

# **SEISMOLOGIE A SEISMOTEKTONIKA**

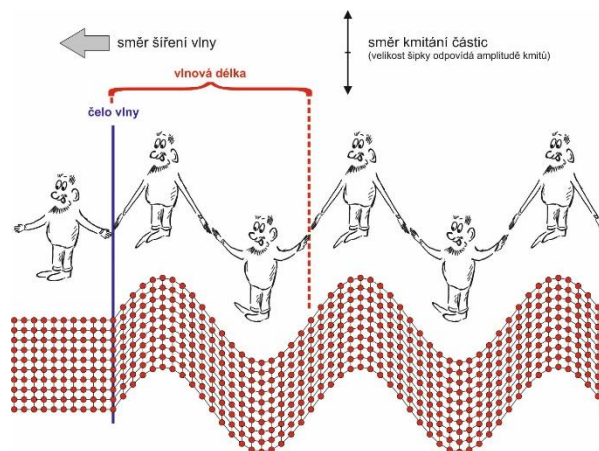
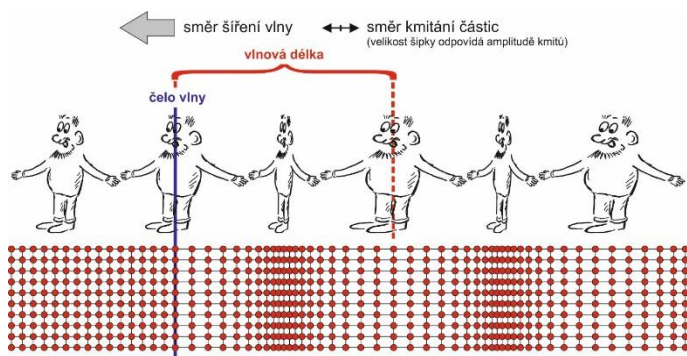
## **část 3.: Seismická vlna**

# 3.1: Seismický signál jako vlnová funkce

Seismickou vlnu lze stručně charakterizovat jako kmitání částic kontinua, které se šíří směrem od zdroje. Poisson v roce 1830 ukázal, že se v pevném a rychlostně homogenním prostředí šíří jen dva základní typy vln:

**podélné** (P – kmitání částic ve směru šíření vlny)

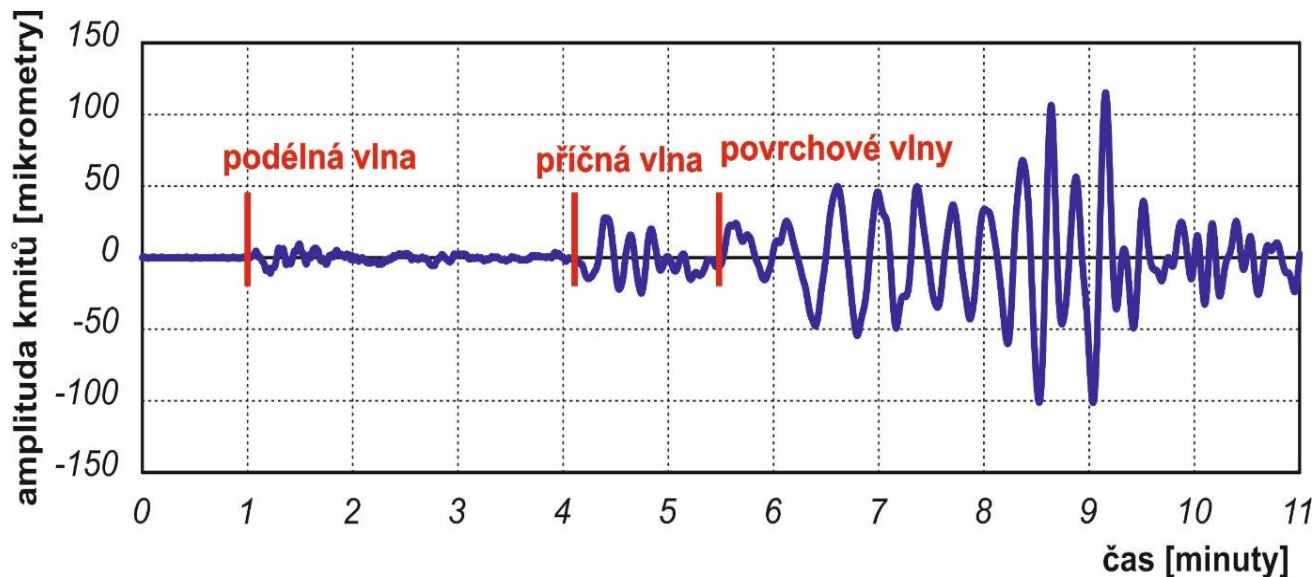
**příčné** (S – kmitání částic ve směru kolmém na směr šíření vlny).



