky observatoře, kde byly objeveny, a rektascenze (například Cambridge pulsar CP1919). Později se začala používat zkratka PSR (Pulsating Source of Radio) a souřadnice PSR0531+21, dnes PSR B1919+21, resp. PSR J1921+2153.



Obrázek 6.8: Světelná křivka pulsaru v Krabí mlhovině s časovým rozlišením $3\mu\text{s}$ ve filtrech $U+B+V+R$, B , R , U (odshora dolů). Převzato z Komarova et al. (1996).

V současnosti známe přes dva tisíce pulsarů⁵ s periodami od 1.4 ms do 8.5 s. Většina z nich září zejména v rádiové oblasti, ale několik i ve viditelném světle. Pro všechny pulsary je typické extrémně silně magnetické pole dosahující až 10^{10} T, resp. 10^{11} T u magnetarů. Nicméně zdroje energie se liší. Podle nich rozlišujeme v principu tři druhy pulsarů.

- Pulsary dotované z rotační energie, vyzařující v důsledku ztráty rotační energie hvězdy.
- Pulsary poháněné přírůstkem hmoty (to platí pro většinu, ale ne všechny rentgenové pulsary), kdy je zdrojem energie akrece.
- Magnetary, jejichž zdrojem energie je rozklad extrémně silného magnetického pole.

Rotační energii pulsaru můžeme vyjádřit vztahem

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{2\pi^2 I}{P^2}, \quad (6.1)$$

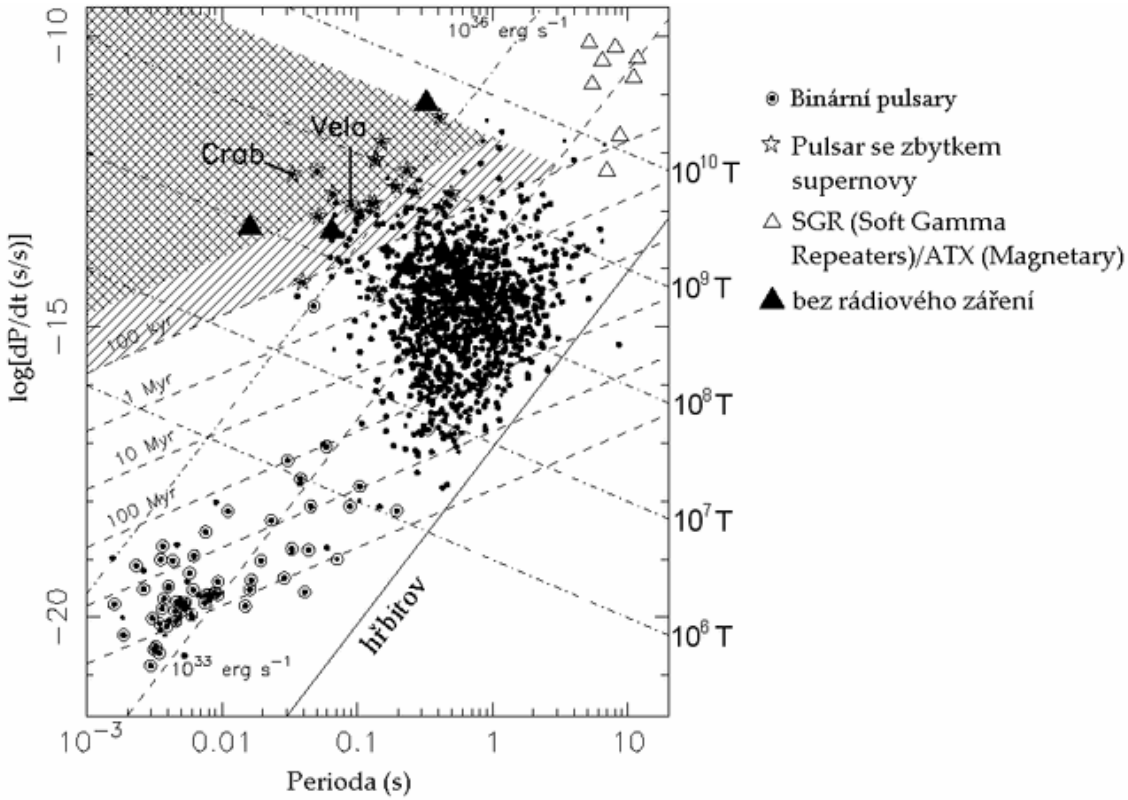
kde Ω je úhlová rychlost, P perioda a I moment setrvačnosti. Perioda pulsů se časem prodlužuje, rotace pulsaru zpomaluje, takže platí

$$\dot{P} \equiv \frac{dP}{dt} > 0. \quad (6.2)$$

Dosažením vztahu (6.1) a úpravou dostaneme závislost změny energie rotace na periodě a změně periody

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \frac{-4\pi^2 I \dot{P}}{P^3}. \quad (6.3)$$

⁵Pro aktuální počet známých pulsarů navštivte jejich katalog na <http://www.atnf.csiro.au/people/pulsar/psrcat/>.



Obrázek 6.9: Závislost dekadického logaritmu změny periody na periodě pulsaru je ekvivalentem HR diagramu pro pulsary. Na diagramu jsou vyznačeny všechny známé pulsary v naší Galaxii. Pomocí pozorované periody pulsů a jejich změny můžeme odhadnout řadu parametrů jako věk pulsaru, sílu magnetického pole B a změnu rotační energie \dot{E} . Mladé pulsary jsou v levém horním rohu a postupně se s věkem přesouvají v diagramu dolů a doprava až zhruba po 10^{10} let zeslábně magnetické pole natolik, že pulsar přestane vysílat a skončí na „hrbitově“. Zajímavé je zjištění, že téměř všechny pulsary s krátkou periodou jsou součástí binárního systému.

Pro neznámější pulsar v srdci Krabí mlhoviny z toho například vyplývá, že jeho rotační energie se mění rychlostí $-4 \cdot 10^{31}$ J/s. Porovnáním vztahu (6.3) s množstvím vyzářené energie podle Larmorova vztahu můžeme odvodit jak minimální intenzitu magnetického pole na povrchu pulsaru, tak i tzv. charakteristický věk pulsaru

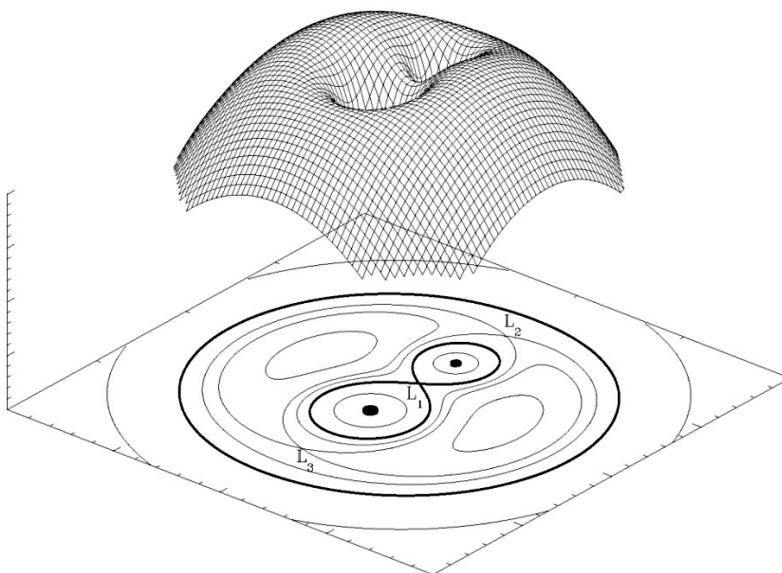
$$\tau \equiv \frac{P}{2\dot{P}}. \quad (6.4)$$

Charakteristický věk pulsaru nezávisí ani na velikosti pulsaru R , momentu setrvačnosti I nebo sklonu a intenzitě magnetického pole $B \sin \alpha$. Vztah platí, pokud je počáteční perioda pulsů mnohem menší než současná ($P_0 \ll P$) a $P \cdot \dot{P}$, resp. B je konstantní. Pro již zmíněný pulsar v Krabí mlhovině je charakteristický věk zhruba 1300 let. Vzhledem k záznamům víme, že vznikl v r. 1054, takže je aktuální věk v době vydání těchto skript je 959 let.

6.2 Dvojhvězdy

6.2.1 Zákrytové proměnné hvězdy

Zákrytové proměnné hvězdy jsou dalším nepominutelným představitelem geometricky proměnných hvězd. V zakrývající se soustavě musí být alespoň dva objekty, ale nemusí jít jen o hvězdy, druhým tělesem může být i exoplaneta. Pro snazší výklad budeme nadále používat soustavu složenou ze dvou hvězd. Anizotropie ve dvojhvězdách, zejména těch těsných, je pak dána jejich vzájemným zastiňováním a vzájemným ovlivněním (interakcí) jejich složek, přičemž perioda pozorovaných změn souhlasí s periodou oběhu. Změny period už byly diskutovány v kapitole 5.2.1.3.



Obrázek 6.10: Trojrozměrné zobrazení Rocheova potenciálu ve dvojhvězdě s poměrem hmotností složek $q = 2$ v korotující soustavě souřadnic. Kapkovité útvary zobrazené na spodní části obrázku se nazývají Rocheovy laloky. L_1 , L_2 , L_3 jsou Langrangeovy body. Když jedna hvězda vyplní svůj Rocheův lalok, může její hmota přecházet do sféry vlivu druhé hvězdy přes oblast bodu L_1 . Zdroj: <http://hemel.waarnemen.com/Informatie/Sterren>

Vyšetřujeme nyní děje v těsné dvojhvězdě, jejích složky o hmotnostech M_1 a M_2 obíhají kolem společného těžiště po kruhových drahách, tak, že jejich vzdálenost a je konstantní. Oběh složek se děje s úhlovou rychlostí ω . Za těchto okolností je vhodné za vztažnou soustavu zvolit korotující soustavu pevně spojenou s oběma hvězdami. V ní ovšem musíme zavést kromě gravitační síly působící mezi složkami zavést též „neinerciální sílu“ – sílu odstředivou. V bodě o souřadnicích x, y, z , který je ve vzdálenostech r_1 od středu hmotnosti první hvězdy a r_2 od středu druhé složky dvojhvězdy, je pak potenciál $\Phi(x, y, z)$ dán součtem gravitačních potenciálů vzhledem k oběma složkám dvojhvězdy a potenciálu, který odpovídá působení odstředivé síly v této korotující soustavě

$$\Phi(x, y, z) = -G \frac{M_1}{r_1} - G \frac{M_2}{r_2} - \frac{\rho^2 \omega^2}{2}, \quad (6.5)$$

kde ρ je vzdálenost vybraného bodu od normály k orbitální rovině procházející těžištěm soustavy a úhlová rychlost ω je

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}}, \quad (6.6)$$

kde P je orbitální perioda.

Ekvipotenciální plochy nebo též ekvipotenciály, jsou plochy tvořené body se stejným potenciálem daným (6.5). V soustavě dvojhvězdy se o nich hovoří jako o Hillových plochách⁶. Hmotný bod pohybující se po ekvipotenciální ploše nekoná práci, protože vykonává pohyb ve směru kolmém na působící síly. Tvar soustavy Hillových ploch silně závisí na poměru hmotnosti složek dvojhvězdy. Hillova plocha společná pro obě hvězdy procházející navíc libračním Langrangeovým bodem L_1 se zpravidla označuje jako Rocheova plocha, případně Rocheova mez (viz obr. 6.10). Kolem každé složky dvojhvězdy tak definuje prostor tzv. Rocheova laloku. Jeho velikost lze samozřejmě přesně spočítat, ale v řadě případů vystačíme s aproximací, která definuje velikost koule stejného objemu, např. dle Eggleton (1983)

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{a} = \frac{0,49 q^{\frac{2}{3}}}{0,6 q^{\frac{2}{3}} + \ln\left(1 + q^{\frac{1}{3}}\right)}, \quad (6.7)$$

kde a je poloosa soustavy, \mathfrak{R}_1 poloměr Rocheovy plochy kolem hvězdy o hmotnosti M_1 a $q = M_1/M_2$. Podle práce Plavec & Kratochvíl (1964) lze také spočítat přibližnou vzdálenost l_1 Lagrangeova bodu L_1 od středu složky 1:

$$l_1 \cong \left(\frac{1}{2} + 0,227 \log q\right). \quad (6.8)$$

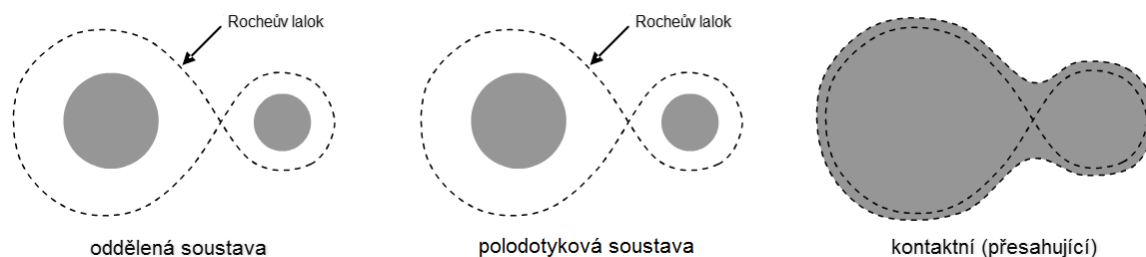
Míra vyplnění Rocheových laloků hraje zásadní úlohu v jedné z nejpoužívanějších třídění těsných dvojhvězd. Byl to již Kuiper (1941), kdo si pravděpodobně jako první roli vyplnění Rocheova laloku u těsných dvojhvězd uvědomil. Na jeho práci navázal Kopal (1955), který zavedl následující základní klasifikaci (viz obr. 6.11):

- oddělené systémy (*detached*) – ani jedna ze složek nevyplňuje svůj Rocheův lalok,
- polodotykové (*semidetached*) – jen jedna ze složek svůj Rocheův lalok vyplňuje,
- kontaktní (*contact*) – obě složky vyplňují nebo spíše přesahují Rocheovu mez, proto se dnes spíše používá anglický termín *overcontact*, což bychom mohli překládat právě jako ”přesahující”.

Později Wilson (1979) tuto klasifikaci doplnil o soustavy s dvojným kontaktem (*double contact*), kdy obě složky dvojhvězdy právě přesně vyplňují Rocheovy laloky, ale nedotýkají se navzájem. Navíc alespoň jedna složka rotuje větší rychlostí než je rychlost synchronní rotace.

Pro popis konstituce samotné dvojhvězdy se kromě Kopalovy klasifikace používá v katalogích také doplňková klasifikace, která upřesňuje charakter složek systému, např. v GCVS je to členění:

⁶Poprvé je definoval George William Hill na základě prací Edouarda Rocheho.



Obrázek 6.11: Kopalova klasifikace těsných dvojhvězd. Zdroj: Dan Bruton. Upraveno.

GS Jedna nebo obě složky systému jsou obři nebo veleobři; jedna ze složek může být i hvězda hlavní posloupnosti.

PN Aspoň jedna ze složek je jádrem planetární mlhoviny (například UU Sge).

RS Soustavy typu RS Canum Venaticorum - viz kapitola 6.1.2.3

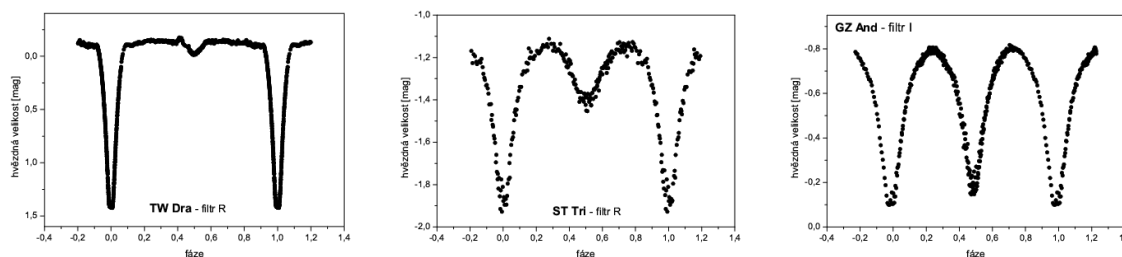
WD Systém, kde složkami jsou bílí trpaslíci.

WR Složkami soustavy jsou Wolfovy-Rayetovy hvězdy (například V 444 Cyg).

Výše uvedené klasifikace tedy berou v úvahu polohu složek hvězdy v HR diagramu a stupeň vyplnění Rocheova laloku. Pokud není k dispozici detailní studie soustavy, je typ systému odhadnut většinou na základě jednoduchých kritériích publikovaných v práci Svechnikov & Istomin (1979).

6.2.2 Světelné křivky zákrytových dvojhvězd

Tradiční klasifikace zákrytových dvojhvězd vychází ze vzhledu jejich světelných křivek.



Obrázek 6.12: Světelné křivky zákrytových dvojhvězd. CCD pozorování M. Zejdy. a) Algolida typu II – hvězda TW Dra. b) Hvězda typu β Lyrae – ST Tri. c) Hvězda typu W UMa – GZ And.

Pozorovatelé sice tuto klasifikaci preferují, ale je třeba si uvědomit, že o poměrech v dvojhvězdném páru někdy jen málo vypovídá.

EA typ Algol (algolidy) – jsou zákrytové dvojhvězdy, v jejichž světelné křivce nacházíme výrazné a relativně úzké primární minimum, v opačné fázi pak zpravidla pozorujeme mělký, ale rovněž úzké sekundární minimum. Tyto poklesy jasnosti jsou

způsobeny vzájemnými zákryty složek. Mimo zákryty je jasnost víceméně konstantní, proměnnost tu souvisí s asféricností jedné nebo obou složek a s efektem odrazu. U algolid typu I jsou minima jasnosti srovnatelně hluboká, přičemž jejich hloubka nepřesáhne 0,8 mag. Jde zpravidla o oddělené dvojhvězdy se složkami víceméně kulového tvaru. Algolidy typu II se vyznačují výrazným primárním minimumem o hloubce až několik magnitud, sekundární minimum bývá nevýrazné nebo úplně chybí. Jedná se o polodotykové soustavy v pokročilé stadiu vývoje tvořené takřka sférickou primární složkou, která bývá mnohonásobně jasnější než kapkovitě protáhlá sekundární složka. Ta se ve světle soustavy mimo zákryty skoro neprojevuje. Výsledkem pak je, že se v tzv. konstantní části jasnost systému prakticky nemění. Periody algolid jsou možné v širokém rozmezí 0,2 až 10000 dní

EB typ β Lyrae – ve světelných křivkách nacházíme primární i sekundární minimum, kdy zjevně dochází k zákrytům složek. Jasnost systému se výrazně mění i mimo zákryty, což svědčí o tom, že tu máme co do činění s těsnou soustavou se slapově protaženými složkami a silným efektem odrazu. Mezi složkami dochází k výměně látky, nacházíme zde plynné proudy i disky. Hloubky primárních minim dosahují až 2 mag ve V . Periody jsou zpravidla delší než 1 den. Jde o poměrně vzácné systémy se složkami spektrálního typu B až A.

EW typ W Ursae Majoris. Na světelných křivkách v podstatě není možné určit přesný čas začátku a konce zákrytu. Primární a sekundární minima jsou téměř stejně hluboká. Amplitudy změn jsou do 0,8 mag ve V . Jedná se vesměs o krátkoperiodické systémy s orbitální periodou pod 1 den, sestávající z elipsoidálních složek, které jsou téměř v dotyku. Soudí se, že složky spektrální typy F až G a pozdější mají společnou atmosféru.

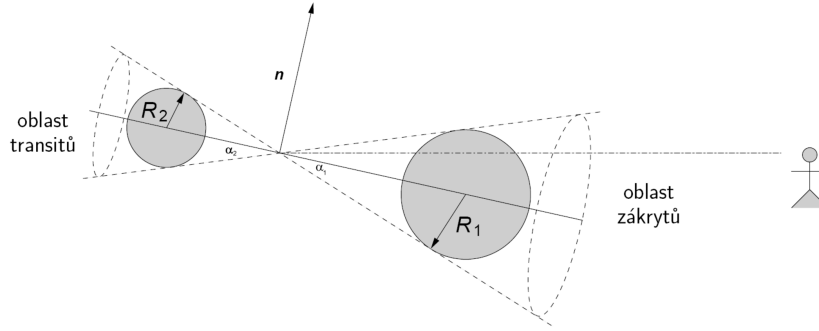
Na vzhledu světelné křivky zákrytových dvojhvězd se podepisuje řada okolností, a to:

- geometrie systému, tedy sklon trajektorie a relativní velikosti složek;
- rozložení jasu na kotoučích hvězd, čili okrajové ztemnění hvězd, jehož parametry jsou dány stavbou hvězdné atmosféry;
- u těsnějších systémů ovlivňuje vzhled světelné křivky asféricnost složek, které jsou slapově deformovány, někde hraje roli i existence společných fotosfér (hvězdy typu W Ursae Majoris) a existence svítící či absorbující látky pocházející z přetoku hmoty mezi složkami;
- u těsných soustav bývá důležitý i rozptyl záření druhé složky v systému způsobující tzv. efekt odrazu

Vše je poněkud komplikované, nicméně v současnosti existuje řada spolehlivých výpočetních programů například PHOEBE, Nightfall či FOTEL, které jsou s to potřebné informace (v různém stupni spolehlivosti) ze světelné křivky vytěžit.⁷

Pro ilustraci si vyberme značně zjednodušený případ, kdy zkoumaná zákrytová soustava sestává ze dvou kulových hvězd o poloměrech R_1 a R_2 , obíhajících kolem společného těžiště po kruhové trajektorii ve vzdálenosti r . Aby mohlo docházet k zákrytům, musí

⁷Přehled modelování světelných křivek dvojhvězd podává např. Wilson (1994), případně <http://astro.physics.muni.cz/models>.



Obrázek 6.13: Zákryty ve dvojhvězdě. Zdroj: Jiří Krtička.

být inklinace (úhel mezi směrem k pozorovateli a normálou k oběžné rovině dvojhvězdy) $i > 90^\circ - \alpha$, kde

$$\sin \alpha = \frac{R_1 + R_2}{r}.$$

Pro naše další úvahy vezměme ideální případ $i = 90^\circ$, což znamená, že v této soustavě bude docházet k tzv. centrálním zákrytům. Pro naše úvahy zvolíme větší z hvězd o poloměru R_1 za centrální těleso (na volbě nezáleží)⁸ a druhá menší bude kolem ní stálou rychlostí obíhat tak, že její střed opíše kolem středu centrální složky kružnici za dobu oběhu P .

Přechod (transit)

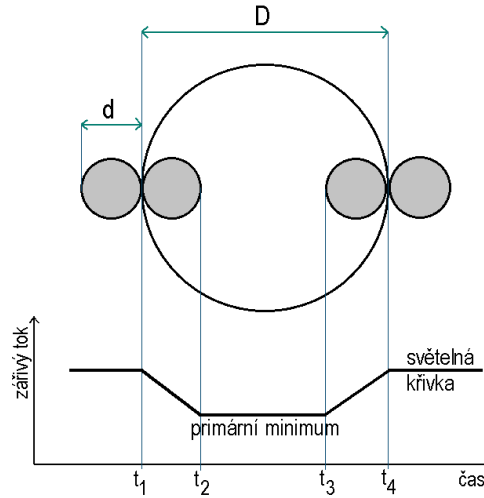
Pozorujeme-li soustavu z velké vzdálenosti, vidíme, že k prvnímu kontaktu přecházejícího tělesa s tělesem v pozadí dojde ve chvíli, kdy spojnice ke středu druhé složky bude se směrem k pozorovateli svírat úhel α_1 (viz obrázek 6.13), přičemž platí

$$\sin \alpha_1 = \frac{R_1 + R_2}{r} \quad \text{pro malé úhly} \quad \alpha_1 \sim \frac{R_1 + R_2}{r}. \quad (6.9)$$

Pokud jde o přechod menšího tělesa přes větší, pak budeme sledovat, jak se před kotouč větší složky předsune menší kotouč, který bude systematicky ukusovat stále větší část disku hvězdy v pozadí. Během této fáze částečného zákrytu jasnost soustavy takřka lineárně klesá v důsledku skutečnosti, že vyzařující plocha zakrývané hvězdy se zmenšuje. Ve světelné křivce vidíme pokles, nazývaný sestupná větev minima jasnosti. Rychlý pokles se zastaví v momentu tzv. druhého kontaktu, kdy se na disku centrální hvězdy zobrazí celý kotouč menší složky. V tom okamžiku bude spojnice ke středu druhé složky se směrem k pozorovateli svírat úhel α_2 , přičemž platí

$$\sin \alpha_2 = \frac{R_1 - R_2}{r} \quad \text{pro malé úhly} \quad \alpha_2 \sim \frac{R_1 - R_2}{r}. \quad (6.10)$$

⁸To, že na volbě nezáleží, je ale i často příčinou jisté libovůle a tak se můžeme setkat v různých publikacích s tím, že jsou jako primární definovány různé složky! Někdy je to hmotnější, někdy jasnější složka, někdy ta, která je ve fázi 0 blíže pozorovateli.



Obrázek 6.14: Vznik světelné křivky zákrytové dvojhvězdy. t_1 až t_4 označují okamžiky tzv. prvního, druhého, třetího a čtvrtého kontaktu.

Nyní bude kotouč menší složky putovat až do centra kotouče větší složky, kdy nastane střed zákrytu. Vzhledem k tomu, že naprostá většina hvězd jeví nezanedbatelné okrajové ztemnění, bude v této fázi jasnost hvězdy mírně klesat. Na světelné křivce pozorujeme mělké dno – v proměnářském žargonu se praví, hvězda je v tzv. „zastávce“. Po průchodu centrem celý úkaz symetricky pokračuje. Když se okraj druhé složky zevnitř dotkne okraje hvězdy v pozadí nastává tzv. třetí kontakt, po němž se začne zmenšovat podíl zakrývané plochy a to až do momentu čtvrtého kontaktu, který ukončuje vzestupnou větev světelné křivky a celý zákryt.

V případě, že lze přistoupit na aproximaci $\sin \alpha \cong \alpha$, délka doby mezi prvním a čtvrtým kontaktem, čili období snížené jasnosti soustavy (doby tzv. minima jasnosti), označovaná zpravidla symbolem D , je dána vztahem

$$\frac{D}{P} = \frac{2 \alpha_1}{2 \pi} = \frac{R_1 + R_2}{\pi r}. \quad (6.11)$$

Pro trvání zastávky d v minimum jasnosti dostáváme obdobně:

$$\frac{d}{P} = \frac{2 \alpha_2}{2 \pi} = \frac{R_1 - R_2}{\pi r}. \quad (6.12)$$

Pokud jsme schopni ze světelné křivky odhadnout trvání obou fází, dostaneme tak odhad relativních rozměrů obou složek:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{\pi D + d}{2 P}; \quad \frac{R_2}{r} = \frac{\pi D - d}{2 P}. \quad (6.13)$$

Budeme-li mít navíc k dispozici i křivku radiálních rychlostí obou složek, pak z ní snadno vyčteme též oběžnou rychlost a tím i absolutní poloměr trajektorie. Pomocí něj vypočítáme absolutní rozměry složek. Upozorňuji, že jsme k tomu všemu nepotřebovali znát vzdálenost soustavy.