Siméon Denis  
Poisson  
(1781-1840)

Jak podélné tak i příčné vlny se šíří celým objemem horninového prostředí a jsou proto nazývány **vlnami objemovými**.

Rychlost šíření seismických vln závisí na typu vlny (příčná, podélná, ...) a na elastických vlastnostech prostředí, kterým se šíří. Obecně ale platí, že **v každém daném prostředí jsou vlny podélné (P) rychlejší než vlny příčné (S)**.

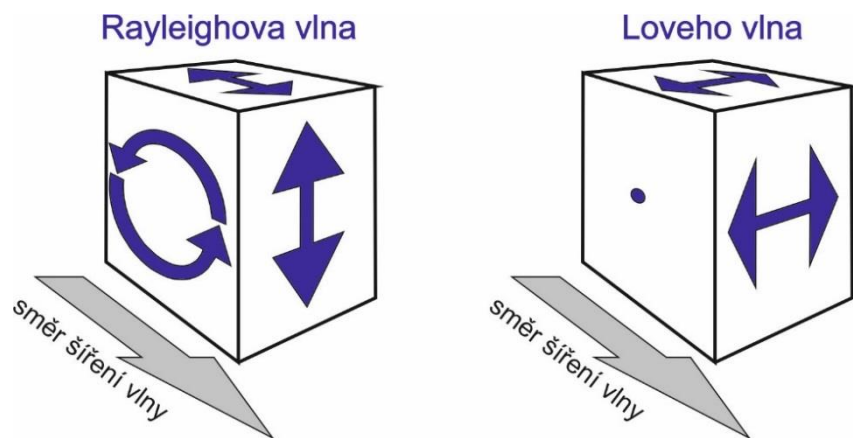


Rayleigh v roce 1887 ukázal, že v blízkosti rychlostního rozhraní může vznikat další typy vlny – vlna povrchová.

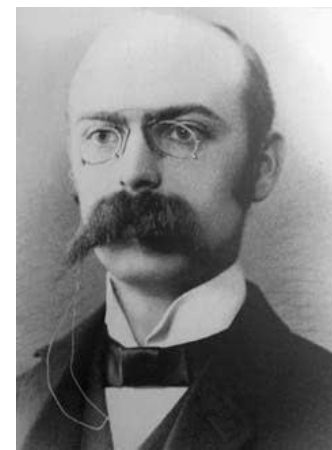
Druhý typ povrchové vlny, vznikající v prostředí s nárůstem rychlostí seismických vln s hloubkou, popsal v roce 1911 Love.

**rayleighova vlna** (kmitání částic ve směru šíření vlny a současně ve směru kolmém k paprsku i rychlostnímu rozhraní)

**loveho vlna** (kmitání částic ve směru kolmém na směr šíření vlny a paralelním s rychlostním rozhraním).



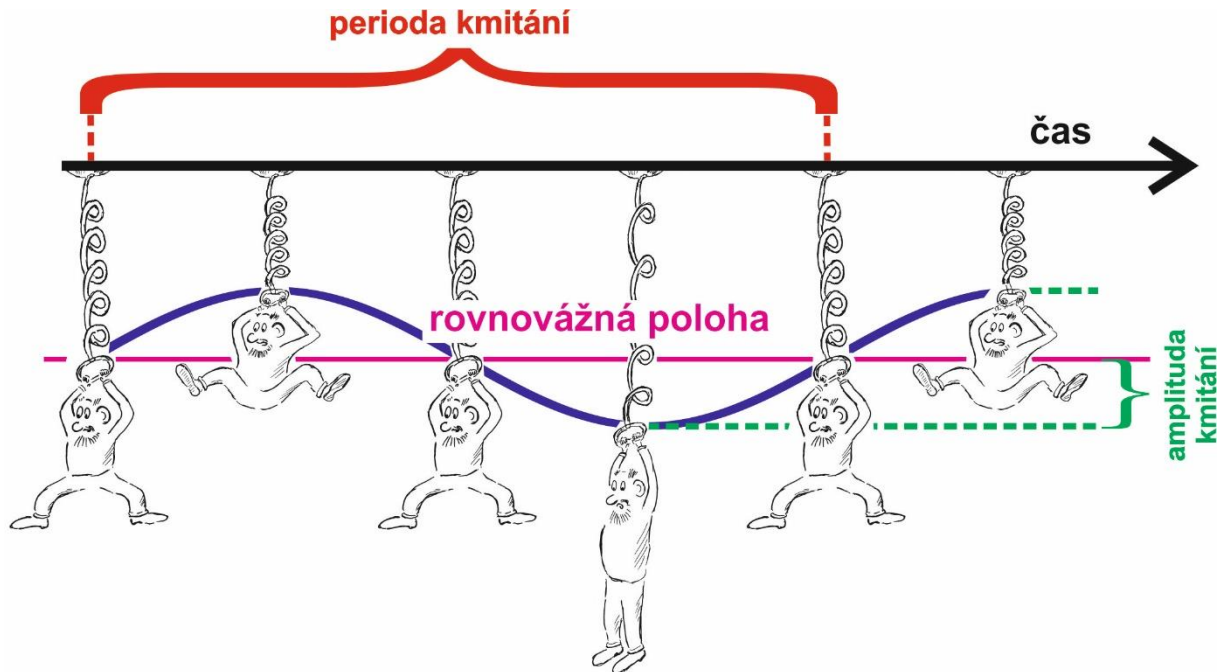
John William Strutt,  
lord Rayleigh  
(1842-1919)



Augustus Edward  
Hough Love  
(1863-1940)

# 3.1.a: Seismický signál jako funkce času

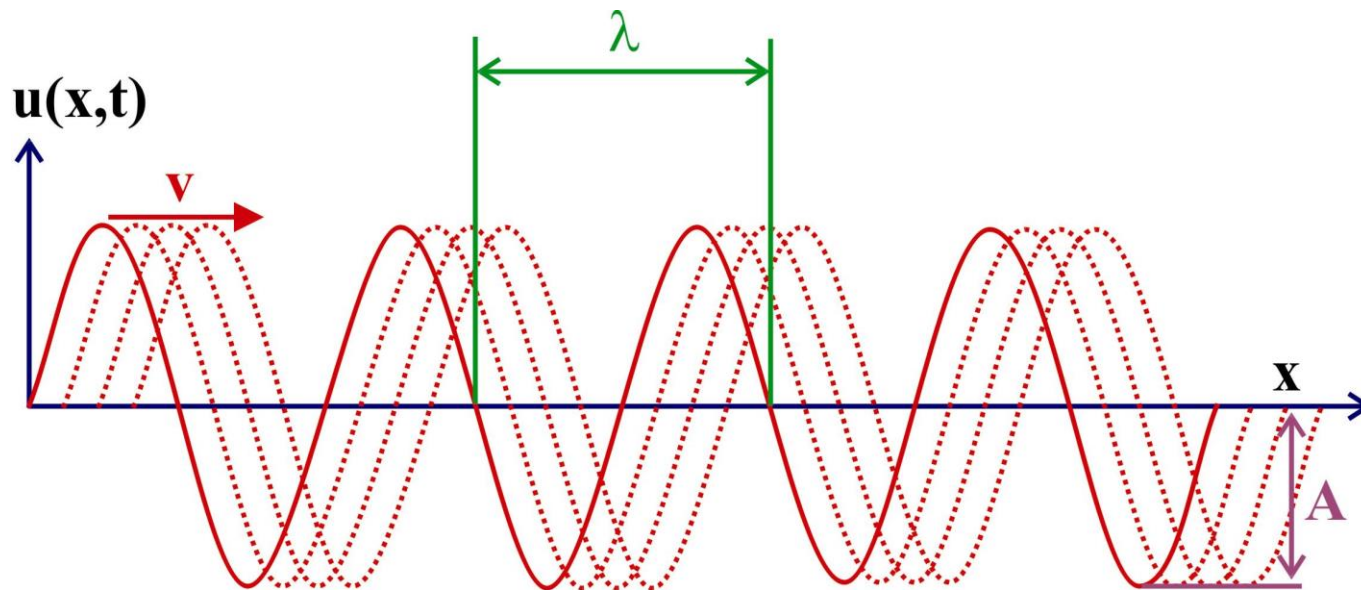
Seismický signál si jednorozměrně můžeme znázornit vlnovou funkcí, která popisuje amplitudu kmitání v závislosti na čase (ve skutečnosti kmitají částice kontinua ve všech směrech třírozměrného prostoru).