Zákryt (okultace)

Přesně po půl periodě dojde k opačné situaci, v popředí bude centrální těleso a za něj se bude postupně ukrývat těleso menší. Po prvním kontaktu se část kotouče menší hvězdy skryje za neprůhledným kotoučem centrální hvězdy. Jasnost soustavy bude postupně klesat a to až do okamžiku druhého kontaktu, kdy kotouč druhé hvězdy zmizí nadobro. Od té chvíle zůstává jasnost soustavy konstantní až do chvíle třetího kontaktu, kdy se na opačné straně centrální hvězdy objeví část kotouče zakrývané hvězdy. Ta se nakonec vynoří celá, přičemž obě složky se od sebe oddělí v okamžiku tzv. čtvrtého kontaktu.

V hlavních rysech je vzhled světelné křivky obdobný jako v případě přechodu (transitu), jen s tím rozdílem, že v zastávce světelné křivky se jasnost systému nemění.

Pokud nejsou složky zákrytové dvojhvězdy identické, pozorujeme rozdíly v hloubce obou minim (transit a okultace). Hlubšímu z nich říkáme primární minimum, druhému pak minimum sekundární. Pokud je efektivní teplota menší složky nižší než teplota složky větší, pak při transitu nastává hlubší minimum než při okultaci. Pokud je tomu naopak, odpovídá primární minimum zákrytu menšího tělesa. Jestliže dochází k úplnému zákrytu, je možné dokonce určit poměr teplot složek dvojhvězdy dle vztahu

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4, \quad (6.14)$$

kde B_0, B_p, B_s jsou bolometrické jasnosti v maximu, primárním a sekundárním minimu a T_1 a T_2 teploty větší a menší složky.

V astrofyzikální praxi se běžně setkáváme s oběma případy. Jsou-li složky dvojhvězdy hvězdami hlavní posloupnosti, pak platí, že hmotnější složka je větší a teplejší než složka méně hmotná. Vezměme si hypotetický příklad zákrytu dvou hvězd: F0 V ($R_1 = 1,6 R_\odot$, $T_{\text{ef}} = 7200$ K) a F5 V ($R_2 = 1,4 R_\odot$, $T_{\text{ef}} = 6400$ K). Zanedbáme-li vliv okrajového ztemnění, zvýší se při centrálním transitu bolometrická hvězdná velikost o 0,78 mag, při zákrytu vzroste jen o 0,43 mag.

Jiné je to s tzv. algolidami typu II, kde rozměrově větší z obou hvězd je podobr, jenž je ale chladnější a méně hmotný než druhá složka, která bývá hvězdou hlavní posloupnosti. Zvolme si modelový příklad: centrální hvězdou bude podobr o poloměru $R_1 = 5 R_\odot$, $T_{\text{ef}} = 4500$ K a druhou složkou hvězda hlavní posloupnosti A0 V ($R_2 = 2,7 R_\odot$, $T_{\text{ef}} = 9250$ K). Transit se projeví nepatrným zeslabením o 0,05 mag, ale při zákrytu, kdy primární složka zcela zmizí, vzroste bolometrická hvězdná velikost o 1,99 mag! Je tedy zřejmé, že algolidy typu II jsou pozorovatelsky nápadnější, než soustavy, kde jsou obě složky hvězdami hlavní posloupnosti (algolidy typu I).

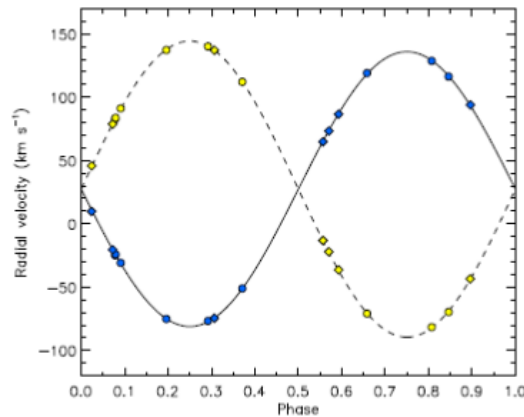
Pokud nejsou splněny výše uvedené podmínky (kulové hvězdy, kruhové trajektorie, $i = 90^\circ$) setkáváme se s komplikovanějšími světelnými křivkami, které se v některých ohledech od našeho idealizovaného případu liší.

Pro pořádek uveďme, že:

- Při nenulové excentricitě obecně nebývá sekundární minimum umístěno přesně ve fázi 0,5. Výjimku tvoří situace, kdy je přímka apsid kolineární se směrem k pozorovateli. Na světelné křivce se to ale stejně pozná tak, že pozorovaná zeslabení mají různá trvání.
- Při sklonu $i \neq 90^\circ$ může jít i v absolutním minimu jen o částečný zákryt, kdy nenastává v minimu zastávka ($d = 0$). Z tvaru světelné křivky lze na velikost sklonu i usoudit.

- V případě těsných dvojhvězd tvořících krátkoperiodickou soustavu, jsou jejich složky výrazně slapově deformovány. Během oběhu se mění jejich natočení vůči pozorovateli, a tím i jejich průmět. Proto se jasnost soustavy mění i mezi zákryty.
- Hvězdy se vzájemně osvětlují – ne příliš přiléhavě se tento efekt, který deformuje a komplikuje pozorované světelné křivky, označuje jako *efekt odrazu*.
- Světelnou křivku může deformovat tzv. třetí světlo v soustavě, které může být způsobeno zářením z další hvězdy v soustavě nebo u těsných soustav přítomností plynného proudu mezi složkami, akrečního disku kolem jedné ze složek. Významným deformačním prvkem jsou také skvrny na povrchu složek či akrečního disku.

Toto jsou ty nejdůležitější okolnosti, které formují světelnou křivku. Lze najít samozřejmě i další efekty ovlivňující podobu světelné křivky zákrytových proměnných hvězd, vesměs ale jde o jemnější efekty druhého řádu.



Obrázek 6.15: Změny radiálních rychlostí hmotnostně jen málo odlišných složek A a B dvojhvězdy AR Aur s kruhovými trajektoriemi. Tmavě jsou vyznačena měření pro primární složku, světle pro sekundární, tvar symbolů odlišuje zdroj pozorování. Čáry ukazují proložené křivky radiálních rychlostí – plná pro primární složku, čárkovaná pro sekundární. Zdroj: Folsom et al. (2010).

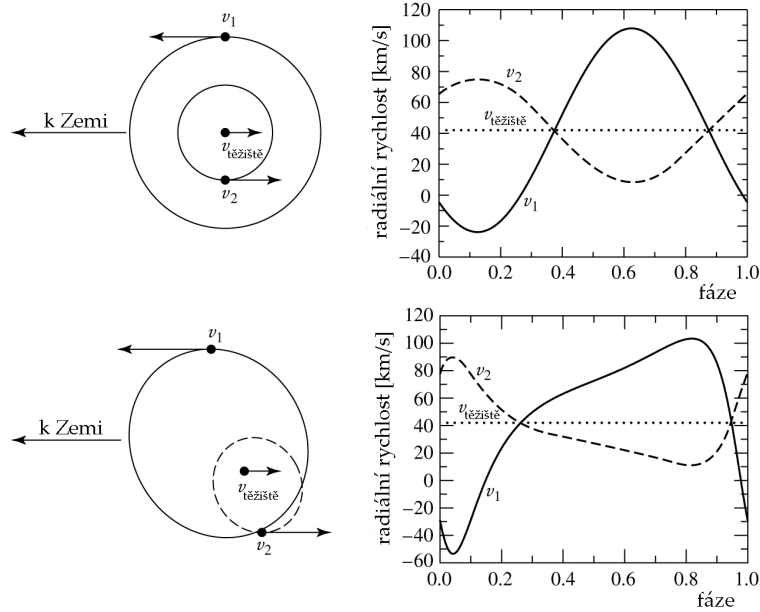
6.2.3 Křivky radiálních rychlostí

Kromě fotometrických pozorování a tedy světelných křivek jsou důležitým zdrojem informací při studiu zákrytových proměnných hvězd i pozorování spektroskopická, zejména pak křivky radiálních rychlostí (viz obr. 6.15). Pomocí nich můžeme určit zejména poměr hmotností q složek dvojhvězdy. Dá se totiž ukázat, že platí

$$q = \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{K_1}{K_2}, \quad (6.15)$$

kde m_1, m_2 jsou hmotnosti složek, a_i, a_2 jejich vzdálenosti od těžiště soustavy a K_1, K_2 amplitudy⁹ křivek radiálních rychlostí složek dvojhvězdy. Podoba křivky radiálních rychlostí silně závisí na trajektorii složek dvojhvězdy, její excentricitě a orientaci vůči pozorovateli (viz obr. 6.16).

⁹Hodnota K odpovídá polovině rozsahu hodnot radiálních rychlostí dané složky dvojhvězdy, proto se někdy označuje jako semiamplituda křivky radiálních rychlostí.



Obrázek 6.16: Orbitální trajektorie (vlevo) a křivky radiálních rychlostí (vpravo) pro hvězdy o hmotnostech $m_1 = 1 M_\odot$ a $m_2 = 2 M_\odot$ s oběžnou dobou $P = 30$ dní. Radiální rychlost těžiště soustavy $v_{\text{těžiště}} = 42$ km/s. v_1, v_2 jsou radiální rychlosti složek. V obou případech je inklinace $i = 90^\circ$. Nahoře je situace s kruhovou trajektorií, dole s excentricitou $e = 0,4$ a délkou periastra $\omega = 45^\circ$. Převzato z Carroll & Ostlie (2007) a upraveno.

Pokud jsou ve spektrech měřitelné spektrální čáry obou složek dvojhvězdy, získáme amplitudy K_1, K_2 a lze přímo určit projekci poloos trajektorií složek

$$a_{1,2} \sin i = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2\pi} K_{1,2} P, \quad (6.16)$$

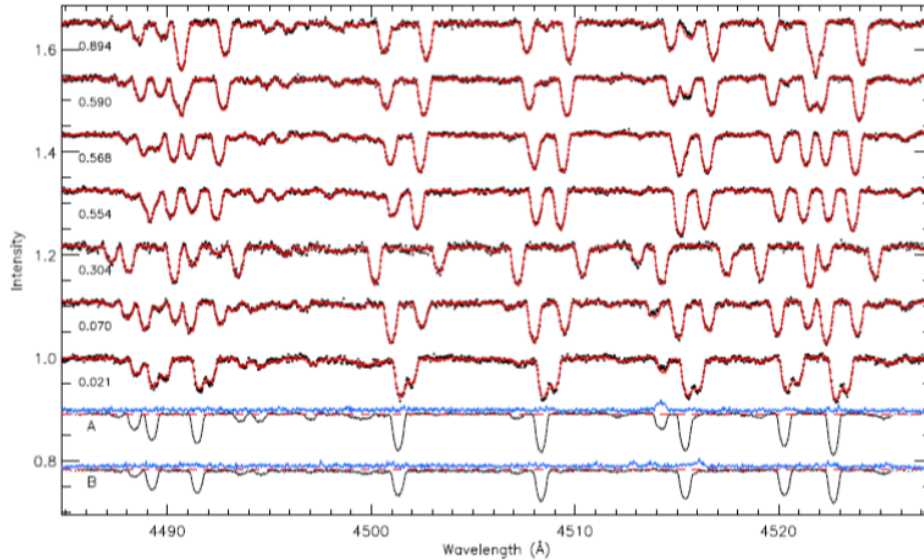
kde P je oběžná perioda složek a i inklinace (sklon) a e excentricita trajektorie. Dosazením třetího Keplerova zákona a úpravami dostaneme vztah pro minimální hmotnosti složek dvojhvězdy

$$m_{1,2} \sin^3 i = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi G} (K_1 + K_2) K_{2,1} P. \quad (6.17)$$

Tento vztah dává skutečné hmotnosti složek dvojhvězdy jen pro $i = 90^\circ$, pro všechny ostatní inklinace jde o dolní mez hmotnosti každé složky. Pokud je ve spektru měřitelná jen jedna složka dvojhvězdy dostaneme po úpravách tzv. hmotnostní funkci

$$f(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (6.18)$$

Pro zpracování spektroskopických pozorování se využívá řady metod od přímého (ručního) proměřování poloh jednotlivých čar, přes metody kroskorelace, rozšiřovací funkce (broadening function) až po metody rozplétání (disentangling) spekter (viz obr. 6.17) nebo dopplerovskou tomografii. Je třeba si ale uvědomit, že například výsledkem disentanglingu jsou přímo parametry systému. Primárním výsledkem jsou zde spektra spektra jednotlivých složek dvojhvězdy a parametry systému. Radiální rychlosti zde už vlastně nejsou zapotřebí, ale lze je samozřejmě pro okamžiky porovnání spekter spočítat.



Obrázek 6.17: Ukázka metody rozplétání spekter pro systém AR Aur. Body vyznačují pozorování a čára ukazuje nejlépe odpovídající spektrum. Výsledná rozmotaná spektra složek A a B jsou vykreslena ve spodní části obrázku. Detaily viz Folsom et al. (2010).

6.2.4 Těsné interagující dvojhvězdy

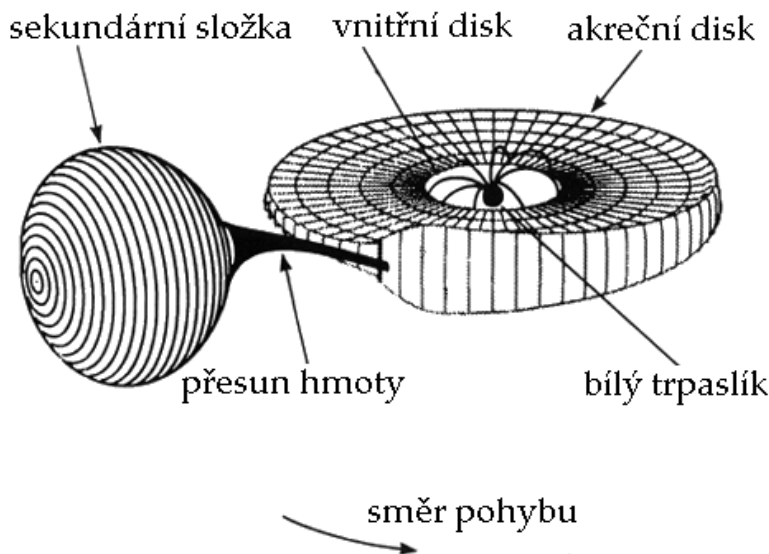
U těsných dvojhvězdných párů dochází ke vzájemné interakci složek systému. Může jít jak o „působení na dálku“, tak i bezprostřední kontakt obou složek s výměnou hmoty.

Anizotropie záření vzhledem k ose orbitálního pohybu může být v těsných systémech způsobena *slapovou deformací složek*, kdy komponenty nabývají kapkovitý tvar (viz kapitola 6.2.1). Jak se soustava otáčí, mění se jejich průřezy kolmé na směr k pozorovateli a tím i pozorovaná jasnost. Dalším momentem je zde fakt, že jas slapově deformovaných hvězd není všude stejný, menší je v oblastech s menším gravitačním zrychlením. U těsných zákrytových dvojhvězd to pak znamená, že se v důsledku slapové deformace složek jasnost soustavy mění i mezi zákryty.

Jiným efektem, který u těsných soustav hraje důležitou roli, je tzv. *efekt odrazu*, vyjadřující fakt, že se hvězdy navzájem osvětlují. Toto záření se ve fotosférách jejich kolegů dílem rozptýlí a vyzáří do prostoru, dílem se absorbuje a slouží k nahřátí svrchních vrstev této hvězdy. V každém případě to vede ke skutečnosti, že jas k sobě přivrácených částí hvězd je větší, než jas částí odvrácených. Při oběhu nám pak hvězdy natáčejí různé části svých fotosfér, což se projeví periodickým kolísáním jasnosti soustavy.

Zvláště významný je efekt odrazu v takových soustavách, kde jednu složku tvoří normální hvězda a druhou je zhroucená složka, která v důsledku akrece látky pocházející z normální složky vyzařuje do prostoru mocné rentgenové záření. To se v povrchových vrstvách druhé komponenty zachytí a nahřeje její fotosféru až o 1000 kelvinů. Vzhledem k tomu, že se rentgenová složka v optickém oboru neprojevuje a je velice malá, takže ani nic nezakryje, pozorujeme jen světelné projevy natáčení normální složky. Jde tedy vlastně o svéráznou rotující proměnnou hvězdu s nestejnými polokoulemi.

V těsných dvojhvězdných často dochází k výměně látky mezi složkami, v soustavě po-



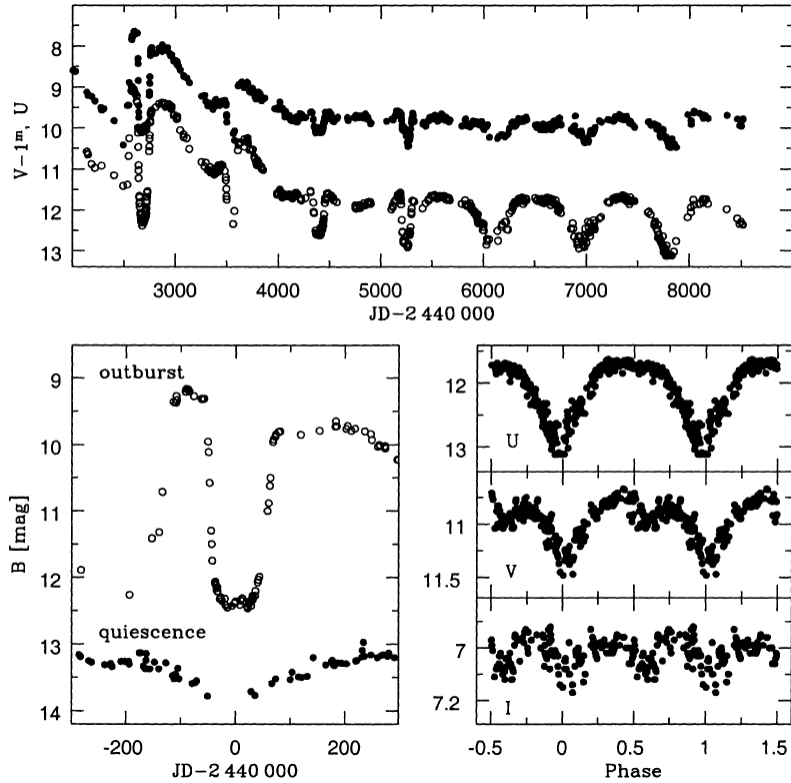
Obrázek 6.18: Schématický náčrt binárního systému s akrečním diskem obklopujícím bílého trpaslíka. Zdroj: <http://heasarc.gsfc.nasa.gov>.

zorujeme *plynné proudy*, *akreční disky*, *horké skvrny*. Tato látka a útvary v ní se projevují i vlastním zářením nebo absorpcí záření složek dvojhvězdy. Během oběhu se konfigurace této látky mění, mění se i světelný příspěvek látky mezi složkami. Interpretace těchto světelných změn je nesnadná, protože je obtížné sestavit dobře fyzikálně fungující modely zohledňující všechny důležité procesy probíhající v soustavách s masivním přetokem látky.¹⁰

Některé těsné, interagující systémy bývají vyčleněny do zvláštních skupin. Jako *kataklyzmické dvojhvězdy* se označují soustavy obsahující normální hvězdu hlavní posloupnosti, která ztrácí hmotu a předává ji akrecí bílému trpaslíkovi. Jsou zpravidla velmi malých rozměrů, typicky srovnatelné velikostí se soustavou Země – Měsíc, což vede ke oběžným dobám od 1 do 10 hodin. Projevují se zejména v rentgenovské části spektra. Patří sem například novy, trpasličí novy, polary.

Další skupinu tzv. *symbiotických dvojhvězd* tvoří dlouhoperiodické interagující dvojhvězdy, jejichž jednu složku tvoří vyvinutý červený obr, zpravidla spektrálního typu M III, který přenáší hmotu na svého horkého a kompaktního průvodce, nejčastěji bílého trpaslíka. Přenos hmoty se v naprosté většině případů uskutečňuje intenzivním hvězdným větrem vyvinuté složky. Horký trpaslík pak tento hvězdný vítr obra ionizuje a kolem soustavy vzniká symbiotická mlhovina o teplotách 7000 K až 15 000 K, která se projevuje jako třetí komponenta složeného spektra dvojhvězdy. Symbiotické hvězdy se mění nepravidelně až o 4 mag na časových škálách stovek dní.

¹⁰V případě horkých interagujících dvojhvězd, projevujících se jako hvězdy se závojem, našli Kříž & Harmanec (1975) důkazy o zákrytech hvězd plynným proudem mezi složkami.



Obrázek 6.19: U, B, V, I světelné křivky CI Cygni. Na horním panelu jsou nejnápadnější hluboké zákryty a velký výbuch, který začal v roce 1975. Během výbuchu a krátce po něm byly zákryty úzké, dobře definované s jasnými časy kontaktů, zatímco v klidovém stavu se vyskytují velmi široká minima a takřka plynulá sinusoidální změna (levý dolní panel). Elipsoidální proměnnost červeného obra je viditelná pouze v klidovém stavu a na vizuálních nebo infračervených křivkách (malý hrb poblíž fáze 0,5 v pravém dolním panelu). Převzato z Mikolajewska (2001).

6.2.5 Význam výzkumu zákrytových dvojhvězd

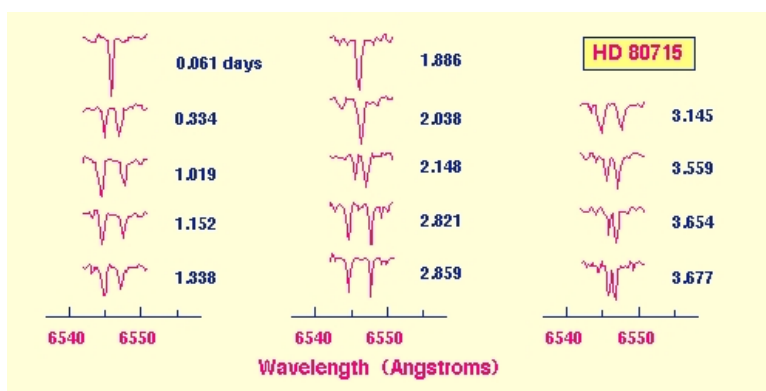
Využitím všech dostupných moderních metod pro studium dvojhvězd můžeme určovat parametry složek dvojhvězdných systémů s relativně vysokou přesností, s chybou menší než 1 %, což je i limit přesnosti pro testování vývojových modelů (Andersen, 1991). Analýzou světelné křivky lze, jak víme určit řadu parametrů, zejména inklinaci i , relativní rozměry složek R_1, R_2 a relativní zářivé výkony složek vzhledem k celkové svítivosti soustavy. Změny polohy sekundárního minima na světelné křivce vypovídají o excentricitě oběžné trajektorie. Z poměru hloubek minim lze usuzovat na poměr povrchových teplot složek. Poměry mezi jasnostmi v minimu a mimo zákryt v různých oborech spektra vypovídají o hodnotách mezihvězdné extinkce. Při rozboru přesných fotometrických pozorování pak lze odhalit i projevy efektů druhého řádu jako koeficienty okrajových ztemnění složek, tedy rozložení jasu na discích hvězd, efekty odrazu, přítomnost skvrn na povrchu složek a podobně.

Připojíme-li k fotometrickým měřením i rozbor spekter lze s pomocí křivky radiálních

rychlostí odvodit lineární vzdálenost složek a tak i absolutní rozměry složek. Zejména ale můžeme určit hmotnosti složek dvojhvězdy, s přesností, jakou nám jiné metody nedávají. Dvojhvězdy v tomto hrají zcela dominantní a nezastupitelnou roli a údaje z jejich výzkumu jsou tak zásadní pro celou astrofyziku. Fotometrická i spektroskopická pozorování navíc přinášejí i informaci o efektivních teplotách složek. Následně tak lze stanovit i zářivé výkony hvězd a jejich absolutní bolometrické hvězdné velikosti. Z nich a z pozorovaných hvězdných velikostí je pak možné odvodit i vzdálenost soustavy. Je důležité si uvědomit, že takto určené vzdálenosti jsou velmi přesné a zejména nezávislé na jiných technikách a slouží tak jako opora pro jiné metody určení vzdáleností i pro škálu efektivních teplot všech hvězd. Od konce minulého století se podobný přístup aplikuje i pro měření extragalaktických vzdáleností (Giménez et al., 1995; Hilditch, 1996 aj.).

Základní parametry hvězd zjištěné pro složky dvojhvězd umožňují přímé testy vývojových modelů hvězd různé hmotnosti. Ale nemylte se. Přestože zákrytových dvojhvězd známe mnoho tisíc, takových, kde jsou dostatečně přesně určeny absolutní parametry soustavy je jen několik desítek. Naše informace o vývojových procesech a jednotlivých aktivních stádiích výrazně obohacují také nové techniky zpracování spekter jako mapování zákrytů, Dopplerovská tomografie či rozmotávání (*disentangling*) spekter. Všechna zjištěná data ale přispívají i k ověření našich představ o specifikách ve vývoji dvojhvězd samotných.

Konečně studium dvojhvězdných soustav, jejichž členy jsou novy, trpasličí novy, rentgenové zdroje, polary, supernovy, neutronové hvězdy, černé díry, slouží kromě již výše zmíněných možností k získávání informací i o těchto, řekněme extrémních, objektech světa hvězd. Získaná data lze využít také k ověřování našich znalostí o základních fyzikálních zákonech, testování platnosti obecné teorie relativity a podobně.



Obrázek 6.20: Změna dvojice spektrálních čar spektroskopické dvojhvězdy HD 80 715 v závislosti na orbitální fázi. Převzato z <http://csep10.phys.utk.edu/astr162>.

6.2.6 Nezákrytové dvojhvězdy

Rovina oběžné trajektorie dvojhvězd může být samozřejmě orientována zcela náhodně. Jen u části systémů tak můžeme pozorovat zákryty. Větší počet soustav (z hlediska orientace roviny oběžné trajektorie složek) můžeme pozorovat spektroskopicky. Uplatní

se Dopplerův jev a my můžeme ve spektru, kde je slité světlo obou složek pozorovat systematické, periodické posuny spektrálních čar. V ideálním případě jde o dva systémy spektrálních čar, které se posouvají v antifázi. Takové spektroskopické dvojhvězdy označujeme jako dvoučarové (double-line spectroscopic binary) SB2. Bohužel velmi často je rozdíl zářivých výkonů obou složek tak markantní, že slabší složka se ve spektru dvojhvězdy prakticky neprosadí a dominuje tam jen primární složka. Pak se ve spektru periodicky mění poloha čar jen jedním způsobem. Mluvíme o single-line binary SB1.

Pravidelně vychází katalog parametrů spektroskopických dvojhvězd (Pourbaix et al., 2009).

6.3 Pulzující proměnné hvězdy

Hvězdné pulzace jsou velmi častou příčinou hvězdné proměnnosti. Na obloze mezi proměnnými hvězdami zcela převažují, v katalogu proměnných hvězd GCVS tvoří celých 70 % všech uvedených hvězd (známé zákrytové dvojhvězdy jsou až na druhém místě). Je však dobré si uvědomit, že tuto statistiku silně zkresluje výběrový efekt, který zvýhodňuje hvězdy s velkým zářivým výkonem.¹¹ Poměr mezi stabilními a pulzujícími hvězdami v Galaxii se odhaduje na $\sim 10^5 : 1$.

Příčinou světelných změn pulzujících hvězd jsou změny povrchových charakteristik – zejména poloměru u radiálních pulzací, tvaru hvězdy u neradiálních pulzací a tomu odpovídající změny povrchové efektivní teploty, k nimž v důsledku periodických pulzací dochází. Největší amplitudu světelných změn jeví proměnné hvězdy pulzující radiálně, tedy hvězdy kulového tvaru, jejichž poloměr se cyklicky mění. Ani u nich však nejsou změny rozměrů hvězdy nijak nápadné. Interferometrická měření ukazují u nejznámější cefeidy δ Cephei změny poloměru cca 8 %.