V následujících úvahách budeme pro jednoduchost sledovat pouze signál šířícím se jedním směrem a charakterizovaný kmitáním pouze v jednom směru.

Představme si seismický signál jako jednoduchou harmonickou vlnu s frekvencí  $f$  a amplitudou  $A$ , která se šíří podél osy  $x$  **fázovou rychlostí  $v$** . Tj. výchylka  $u_0(t)$  (v bodě  $x=0$ ) se ve vzdálenosti  $x$  projeví za čas  $t=x/v$ . Obecně tak výchylku  $u(x,t)$  můžeme popsat vztahem:

$$u(t, x) = A \cdot \sin \left[ 2\pi \cdot f \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

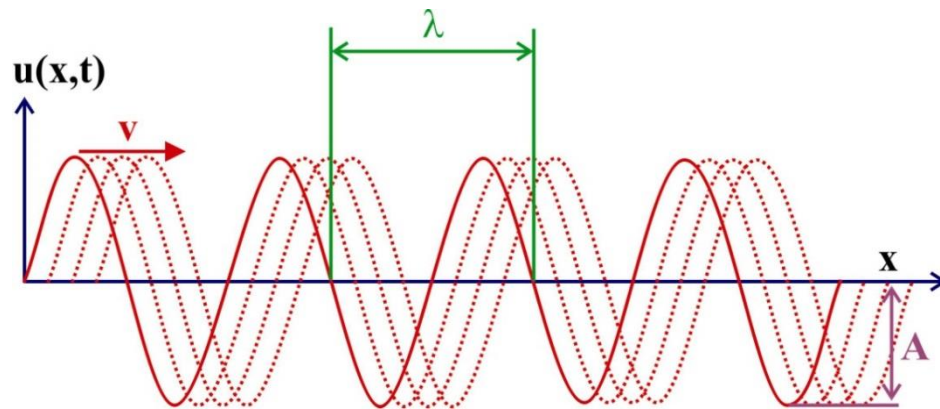




Nebo také:

$$u(t, x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (v \cdot t - x)$$

uvážíme-li, že pro vlnovou délkou  $\lambda$ , frekvenci  $f$  a fázovou rychlost  $v$  platí:



$$v = \lambda \cdot f$$

Vidíme jednoduchý vztah mezi frekvencí, vlnovou délkou a fázovou rychlostí. Přitom fázová rychlost seismických vln závisí na elastických vlastnostech prostředí, frekvence je v zásadní míře daná typem vlny (podélná, příčná, povrchová) a vzdáleností od zdroje. Na základě těchto úvah tak můžeme odvodit přibližné typické vlnové délky seismických vln.

Např. převládající frekvence P-vln lokálních a regionálních jevů se pohybuje v řádu X až X0 Hz.

Převládající frekvence P-vln vzdálených jevů se pohybuje v řádu 0.X až X Hz.