V Hertzsprungově-Russellově diagramu se setkáváme s pulzujícími proměnnými hvězdami především v tzv. *páseu nestability*, který se zde táhne z oblasti veleobrů třídy G, protíná hlavní posloupnost v oblasti pozdních typů A a raných F, zasahuje až do oblasti bílých trpaslíků pozdního typu B a raného typu A. V páseu nestability nacházíme *klasické cefeidy* typu δ Cephei, cefeidy typu *W Virginis*, krátkoperiodické cefeidy populace II – *hvězdy typu RR Lyrae*, dále pulzující hvězdy hlavní posloupnosti – hvězdy typu δ Scuti a konečně pulzující bílé trpaslíky typu *ZZ Ceti*. V oblasti červených veleobrů a nadobrů se setkáváme dlouhoperiodickými proměnnými hvězdami, ať už pravidelnými nebo polopravidelnými, na horní části hlavní posloupnosti pak s pulzujícími hvězdami typu β Cephei.

6.3.1 Radiální pulzace

Hvězda je gravitačně vázaný útvar ve stavu hydrostatické rovnováhy: v každém bodě hvězdy jsou v přísné rovnováze síly dostředivé (gravitace) a síly odstředivé (gradient tlaku). Jde přitom o rovnováhu stabilní¹², což znamená, že při jejím narušení dojde

¹¹Pokud bych studovali zastoupení různých typů proměnných hvězd ve vzorku hvězd v okolí Slunce, musíme konstatovat, že nejčastěji se zde setkáme s eruptivními červenými trpaslíky, hvězdami pozorovatelsky značně znevýhodněnými svým nízkým zářivým výkonem.

¹²Příklad s labilní rovnováhou je uveden ve skriptech ÚFHaHS.

vždy k posílení té silové složky, která se snaží systém navrátit do rovnovážné polohy. Při návratu do rovnovážného stavu se ale hvězda v rovnovážné poloze nezastaví a bude setrvačností pokračovat ve svém pohybu na opačnou stranu. Proti tomuto pohybu se postaví stále rostoucí rozdíl mezi silami odstředivými a dostředivými. Pohyb se zastaví a změní se v opačný. Pakliže takto pulzuje celá hvězda, hovoříme o radiálních pulzacích. Lze ukázat, že u nevelkých rozkmitů nezávisí perioda děje na jeho amplitudě a odpovídá periodě *vlastních kmitů hvězdy*. Pro vznik a udržení pulzací musí být splněny patřičné podmínky.

Uvažujme element hmoty, jehož stav se cyklicky mění. Pro rozvinutí pulzací musí být celková práce vykonaná na úkor tepla kladná. Na základě 1. a 2. věty termodynamiky lze dojít ke vztahu:

$$W = \oint \frac{\delta Q \delta T(t)}{T_0} > 0, \quad (6.19)$$

v němž T_0 je vždy kladné. Takže aby platila zmíněná nerovnost, musí být při kladném δQ kladné i $\delta T(t)$, což znamená, že při zvyšování teploty musí docházet k pohlcování tepla! Celkovou energetickou bilanci hvězdy lze popsat pomocí věty o viriálu jako

$$U = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle < 0. \quad (6.20)$$

V gravitačně vázaném útvaru je absolutní hodnota potenciální (gravitační) energie rovna dvojnásobku její vnitřní (kinetické) energie

$$2 \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0. \quad (6.21)$$

Uvážíme-li, že ve hvězdě je tato energie dána součtem kinetických energií chaotického pohybu všech částic, lze souhrnně psát

$$E_k = \frac{1}{2} M v_s^2, \quad (6.22)$$

kde v_s je střední kvadratická rychlost částic, kterou je možné vyjádřit pomocí věty o viriálu. Potenciální energie je

$$E_p \sim \alpha G \frac{M^2}{R} = 2 E_k = M v_s^2, \quad (6.23)$$

kde α je koeficient související s rozložením hmoty ve hvězdě, zpravidla blízký jedné (standardně 1,6). Pak střední kvadratická rychlost částic

$$v_s^2 = \alpha G \frac{M}{R}. \quad (6.24)$$

Střední rychlost částic zhruba odpovídá i rychlosti zvuku. Základní periodu radiálních pulzací P_{pz} lze pak zhruba ztotožnit s časem, který je zapotřebí k přenesení informace o změně tlaku z jednoho „konce“ hvězdy na druhý. Tento čas je pak roven $2R/v_s$ a tedy:

$$P_{pz} \approx \frac{2R}{v_s} = \sqrt{\frac{4R^3}{\alpha G M}} \cong \frac{1}{\sqrt{G \bar{\rho}}}. \quad (6.25)$$

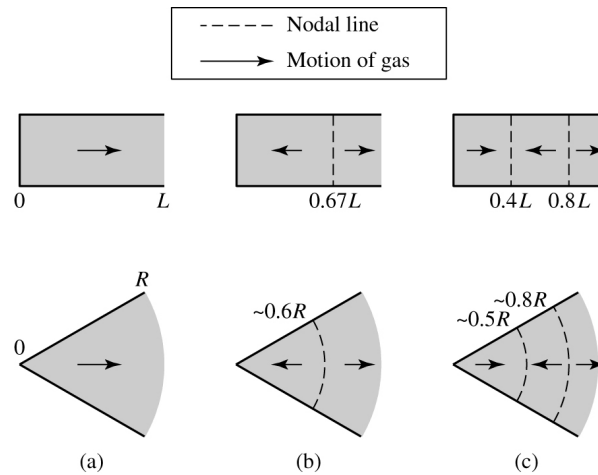
Perioda vlastních kmitů hvězdy, nebo též *základní perioda pulzací*, je tedy funkcí střední hustoty hvězdy a v prvním přiblížení platí, že perioda pulzací hvězdy P je nepřímo úměrná odmocnině z její střední hustoty $\bar{\rho}$

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}. \quad (6.26)$$

Výše uvedený teoretický závěr se shoduje i s naší zkušeností, že rozměrné a velmi řídké dlouhoperiodické proměnné typu *o Ceti* (miridy) pulzují s periodou několika stovek dní, zatímco hustější cefeidy desítky dnů a extrémně hustí bílí trpaslíci mají periody pulzací kratší než jednu hodinu. Relace (6.26) stojí též v pozadí povědomého vztahu *zářivý výkon – perioda* u klasických cefeid.

Amplituda kmitů v nitru radiálně pulzující hvězdy silně závisí na vzdálenosti od centra. V centru hvězdy nutně musí být nulová – zde totiž leží *uzel* (jeden z uzlů) stojatého vlnění, zatímco na povrchu hvězdy je kmitna. Pokud hvězda osciluje v tzv. *základním módu*, pak pulzace v rámci celé hvězdy probíhá ve stejném směru – v témže okamžiku se celá hvězda buď rozpíná nebo smršťuje.

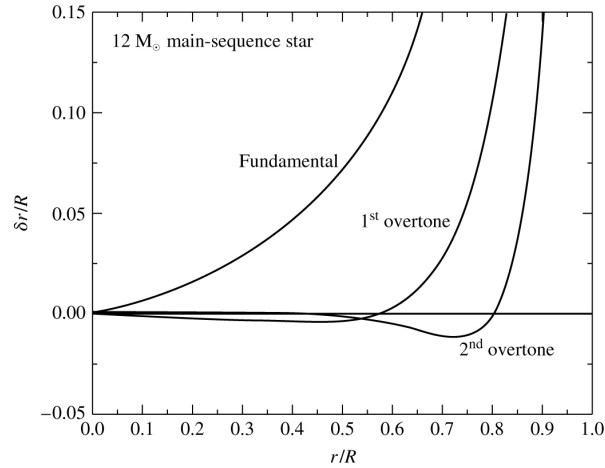
Hvězda však může radiálně kmitat i ve vyšších harmonických frekvencích, ve *vyšších módech*, přičemž stále musí být splněna podmínka, že na povrchu hvězdy je kmitna a ve středu uzel. Ve hvězdě ale navíc existuje jedna nebo více uzlových kulových ploch, tedy míst ve hvězdě, které se během pulzací nehýbou. Látka hvězdy v sousedících mezikoulích se pohybuje v daném okamžiku v opačném směru.



Obrázek 6.21: Stojaté zvukové vlny v píšťale a ve hvězdě a) základní mód, b) první harmonický mód, c) 2. harmonický mód. Převzato z Carroll & Ostlie (2007).

Radiální pulzace hvězd lze zjednodušeně přirovnat k základnímu rezonančnímu tónu v polouzavřených lineárních rezonátorech (obr. 6.21) – tzv. *píšťalách* (klarinet, varhanní píšťala). Základní tón ($n = 0$) má vlnovou délku λ_0 odpovídající čtyřnásobku délky píšťaly l , $\lambda_0 = 4l$. Vyšší modus ($n = 1$) odpovídá stojatému vlnění, v němž kromě povinného uzlu na uzavřeném konci najdeme ještě jeden uzel uvnitř vzduchového sloupce, přičemž na otevřeném konci trubice zůstává kmitna. Uzel se nachází ve dvou třetinách délky trubice a vlnová délka tohoto vlnění je tudíž $\lambda_1 = \frac{4}{3}l$, $\lambda_0/\lambda_1 = 3$. Další modus

($n = 2$) obsahuje ve vzduchovém sloupci dva uzly nacházející se ve $\frac{2}{5}$ a $\frac{4}{5}$ jeho délky (počítáno od uzavřeného konce píšťaly). Vlnová délka vlnění $\lambda_2 = \frac{4}{5} l$, $\lambda_0/\lambda_2 = 5$. V akustickém spektru zvuku, který z polouzavřeného rezonátoru vychází, najdeme kromě základní frekvence, určené délkou rezonátoru, ještě tóny o frekvenci $(2n + 1)$ krát větší než je frekvence tónu základního¹³.



Obrázek 6.22: Radiální módy pulzující hvězdy hlavní posloupnosti o hmotnosti $12 M_{\odot}$. Tvar každé vlny byl přeškálován tak, aby $\delta r/R = 1$ na povrchu hvězdy. Ve skutečnosti je maximální hodnota poměru $\delta r/R$ přibližně 0.05 až 0.10 pro klasické cefeidy. Převzato z Carroll & Ostlie (2007).

Tak, jako v píšťale, jsou i u hvězd povoleny pouze některé frekvence (módy pulzací). Celkově je ale u hvězd situace podstatně složitější. Rozdíly spočívají v tom, že:

1. hvězda není lineárním, ale prostorovým (kulově symetrickým) rezonátorem,
2. rychlost zvuku není v rámci rezonátoru konstantní. Vzhledem k tomu, že teplota ve hvězdě s rostoucí vzdáleností klesá, klesá v ní i rychlost zvuku.

Důsledky jsou pak opravdu zásadní.

- Uzly vyšších harmonických módů nacházíme obecně jinde než u píšťal. U 1. módu je poloměr uzlové koule $0,6 R$ (nikoli $\frac{2}{3}$), u 2. módu $0,5$ a $0,85 R$ (nikoli $\frac{2}{5}$ a $\frac{4}{5}$).
- Poměr mezi periodou základního módu a periodou vyššího módu není 3:1, jak je to v případě polouzavřeného lineárního rezonátoru, ale podstatně menší, asi 1,5:1.
- Na rozdíl od vlnění v lineárním rezonátoru, jehož amplituda má sinusový průběh, je průběh závislosti amplitudy na vzdálenosti od centra hvězdy mnohem komplikovanější. Pulzace se prakticky netýkají centrálních částí hvězdy – amplituda je s ohledem na amplitudu pulzací povrchových částí takřka zanedbatelná. Radiální

¹³První harmonický tón má tedy vzhledem k základnímu tónu třikrát větší frekvenci, což odpovídá hudebnímu intervalu zvanému duodecima - tedy oktáva + kvinta ($1 : 3 = 1 : 2 \times 3/2$). Druhý harmonický tón má vzhledem k prvnímu poměr frekvencí 5:3, což je velká sexta, doplňkový interval mollové malé tercie. Vzhledem k základnímu tónu jde o poměr frekvencí 1:5, což odpovídá dvěma oktávám a velké tercie, matematicky $1 : 5 = 1 : 2^2 \times 5/4$.

pulzace, třebaže postihují celou hvězdu, jsou záležitostí jen vnějšího, velmi řídkého obalu hvězdy, který obsahuje jen procenta její celkové hmotnosti. Pulzace tak nemohou ovlivnit stav hvězdného nitra, zejména nemají žádný vliv na produkci hvězdné energie.

Naprostá většina klasických cefeid a hvězd typu W Virginis pulzuje radiálně, a to v základním módu. Existují však i výjimky, jakou je třeba Polárka, která kmitá v 1. harmonické. Proměnné typu RR Lyrae pulzují jak v základním módu, tak v 1. harmonické, některé z nich v obou módech současně. Miridy pulzují rovněž v základním módu, situace je u nich však komplikovanější než u pulzujících hvězd pásu nestability, protože pulzace zde vedou ke vzniku rázové vlny, která při svém průchodu atmosférou výrazně mění její průzračnost.

6.3.2 Mechanismus pulzací

Pozorování velkého počtu pulzujících proměnných hvězd prokázala, že amplituda jejich pulzací se dlouhodobě nemění. Z energetického hlediska to znamená, že pulzace jsou neustále dotovány nově přichozí energií. V nitru každé reálné pulzující hvězdy hraje důležitou roli tření, které převádí uspořádaný pohyb pulzací na neuspořádaný pohyb tepelný. Kdyby v pulzujících hvězdách nepůsobil mechanismus, který neustále tyto ztráty uhrazuje, pulzace hvězd by se záhy ztlumily a hvězda by přešla do stavu dokonalé hydrostatické rovnováhy.

Radiální pulzace využívají jako energetický zdroj tok zářivé energie prostupující hvězdou z centra na povrch, který je stále k dispozici v kterékoli části hvězdy. Nicméně k tomu, aby se ve hvězdě pulzace udržely, je nezbytné, aby zde existovaly dostatečně rozsáhlé oblasti hvězdy, které by ve fázi největšího smrštění dokázaly zadržet potřebné množství procházející zářivé energie a tuto naakumulovanou energii v okamžiku následující expanze opět vyzářit. Už z toho, že valná většina hvězd viditelně nepulzuje, je zřejmé, že uvedená podmínka bývá splněna jen zřídka. Hvězdná látka se tak totiž nechová. Když ji adiabaticky stlačíte, zvýší se nejen její hustota, ale i teplota, jež způsobí, že opacita látky κ poklesne dle Kramerova zákona: $\kappa \propto \rho T^{-3.5}$, takže látka zprůhlední a pro procházející zářivý tok znamená menší překážku. Takovéto chování hvězdné látky ovšem hvězdné pulzace potlačuje a stojí tak na téže straně barikády jako disipace mechanické energie v důsledku tření.

Přesto Eddington (1926) pro vysvětlení pulzací navrhl tzv. záklopkový mechanismus, podle něž by v pulzující hvězdě měla existovat vrstva materiálu, jehož opacita bude při stlačování (ohřevu) naopak narůstat. Taková vrstva by pak byla schopna během smrštění absorbovat dostatek energie, přehradit její tok z nitra a při následné expanzi ji zase uvolnit. Šlo jen o to, zda taková vrstva v reálných hvězdách vůbec existuje.

Přesné podmínky pro rozvinutí a zachování pulzací odvodil až v 50. letech minulého století Ževakin (1953) a později je detailně propočítali R. Kippenhahn, N. Baker a J. P. Cox. Zjistili, že záklopkový mechanismus, jak jej navrhl Eddington může úspěšně pracovat v oblastech s částečně ionizovanou látkou.

A jak tedy vlastně zmíněný záklopkový mechanismus (κ -mechanismus) funguje? Při smršťování se část energie procházející „aktivní“ vrstvou spotřebovává spíše na ionizaci prvků, než na zvyšování teploty, což vede k růstu opacity vrstvy vzhledem k okolí.

Neprůhlednost vrstvy způsobuje růst tlaku plynu a záření, který naroste do takové síly, že vyzvednou vrstvu výše. Vrstva se pohybuje vzhůru, směrem od středu hvězdy do míst s menší hustotou a teplotou. Během tohoto pohybu se vrstva rozpíná, dochází k houfné rekombinaci atomů a k uvolňování naakumulované energie. Teplota vrstvy ale neklesá tak rychle jako v okolí, což spolu s klesající hustotou vede ke snížení opacity vzhledem k okolí. V určitém okamžiku ale tíha výše položeného materiálu převáží nad silou směřující vzhůru a cyklus začíná znovu.

Někdy je popsán κ -mechanismus posílen tím, že do stlačované „aktivní“ vrstvy s částečně ionizovaným materiálem prostupuje teplo, jednoduše proto, že je tato vrstva chladnější než její okolí. Díky narůstajícím tepelným kapacitám C_V a C_P je vrstva schopna pojmout tohoto tepla více. Tento efekt se někdy podle poměru $\gamma = C_P/C_V$ označuje jako γ -mechanismus.

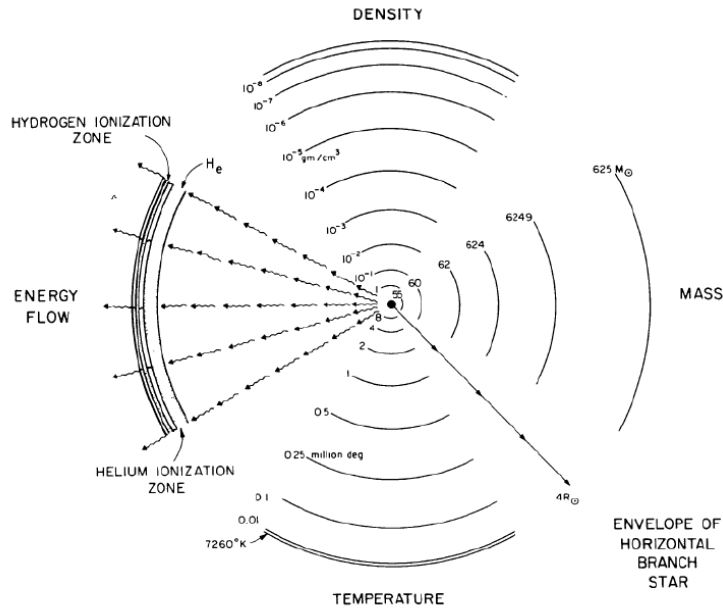
Ve většině hvězd jsou dvě hlavní řídicí vrstvy pulzací. První je široká vrstva, v níž se nachází jak ionizovaný vodík, tak i jednou ionizované hélium. Zpravidla se označuje jako oblast částečně ionizovaného vodíku a vyskytuje se v hloubkách s teplotou mezi 10 000 až 15 000 K. Tato vrstva má u většiny pulzujících hvězd jen okrajový význam. Uplatňuje se však u mirid a pulzujících trpaslíků typu ZZ Ceti. Pro ostatní typy radiálně pulzujících hvězd je důležitější druhá, hlouběji uložená vrstva částečně ionizovaného helia s teplotou cca 40 000 K. Vedle sebe se tam ve srovnatelném zastoupení nacházejí jedenkrát ionizované atomy helia (He II) a zcela ionizované atomy téhož prvku (He III).

Ale pozor, aby byl zmíněný tepelný stroj patřičně účinný, musí být aktivní vrstva He II/He III uložena v optimální hloubce pod hvězdným povrchem. Ve hvězdách s nižší efektivní teplotou je tato vrstva uložena příliš hluboko ve hvězdě, čili v místech, kde je amplituda pulzací tak nicotná, že se jimi vlastnosti vrstvičky takřka nemění a zadržené teplo je jen nepatrné. Naopak pulzující hvězdy nesmějí být příliš horké, protože v nich je aktivní vrstva uložena ve vyšších, relativně velmi řídkých a málo hmotných podpovrchových vrstvách hvězdy. Malá hmotnost aktivní vrstvy znamená i nedostačující množství zadržené energie, které pak není s to dotovat tepelné ztráty při pulzacích hvězdy. To znamená, že hloubka uložení vrstvy ve hvězdě určuje, v jakém módu bude hvězda pulzovat. U teplejších hvězd je vrstva níže a vznikají pulzátory pulzující v prvním harmonickém módu, u chladnějších vznikají pulzátory se základním módem. Teplota hvězdy a tím i uložení aktivní vrstvy He II/He III také vymezují hranice pásu nestability v HR diagramu, takřka svislého pruhu o šířce 600 až 1000 K pro hvězdy v rozmezí teplot 5500 až 7500 K. Šířka pásu nestability se mírně mění v různých oblastech HRD.

Výše zmíněné vrstvy ionizovaného materiálu helia a vodíku jsou zodpovědné za pulzace hvězd v pásu nestability. Ale za pulzací hvězd v horní části hlavní posloupnosti s teplotami kolem 10^5 K stojí vrstva částečně ionizovaných prvků skupiny železa.

6.3.3 Pás nestability a jeho interpretace

Jak jsme již ukázali, radiálně pulzující hvězdy musí splňovat podmínku, že se v nich v patřičné hloubce vyskytuje dostatečně mohutná vrstva materiálu, který je schopen v sobě akumulovat a poté opět uvolňovat zadržený zářivý tok energie přicházející z centra. Je to tedy otázka stavby hvězdy, a hvězdy s podobnou stavbou zejména podpovrchových vrstev se v HR diagramu vyskytují pospolu. V případě hvězd splňujících podmínku pulzační nestability tyto hvězdy v HR diagramu vytvářejí tzv. pás nestability. Pokud se hvězda při svém vývoji dostane do pásu nestability, pak se v ní záhy rozvinou



Obrázek 6.23: Vrstvy ve hvězdě na počátku horizontální větve v HR diagramu. Převzato z Iben (1971).

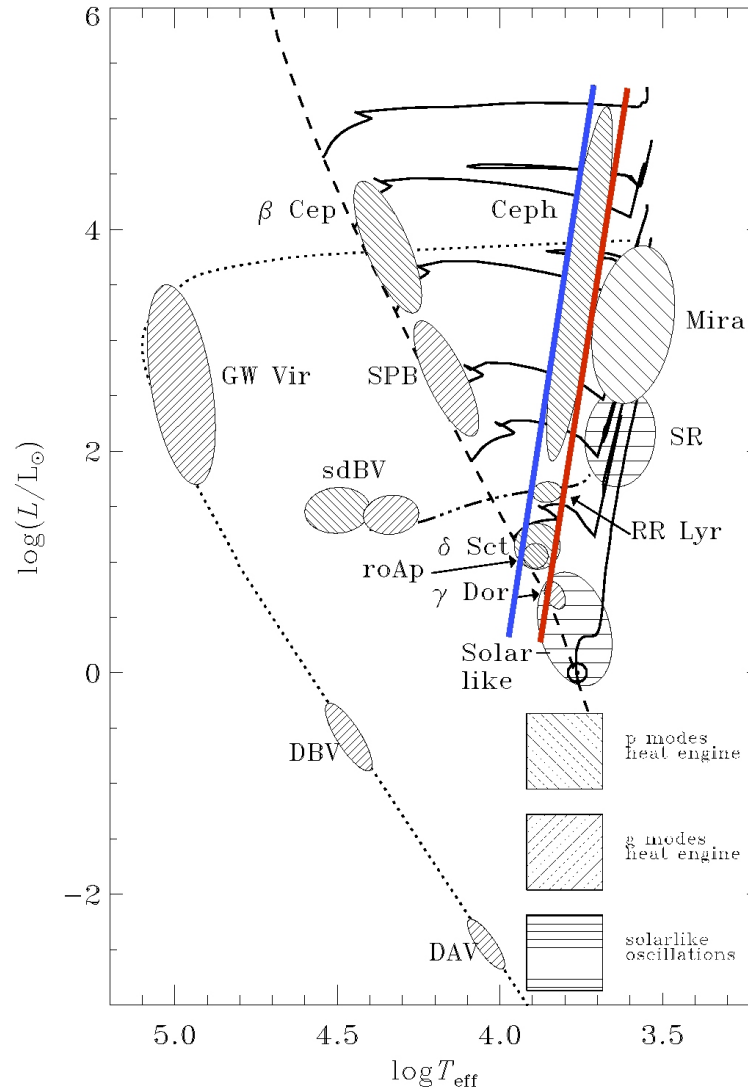
a udrží radiální pulzace. Když oblast nestability v průběhu dalšího vývoje opustí, silné radiální pulzace se v ní zase utlumí. To jak rychle bude hvězda pulzovat a jaký typ proměnnosti ji přisoudíme pak bude záviset především na její střední hustotě, a tedy na hmotnosti hvězdy a stupni jejího vývoje.

Nejhmotnějším a nejzářivějším osazenstvem pásu nestability jsou *klasické cefeidy* – veleobří typu Ib pulzující s periodou dnů až desítek dnů. Tyto proměnné hvězdy též jeví největší amplitudy světelných změn, velmi výrazné jsou i pozorované změny radiálních rychlostí (rozkmit až 50 km/s) i změny efektivní povrchové teploty. Všechna pozorování do sebe dobře zapadají a potvrzují naši základní představu o cefeidách jako o radiálně pulzujících hvězdách, jejichž oscilace jsou dotovány zadržováním zářivé energie ve vrstvě, v níž je srovnatelnou mírou zastoupeno jednou a zcela ionizované helium.

Kratší periody, nižší výkony a menší amplitudy světelných křivek mají po řadě hvězdy typu *W Virginis*, *RR Lyrae*, *δ Scuti* a konečně bílé trpaslíci typu *ZZ Ceti*, kteří kmitají s periodou 100–1000 s (zpravidla v 1. harmonickém módu).

Hvězdy typu *RR Lyrae* jsou obří hvězdy s hmotností kolem 0.7 M_⊙, které jsou ve velmi pokročilém stádiu svého vývoje. Běžně se s nimi setkáváme v kulových hvězdokupách a v galaktickém halu, kde se vyskytují ty nejstarší hvězdy v galaxiích. Jedná se tedy vesměs o hvězdy první generace. Kvůli jejich nízké povrchové teplotě se dlouho nedařilo stanovit zastoupení hélia v jejich vnějších vrstvách, které svým chemickým složením odrážejí složení materiálu, z něhož tyto hvězdy vznikly.

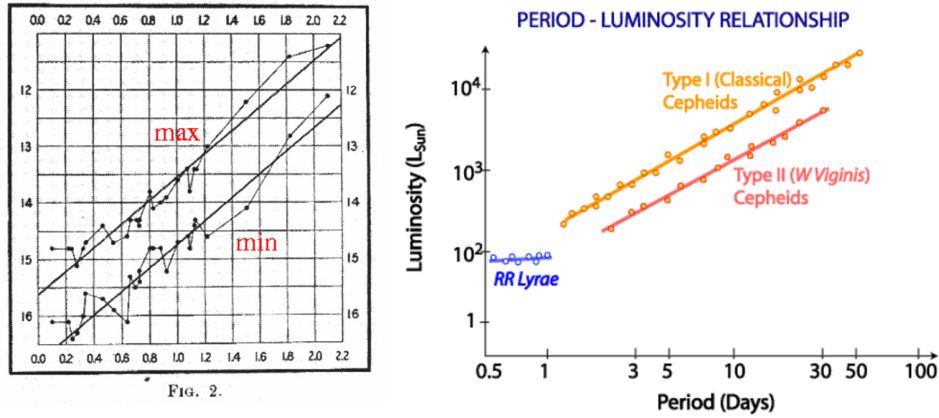
Nicméně už sám fakt, že hvězdy typu *RR Lyrae* existují a pulzují, ukazuje, že musejí od svého zrodu obsahovat helium, a to v zastoupení, které odpovídá současnému. Toto zjištění má mimořádnou důležitost pro teorie raného vývoje vesmíru, neboť jim ukládá za úkol vysvětlit též, kde se ve vesmíru vzalo *prvotní helium*, a to ještě před érou vznikání prvních hvězd.