Můžeme-li odhadnout průměrnou rychlost podélné seismické vlny v zemské kůře přibližně na 5500 m/s, můžeme odhadnout také jejich vlnové délky:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

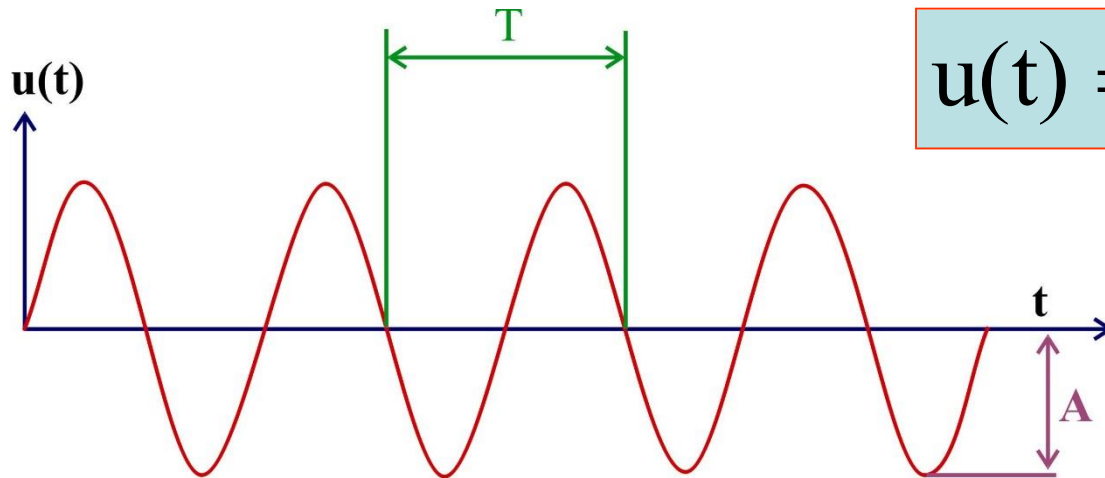
	v (m/s)	f (Hz)	$\lambda$ (m)
lokální jevy	5500	~ 10	~ 550
regionální jevy	5500	~ 1 - 10	~ 550 - 5500
vzdálené jevy	5500	~ 0.5 - 1	~ 5500 - 11000

# Signál jako součet goniometrických funkcí

Nyní budeme sledovat signál jako kmitání částic v jednom jediném bodě kontinua (např.  $x = 0$ ).

Představme si seismický signál jako jednoduchou harmonickou vlnu.

V případě, že tato vlna vyjadřuje posunutí, projevuje se v daném bodě kontinua kmitáním s frekvencí  $f$  (respektive periodou  $T$ ,  $T=1/f$ ) a amplitudou  $A$ , tj. s výchylkou  $u(t)$ :



$$u(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

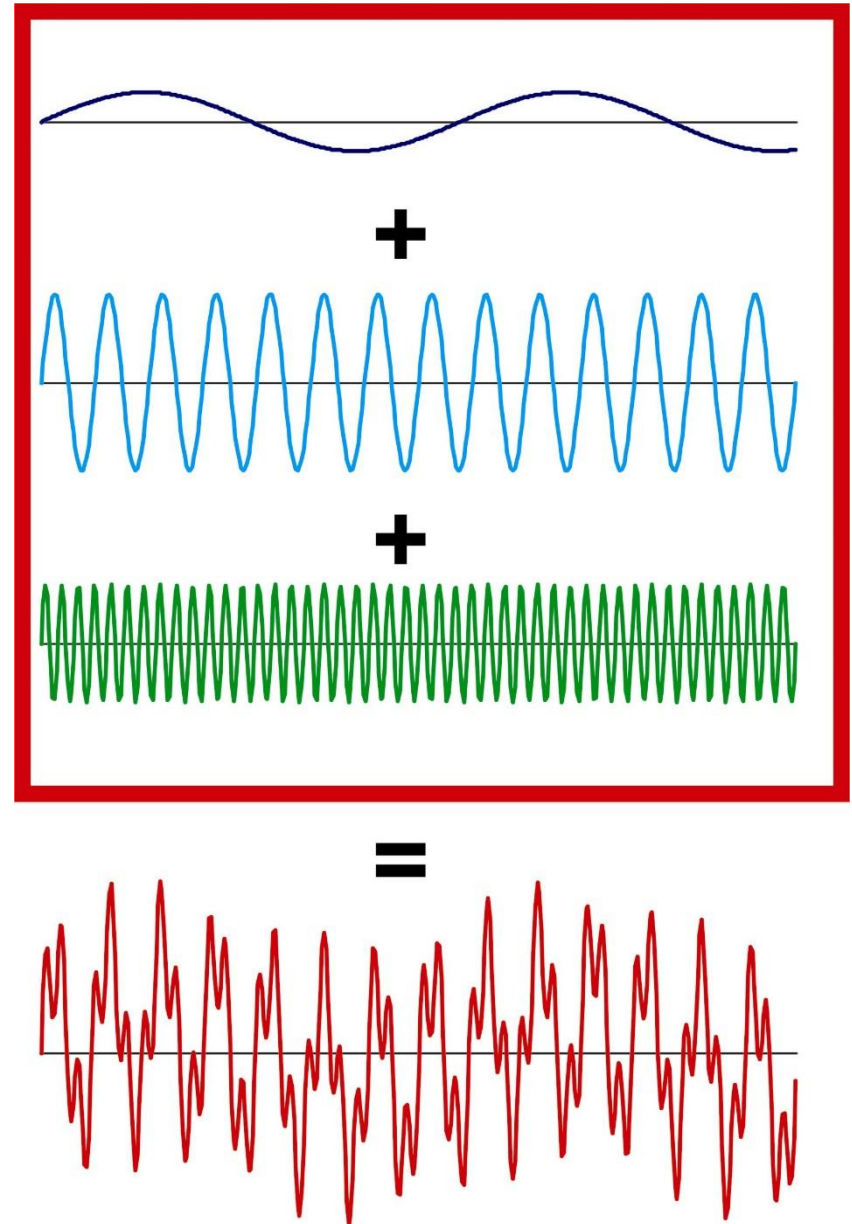
## Příklad součtu tří vlnových funkcí:

$$u_1(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t)$$

$$u_2(t) = 30 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot t)$$

$$u_3(t) = 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 23 \cdot t)$$

$$u_4(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,9 \cdot t) + \\ + 30 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot t) + 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 23 \cdot t)$$



## Fourierova řada

Každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + (a_1 \cos 2\pi f \cdot t + b_1 \sin 2\pi f \cdot t) + \\ + (a_2 \cos 2 \cdot 2\pi f \cdot t + b_2 \sin 2 \cdot 2\pi f \cdot t) + \\ \dots + (a_n \cos n \cdot 2\pi f \cdot t + b_n \sin n \cdot 2\pi f \cdot t) + \dots$$



Joseph Fourier  
(1768-1830)

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \cdot 2\pi f \cdot t + b_n \sin n \cdot 2\pi f \cdot t)$$

Fourierovy konstanty ( $a_n$ ,  $b_n$ ) určují amplitudu jednotlivé frekvenční složky signálu.