Obrázek 6.24: Pulzující hvězdy v HR diagramu. Šrafování jednotlivých oblastí značí typ pulzací, jak ukazuje vložený obrázek vpravo dole. Pás nestability je vyznačen barevně silnými čarami. Čárkovaná čára vyznačuje polohu hlavní posloupnosti nulového stáří ZAMS. Na ní končí linie vyznačující vývojové cesty hvězd o hmotnostech 1, 2, 3, 4, 7, 12 a 20 M_{\odot} . Čerchovaná čára značí horizontální větev a tečkovaná křivka je křivka chladnutí bílých trpaslíků. Převzato z http://astro.phys.au.dk/~jcd/HELAS/puls_HR/ a upraveno.

Hvězdy typu δ Scuti jsou vůbec nejpočetněji zastoupenými pulzujícími hvězdami pásu nestability, což je dáno tím, že se jedná o příslušnice hlavní posloupnosti, na níž hvězdy během svého vývoje stráví nejdelší dobu. Pozorované světelné křivky těchto hvězd jsou velmi komplikované a lze je vysvětlit superpozicí řady pulzací, z nichž některé ani nejsou radiální. Navíc amplitudy světelných změn jsou nevelké, 10^{-2} i 10^{-3} mag, což je k jejich škodě odsouvá z oblasti zájmu většiny pozorovatelů proměnných hvězd.¹⁴

¹⁴Výjimkou jsou HADS (High-amplitude delta Scuti stars) s amplitudami většími než 0.1 mag (V).



Obrázek 6.25: *Vlevo*: Historický diagram závislosti perioda – svítivost pro cefeidy převzatý z práce Leavitt (1908). Na vodorovné ose je $\log P$, na svislé pak hvězdné velikosti v magnitudách. *Vpravo*: Graf pro vztah perioda-svítivost pro cefeidy i hvězdy typu RR Lyrae. Zdroj: <http://outreach.atnf.csiro.au/>.

6.3.4 Závislost perioda–zářivý výkon a její vysvětlení

Závislosti mezi periodou a absolutní hvězdnou velikostí klasických cefeid si povšimla již Henrietta Swan Leavittová (čti *levitová*) (1868-1921). Na snímcích systematické přehlídky Magellanových mračen pořizovaných na observatoři Harvard College v Peru u Arequipa v letech 1893 až 1906 objevila 1777 proměnných hvězd¹⁵. Do roku 1908 určila periody několika cefeid a povšimla si, že jasnější z nich mají delší periody (viz obr. 6.28).

Protože hvězdy z Malého Magellanova oblaku (SMC) jsou od nás všechny relativně zhruba stejně daleko (cca 60 kpc), indikuje to, že i absolutní hvězdné velikosti těchto hvězd jsou funkcí periody. Tento fakt umožnil s nebývalou spolehlivostí měřit vzdálenosti cefeid a tím i vzdálenosti soustav, v nichž se tyto cefeidy nacházejí. Cefeidy jsou k tomu účelu zvláště vhodné, neboť jsou to jedny z nejsvítivějších hvězd, které ve vesmíru nacházíme – jsou tedy viditelné do veliké dálky.

Zatímco sklon závislosti absolutní hvězdné vizuální velikosti cefeid M_V na logaritmu jejich periody známe s vysokou přesností a spolehlivostí, se stanovením polohy tzv. *nulového bodu* – absolutní hvězdné velikosti fiktivní cefeidy o periodě 1 den – je to o dost svízelnější. V minulosti byla hodnota nulového bodu závislosti $M_V - \log P$ klasických cefeid několikrát korigována, a to vždy směrem k větším absolutním jasnostem. Každá taková recalibrace měla závažné důsledky na náš náhled na vzdálenosti ve vesmíru, na jeho stáří a vývoj.

Zde je totiž nezbytné znát spolehlivě vzdálenost alespoň jediné z cefeid. Tu jsme však až donedávna neznali, i ta nejbližší z cefeid, Polárka, byla příliš daleko, než aby bylo možné stanovit její paralaxu. Navíc, konkrétně u Polárky nejde o typickou cefeidu, takže není pro kalibraci vhodná. Situace se poněkud zlepšila po misi astrometrické družice

¹⁵Jen pro srovnání, poslední verze katalogu z přehlídky OGLE III uvádí 3361 klasických cefeid v LMC (Soszyński et al., 2008) a 4630 v SMC (Soszyński et al., 2010).

Hipparcos, z níž vyplynula následující relace^{16,17}:

$$\overline{M}_V = -2,81 \log P - 1,43(10), \quad (6.27)$$

kde hvězdná velikost je uváděna v magnitudách, a perioda ve dnech.

Při užívání vztahu zářivý výkon–perioda ale musíme mít na paměti, že platí pouze pro ty cefeidy, které pulzují v základním módu. Cefeidy, oscilující v 1. harmonickém módu, mají při tomtéž výkonu kratší periodu. Naštěstí lze oba případy snadno rozlišit již pouhým pohledem na světelnou křivku – zatímco u cefeid kmitajících v základním módu je tato křivka výrazně asymetrická, cefeidy pulzující v 1. harmonickém módu mají světelné křivky docela symetrické.

V současnosti se v literatuře uvádí vztah perioda - absolutní jasnost ve tvaru, kde vystupují veličiny nezávislé na mezihvězdné extinkci. Takovou veličinou je třeba funkce W (v angl. Wesenheit function), v níž vystupují skutečně pozorované hvězdné velikosti v barvě např. V a I a jistá konstanta R_{VI} odvozená zpravidla z pozorování. Odpovídající funkci W zkonstruujeme takto: $W = V - R_{VI}(V - I) = V_0 - R_{VI}(V - I)_0 + [A_V - R_{VI}E(V - I)] = W_0$, kde (6.28)

$$V_0 = V - A_V, \quad (V - I)_0 = (V - I) - E(V - I), \quad R_{VI} = \frac{A_V}{E(V - I)} \quad (6.29)$$

kde veličiny označené nulou jsou veličiny korigované o mezihvězdnou extinkci, A_V je extinkce v barvě V a $E(V - I)$ barevný exces příslušný k barevnému indexu $(V - I)$ a R_{VI} je konstanta daná vlastnostmi mezihvězdného materiálu nezávislá na konkrétní hodnotě A_V . Její velikost ocenili např. Freedman et al. (2001) na 2,45.

Obecně lze závislost perioda – zářivý výkon, s absolutní funkcí W zapsat

$$W_{\text{abs}} = a + b(\log P - 1). \quad (6.30)$$

Nejpřesnější určení hodnot parametrů $a = -5.86 \pm 0.04$, $b = -3.34 \pm 0.17$ vychází z měření HST (Benedict et al., 2007). Jedna z posledních studií vzdálenosti LMC pomocí fotometrie je pak například Inno et al. (2013).

Teoretické objasnění pozorované relace mezi periodou cefeid a jejich zářivým výkonem spočívá ve faktu, že klasické cefeidy jsou hmotnými veleobry, kteří se při svém vývoji dostali do oblasti pásu nestability. Vzhledem k tomu, že pás nestability je relativně úzký, závisí poloha cefeidy v tomto pásu především na jejím zářivém výkonu, a ten opět hlavně na hmotnosti příslušné hvězdy. Všeobecně platí, že v rámci té části pásu nestability, kde se setkáváme s cefeidami, směrem k vyšším zářivým výkonům:

- a) roste absolutní jasnost hvězd (tj. klesá jejich absolutní hvězdná velikost);
- b) klesá povrchová teplota hvězd;
- c) roste jejich hmotnost a poloměr;
- d) výrazně klesá jejich střední hustota.

S ohledem na to, že vnitřní stavba cefeid různé hmotnosti je dosti podobná, lze uplatnit základní relaci pro vlastní kmity hvězdy, podle níž je perioda pulzací nepřímo úměrná odmocnině její střední hustoty, a tedy musí platit, že

- e) perioda hvězdy roste.

Spojením bodů a) a e) pak dospíváme k objasnění pozorovaného vztahu mezi periodou pulzací a zářivým výkonem, absolutní hvězdnou velikostí hvězdy.

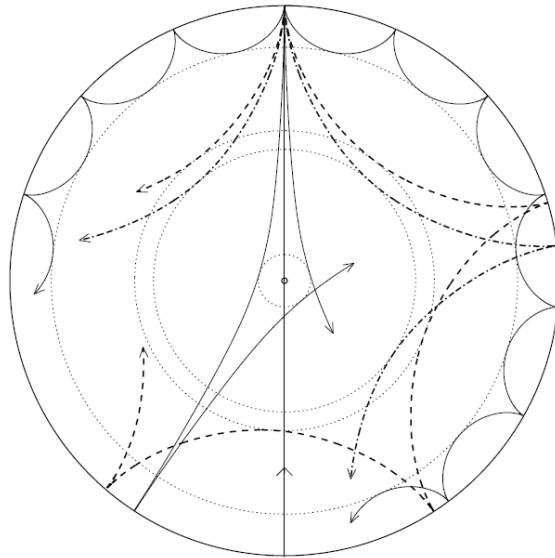
¹⁶Feast M. W., Catchpole R. M.: 1997, MNRAS 286, L1

¹⁷Je třeba připomenout, že absolutní hvězdná velikost M_V se během pulzací zřejmě mění. Ve vztahu 6.27 M_V se proto uvádí střední absolutní hvězdná velikost

6.3.5 Pulzace radiální i neradiální. Módy pulzací

Hvězdné pulzace mají povahu podélného vlnění, které se šíří i v zduchem a kapalinami (na rozdíl od vlnění příčného, které se šíří jen v tuhých tělesech). Podélné vlnění prostupuje tělesem hvězdy a interferuje samo se sebou – vzniká tzv. stojaté vlnění. V prostorových rezonátorech jsou pro vznik stojatého vlnění, jež vzniká interferencí, nepostradatelné odrazy na stěnách rezonátoru. Pokud je tímto rezonátorem třeba těleso Země, pak k nezbytným odrazům seismických vln dochází na povrchu Země. Kde však může dojít k odrazům v tělese Slunce, či jiné hvězdy, u nichž žádnou podobnou diskontinuitu nenajdeme? Vypadá to tak, že v plynných, neohraničených hvězdách se mohou ustavit jen radiální oscilace, kde pevným koncem (uzlovým bodem) je střed hvězdy. Uvažíme-li však, že tu máme co do činění s akustickými vlnami o délce 10^4 až 10^5 km, je zřejmé, že touto diskontinuitou, čili povrchem může být hvězdná fotosféra, jejíž tloušťka je proti vlnové délce zanedbatelná. Vlna přicházející z nitra se tak na povrchu hvězdy odráží podle klasických zákonů pro odraz vlnění. Kromě odrazu akustických vln od fotosféry hraje při šíření těchto vln důležitou roli i jejich lom daný tím, že směrem dovnitř hvězdy roste teplota, a tím i rychlost zvuku, čili klesá index lomu. Vlna postupující šikmo do hvězdy se tak láme směrem od normály. Sledujeme-li pak směr postupu takové vlny, která se právě odrazila od povrchu, vidíme, že se trajektorie vlny neustále zakřivuje směrem k povrchu. Vlna tak při svém postupu dosáhne jisté maximální hloubky, pak začne opět symetricky vystupovat nahoru. Takováto vlna může interferovat sama se sebou, ve hvězdě může vzniknout stojaté vlnění (viz obrázek 6.26).

Největší amplitudu má stojaté vlnění odpovídající určitým módům, které splňují jisté speciální podmínky. Protože se ve hvězdě jedná o vlnění v třírozměrném rezonátoru, jsou pulzace popsány uspořádanou trojicí vlnových čísel $\{n, l, m\}$.



Obrázek 6.26: Zvukové vlny ve hvězdě. Převzato z Kurtz (2006).

Ve hvězdě se totiž naprostá většina vlnění vlastní interferencí zruší, zbudou jen taková, která splňují určité podmínky. Pro jednoduchost předpokládejme, že hvězda

pulzuje jen v jediném pulzačním módu. Pak na jejím povrchu najdeme oblasti, které pulzují ve fázi i v antifázi. Tyto plochy od sebe oddělují *uzlové kružnice*. V rotující hvězdě, kde základní symetrii pulzací určuje osa rotace hvězdy, jsou uzlové kružnice obdobou systému poledníků a rovnoběžek na zemském glóbu. Příslušný pulzační modus je popsán dvojicí celých čísel l a m , kde l vyjadřuje celkový počet uzlových kružnic. Pokud $l = m = 0$, pak je to případ čistě *radiálních pulzací*, který jsme již diskutovali.

Je-li m různé od nuly, lze si představit příslušný modus jako *postupnou vlnu*, která běží kolem hvězdy rovnoběžně s rovinou rovníku buď ve směru rotace ($m > 0$) nebo proti směru rotace ($m < 0$). Čas, který tato vlna cestující kolem hvězdy potřebuje k celému oběhu je $|m|$ násobek příslušné pulzační periody. Vlna po hvězdě postupuje, aniž by se horizontálního pohybu účastnily reálné částice. (V tom se liší od radiálních pulzací, kde částice pulzační pohyb skutečně vykonávají.) Po povrchu hvězdy putuje i $|m|$ pomyslných *azimutálních uzlových kružnic*, procházejících rotačními póly, které povrch hvězdy dělí na $2|m|$ stejných dílů (jako dužnina pomeranče).

Oscilace mají ještě další stupeň volnosti – hvězda kmitá vzhledem k ekvatoreální rovině, přičemž $l - |m|$ vyjadřuje počet uzlových rovnoběžek ($|m|$ udává počet uzlových poledníků). Je-li $l = 1$, pak leží tato kružnice na rovníku, při $l = 2$ jsou tu dvě uzlové rovnoběžky uložené symetricky vzhledem k rovníku. Hodnota m se pohybuje vždy v rozmezí od -1 do $+1$, takže pro každé číslo l existuje $2l+1$ m -módů. Všeobecně také platí, že čím vyšší je číslo l , tím méně hluboko tyto módy do nitra hvězdy zasahují. Dalším parametrem je počet uzlových sfér uvnitř hvězdy popsany číslem n , které nabývá celočíselných kladných hodnot včetně nuly. V základním módu není žádný uzel ($n=0$), v 1. harmonické jeden ($n=1$), v 2. harmonické dva ($n=2$) apod.

Stejně jako u radiálních pulzací je amplituda vyšších harmonických v nitru výrazně menší než relativní amplituda základního módu.¹⁸ Pokud hvězdy neradiálně pulzují, pak se tak většinou děje současně ve velkém počtu módů, jejichž účinky se navzájem překládají. Výsledkem je neobyčejně komplikovaný pohyb, který bychom mohli popsat nespíše jako chvění. Nicméně právě toto chvění nám přináší o vlastnostech hvězd zcela neocenitelné informace.

Matematicky lze 3D oscilace ve hvězdě popsat v soustavě sférických souřadnic (r, θ, φ) pomocí sférických harmonických funkcí $Y_l^m(\theta, \varphi)$. r popisuje poloměr soustředných radiálních obálek, θ vyjadřuje šířkovou souřadnici a značí φ poledníky na hvězdě, l, m jsou výše uvedená modální čísla. Pro sféricky symetrickou hvězdu můžeme vychýlení z rovnovážné polohy ξ v čase t zapsat jako

$$\xi_r(r, \theta, \varphi, t) = a(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i2\pi\nu t}, \quad (6.31)$$

$$\xi_\theta(r, \theta, \varphi, t) = b(r) \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} e^{i2\pi\nu t}, \quad (6.32)$$

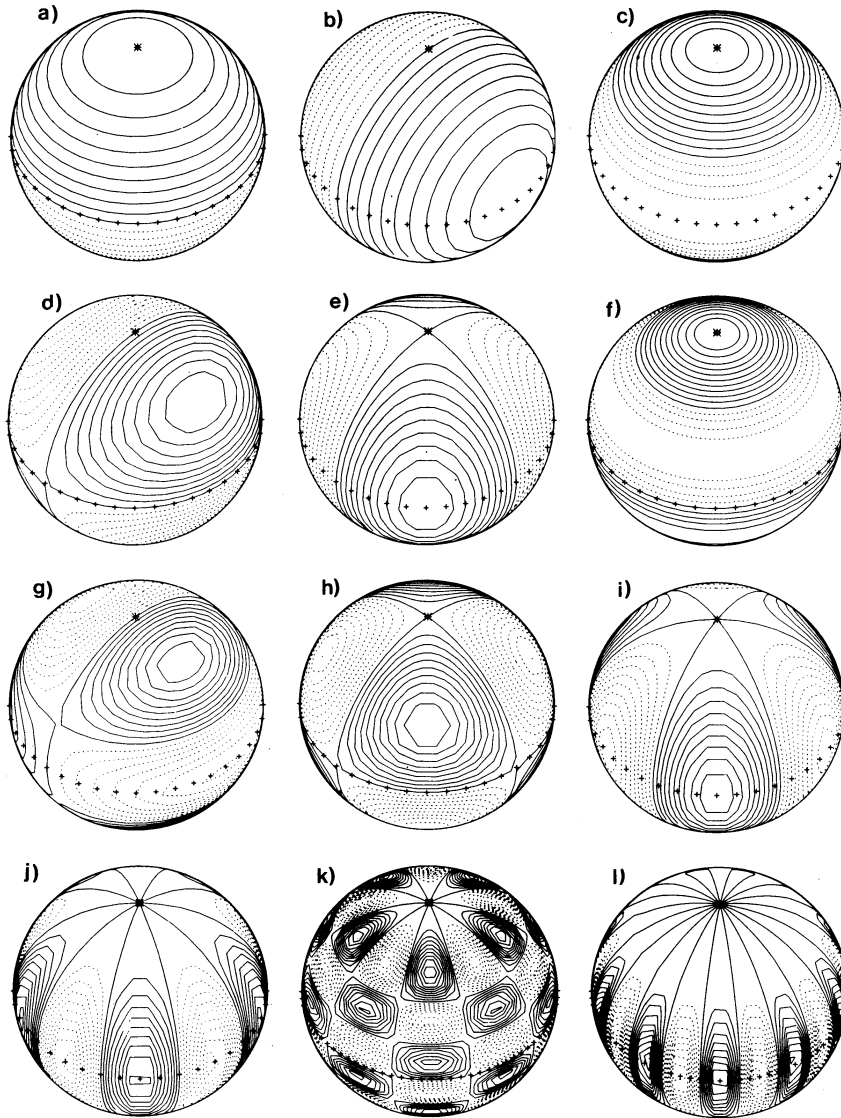
$$\xi_\varphi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{b(r)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i2\pi\nu t}, \quad (6.33)$$

kde $a(r), b(r)$ jsou amplitudy a ν je frekvence oscilací. Sférické harmonické funkce jsou

¹⁸Síla, která se snaží vybuzený stav navrátit do rovnovážného stavu, souvisí s tlakem (pressure), proto se těmto typům oscilací říká p-módy. Existují zřejmě ještě tzv. gravitační, čili g-módy.

dány vztahem

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (6.34)$$



Obrázek 6.27: Nákresy vrstevnic pro skutečné sférické harmonické funkce $Y_l^m(\theta, \varphi)$ dle vztahu 6.34, kde byl pro jednoduchost potlačen fázový faktor $(-1)^m$. Kladné vrstevnice jsou vyznačeny plnou čarou, záporné přerušovanou. Osa $\theta = 0$ byla stočena o 45° směrem ke čtenáři a příslušný pól je označen hvězdičkou. Rovník je vyznačen sérií křížků. V obrázku jsou následující situace: a) $l = 1, m = 0$; b) $l = 1, m = 1$; c) $l = 2, m = 0$; d) $l = 2, m = 1$; e) $l = 2, m = 2$; f) $l = 3, m = 0$; g) $l = 3, m = 1$; h) $l = 3, m = 2$; i) $l = 3, m = 3$; j) $l = 5, m = 5$; k) $l = 10, m = 5$; l) $l = 10, m = 10$. Převzato z Christensen-Dalsgaard (2003).

kde $P_l^m(\cos \theta)$ jsou Legendreovy polynomy dané vztahy

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d \cos^{l+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^l, \quad (6.35)$$

kde θ je měřena od pulzačního pólu, osy symetrie. Hvězdy nepulzují jen v jednom nebo dvou módech, ale většinou v mnoha módech najednou.

Ve většině hvězd osa pulzací souhlasí s rotační osou hvězdy. Výjimkou jsou rychle oscilující chemicky peculiární hvězdy – tzv. roAp hvězdy, kde osa pulzační symetrie souhlasí s osou magnetického pole.

6.3.6 Helioseismologie a astroseismologie

Až do 60. let 20. století se všeobecně soudilo, že hvězdné pulzace postihují jen hvězdy, které jsou k pulzacím náchylné, ostatní, tuctové se zdály být vůči pulzacím odolné. Tento názor byl podporován i „teoretickým zdůvodněním“, že pulzace hvězd se velmi rychle utlumí, pokud nejsou náročným způsobem energeticky dotovány zvláštním mechanismem, který je stále udržuje. Případné pulzace svrchních vrstev hvězdy měla zvláště účinně tlumit dynamicky rozháraná konvektivní vrstva se silnými vertikálními pohyby zajišťujícími přenos tepla z nitra na povrch. To vše by ovšem vedlo k tomu, že by pulzovalo jen nepatrné procento hvězd.

Byli to Leighton et al. (1962), kdo zjistil neočekávané *oscilace Slunce*, hvězdy velice vzdálené od pásu nestability, která by měla být zaručeně klidná. Při spektroskopickém průzkumu vertikálních pohybů způsobených konvekcí, speciálně při studiu dějů spojených se vznikem a zánikem granul zjistili určité zákmity o amplitudě desítky m s^{-1} s charakteristickou periodou 5 minut. Zpočátku se soudilo, že tu jde o jakousi odezvu na narušení fotosféry vzestupnými konvektivními proudy. Celou záhadu se podařilo rozlousknout až po 8 letech. Ulrich (1970) a nezávisle Leibacher & Stein (1971) vysvětlili teoreticky záhadné pětiminutové sluneční oscilace jako výsledek superpozice obrovského množství stojatých akustických vln, které putují Sluncem. Ukázali, že se jedná o globální jev, který postihuje jak povrch, tak i vnitřek Slunce.

Na první pohled chaotické chvění slunečního povrchu s typickou amplitudou $0,1 \text{ m s}^{-1}$ a menší bylo rozloženo do asi 10^7 různých módů pulzací, převážně neradiálních. Slunce je tak rozměrným akustickým *rezonátorem*, který osciluje, kmitá v neuvěřitelném množství *akustických módů*. Brzy nato se potvrdilo, že podobné oscilace jsou zjevně společné všem hvězdám slunečního typu. Klasické pulzující hvězdy a hvězdy běžné, „neproměnné“ odlišuje amplituda pozorovaných oscilací a zdroj jejich energie. Hvězdné oscilace tak lze rozdělit do tří kategorií:

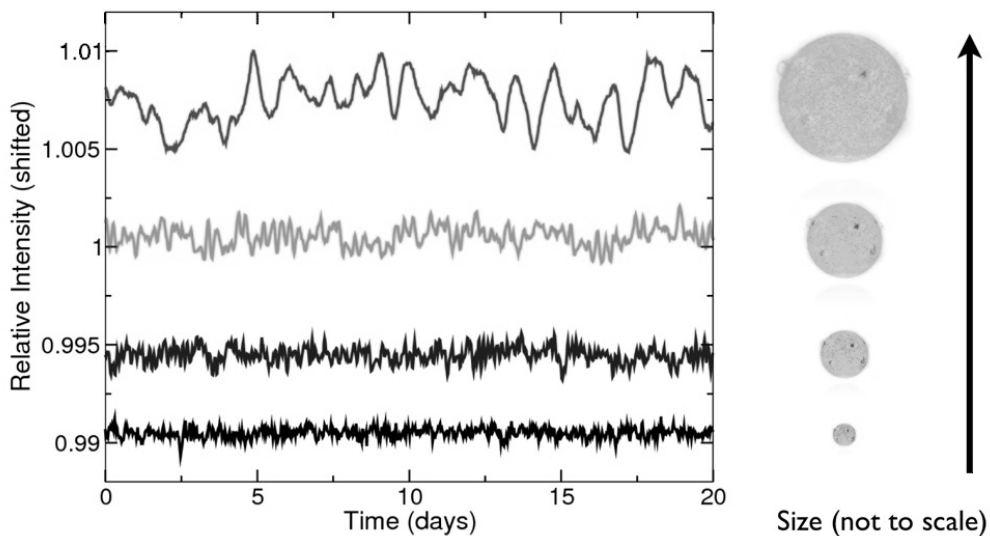
- a) p-módy – tlakové (akustické módy) s frekvencemi většími než 1 mHz a relativně malými horizontálními vlnovými délkami (l se mění od 0 do 1000, i více). U Slunce jsou nejsilnější oscilace s frekvencí 2-4 mHz (s periodami od 3 do 8 minut). Někdy se jim říká *pětiminutové oscilace*;
- b) gravitační *g-módy*, které mají gravitaci jako síly, která se snaží obnovit rovnovážný stav. Mají malou frekvence do 0.4 mHz a vyskytují v hlubokých vrstvách hvězdy, pod konvektivní zónou. U Slunce se někdy tyto g-módy spojují s oscilacemi o delších periodách kolem 160 minut. Jejich vysvětlení je však poněkud kontroverzní. Sluneční oscilace s periodou 160 minut byly pozorovány z pozemských observatoří, ale více než 690 dní trvající pozorování prováděná přístrojem GONG na

palubě družice SOHO žádné podobné oscilace nezaznamenalo. Jedno z možných vysvětlení je, že 160minutové změny jsou výsledkem harmonických procesů spojených se zemskou atmosférou. 160 min je přesně $1/9$ 24hodinového slunečního dne.¹⁹

- c) povrchové gravitační vlny, tzv. *f-módy*. Objevují se ve fotosféře. Jejich frekvence je mezi p-módy a g-módy.

Dlouhodobým pozorováním ustavičných změn radiální rychlosti jednotlivých bodů na slunečním povrchu je možné rozložit sluneční oscilace do jednotlivých módů a získat tak spektrum slunečních oscilací. Ze vztahu mezi pozorovanou vlnovou délkou jednotlivých módů a jejich periodou je možné vypočítat, jakou střední rychlostí se ta která vlna šířila slunečním nitrem. Vzhledem k tomu, že každý z módů zasahuje do Slunce jinak hluboko, je možné stanovit funkci závislosti rychlosti zvuku na vzdálenosti od centra. Přesně stejným způsobem postupuje seismologie, která vyšetřuje vlastnosti Země.

Protože rychlost zvuku bezprostředně závisí na teplotě hvězdného nitra v dané hloubce, je možné též určit, jak závisí teplota na vzdálenosti od středu Slunce. Takto lze testovat současné modely slunečního nitra a provádět jejich opravy. To se již skutečně stalo, například v tom, že se ukázalo, že konvektivní zóna zasahuje hlouběji, než se dříve předpokládalo – až 30% pod povrch. Z rozdílu v pozorovaných periodách módů s opačnými azimutálním číslem m zase bylo možné odhadnout, jak se mění úhlová rychlost slunečního nitra. Původní předpoklad, že Slunce rotuje jako tuhé těleso, musel být díky helioseismologii přehodnocen. Nyní už víme, že Slunce uvnitř rotuje rychleji. Toto zjištění hraje důležitou roli při vysvětlování příčin sluneční a hvězdné aktivity.



Obrázek 6.28: Ukázka „koncertu“ červených obrů, jak je zaznamenala družice KEPLER. Zdroj: NASA.

Sluneční oscilace prostupují celé Slunce, a jak se zdá, podpovrchová konvekce jim zřejmě příliš nepřekáží. Ba co víc, je pravděpodobné, že právě z energie dosti uspořáda-

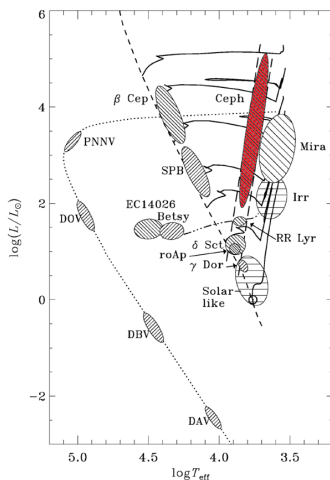
¹⁹Přehled problematiky slunečních oscilací v g-módu uvádí Appourchaux et al. (2010).

ného konvektivního pohybu čerpají sluneční oscilace svou energii. Můžeme samozřejmě zobecnovat a předpokládat, že u jiných hvězd je to stejné. Je však zřejmé, že z velké vzdálenosti, kdy se nám kotouček hvězd smrští na jediný bod, není možné se současnou pozorovací technikou pozorovat vyšší módy oscilací, které jsou u Slunce zvláště silné. Je nutno se omezit jen na ty nejjednodušší. U vzdálených hvězd tak lze zaznamenat jen módy s nízkým l ($l < 4$), protože pak se módy při pozorování navzájem stírají.

V současnosti se výzkumu hvězdných seismických vln (astroseismologii) věnuje řada týmů, které využívají i velmi přesná fotometrická měření z družic WIRE (start v r. 1999), MOST (2003), COROT (2007), KEPLER (2009). Posledně jmenovaná družice také získala fotometrická data pro hvězdu KIC 11026764, která je nyní jednou z nejpřesněji proměřených hvězd ve vesmíru (Metcalf et al., 2010). Astroseismologickou analýzou pozorování byl velmi přesně určen poloměr hvězdy a její stáří. S podobnou přesností známe v současnosti data jen u několika hvězd! Pro hvězdu KIC 11026764 z analýzy například vyplývá, že je ve vývoji dále než naše Slunce a už zapálila vodík ve slupce kolem heliového jádra.

6.4 Typy pulzujících proměnných hvězd

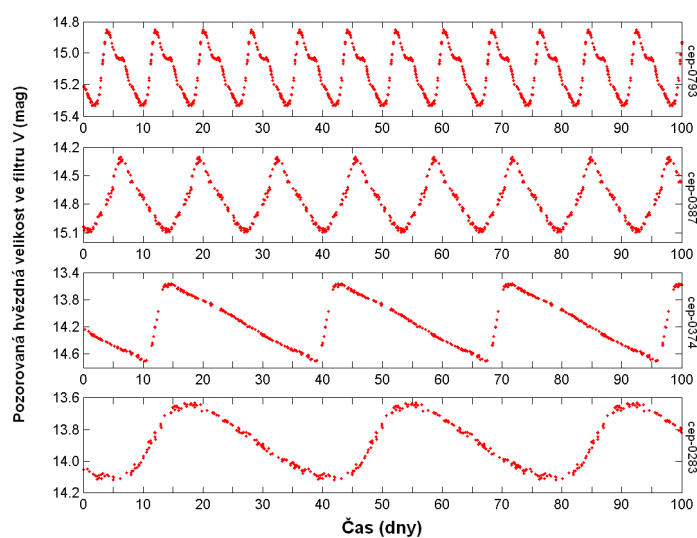
6.4.1 Klasické cefeidy



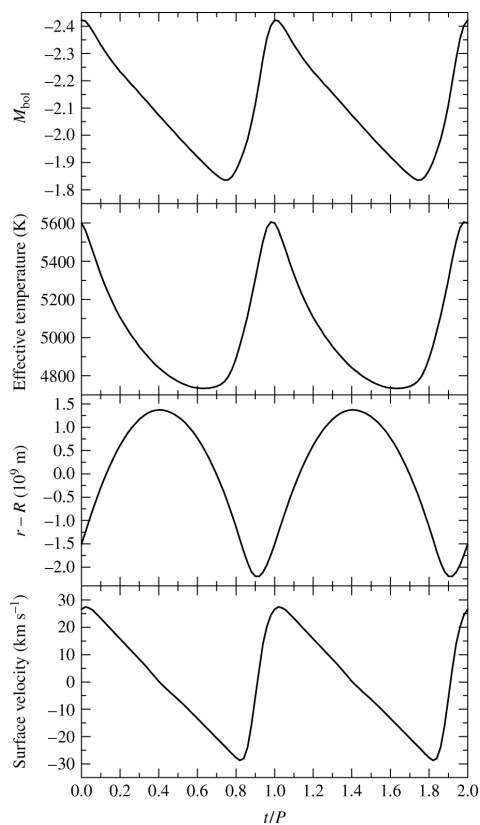
Obrázek 6.29: Klasické cefeidy v HR diagramu (viz obr. 6.24).

Cefeidy nebo též *klasické cefeidy*, případně hvězdy typu δ *Cephei* jsou radiálně pulzující nadobři či veleobři (luminozitní třídy Ib – II) spektrálního typu F–K (viz obr. 6.32). Periody pulzací jsou od 1 dne do 135 dní, amplitudy světelných změn až 2 mag. Křivka radiálních rychlostí je ve fázi se světelnou křivkou: maximum rychlosti expanze odpovídá maximumu jasnosti hvězdy (viz obr. 6.31). Jde o hmotné hvězdy v pokročilém stadiu vývoje, v jejichž nitru se již zapálily heliové reakce. Jsou to typické členky plochého podsystému Galaxie, vyskytují se občas v mladších otevřených hvězdokupách. Dobře vyjádřená závislost mezi periodou pulzací a zářivým výkonem je důsledkem skutečnosti, že cefeidy jsou různě hmotné a tudíž různě zářivé hvězdy, jež se při svém vývoji právě dostaly do pásu nestability.

Příčinou udržení pulzací cefeid je akumulace tepla získaného při prostupu zářivé energie ve vrstvě, v níž je srovnatelné množství jedenkrát a dvakrát ionizovaného hélia. Většina pulzuje v základním módu, byly ale nalezeny i takové, které pulzují v prvním harmonickém módu. Ty jsou pak označeny CEP-FO (first overtone).

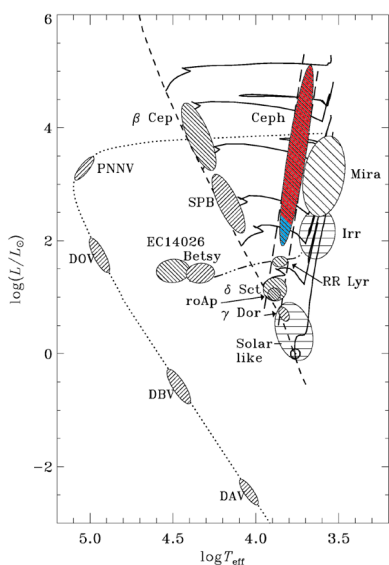


Obrázek 6.30: Světelné křivky čtyř cefeid v SMC z přehlídky OGLE. Zdroj: M. Skarka.



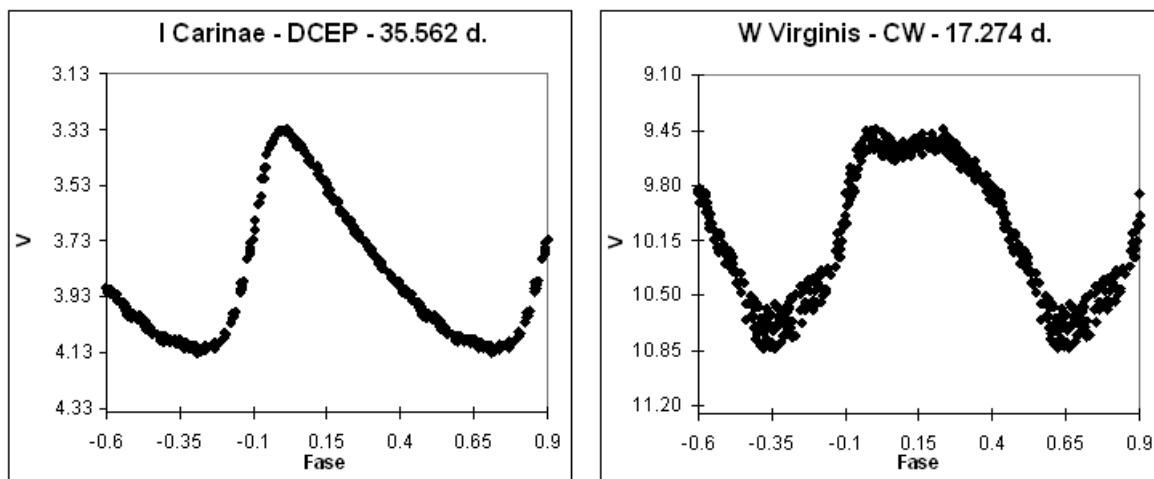
Obrázek 6.31: Pozorované vlastnosti typické cefeidy δ Cephei v závislosti na fázi pulzační periody. Převzato z Carroll & Ostlie (2007).

6.4.2 Hvězdy typu W Virginis



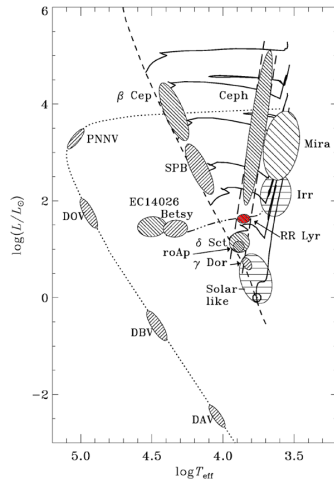
Obrázek 6.32: Hvězdy typu W Vir v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

Pulzující proměnné hvězdy typu W Virginis jsou tzv. cefeidy druhé generace. Proměnnost Samotné W Vir objevil Argelanderův asistent Schönfeld v roce 1866. Na skutečnost, že se tato hvězda a jí podobné liší od klasických cefeid upozornil ale až roku 1946 Walter Baade. Hvězdy typu W Virginis jsou radiálně pulzující obři staré diskové a sférické složky Galaxie (populace II). Perioda jejich pulzací je 1 až 50 dní, amplituda od 0,2 do 2 mag. Je u nich rovněž pozorována obdoba závislosti perioda–zářivý výkon, která platí u cefeid, jen s tím rozdílem, že pro tutéž periodu jsou hvězdy W Virginis o 0,7 až 2 mag slabší. Právě smíchání klasických a cefeid a hvězd typu W Vir působilo v první polovině minulého století problémy v přesném vymezení závislosti perioda–zářivý výkon. Nyní už víme, že proměnné typu W Virginis lze od klasických cefeid rozlišit podle tvaru jejich světelné křivky (viz obr. 6.33).



Obrázek 6.33: Světelná křivka klasické cefeidy I Carinae a W Virginis v barvě V. Převzato z <http://www.surastronomico.com>.

6.4.3 RR Lyrae

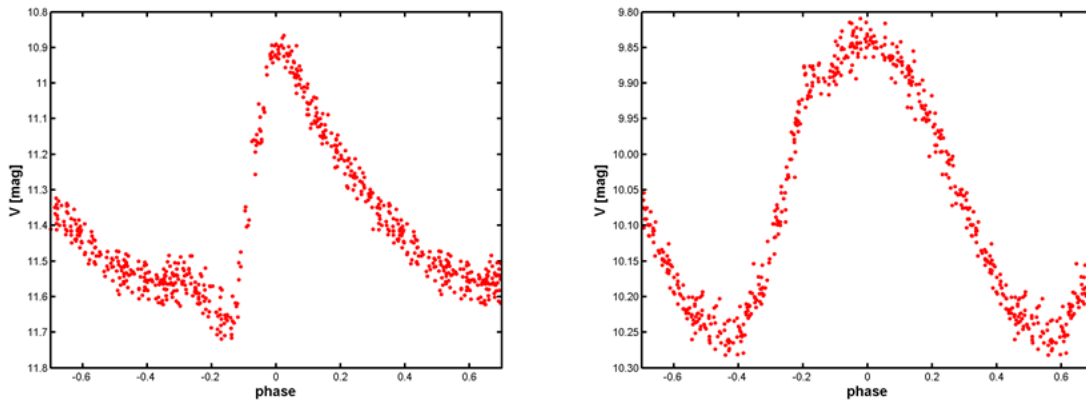


Obrázek 6.34: Hvězdy typu RR Lyr v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

přes hlavní pulzační křivku překládá další sekulární změna tvaru a amplitudy světelné křivky. Ani jedno století po objevu není tento jev uspokojivě vysvětlen. Blažkův jev postihuje jen některé hvězdy typu RR Lyrae. Jejich katalog publikoval Skarka (2013).

Hvězdy typu RR Lyrae jsou někdy označovány jako *krátkoperiodické cefeidy*. Jedná se o radiálně pulzující obry a podobry slunečních hmotností spektrálního typu A až F, populace II s menším zastoupením těžších prvků, které se během svého vývoje právě dostaly do pásu nestability. Periody světelných změn jsou v intervalu 0,2 až 1,2 dní (většinou ale do 0,8 dne), amplitudy 0,2 až 2,5 mag. Maximu jasnosti odpovídá maximum expanzní rychlosti hvězdy. Rozborem světelných křivek lze také na základě semiempirických vztahů určovat fyzické vlastnosti těchto hvězd, například metalicitu $[Fe/H]$.

Podle tvaru světelných křivek se rozlišuje několik podtypů, ale naprostá většina (přes 90 %) jich patří k typu ab, které jsou charakterizovány rychlým nárůstem jasnosti (viz obr. 6.35). U hvězd typu RR Lyrae se někdy v průběhu času mění periody pulzací i podoba světelné křivky. Zajímavým fenoménem je tzv. Blažkův jev, kdy se

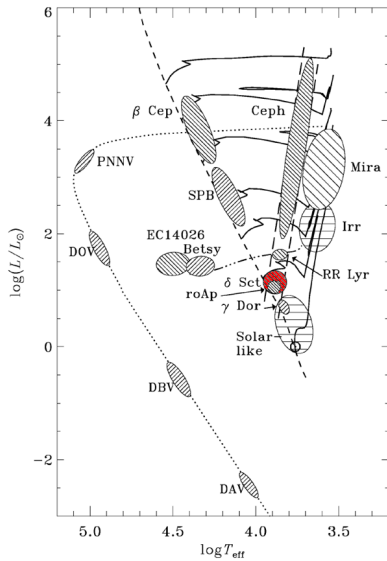


Obrázek 6.35: Světelné křivky hvězd typu RR Lyrae. Vlevo je podtyp RRab, vpravo RRc. Zdroj: M. Skarka.

Tyto hvězdy lze použít jako standardy při stanovování vzdáleností hvězdných soustav, neboť všechny mají zhruba tutéž střední absolutní hvězdnou velikost ($M_V \approx 0,6 \text{ mag}$)²⁰. S výhodou se tak činí zejména u kulových hvězdokup a eliptických galaxií, v jejichž osazenstvu se klasické cefeidy nenacházejí.

²⁰Současné studie ale ukazují, že bude v průměru ještě nejspíše o něco menší a závislá na metalicitě.

6.4.4 Hvězdy typu δ Scuti

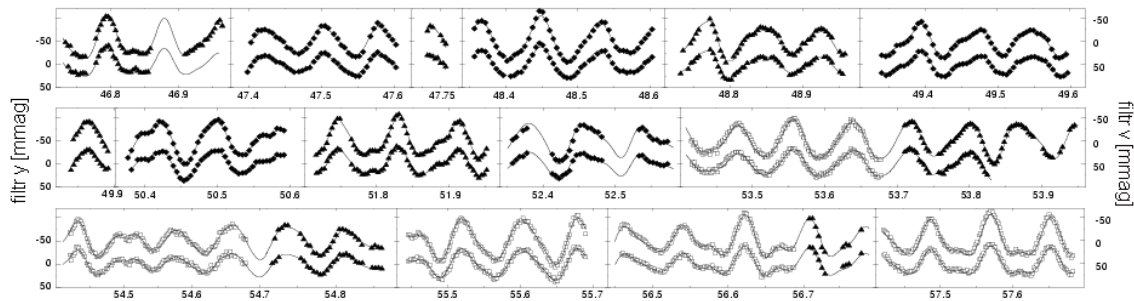


Obrázek 6.36:

Obrázek 6.37: Hvězdy typu δ Scuti v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

Hvězdy typu δ Scuti jsou radiálně i neradiálně pulzující hvězdy hlavní posloupnosti, případně obři spektrálního typu A0 až F5. Jde o hvězdy z pásu nestability, kde jsou kmity posilovány zadržováním zářivé energie postupující z nitra hvězdy v zóně He II/He III.²¹

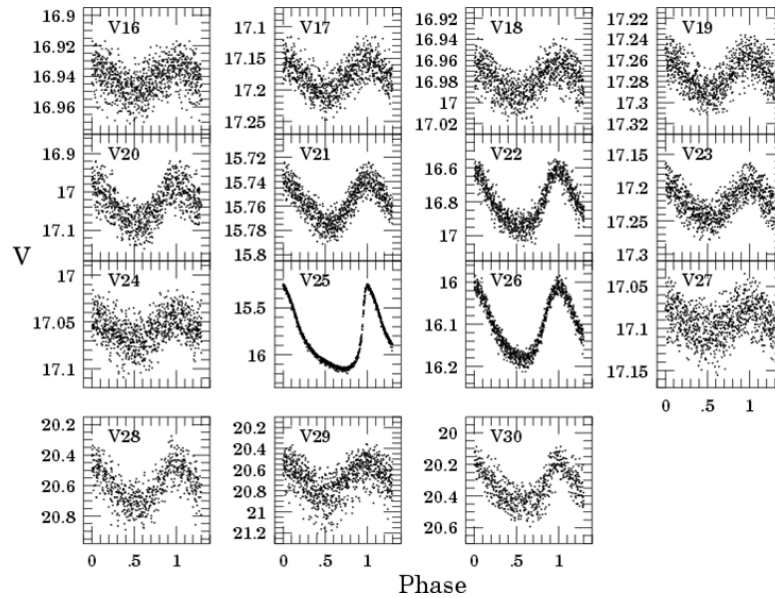
Pozorované amplitudy světelných změn jsou od 0,003 mag do 0,9 mag s krátkými periodami, jen 0,01–0,2 dne. Hvězdy s amplitudami většími než 0,1 mag se označují jako HADS (z anglického high-amplitude delta Scuti stars). Tvar světelné křivky i amplituda se s časem obvykle silně mění. Je to důsledek skutečnosti, že se zde vedle sebe uplatňuje hned několik pulzačních period, hvězda pulzuje současně v několika módech. Vzhledem k tomu, že se tyto periody od sebe zpravidla příliš neliší, můžeme ve světelné křivce pozorovat rázy, období zvýšené amplitudy, někdy naopak mohou světelné změny na čas vymizet.



Obrázek 6.38: Světelná křivka FG Vir, hvězdy typu δ Scuti získaná z několika observatoří na základě pozorovací kampaně. Převzato z Breger et al. (2004).

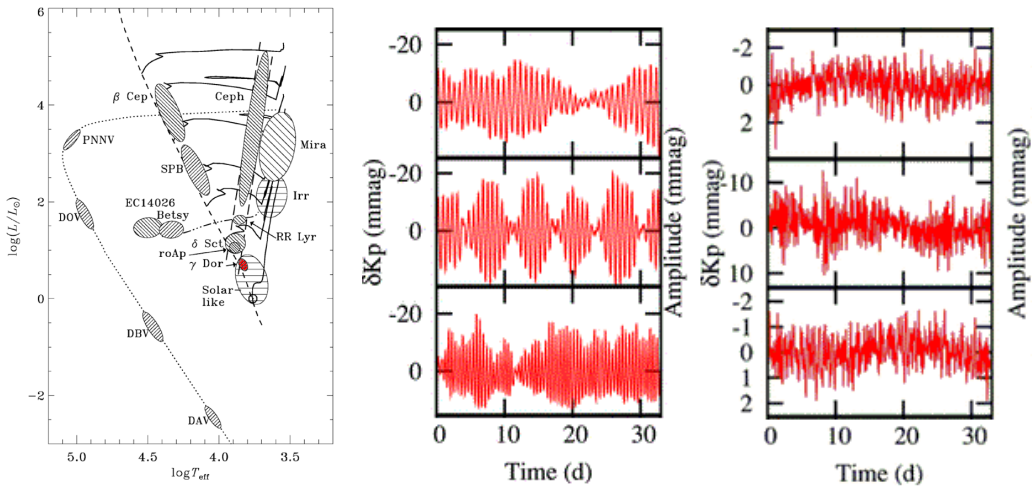
Zvláštní podtřídou hvězd typu δ Scuti jsou hvězdy typu SX Phoenicis. Zpravidla mají větší amplitudy změn jasnosti (až několik desetin magnitudy) s periodami mezi 0,03 až 0,08 dne. Některé pulzují ve dvou módech. Ale zejména se liší fyzické parametry. Mají malou metalicitu a jejich vlastní pohyb je řadí spíše mezi hvězdy populace II. Objevují se v trpasličích galaxiích a kulových hvězdokupách mezi modrými opozdilci (v angličtině „blue straggler“).

²¹Ve stejném místě H-R diagramu se nacházejí i magnetické hvězdy typu Ap, z nichž u některých byly pozorovány neradiální pulzace. Jejich spektrum i amplituda se mění s periodou rotace. Kurtz (1982) v nich odhalil tzv. magnetické pulzátory, hvězdy, u nichž je určující osou symetrie osa jejich mohutného dipólového magnetického pole.



Obrázek 6.39: Světelné křivky hvězd typu SX Phe v barvě V v poli kulové hvězdokupy M 55. Převzato z Pych et al. (2001).

6.4.5 Hvězdy typu γ Doradus

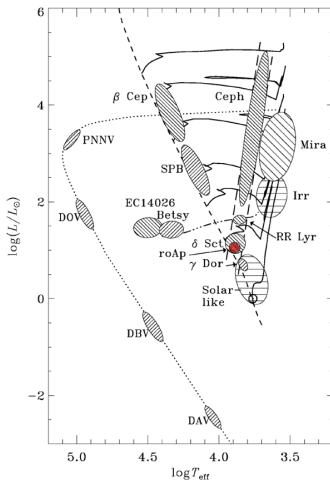


Obrázek 6.40: Vlevo: Hvězdy typu γ Dor v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24. Vpravo: Symetrické a multimodální (pravý sloupec) světelné křivky hvězd typu γ Dor z pozorování družice Kepler. Převzato z Balona et al. (2011).

Hvězdy typu γ Doradus tvoří poměrně homogenní skupinu trpasličích pulzujících proměnných hvězd spektrálního typu F0 až F2. Leží těsně u červeného okraje pásu nestability s hvězdami typu δ Scuti. Jako samostatný typ proměnných hvězd byla skupina definována poměrně nedávno (Kaye et al., 1999). Hvězdy kmitají s jednou až pěti periodami o délce 0,4 až 3 dny, amplitudy světelných změn dosahují 0,1 mag (V). Jedná se

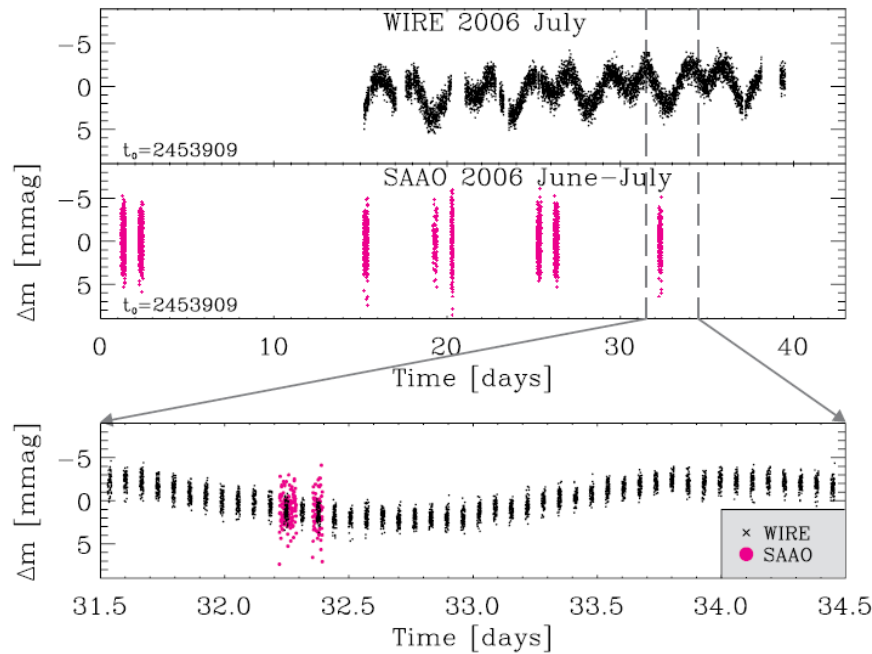
o neradiální pulzace v g-módu. V pozorováních družice Kepler byly objeveny i hybridy – hvězdy typu γ Dor s pulzacemi δ Scuti.

6.4.6 Rychle oscilující pekuliární hvězdy



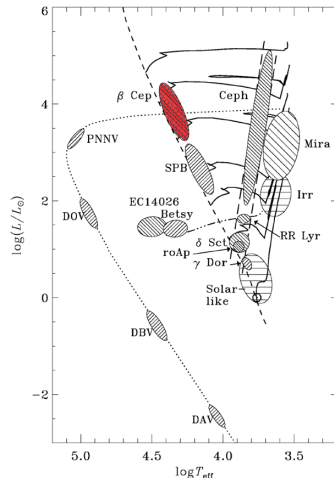
Obrázek 6.41: Hvězdy typu roAp v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

Rychle oscilující pekuliární hvězdy jsou označovány jako roAp hvězdy. Do této skupiny patří hvězdy spektrálního typu B8 až F2 na hlavní posloupnosti nebo v její blízkosti. RoAp hvězdy jsou podtypem rotujících proměnných hvězd typu α^2 Canum Venaticorum. Perioda světelných změn s amplitudou řádově milimagnitudy je od 5 do 15 minut. Pozorovaná světelná křivka je výsledkem skládání změn způsobených rotací hvězdy a pulzací. Z hlediska pulzací jde o neradiálně pulzující magnetické hvězdy, u nichž osu pulzací neurčuje rotační osa, ale osa magnetického dipólu. Pulzace o periodě řádově 0,01 dne a amplitudě řádově 0,01 mag se překládají přes rotační změny jasnosti. Tomuto typu proměnnosti, který je kombinací rotace a pulzace řízené magnetickým polem, se říká *magnetický pulzátor* (viz obr. 6.44).



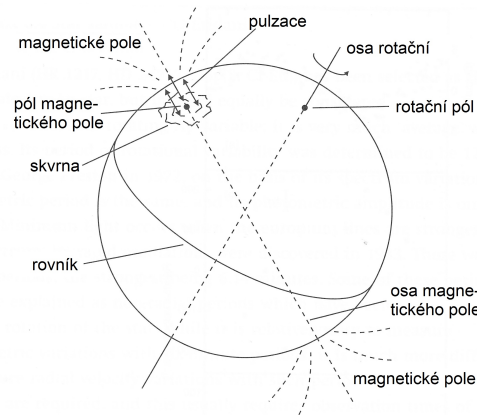
Obrázek 6.42: Světelná křivka hvězdy typu roAp α Cir z družice WIRE a africké observatoře SAAO, kde byly roAp hvězdy objeveny. Spodní panel ukazuje třídní simultánní pozorování z WIRE a SAAO. Převzato z Bruntt et al. (2009).

6.4.7 Hvězdy typu β Cephei



Obrázek 6.43: Hvězdy typu β Cep v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

Někdy se hvězdy typu β Cephei označují i jako hvězdy typu β Canis Majoris. V každém případě jsou to jsou pulzující horké hvězdy horní části hlavní posloupnosti v úzkém rozmezí spektrálních typů B0 až B2, které vykazují světelné změny o amplitudě 0,01 až 0,3 mag a změny radiálních rychlostí, vše s periodou 0,1 až 0,6 dne. Křivky světelné a křivky radiálních rychlostí jsou proti sobě posunuty o čtvrt periody: maximální jasnost odpovídá minimálnímu poloměru a maximální teplotě. Vše je to důsledek pulzací, které bývají jak radiální, tak neradiální. Někdy mívají i více period. Pokud je přítomno více period, pak jedna zpravidla přísluší radiálním pulzacím a jedna nebo více neradiálním. Periody jsou často nepříliš odlišné a jejich zázněje (v angl. „beat effect“) vytvářejí charakteristické vzdušné a poklesy amplitud.

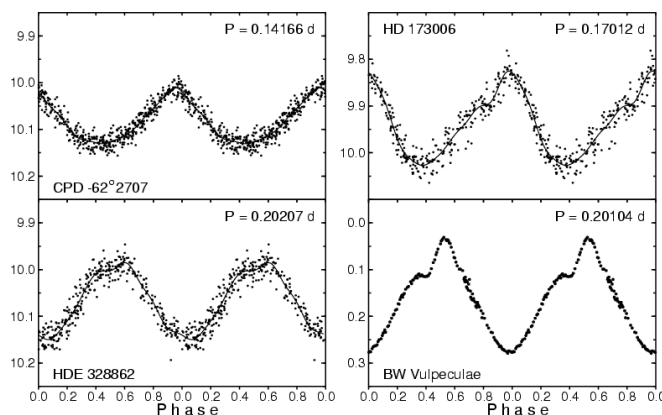


Obrázek 6.44: Model magnetického pulzátoru. Převzato z Percy (2011).

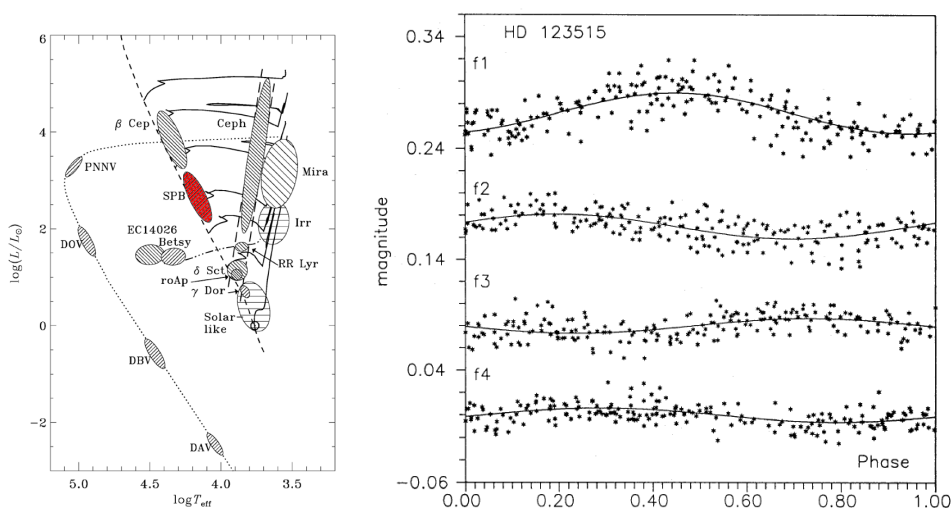
Mechanismus pulzací je podobný jako u cefeid, jen s tím rozdílem, že zde k žádoucí akumulaci prostupující zářivé energie dochází v důsledku *fotoionizace* prvků skupiny železa. Ty jsou v podvrchových vrstvách těchto horkých hvězd hlavní příčinou opacity hvězdného materiálu.

6.4.8 SPB

SPB je zkratka z anglického „slowly pulsating B stars“ a znamená pomalu pulzující B hvězdy. Jedná se hvězdy spektrálního typu B2 až B9 o hmotnostech 3 až 9 M_{\odot} . Jako zvláštní skupinu proměnných hvězd je popsal Waelkens (1991). Amplitudy změn jsou jen velmi malé, maximálně do 0,1 mag. Bývají interpretovány jako výsledek neradiálních pulzací g-módů vysokých řádů. Period pulzací je zpravidla více v rozmezí od několika hodin do několika dní.



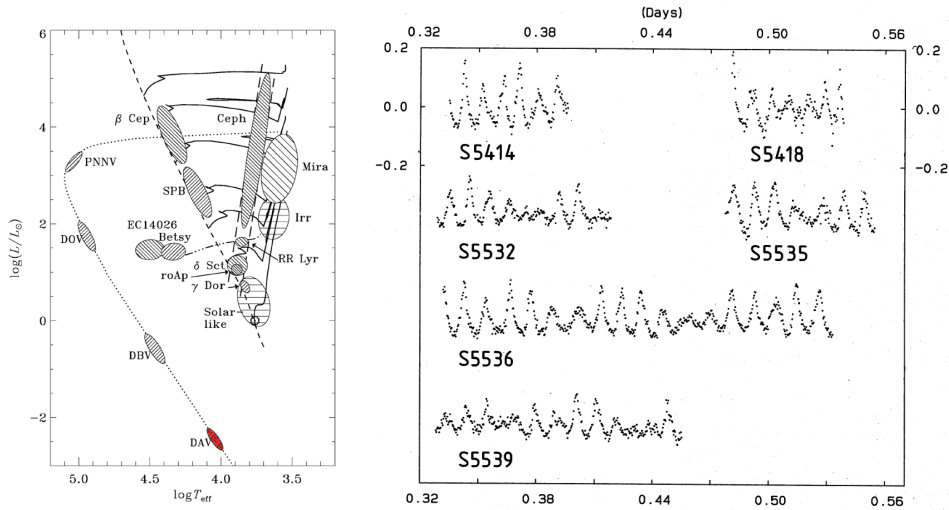
Obrázek 6.45: Světelné křivky tří hvězd typu β Cephei z přehlídky ASAS a křivka BW Vul sestavená pozorování v rámci kampaně v r. 1982. Převzato z Pigulski & Pojmański (2008).



Obrázek 6.46: Vlevo: Poloha hvězd typu SPB v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24. Vpravo: Světelné křivky hvězdy typu SPB HD 123515. Převzato z Waelkens (1991).

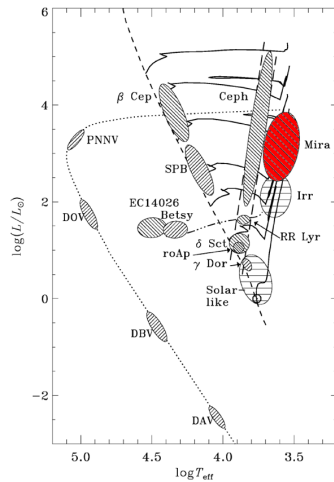
6.4.9 Pulzující bílí trpaslíci

Nadpis této kratičké kapitoly odhalil, o jaké hvězdy se jedná. Někdy jsou podle svého hlavního představitele označovány jako proměnné hvězdy typu ZZ Ceti. Jak je vidět z HR diagramu na obrázku 6.47 nacházejí se v prodloužení pásu nestability v dolní části HR diagramu v oblasti spektrálního typu A. Pozorované změny jasnosti o amplitudách od mmag do 0,2 mag a periodách od desítek po tisíce sekund jsou důsledkem neradiálních pulzací. Většinou jich probíhá hned několik najednou s poměrně blízkými periodami. Obvykle pulzují současně v několika blízkých periodách. I když první případ je znám už více než čtvrt století (Landolt, 1968), je celkově známo jen několik případů.



Obrázek 6.47: Vlevo: Poloha hvězd typu ZZ Ceti v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24. Vpravo: Pozorování hvězdy EC23487-2424 během 6 nocí. Převzato z Stobie et al. (1993).

6.4.10 Dlouhoperiodické pulzující proměnné hvězdy



Obrázek 6.48: Miridy v HR diagramu. Popis a zdroj viz obr. 6.24.

Významnou skupinu proměnných hvězd tvoří dlouhoperiodické proměnné hvězdy, známé též jako hvězdy typu Mira, respektive *miridy*²². Jsou to chladné hvězdy asymptotické větve obrů o hmotnostech Slunce. Tyto hvězdy na sebe velice upozorňují zejména velkou amplitudou svých světelných změn (i přes 10 mag), ale i relativně vysokým zářivým výkonem – jsou to jedny z nejzářivějších hvězd v Galaxii, viditelné i na velké vzdálenosti. Kolem těchto hvězd se často pozorují různě vyvinuté okolohvězdné plynoprachové obálky (viz například okolí samotné Miry na obr. 6.50).

Amplitudy světelných změn v optickém oboru jsou velké zpravidla mezi 2,5 až 11 mag, v modré a ultrafialové oblasti bývají ještě větší, v infračerveném oboru však nepřevyšují 2,5 mag. Rekordmankou mezi miridami a vlastně mezi všemi periodicky proměnnými hvězdami

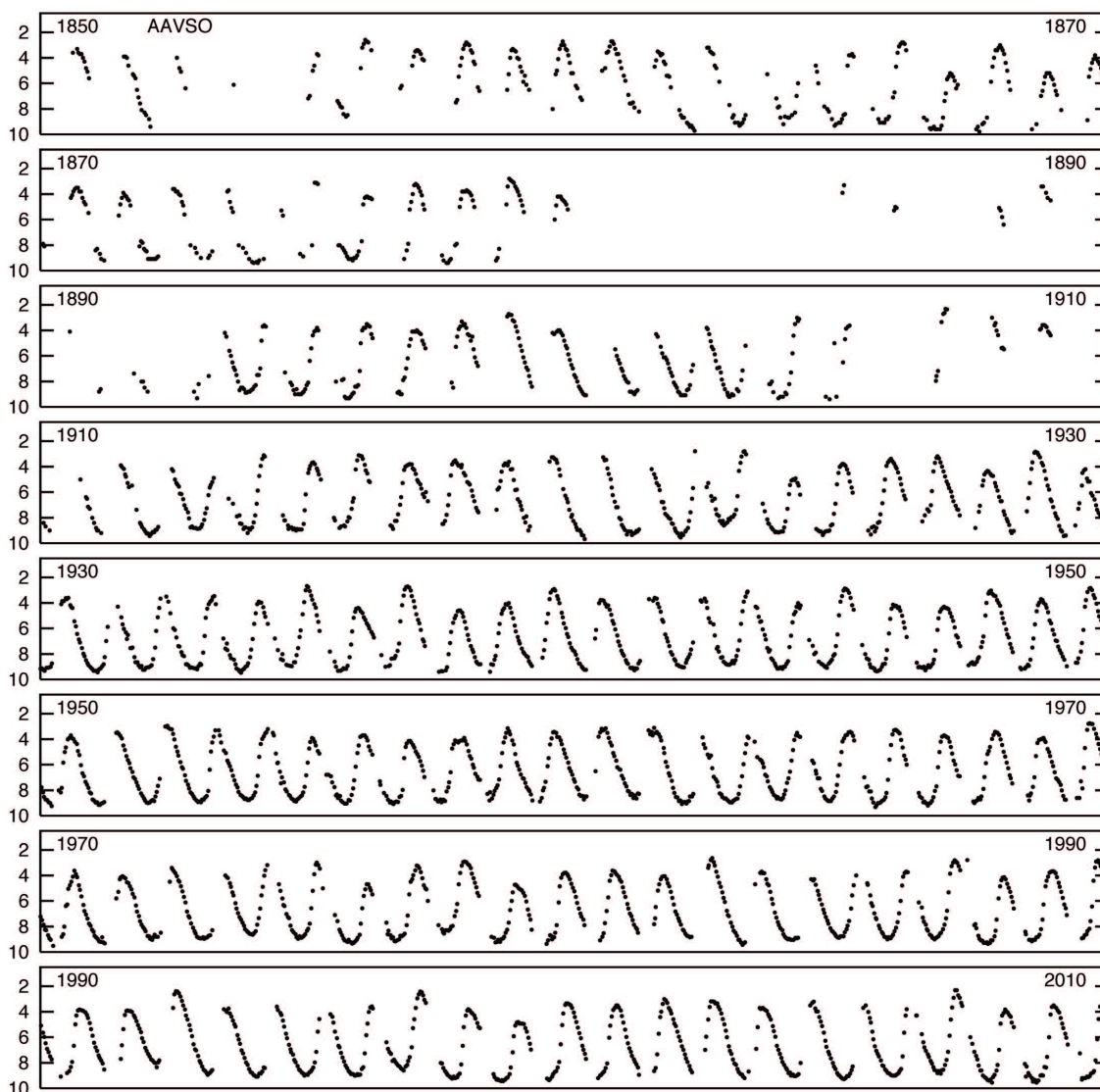
je χ Cygni, která se ve vizuálním oboru mění v rozsahu 14 mag. Bolometricky činí ale amplituda změn jen 3,3 mag. Tento rozdíl je dán tím, že v průběhu cyklu dochází k velmi drastickým změnám v rozložení energie ve spektru.

Světelné křivky mirid jsou poněkud asymetrické, pozorujeme zde rychlejší vzestup do maxima a pomalejší pokles. Světelné křivky jsou poměrně stabilní, změny probíhají dosti periodicky. Pozorované periody v rozsahu 80 až 1100 dní dobře souhlasí s velmi nízkou střední hustotou těchto červených obrů. Pulzace těchto rozměrných chladných

²²Připomeňme, že prototyp těchto hvězd o Ceti byla také první známá periodická proměnná hvězda. Její změny jasnosti si povšiml David Fabricius už roku 1596.

hvězd jsou radiální, spory se však vedou o tom, zda kmitají v základním módu nebo v 1. harmonické. Pulzace mirid čerpají svou energii ze stejného zdroje jako ostatní typy pulzujících proměnných, tedy ze zářivého toku vycházejícího z centrálních částí hvězdy. Rozdíl je v tom, že k akumulaci zářivé energie a k jejímu převodu na energii kinetickou dochází zřejmě ve vrstvě ionizovaného vodíku. Pulzace, jež se hvězdou šíří, brzy nabude povahu rázové vlny, která se pak prodírá hvězdou z nitra na povrch.

Pozorované světelné změny jsou pak především výsledkem interakce horké rázové vlny, která prochází rozměrnou atmosférou o nízké efektivní teplotě. Látka zde, navzdory své řídkosti, je opticky velmi málo průhledná, a to hlavně v důsledku absorpce vyvolané molekulami oxidu titanu TiO . Při středu rázové vlny dochází k disociaci těchto molekul, což vede k prudkému poklesu opacity. V maximu jasnosti spektrální pásy TiO mizí, objevují se emisní čáry vodíku a ionizovaného vápníku, zcela neodpovídající pozdnímu



Obrázek 6.49: Světelná křivka Miry. Zdroj AAVSO.

spektrálnímu typu. Změny ve vzhledu a charakteru spektra jsou velmi prudké. Pulzace hvězd jsou až sekundárním efektem a na změny jasnosti hvězd mají jen okrajový vliv.



Obrázek 6.50: Nahore: Snímek okolí hvězdy Mira Ceti v ultrafialové oblasti spektra jasně ukazuje materiál, který za sebe hvězda zanechává. Dole: Stejná oblast v okolí *o* Ceti nic zvláštního neukazuje. Zdroj: Galex team, Caltech.

6.4.10.1 Polopřavidelné proměnné hvězdy

S klasickými miridami jsou spřízněny tzv. *polopřavidelné proměnné hvězdy* (typ SR z anglického semi-regular) s menší amplitudou světelných změn a s méně přísnou periodicitou. U nich nejsou efekty tak výrazné, hlavně tu nemá průchod rázové vlny atmosférou tak devastující účinek. Pásky TiO ve spektru pozorujeme stále, což se pak projeví pozorovanou menší amplitudou světelných změn.

Hvězdy typu SR jsou obří a veleobří pozdních spektrálních tříd s jistou periodou pulzací. Periodicita dějů je zde občas narušována určitými nepravidelnostmi. Periody světelných změn o amplitudách 1–2 mag bývají od 20 do 2000 dní. Přestože jsou zde společné znaky s miridami, celkově je světelné chování této rozmanité skupiny hvězd velice různé.

Můžeme je dále rozdělit do čtyř podtypů:

SRa – jejich světelné změny jsou takřka přesně periodické, periody v rozmezí 100 až 400 dnů, amplitudy až 2 mag. Jedná se o obry a veleobry pozdních spektrálních tříd s emisemi vodíku. Jsou zřejmě velice podobné miridám.

SRb – světelné změny nejsou již tak přísně periodické, perioda většinou 80 až 120 dní. U řady z nich se objevuje i další, o řád delší perioda. Amplitudy změn jsou vesměs pod 1 mag. Jedná se o obry a veleobry spektrálních typů M, C a S.

SRc – světelné změny určuje více period jedna bývá řádově stovky, druhá tisíce dní dlouhá. Amplitudy kolem 1 mag. Vesměs jde o hmotné červené veleobry třídy M se silnou koncentrací ke galaktické rovině.

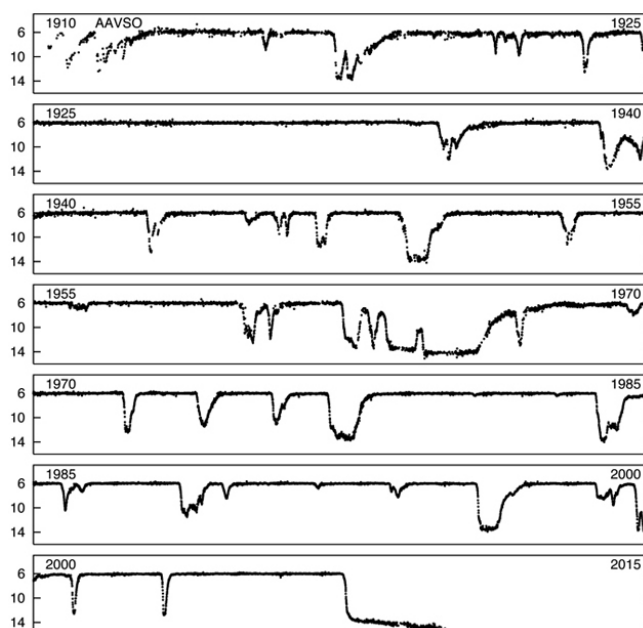
SRd – světelné změny jsou poměrně přísně periodické, přičemž pro každou hvězdu lze vytipovat soubor period, v nichž se střídavě mění, v období změny periody se může jasnost hvězdy měnit dosti chaoticky. Amplitudy jsou v rozmezí 0,1 až 4 mag. Hvězdy tohoto typu jsou teplejší obři a veleobři typu G, K a M, většinou s emisemi ve spektru.

6.4.10.2 Hvězdy typu RV Tauri

Hvězdy typu RV Tauri jsou radiálně pulzující veleobři, jejichž spektra se v cyklu proměnnosti výrazně mění. Zatímco v maximu jde o hvězdy spektrální třídy F–G, v minimu K–M. Periody světelných změn činí 30 až 150 dní s amplitudami 3 až 4 mag. Ve světelných křivkách vedle hlavních minim jasnosti pozorujeme i minima sekundární, přičemž poměry jejich hloubek se s časem mění, mohou se i převrátit. Hvězdy silně září v infračerveném oboru, kde se projevuje záření prachové obálky vymetené z hvězdy pulzacemi. Emisní čáry svědčí o přítomnosti rozsáhlé atmosféry.

6.4.10.3 Hvězdy typu R Coronae Borealis

Hvězdy typu R CrB jsou staré veleobři hvězdy spektrální třídy F až K s nízkým zastoupením vodíku v atmosféře, ale s hojností uhlíku. Pulzují s periodou 30 až 100 dní s amplitudou pozorovaných změn 0,1 až 1 mag. Přes pulzace se překládají aperiodická zeslabení v rozmezí od 1 do 9 (!) magnitud. Tato minima jasnosti mohou trvat i celé roky (viz obr. 6.51). Enormní pokles jasnosti se vykládá silnou absorpcí světla grafitovými zrníčky, která zde zkondenzovala z látky vyvržené hvězdou.



Obrázek 6.51: Světelná křivka R CrB v letech 1910–2010. Zdroj AAVSO.

7 Fyzika aperiodických proměnných hvězd

Aperiodické změny jasnosti u proměnných hvězd zpravidla přímo souvisejí se změnou samotné hvězdy nebo jejího okolí. V této kapitole tedy půjde zejména o fyzické proměnné hvězdy (v anglicky psané literatuře „intrinsic variable stars“). Změny charakteristik objektu přitom mohou probíhat:

- v okolí hvězdy. Mluvíme o nejrůznějších projevech akrece, přítomnosti akrečního disku, o vlivu hvězdného větru apod.
- v povrchových vrstvách, kde jsou to nejčastěji projevy hvězdné aktivity. Ale samozřejmě sem můžeme zařadit i vzplanutí nov.
- v podpovrchových vrstvách, které mohou být zdrojem hvězdných pulzací. Ty sice patří mezi striktně periodické jevy, ale jde o fyzické změny hvězdy, proto je zde uvádíme pro úplnost také,
- v samotném jádru hvězdy, ke kterým dochází při zrodu hvězdy ve fázi rychlého smršťování i na konci vývoje velmi hmotných hvězd při výbuchu supernov a hypernov.

Jednotlivým mechanismům proměnnosti se nyní budeme věnovat podrobněji.

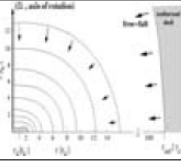
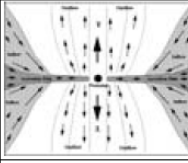
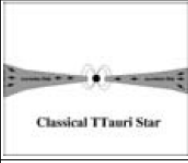
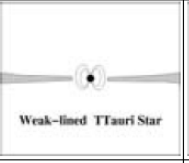
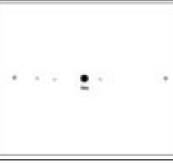
7.1 Proměnnost hvězdy v důsledku změn jejího okolí

Kolem hvězd se často nachází množství opticky aktivního materiálu různého původu. Mohou to být třeba zbytky zárodečného materiálu, který nebyl spotřebován na stavbu hvězd. Tak je tomu i v případě velmi mladých hvězd typu T Tauri, FU Orionis těsně před jejich vstupem na hlavní posloupnost. Do okolního prostoru, ale naopak mohou materiál dodávat samotné hvězdy. Hvězdy ztrácejí svou hmotu nejčastěji hvězdným větrem, který může být u některých typů hvězd i poměrně intenzivní. Ke ztrátě hmoty do okolí hvězdy dochází též v důsledku pulzací hmotných hvězd a hvězd v pozdních stádiích jejich vývoje. Nesmíme zapomenout ani na výbuchy supernov nebo hypernov, při nichž je do prostoru odvržena celá vnější část hvězdy, ne-li hvězda celá. Výskyt okolohvězdného materiálu je také důležitý například u záblesků zařetí gama. Ty jsou zřejmě způsobeny rázovými vlnami ve výtrysku látky, ale jeho interakce s mezihvězdnou látkou stojí za tzv. optickým dosvitem (v anglické literatuře „afterglow“).

Značné procento hvězd se navíc vyskytuje ve vesmíru v párech a tady vstupují do hry i další mechanismy, které vedou k úniku látky do okolí jedné složky dvojhvězdy nebo i celé dvojhvězdy.

7.1.1 Hvězdy typu T Tauri

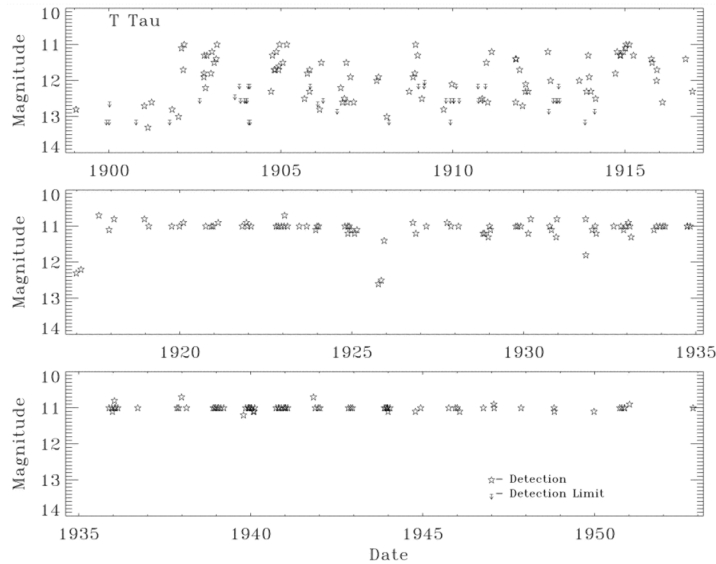
Přestože samotnou proměnnost T Tauri objevil J. R. Hind už roku 1852 (viz obr. 7.3), jako specifický typ proměnných hvězd byly označeny až o téměř sto let později (Joy, 1945). Nedlouho poté Ambarcumjan vyslovil hypotézu, že jde o hvězdy podobné Slunci ale v raném stadiu vývoje.

	Gravitační kolaps	Akreující protohvězda	Smršťující se hvězda před HP		Hvězda hlavní posloupnosti
Vlastnosti YSO					
Fáze	adiabatická (A,B,C)	akrece (D) hoření deuteria začátek konvekce	konvektivní zářivá začátek jaderného hoření		konvektivní zářivá; plné jaderné hoření
Toky látky	většinou dopad disk & odtoky	částečně dopad většinou akrece odtoky, výtrysky	malá akrece	?	—
Obálka/velikost disku	< 10000 AU	< 1000 AU	< 400 AU	~ 100 AU	—
Dopad/ rychlost akrece	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6} -- 10^{-7}	?	—
Věk [roky]	10^4 - 10^5	10^5	10^6 -- 10^7	10^6 -- 10^7	—
Obor záření (kromě IR)	tepelné rádiové rtg.?	rádiové rtg.	rádiové optické silné rtg.	netepelné rádiové optické silné rtg.	netepelné rádiové optické rtg.
Třídy	Třída 0	Třída I	Třída II	Třída III	ZAMS

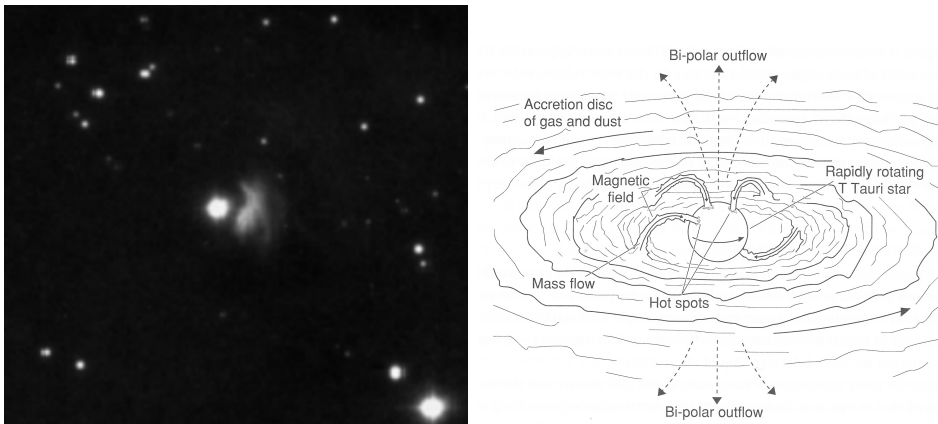
Obrázek 7.1: Infračervená klasifikace YSO vzhledem vývojové fázi a přetoku hmoty. Převzato z Schulz (2005).

Hvězdy typu T Tauri jsou mladé, většinou rychle rotující, a tudíž aktivní hvězdy ve stadiu gravitačního smršťování, jež předchází jejich vstupu na hlavní posloupnost. Jsou jednou ze skupin tzv. mladých hvězdných objektů (YSO, z angl. Young Stellar Object) (viz tabulka 7.1). Obvykle proto v jejich sousedství nacházíme zbytky zárodečné mlhoviny. Vyskytují se ponejvíce v tzv. T-asociacích a v mladých otevřených hvězdokupách. Jejich hmotnost je střední, leží v intervalu $0,3 M_{\odot}$ až $3 M_{\odot}$. Spektrální čáry (občas i silné emise) profilu P Cygni jasně svědčí o rychlých pohybech v atmosféře, o silné chromosférické aktivitě. Ve spektrech nalézáme nejen emise vodíku, vápníku Ca II (H a K čáry), ale také emisní čáry železa (406,3 a 413,2 nm), zakázané čáry [O I] a [S II] (406,8 a 407,6 nm) a silnou čáru lithia (670,7 nm), svědčící o tom, že teplota v jejich nitru ještě nepřesáhla zápalnou teplotu tohoto prvku.

Fotometrická pozorování prováděná v různých oblastech spektra ukazují na různé zdroje proměnnosti těchto hvězd. Proměnnost v infračerveném oboru pravděpodobně vzniká v chladném materiálu akrečního disku, zatímco ultrafialová proměnnost bývá důsledkem horkých skvrn vznikajících v místech dopadu materiálu z vnějšku. Část infračervené a optické proměnnosti je dále důsledkem hvězdné aktivity vyvolané disipací lokálních magnetických polí vznikajících v konvektivním obalu poměrně rychle rotujících



Obrázek 7.2: Světelná křivka T Tauri určená z 275 archivních desek na Harvard College Observatory (převzato z Tracy L. Beck & M. Simon, AJ 122, 413, 2001).

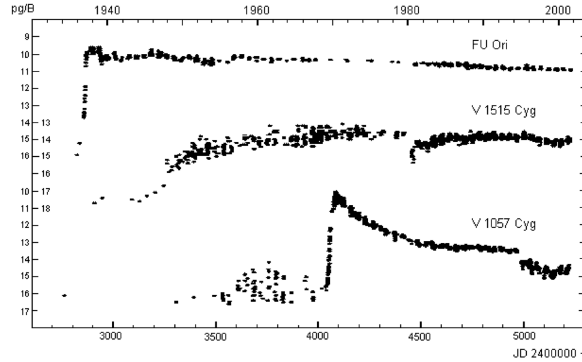


Obrázek 7.3: Snímek okolí hvězdy T Tauri (vlevo). Schéma hvězdy typu T Tau (vpravo). Převzato z <http://www.williams.edu/astronomy> a Percy (2011).

hvězd. Hvězdná aktivita se projevuje výskytem chladných i horkých skvrn na povrchu, erupcemi a chromosférickou aktivitou.

Pozorované světelné změny bývají povětšinou nepravidelné, chaotické, s amplitudami od 1 mag do 4 mag na časové škále od minut po desítky let. Byly ale detektovány i periodické změny v řádu dní spojené s rotací hvězdy.

Materiál v okolí hvězd T Tauri je jednak pozůstatek zárodečné látky, z níž hvězda vznikla a která se koncentruje zejména v akrečním disku a jednak je dodáván hvězdou prostřednictvím bipolárních výtrysků a hvězdného větru. Střední rychlost akrece se



Obrázek 7.4: Světelné křivky tří nejlépe studovaných fuorů. (Převzato z Vittone & Errico, 2006, ChJAS Vol. 6, Suppl. 1, 132.)

udává přibližně $10^{-8} M_{\odot}$. Zářivý výkon, který objekt získá akrecí, je přitom

$$L_{\text{akrece}} = G \frac{M_{\text{hvězda}} \dot{M}_{\text{akrece}}}{R_{\text{hvězda}}}. \quad (7.1)$$

Zářivý výkon samotného akrečního disku je poloviční, tak jak to plyne z viriálového teorému. Podle něj polovina energie získaná akrecí je tedy vyzářena a druhá spotřebována na zvýšení vnitřní energie disku.

Značná část T Tauri hvězd se vyskytuje ve dvojitých nebo vícenásobných soustavách, kde se mohou kromě výše uvedených uplatňovat i další specifické děje.

7.1.2 Hvězdy typu FU Orionis

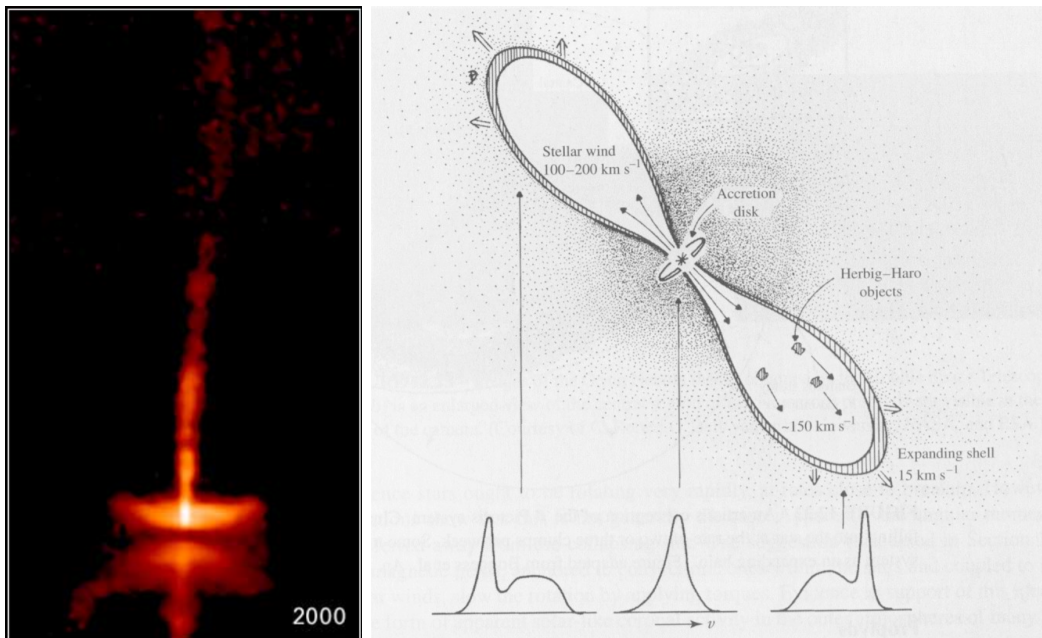
S počátečními stadii hvězdného vývoje jsou spojovány i hvězdy typu typu FU Ori, označované též jako fuory. Jsou to vůbec nejmladší pozorované proměnné hvězdy. Jsou nesmírně vzácné. Vždyť kromě hlavní představitelky známe dosud méně než deset dalších podobných hvězd. Charakteristickým projevem hvězd typu FU Orionis je nepředvídatelný nárůst hvězdné velikosti hvězdy až o 6 mag (viz obr. 7.4). Ve stavu zvýšené jasnosti může hvězda setrvat i několik desetiletí a pak se opět navrátit do původního stavu.

Mechanismus proměnnosti zatím není uspokojivě nalezen. Uvažuje se o procesech souvisejících s dosažením rotační stability hvězdy (Herbig et al., 2003), o výbuších akreujícího materiálu v disku (Vorobyov & Basu, 2010), vlivu magnetického pole a podobně. Podle jedné z teorií je pozorované zjasnění důsledkem přechodu hroutící se hvězdy z fáze rychlého smršťování, kdy hvězda přijímá až $10^{-4} M_{\odot}$ /rok a zjevně není v hydrostatické rovnováze, do stadia pomalého smršťování, kdy nitro již v rovnováze je. V poslední době je nejvíce akceptován model výbuchu FU Ori v důsledku nestability v akrečním disku. Proces je podobný výbuchu trpasličí novy, ale na delší časové škále, protože se jedná o disk kolem hvězdy hlavní posloupnosti a nikoli bílého trpaslíka jako u zmiňovaných trpasličích nov. Během fáze výbuchu přezáří disk hvězdu 100 až 1000krát. Je tu rovněž silný vítr s rychlostí dosahující až 300 km/s. Na HR diagramu tato situace odpovídá mo-

mentu, kdy vývojová stopa hvězdy právě zprava protne Hayashiho čáru, resp. Hayashiho mez.

7.1.3 Herbigovy-Harovy objekty

V okolí velmi mladých hvězd se vytváří plynoprachový disk. Materiál z disku postupně klesá na hvězdu a obohacuje hvězdu, zvyšuje její hmotnost. Část materiálu je ale vyvrhována kolmo k rovině disku v polárních směrech nadzvukovou rychlostí. Protilehlé výtrysky se setkávají s okolní mlhovinou mezihvězdné látky (viz obr. 7.5). Vznikají rázové vlny, které látku ohřívají a nutí ji tak zářit. Právě tato zářivá oblast se nazývá Herbigův – Harův (HH) objekt na počest astronomů George Herbiga a Guillerma Hara, kteří počátkem padesátých let minulého století publikovali první studie těchto objektů (viz obr. 7.5). Tyto objekty nejsou sice hvězdami (viz obr. 7.5), ale jsou u nich pozorovány změny jasnosti v rozsahu až o několik magnitud na časových škálách 10 až 20 let. Jejich příčinou je pravděpodobně interakce mlhoviny HH objektů s rázovou vlnou, která jimi občas prochází.



Obrázek 7.5: Vlevo: Obrázek Herbigova – Harova objektu HH30 ukazuje disk a výtrysk nové hvězdy. Podobně mohlo na počátku svého vývoje vypadat i naše Slunce. Zdroj: A. Watson (UNAM Mexico) a NASA. Vpravo: Model hvězdy typu T Tauri s akrečním diskem a Herbigovými – Harovými objekty.

7.1.4 Látka ve dvojhvězdách

S množstvím okolohvězdného materiálu se setkáváme i v okolí těsných dvojhvězd, kde dochází k intenzivnímu přetoku látky mezi jejími složkami. Nejvíce látky bývá uloženo v *akrečním disku* kolem složky přijímající látku. Disk zde vzniká proto, že přetékaající

látka si s sebou nese jistý moment hybnosti a ten jí nedovolí dopadnout přímo na hvězdu-příjemkyni. Akreční disk může absorbovat a rozptylovat světlo složek, mívá však i vlastní zdroj energie. Turbulentní tření dokáže zahřát materiál disku až na teplotu několika tisíc kelvinů a zajišťuje v rámci disku tok momentu hybnosti z vnitřních částí disku do vnějších. Během tohoto procesu klesá materiál z vnitřních partií na hvězdu, uvolňuje se potenciální energie, která se z větší části mění v energii neuspořádaného pohybu mikročástic.¹

Zmíněný proces s ohledem na turbulentní povahu tření zpravidla není spojitý, v některých případech se „zapne“ naráz a dojde k prudkému uvolnění energie, která pak vyvolá přímo explozi, vzplanutí. Takto si vysvětlujeme též vzplanutí *trpasličích nov*, těsných dvojhvězd sestávajících ze zhroucené složky – bílého trpaslíka – a normální hvězdy. Větší složka vyplňuje svůj Rocheův lalok a neustále dodává látku do akrečního disku kolem bílého trpaslíka. Pokud ale hustota disku převyší jistou kritickou mez, rozvine se náhle turbulence, která je s to způsobit, že část disku spadne do gravitačního jácnu bílého trpaslíka. Rychlým sestupem části látky dovnitř se uvolní značné množství energie, což se projeví i optickým zjasněním o několik magnitud.

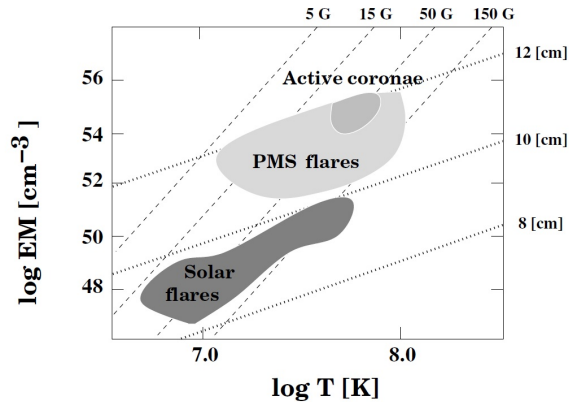
Světelná křivka je jistou miniaturou vzplanutí novy – pozorujeme zde náhlé zjasnění, trvající desítky hodin. Po něm následuje pomalejší, dny trvající pokles. Poté soustava přejde do klidového stavu a přenos látky z druhé složky pokračuje. Vzplanutí trpasličích nov se opakují s časovou prodlevou několika měsíců.

Zdrojem nestability bývá i plynný proud přinášející hmotu do akrečního disku. Přetok nebývá obecně stacionární, látka se ke druhé složce dostává po jistých dávkách. Na styku plynného proudu, vystupujícího z Lagrangeova bodu, s akrečním diskem vzniká tzv. *horká skvrna*, jež může být i nejvydatnějším zdrojem světla v soustavě trpasličích hvězd. Její momentální teplota i rozsah pak v rozhodující míře ovlivňuje pozorovanou jasnost soustavy. Nestacionárnost přenosu se projevuje i tzv. *mihotáním* (flickeringem) světla horké skvrny.

7.2 Aktivita hvězd a její projevy

Projevy hvězdné aktivity byly objeveny i u dalších hvězd, zejména u chladných hvězd hlavní posloupnosti třídy M, čili u tzv. *červených trpaslíků*. Spektrální typ řady z nich obsahuje přídomek *e* – například M5V_e, který značí, že ve spektru jsou pozorovány emisní čáry, nejčastěji vodíku a vápníku (čáry H a K). Vzhledem k tomu, že teploty těchto červených trpaslíků jsou nižší než 3 500 K, neměl by zde být k záření vybuzen ani ionizovaný vápník, natož pak vodík. Výskyt těchto čar tak jasně dokazuje existenci relativně mohutné chromosféry. Hvězdy tohoto typu jsou nezřídka fyzicky proměnnými hvězdami, přičemž nejčastěji se zde setkáváme z tzv. *eruptivními trpaslíky* – hvězdami, které vykazují několik minut trvající zjasnění, při nichž se ve výjimečných případech může výkon hvězdy zvýšit až o dva řády. Vše se vysvětluje častými bílými erupcemi, které jsou nejméně o řád mohutnější a mnohem častější než sluneční bílé erupce.

¹Je třeba dodat, že mince přerozdělování momentu v rámci disku má i svou druhou stranu, jíž je únik látky do prostoru. Že k tomuto ději vskutku dochází, potvrzují i nedávné třírozměrné hydrodynamické výpočty skupiny D. V. Bisikala (Boyarchuk et al., 2002).



Obrázek 7.6: Diagram závislosti emisivity na teplotě pro sluneční a hvězdné rentgenové erupce. Převzato z Schulz (2005).

Silnou hvězdnou aktivitu jeví i hvězdy typu *T Tauri*, hvězdy, které jsou v poslední fázi svého gravitačního smršťování, které předchází okamžiku, kdy se hvězda stane hvězdou hlavní posloupnosti. U hvězd tohoto typu pozorujeme hned několik projevů mimořádně mohutné hvězdné aktivity: prudké změny jasnosti dané častými erupcemi, proměnné emise v čarách vodíku a ionizovaného vápníku (H a K čáry), které dokazují existenci chromosféry. Z hvězd vane hvězdný vítr o několik řádů mohutnější než sluneční.²

U *obrů a veleobrů* byla rovněž potvrzena existence mohutných chromosfér, jakož i očekávaný výron látky působený hvězdným větrem. Ten občas bývá natolik mohutný, že ovlivňuje i průběh vývoje hvězdy. Zvláštním případem jsou proměnné hvězdy typu *RS Canum Venaticorum*. Jedná se o složky těsných dvojhvězd. U nich lze vysledovat několik projevů hvězdné aktivity:

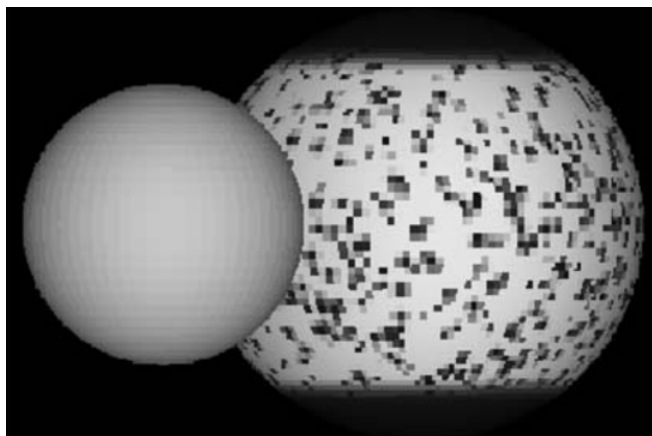
1. fotosférické skvrny, které mohou opanovat až 50% pozorovaného povrchu hvězdy;
2. chromosférickou aktivitu;
3. mohutné erupce.

Z optických pozorování hvězd pozdního spektrálního typu vyplývá, že u těchto hvězd chromosféry běžně existují. Aktivita mnohých hvězd je výrazně vyšší než aktivita sluneční, což přímo souvisí s jejich rychlejší rotací. Závěry potvrzují i pozorování mimo optickou oblast.

Hvězdné koróny, horké miliony kelvinů, září nejvíce v rentgenové oblasti, fotosféry i chromosféry jsou příliš chladné na to, aby se v tomto oboru vůbec projevíly. Chromosféry se pak projevují spíše v oboru ultrafialového záření a některých intenzivních spektrálních čarách. Vzhledem k tomu, že veškeré krátkovlnné záření přicházející z kosmu je při svém průchodu hustějšími částmi zemské atmosféry spolehlivě pohlceno, je nutno toto záření pozorovat nad nimi - z družic nebo stratosférických balonů³.

²Slunečním větrem ztratí Slunce $4 \cdot 10^{-13} M_{\odot}$.

³Největší pokrok v tomto směru představovala pozorování družice Einstein, která se specializovala na průzkum měkkého rentgenového záření jednotlivých hvězd, a dále družice IUE, která zkoumala hvězdy v ultrafialové oblasti.



Obrázek 7.7: Chromosféricky aktivní zákrytová dvojhvězda SV Cam.

Pozorování z paluby družic jasně ukázala, že valná většina hvězd (i když ne všechny) spektrálních typů F až M jeví silné emise v ultrafialovém oboru spektra, což svědčí o existenci atmosférických vrstev s teplotami kolem 200 000 K. Tyto hvězdy produkují rentgenové záření, které svědčí o tom, že ve svrchních částech atmosféry těchto hvězd je přítomen řídký plyn o teplotě 10^6 až 10^8 K. Výkon hvězd v rentgenové oblasti bývá zpravidla větší než rentgenový výkon Slunce, ve výjimečných případech se setkáváme až se 100 000násobkem tohoto slunečního výkonu. Z toho ovšem plyne, že většina hvězd střední a dolní části hlavní posloupnosti má horké koróny. Hvězdám spektrálního typu ranějšího než F, ve shodě s naším očekáváním, rozsáhlé horké koróny chybějí. U těchto hvězd totiž není rozvinuta podpovrchová konvektivní vrstva.

Horké hvězdy spektrálního typu O a B naproti tomu rozměrné chromosféry mají, což zřejmě souvisí se silným odtokem látky do prostoru, působeným mohutným, zářením poháněným hvězdným větrem.

U obrů a veleobrů spektrálního typu ranějšího než K2 pozorujeme silné emise v ultrafialové oblasti, dokládající existenci chromosfér, i rentgenové záření, svědčící o přítomnosti koróny. U chladnějších hvězd tohoto typu však pozorujeme už jen chromosféry spolu s masivním odtokem látky do prostoru. Podobné chování pozorujeme i u mladých hvězd typu T Tauri. Zdá se, že všeobecně platí pravidlo: Hvězdy se silným hvězdným větrem nemívají koróny.

7.2.1 Příčiny hvězdné aktivity

Příčinou všech projevů hvězdné aktivity je rozpad mohutných lokálních magnetických polí, která v podpovrchových vrstvách chladnějších hvězd vzlínají na povrch hvězd. Při vysvětlování aktivity hvězd je tak třeba vysvětlit, jak taková magnetická pole ve hvězdách vznikají. Základním mechanismem generace magnetických polí je tzv. *dynamový mechanismus*, v důsledku něhož dochází k zesilování slabých (náhodných) magnetických polí. Ve hvězdách tento mechanismus funguje v součinnosti již zmiňovaných

vertikálních konvektivních pohybů a *rotace*⁴ Magnetické pole vzniklé v nitru zamrzává do elektricky dobře vodivého plazmatu a vzestupnými proudy je vynášeno k povrchu hvězdy.

Zde tato látka chladne a stává se hůře vodivou. Elektrické proudy se zde tlumí a mění se v ohmické teplo – pole slábne, disipuje. Přitom se vytvářejí mohutné *magnetohydrodynamické vlny*, které se šíří vodivým prostředím fotosféry i vyšších vrstev hvězdy. Podobně, jako akustické vlny, dokáže nezbytnou energii nad fotosféru transportovat i samotné magnetické pole. Rozpadem magnetohydrodynamických vln dochází k ohřevu plazmatu, a tím i k neustálému vytváření dynamicky nestálé chromosféry a koróny.

Důkazem rámcové platnosti naznačeného mechanismu je zajímavý fakt, který objevil Robert Kraft (1967). Ten zjistil, že čím rychleji zkoumaná hvězda rotuje, tím silnější má ve spektru chromosférické emise v čarách H a K. Velmi podobná souvislost byla odhalena i v úrovni rentgenové emise vyjadřující velikost a mohutnost hvězdné koróny. Tam se navíc ukázalo, že rentgenový výkon hvězdy je úměrný čtverci rovníkové rotační rychlosti hvězdy.

Ukazuje se tedy, že mohutnost hvězdné aktivity silně závisí na rychlosti rotace. Je to ve shodě s naší představou, že lokální magnetická pole jsou generována dynamickým mechanismem, jehož účinnost je přímo úměrná čtverci rotační rychlosti. Rychle rotující hvězdy tedy všeobecně vykazují vyšší aktivitu, než hvězdy poměrně líně rotující (takovou je i naše Slunce). Jaké mohou být důvody rychlé rotace hvězdy?

- a) Jedná se o mladé hvězdy, jež, jak známo, rotují rychle. Jejich otáčky se však pozvolna snižují v důsledku interakce hvězdy s okolím. Mladé hvězdy jsou tak často velmi aktivní. Tento fakt umožňuje i určit stáří hvězdy nebo hvězdné soustavy, jíž je hvězda součástí.
- b) Jde o složky těsné dvojhvězdy s vázanou rotací (rotační perioda je shodná s oběžnou). Příkladem jsou proměnné typu RS Canum Venaticorum.

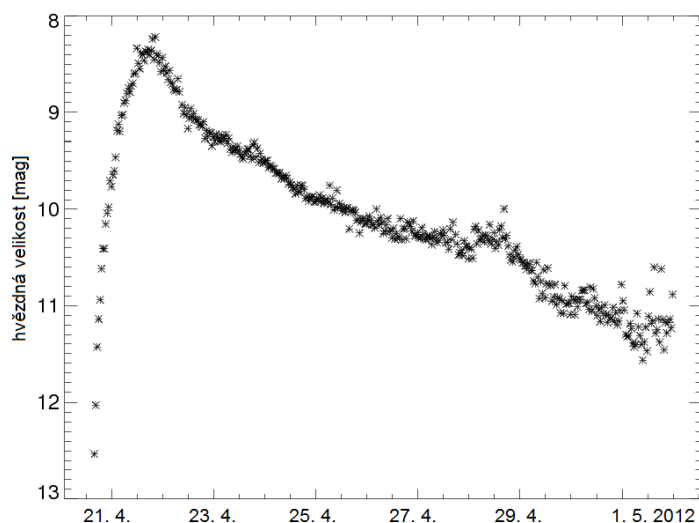
Slunce rotuje pomalu, proto je jeho aktivita relativně nízká. Naznačeným mechanismem lze dobře vysvětlit vlastnosti aktivity chladnějších hvězd. U horkých hvězd chybí rozsáhlá konvektivní zóna, takže vysvětlení je třeba hledat jinde. Pozorování zde zcela jasně naznačují, že úroveň aktivity horkých hvězd roste s rostoucí teplotou.

U hvězd typu O a B jsou chromosféry, případně i koróny vytvářeny rychlým odtokem látky do prostoru v důsledku tlaku ultrafialového záření. Hvězdný vítr neustále obrušuje vnější vrstvy hvězdy, atmosféry těchto hvězd jsou značně nepokojné. Naproti tomu svrchní vrstvy hvězd třídy A jsou mimořádně klidné a stabilní. Nedevastují je ani účinky konvektivních vrstev ani hvězdný vítr.

7.2.2 Vzplanutí nov

Nejčastější vnější příčinou nestacionárních procesů ve fotosférických vrstvách hvězd je dopad látky zvenjšku. Zdrojem tu bývá zpravidla přenos látky v těsných dvojhvězdách. Příkladem mohou být třeba *klasické novy*, což jsou těsné dvojhvězdy sestávající z bílého

⁴Uplatňuje se tedy zejména u hvězd pozdních spektrálních typů, kde je konvektivní proudění dostatečně rozvinuto.



Obrázek 7.8: Světelná křivka Novy Sagittarii 2012 (PNV J17452791-2305213) z pozorování družice STEREO. Zdroj: <http://stereo.gsfc.nasa.gov/thompson>

trpaslíka a normální trpasličí složky, jež vyplňuje svůj Rocheův lalok. Látka bohatá na vodík, jež vytéká z této složky, se přes zásobník v akrečním disku kolem bílého trpaslíka postupně ukládá na jeho povrchu.

Tíha přenesené látky stlačuje degenerovanou hvězdu, která se postupně mírně smršťuje. Uvolněná gravitační energie se zčásti transformuje na vnitřní energii, což vede k postupnému zvyšování teploty hvězdného nitra. Neohřívá se ovšem jen nitro, ale i vrstva s přeneseným materiálem bohatým na vodík. Vzroste-li v ní teplota nad určitou, tzv. zápalnou teplotu, dojde k zažehnutí *překotných termonukleárních reakcí* (*CNO* cyklus), jejichž prostřednictvím se ve velmi krátké době uvolní značné množství energie. To způsobí explozi vnějšku hvězdy, který se do prostoru rozletí rychlostí několika tisíc km/s. Pozorujeme pak vzplanutí klasické novy, při němž se soustava náhle (řádově během dní!) zjasní o 7 až 19 magnitud. Pak následuje pomalejší, řadu měsíců trvající pokles, přičemž v maximu zářivý výkon hvězdy dosahuje až $10^5 L_{\odot}$.

Poté nastupuje znovu klidné mezidobí o délce řádově 10^5 let, při němž se na bílém trpaslíku, jenž předchozím vzplanutím nijak neutrpěl, znovu uloží kritické množství jaderné traskaviny a k explozi dojde znovu.

7.3 Komplexní přestavby, zhroucení a výbuchy

Zvláštní kategorií proměnných hvězd, jejichž proměnnost je spojena s ději probíhajícími uvnitř hvězdy jsou tzv. *supernovy*. Jsou to proměnné hvězdy výjimečné tím, že jejich proměnnost je jednorázová. Jako supernova hvězda může vybuchnout jen jedenkrát ve svém životě. Výbuch supernovy je natolik drastickou událostí, že se se po něm hvězda kvalitativně zcela změní – buď přestane jako gravitačně vázaný útvar existovat – rozplyne se, nebo se změní v neutronově degenerovanou hvězdu, případně v černou díru.

Pro vzplanutí supernov napsala příroda hned několik scénářů⁵, setkáváme se s několika typy supernov, jež mají různou příčinu destrukce a různý další osud. Z logiky věci budeme o nich pojednávat v opačném pořadí, než by se dalo podle jejich označení očekávat.

7.3.1 Supernovy typu II, Ib a Ic

Supernovy typu II jsou výsledkem vývoje mimořádně hmotných hvězd, v nichž se během jaderné evoluce vytvořilo dostatečně hmotné jádro složené především ze železa a dalších prvků skupiny železa (nikl, chróm), jejichž jádra jsou velmi silně vázána a jsou tak jaderně nehořlavá. Dění v centrálních oblastech hmotné hvězdy těsně před explozí je značně dynamické, ve hvězdě existuje řada vrstviček, některé z nich jsou aktivní – probíhají v nich termonukleární reakce, jiné jsou neaktivní, žádné energeticky vydatné reakce v nich nehoří. V centru roste teplota i hustota, stále rychleji se zapalují nové a nové termonukleární zdroje, vše v časové škále stovek let, později i dnů. Navenek se hvězda jeví jako veleobr a nedává na sobě nic znát.⁶

Po překročení kritické hmotnosti elektronově degenerovaného železného jádra dojde k prudkému kolapsu, kdy se začnou volné elektrony houfně spojovat s protony v jádrech. Vznikají tak neutrony a jádra se rozpadají. Zhroucení se až do okamžiku vzniku neutronové hvězdy děje prakticky volným pádem, látka padá dovnitř rychlostí desítek tisíc km/s. Uvolňuje se množství potenciální energie, která z jádra uniká prostřednictvím neutrin. V okamžiku kolapsu převyší výkon hvězdy v oblasti neutrin její zářivý výkon až o 7 řádů.

Naprostá většina vzniklých neutrin bez odporu projde tělesem hvězdy, nicméně některá se v ní zachytí. Svou kinetickou energii předají hvězdné látce, která se tím silně zahřeje na velmi vysokou teplotu. V důsledku toho v nitru vznikne mohutná rázová vlna, která se nadzvukovou rychlostí šíří hvězdou směrem na povrch. Má dostatek energie k tomu, aby celou hvězdu rozmetala do prostoru. Na vodík bohatý obal hvězdy je pak v podobě rychle se rozpínající mlhoviny navrácen do okolního prostoru.

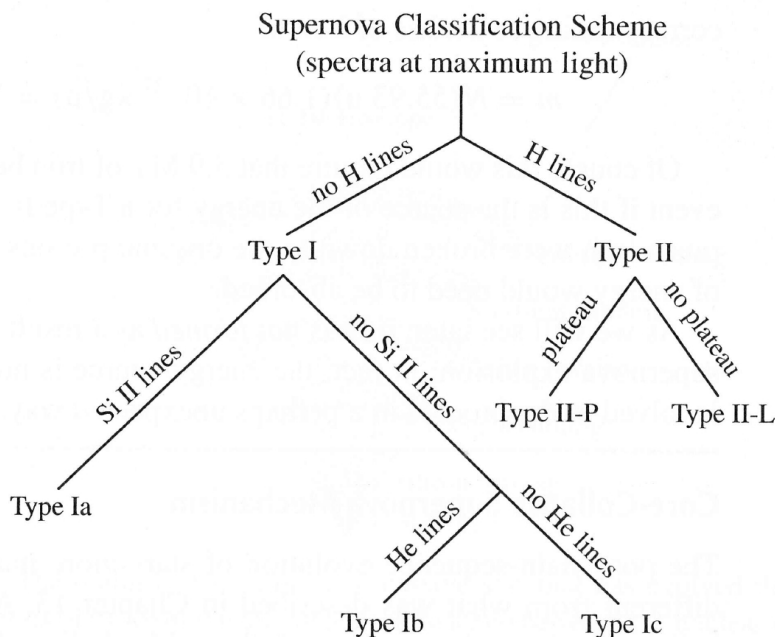
V maximu svého lesku dosahují supernovy typu II asi -18. absolutní bolometrické velikosti. Vrchol je následován postupným poklesem výkonu, a to zhruba o 6 až 8 magnitud za rok.

Při kolapsu a následném průchodu rázové vlny hvězdou vzniká množství prvků nejrůznějších atomových čísel, vznikají i radioaktivní izotopy, z nichž důležitý je izotop Ni⁵⁶ s poločasem rozpadu 6,1 dne, Co⁵⁷ (270 dnů) a Na²² (2,6 roku). Pozvolný radioaktivní rozpad těchto prvků je totiž dodatečným zdrojem energie supernovy v době poklesu její jasnosti.

Po vzplanutí supernov typu II bychom na místě hvězdy měli najít její zhroucený zbytek – rychle rotující neutronovou hvězdu projevující se jako pulzar. Typickým příkladem je SN 1054, v jejímž pozůstatku, Krabí mlhovině, takový pulzar pozorujeme. V mnoha jiných případech se to však nepovedlo a názory na to, proč, se liší.

⁵V poslední době se hovoří ještě o dalším typu supernov – o tzv. hypernovách, které by měly být důsledkem přímého zhroucení velmi hmotné hvězdy na černou díru. Při tomto kolapsu by se měla ve zlomku sekundy uvolnit ještě mnohem větší energie než v případě vzplanutí standardních supernov v podobě ničivého záblesku záření gama. Takto se totiž tyto stále tajemné jevy též vysvětlují.

⁶Viz případ supernovy SN1987 A ve Velkém Magellanově oblaku.



Obrázek 7.9: Klasifikace supernov. Převezato z Carroll & Ostlie (2007).

Vedle supernov typu II, které jsou tečkou za vývojem hmotných hvězd s počáteční hmotností od 11 do 50 Sluncí, pozorujeme ještě jasnější supernovy typu I. Pro supernovy tohoto typu je charakteristické, že se v jejich spektru nevyskytují čáry vodíku. Podle spektrálních příznaků se tento typ dělí na tři podtypy: Ia, u nějž nacházíme velmi intenzivní čáru Si II na 615 nm, u typů Ib a Ic nikoli. Ve spektru supernov typu Ib nacházíme silné čáry hélia, které ovšem u podtypu Ic nenajdeme.

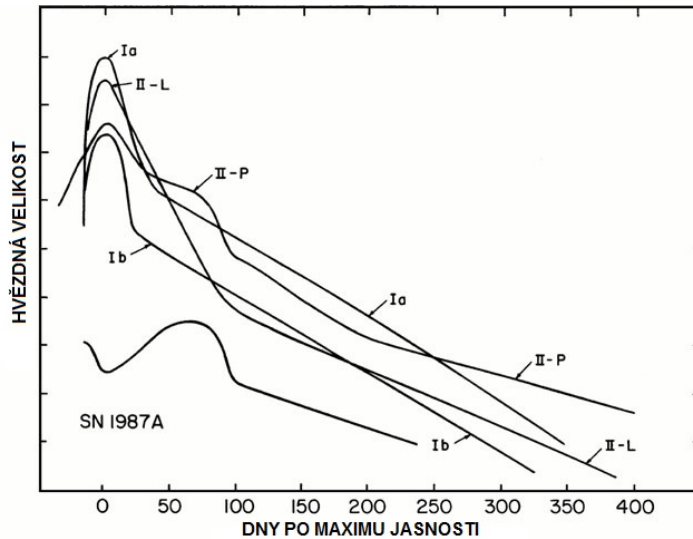
Supernovy typu Ib a Ic jsou všeobecně o 1,5 až 2 magnitudy slabší než supernovy typu Ia, takže se podobají spíše supernovám typu II. Navíc se zdá, že i příčiny jejich vzplanutí jsou v mnohém shodné s příčinami explozí supernov typu II. Podobně jako tyto supernovy nacházíme supernovy typu Ib a Ic výhradně ve spirálních či nepravidelných galaxiích, přednostně poblíž míst, kde v současnosti vznikají nové hvězdy. Jde tedy o hmotné hvězdy, které ve svém jaderném vývoji dojdou až do železného konce, po němž následuje gravitační kolaps jádra.

Soudí se, že vzplanutí supernovy typu Ib, a zřejmě i typu Ic, je výsledkem složitého vývoje těsných dvojhvězd s hmotnými složkami.

7.3.2 Supernovy typu Ia

Tyto velice jasné supernovy se kromě mohutnějšího zářivého výkonu (v maximu svého lesku dosahuje jejich absolutní vizuální hvězdná velikost -19,6 mag) vyznačují i tím, že jejich světelné křivky jsou prakticky identické. To je povyšuje do role tzv. *standardních svíček*, objektů, pomocí nichž lze poměřovat vzdálenosti vzdálených hvězdných soustav.

Vzhledem k tomu, že je nacházíme ve všech typech galaxií (tj. i v takových, kde tvorba hmotnějších hvězd již dávno ustala), je zřejmé, že předchůdci tohoto typu super-



Obrázek 7.10: Schématické světelné křivky různých typů supernov a supernovy SN1987A. Převzato z <http://ned.ipac.caltech.edu/>.

nov musejí být méně hmotné hvězdy. Všeobecně se proto soudí, že supernovy typu Ia vznikají v důsledku jaderné detonace vzniklé zapálením termonukleárních reakcí v elektronově degenerovaném uhlíko-kyslíkovém bílém trpaslíku.

Bezprostřední příčinou vzplanutí je pozvolný nárůst hmotnosti uhlíkokyslíkového bílého trpaslíka, k němuž dochází v důsledku přenosu látky z druhé složky těsné dvojhvězdy. Zvyšování hmotnosti vede k tomu, že se rozměry trpaslíka neustále zmenšují, čímž se v jeho nitru uvolňuje potenciální energie, která látku hvězdy stále více nahřívá. Překročí-li hmotnost degenerované hvězdy jistou kritickou mez (asi $1,3 M_{\odot}$), zvýší se centrální teplota hvězdy natolik, že se zde zažehnou termonukleární reakce, které brzy rozhoří v celé hvězdě.⁷ V důsledku toho se v nitru hvězdy začne dále prudce zvyšovat teplota, která nakonec přeroste i teplotu degenerace. Sevření krunýře elektronové degenerace povolí, látka hvězdy se změní v plyn, který divoce expanduje do prostoru. Následný výbuch jaderné reakce uhasí a rozhodí veškerý materiál hvězdy do prostoru rychlostí až 10^4 km/s. Nicméně ještě dříve než se tak stane, stačí více než polovina uhlíku a kyslíku z bílého trpaslíka změnit na železo.

Tento pohled na věc dobře souhlasí se spektrálními vlastnostmi supernov typu Ia, kde převládají těžší prvky. Odhaduje se, že jsou to právě supernovy typu Ia, které více než supernovy jiných typů obohacují mezihvězdný materiál o prvky skupiny železa i o uhlík a kyslík.

Podobně jako u supernov jiných typů je světelný výkon supernov typu Ia po maximu lesku určen tempem radioaktivního rozpadu nestabilních izotopů niklu, kobaltu a dalších radioaktivních prvků.

⁷Tato skutečnost je zřejmě příčinou, proč se světelné křivky supernov typu Ia tak podobají – vybuchují nám tu objekty s navlas stejnou hmotností a vnitřkem.

Literatura

- Alfonso-Garzón, J., Domingo, A., Mas-Hesse, J.M., Giménez, A. 2012, *A & A*, 548, A79
- Appourchaux, T., Belkacem, K., Broomhall, A.-M., et al. 2010, *Astronomy and Astrophysics Review*, 18, 197
- Argelander, F. W. A. 1844, *Aufforderung an Freunde der Astronomie*, Jahrbuch für 1844, vyd. H. Ch. Schumacher, Stuttgart a Tübingen
- Andersen, J., 1991, *Astronomy and Astrophysics Review* 3, 91
- Babcock, H. W. 1947, *ApJ*, 105, 105
- Benedict, G. F., McArthur, B. E., Feast, M. W., et al. 2007, *AJ*, 133, 1810
- Balona, L. A., Guzik, J. A., Uytterhoeven, K., et al. 2011, *MNRAS*, 415, 3531
- Berdnikov, L. N., & Turner, D. G. 2010, *Astronomy Reports*, 54, 392
- Bessell, M. S., Brett, J. M. 1988, *PASP* 100, 1134
- Bessell, M. S. 1990, *PASP* 102, 1181
- Bessell, M. S. 2005, *ARA&A*, 43, 293
- Boyarchuk, A. A., Bisikalo, D. V., Kuznetsov, O. A., & Chechetkin, V. M. 2002, *Mass transfer in close binary stars*, by A.A. Boyarchuk, D.V. Bisikalo, O.A. Kuznetsov, and V.M. Chechetkin. *Advances in astronomy and astrophysics*, Vol. 6. London: Taylor & Francis, 2002, ISBN 0415273536.,
- Breger, M., Rodler, F., Pretorius, M. L., et al. 2004, *A & A*, 419, 695
- Bruntt, H., Kurtz, D. W., Cunha, M. S., et al. 2009, *MNRAS*, 396, 1189
- Burd, A., Cwiok, M., Czyrkowski, H., et al. 2004, *Astronomische Nachrichten*, 325, 674
- Busso, G., De Angeli, F., & Montegriffo, P. 2012, *Proceedings of the SPIE*, Vol. 8442
- Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. 2007, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. vydání. Benjamin Cummings, 2007. ISBN 0-321-11284-9.
- Catalano, S., Frisina, A., & Rodono, M. 1980, v *Close binary stars: Observations and interpretation; Proceedings of the Symposium*, Toronto, Canada, August 7-10, 1979. (A80-53742 24-89) Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1980, p. 405-412
- Cohen, M., Wheaton, W. A., & Megeath, S. T. 2003, *AJ*, 126, 1090
- Cousins, A.W.J., 1976, *MNRAS* 81, 25
- Cramer, N., Mander, J. 1979 *A&A* 78 305
- Deeming T.J. 1975 *Astrophys. & Space Sci.* 36, 137
- Deutsch, A. J. 1958, *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, Proceedings from IAU Symposium no. 6, ed. Bo Lehnert, Cambridge University Press, 209
- Domiciano de Souza, A., Kervella, P., Jankov, S., et al. 2003, *A & A*, 407, L47
- Drake, A. J., Djorgovski, S. G., Mahabal, A., et al. 2009, *ApJ*, 696, 870
- Durlevich, O. V., Kazarovets, E. V., Kholopov, P. N., Kireeva, N. N., Samus, N. N., Tsvetkova, T.M., 2006, *General Catalogue of Variable Stars V1.4*, Vol. IV (verze z 17. 10. 2006), ed. N.N. Samus, Astronomical Council of the USSR Academy of Sciences and Sternberg, Astronomical Institute of the Moscow State University, <http://www.sai.msu.su/groups/cluster/gcvs/gcvs/>
- Eastman, J. 2012, *Astrophysics Source Code Library*, 6012
- Eastman, J., Siverd, R., & Gaudi, B. S. 2010, *PASP*, 122, 935
- Eberhard, G., & Schwarzschild, K. 1913, *ApJ*, 38, 292
- Eddington, A. S. 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge: Cambridge

- University Press, 1926. ISBN 9780521337083.
- Eggleton, P. P. 1983, *ApJ*, 268, 368
- ESA 1997, *VizieR Online Data Catalog*, 1239, 0
- Flower, P. J. 1996, *ApJ*, 469 355
- Folsom, C. P., Kochukhov, O., Wade, G. A., Silvester, J., & Bagnulo, S. 2010, *MNRAS*, 407, 2383
- Freedman, W. L. et al. 2001, *ApJ*, 553, 47
- Fukugita, M., Ichikawa, T., Gunn, J. E., et al. 1996, *AJ* 111, 1748
- Giménez, A., Clausen, J. V., Guinan, E. F., Maloney F. P., Bradstreet, D. H., Storm, J. a Tobin, W., 1995, *Experimental Astron.* 5, 181-183
- Golay, M., 1962, *Pub. Obs. Genève No 15 (série A)*, 29
- Hall, J. S. 1949, *Science*, 109, 166
- Hall, D. S. 1976, *IAU Colloq. 29: Multiple Periodic Variable Stars*, 60, 287
- Harmanec, P., Grygar, J., Horn, J., Koubský, P., Kříž, S., Žďárský, F., Mayer, P.; Ivanovič, Z., Pavlovski, K., 1977, *Astronomical Institutes of Czechoslovakia, Bulletin*, vol. 28, no. 3, p. 133-143
- Harmanec, P., Brož, M., 2011, *Stavba a vývoj hvězd*, Matfyzpress, Praha 2011
- Harmanec, P., Mayer, P., 2008, *Dvojhvězdy, učební text*, Astron. ústav MFF UK Praha
- Harmanec P., Horn J., Juza K. 1994, *Astron. Astrophys. Suppl.* 104, 121
- Herbig, G. H., Petrov, P. P., & Duemmler, R. 2003, *Apj*, 595, 384
- Hertzsprung, E. 1928, *BAN* 4, 178
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., & Collins, R. A. 1968, *Nature*, 217, 709
- Hilditch, R. W., 1996, *Binary Stars in Local Group*, v *The origins, evolution, and destinies of binary stars in clusters*, *Astron. Soc. of Pacific Conference Series* 90, An internat. symposium, Univ of Calgary, 18-23 June 1995, San Francisco, ed. E. F. Milone, J.-C. Mermilliod, str. 207
- Hiltner, W. A. 1949, *Nature*, 163, 283
- Hodapp, K. W., Kaiser, N., Aussel, H., et al. 2004, *Astronom. Nachrichten*, 325, 636
- Christensen-Dalsgaard, J. 2003, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, University Aarhus, 5. vydání
- Iben, I., Jr. 1971, *PASP*, 83, 697
- Inno, L., Matsunaga, N., Bono, G., et al. 2013, *ApJ*, 764, 84
- Ivezic, Z., Axelrod, T., Brandt, W. N., et al. 2008, *Serbian Astronom. Journal*, 176, 1
- Johnson, H. L., Morgan, W.W., 1953, *ApJ* 117, 313
- Johnson, H. L., 1965, *ApJ* 141, 923
- Joy, A. H., 1945, *ApJ* 102, 168
- Jurkevich, I., 1971, *Astrophysics and Space Science*, Vol. 13, 154-167
- Kaye, A. B., Handler, G., Krisciunas, K., et al. 1999, *PASP*, 111, 840
- Keller, S. C., Murphy, S., Prior, S., Da Costa, G., & Schmidt, B. 2008, *ApJ*, 678, 851
- Kleczek, J., 2002, *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, 584 str.
- Komarova, V. N., Beskin, G. M., Neustroev, V. V., & Plokhotnichenko, V. L. 1996, *Journal of Korean Astronomical Society Supplement*, 29, 217
- Kopal, Z., 1955, *Annales d'Astrophysique*, 18, 379
- Korhonen, H., Berdyugina, S. V., Ilyin, I. V., Strassmeier, K. G., & Hackman, T. 2009,

- Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series, 36, 323
- Krtička, J., Mikulášek, Z., Zverko, J., et al. 2010, IAU Symposium, 264, 270
- Kříž, S., Harmanec, P., 1975, Astronomical Institutes of Czechoslovakia, Bulletin, vol. 26, no. 2, p. 65-81.
- Kuiper, G. P. 1941, ApJ, 93, 133
- Kurtz, D. W. 1982, MNRAS, 200, 807
- Kurtz, D. W. 2006, Astrophysics of Variable Stars, 349, 101
- Kwee, K. K., & van Woerden, H. 1956, BAN 12, 327
- Landolt, A. U. 1983, AJ, 88, 439
- Landolt, A. U. 1968, ApJ, 153, 151
- Leavitt, H. S. 1908, Annals of Harvard College Observatory, 60, 87
- Leibacher, J. W., & Stein, R. F. 1971, Astrophysical Letters, 7, 191
- Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W. 1962, ApJ, 135, 474
- Lockwood, G. W., Skiff, B. A., Henry, G. W., et al. 2007, ApJS, 171, 260
- Messina, S., & Guinan, E. F. 2002, A & A, 393, 225
- Messina, S., & Guinan, E. F. 2003, A & A, 409, 1017 (erratum 2004, A&A 428, 983)
- Metcalfe, T. S., Monteiro, M. J. P. F. G., Thompson, M. J., et al. 2010, ApJ, 723, 1583
- Michaud, G. 1970, ApJ, 160, 641
- Mikolajewska, J. 2001, IAU Colloq. 183: Small Telescope Astronomy on Global Scales, 246, 167
- Mikulášek, Z., Zejda, M., Zhu, L., Qian, S.-B., Liška, J., de Villiers, S. N., 2013, Cent. Eur. Astrophys. Bull. 37, 1, v přípravě (jinak arXiv:1212.5519)
- Mikulášek, Z., Zejda, M., Qian, S.-B., Zhu, L., Proceedings of 9th Pacific Rim Conference on Stellar Astrophysics, (11.–26. dubna 2011, Lijiang, Čína), 2011, Astronomical Society of the Pacific, 451, 111
- Mikulášek, Z., Krtička, J., Henry, G. W. et al. 2008, Astron. and Astrophysics, 485, 585
- Mikulášek Z., Wolf M., Zejda M., Pecharová P. 2006, Astrophys. Space Sci. 304, 363
- Morbey, C. L., Publications of the Dominion Astrophysical Observatory, Vol. 14, p. 185
- Moro, D., Munari, U., 2000, A & A Suppl. 147, 361
- Opiela, R., Mašek, K., Mankiewicz, L., et al. 2012, Proceedings of the SPIE, Vol. 8454,
- Percy, J. R. 2011, Understanding Variable Stars, by John R. Percy, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011,
- Perryman, M. A. C., & ESA 1997, ESA Special Publication, 1200,
- Pettersen, B. R., Olah, K., & Sandmann, W. H. 1992, Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 96, 497
- Pickering, E. C. 1882, The Sidereal Messenger
- Pickering, E. C. 1883, The Observatory, 6, 79
- Pickering, E. C. 1890, Annals of Harvard College Observatory, 18, 285, Appendix
- Pigulski, A., & Pojmański, G. 2008, A & A, 477, 917
- Plavec, M., & Kratochvíl, P. 1964, Bull. of the Astron. Inst. of Czechoslovakia, 15, 165
- Pojmanski, G. 2002, Acta Astronomica 52, 397
- Pollacco, D. L., Skillen, I., Collier Cameron, A., et al. 2006, PASP, 118, 1407
- Pourbaix, D., Tokovinin, A. A., Batten, A. H., et al. 2009, VizieR Online Data Catalog, 1, 2020
- Press, W. H., Rybicki, G. B. 1989, ApJ, 338, 277

- Pych, W., Kaluzny, J., Krzeminski, W., Schwarzenberg-Czerny, A., & Thompson, I. B. 2001, *A & A*, 367, 148
- Rucinski, S. 1999, *Turkish Journal of Physics*, 23, 271
- Schmid, H.M. 2012, učební texty Astronom. Observations, <http://www.astro.ethz.ch>
- Schulz, N. S. 2005, *From Dust To Stars Studies of the Formation and Early Evolution of Stars*, by N.S. Schulz. Springer-Praxis books in astrophysics and astronomy. Praxis Publishing Ltd, 2005. ISBN 3-540-23711-9,
- Skarka, M. 2013, *A & A*, 549, A101
- Skrutskie, M. F., Cutri, R. M., Stiening, R., et al. 2006, *AJ*, 131, 1163
- Soszynski, I., Poleski, R., Udalski, A., et al. 2008, *Acta Astron.*, 58, 163
- Soszyński, I., Poleski, R., Udalski, A., et al. 2010, *Acta Astron.*, 60, 17
- Stellingwerf, R. F., 1978, *Astrophysical Journal*, vol. 224, 953-960
- Sterken, C., & Jaschek, C. 1996, *Light Curves of Variable Stars. A Pictorial Atlas*, ISBN 0521390168, Cambridge University Press
- Stibbs, D. W. N. 1950, *MNRAS*, 110, 395
- Stobie, R. S., Chen, A., O'Donoghue, D., & Kilkeny, D. 1993, *MNRAS*, 263, L13
- Strassmeier, K. G., Bartus, J., Fekel, F. C., & Henry, G. W. 2008, *A & A*, 485, 233
- Strömgren, B. 1956, *Vistas in Astronomy* 2, 1337
- Svechnikov, M. A., Istomin, L. F., 1979, *Astronomiceskij cirkuljar* No.1083
- Szymanski, M. K. 2005, *Acta Astronomica* 55, 43
- Ulrich, R. K. 1970, *ApJ*, 162, 993
- van den Bergh, S. 1968, *J.R.Astron.Soc.Can.*, 62, 145
- van den Bergh, S. 1975, *Galaxies and the Universe*. Eds. A. Sandage, M. Sandage, J. Kristian. University of Chicago Press (Stars and Stellar Systems. Volume 9), Chicago, USA, p.509
- van Leeuwen, F. 2007, *A&A* 474, 653
- van Leeuwen, F. 2008, *VizieR Online Data Catalog*, 1311, 0
- van Leeuwen, F. 2009, *A&A* 500, 505
- van Leeuwen, F. 2010, *Space Science Reviews* 151, 209
- Vaughan, A. H., Preston, G. W., & Wilson, O. C. 1978, *PASP*, 90, 267
- Vaughan, A. H., & Preston, G. W. 1980, *PASP*, 92, 385
- Vorobyov, E. I., & Basu, S. 2010, *Apj*, 719, 1896
- Waelkens, C. 1991, *A & A*, 246, 453
- Walraven, Th., Walraven J. H. 1960, *BAN* 15, 67
- Wilson, O. C. 1978, *ApJ*, 226, 379
- Wilson, R.E., 1979, *ApJ* 234, 1054
- Wilson, R.E., 1994, *PASP* 106, 921
- Woźniak, P. R., Vestrand, W. T., Akerlof, C. W., et al. 2004, *AJ*, 127, 2436
- Zejda, M., Borovička, J., Hájek, P., et al. 1994, *Contributions of the Public Observatory and Planetarium in Brno*, 30
- Zejda, M., & Domingo, A. 2011, *Information Bulletin on Variable Stars*, 5996, 1
- Zhevakin, S. A., 1953, *Astronomičeskij žurnal* 30 161–179
- Zhu, L.-Z., Zejda, M., Mikulášek, Z., Qian, S.-B. & de Villiers, S.N., 2012, *Astronomical Journal* 144, 37

Úvod do studia proměnných hvězd

Prof. RNDr. Zdeněk Mikulášek, CSc., RNDr. Miloslav Zejda, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita v roce 2013

Vydání první

Náklad 200 ks

Tisk Tiskárna Knopp, Černčice 24, 549 01 Nové Město nad Metují

ISBN 978-80-210-6241-2