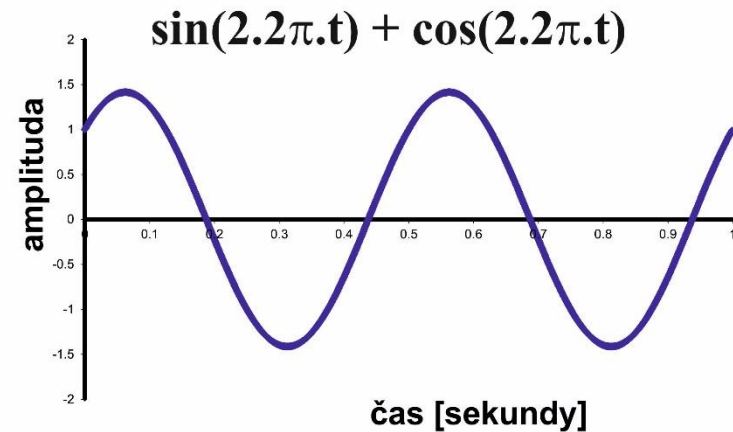
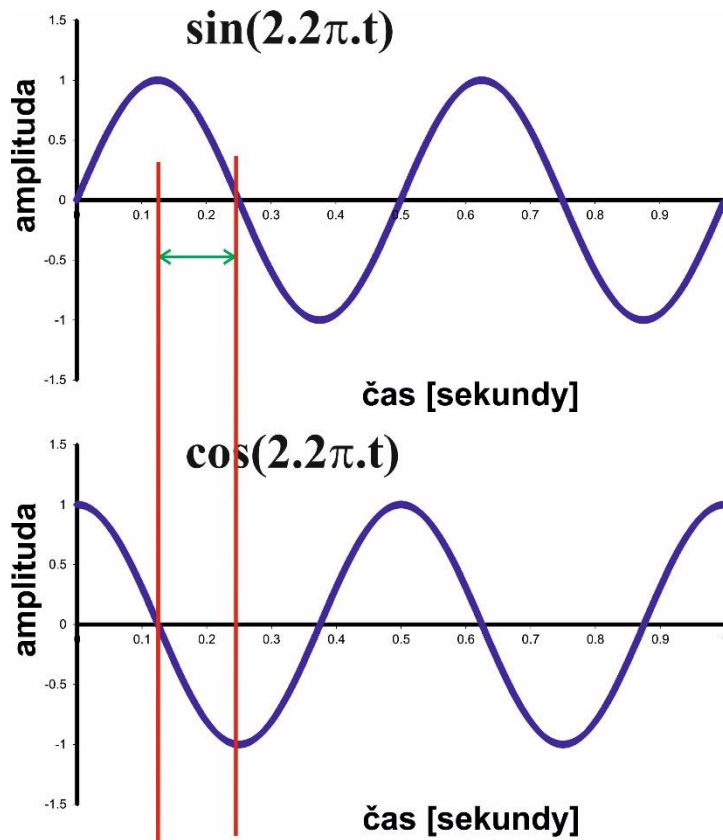
určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu

určuje sledovanou frekvenci



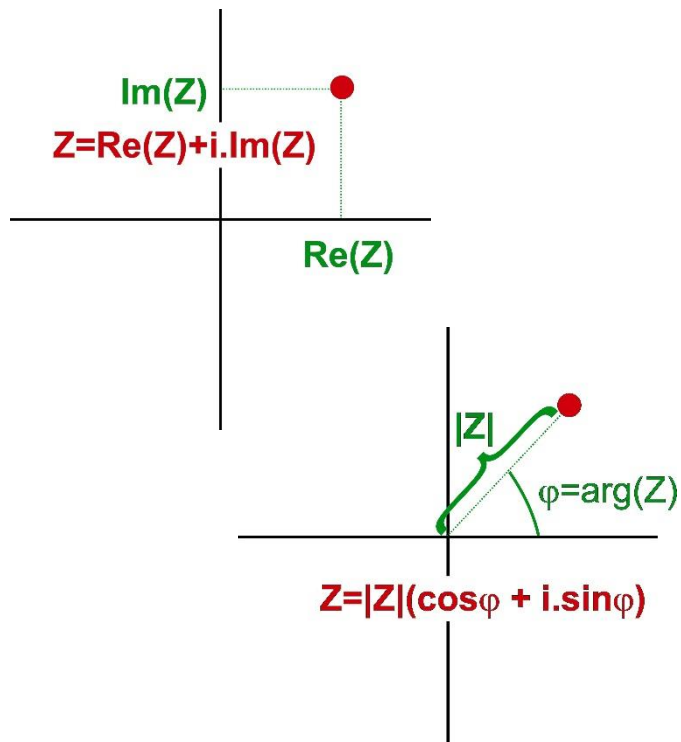
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \cdot 2\pi f \cdot t + b_n \sin n \cdot 2\pi f \cdot t$$

Fourierova řada v podobě součtu goniometrických funkcí potřebuje při popisu vlnové funkce pro každou frekvenci dvě konstanty ( $a_n$ ,  $b_n$ ), protože jejich poměr definuje fázi.

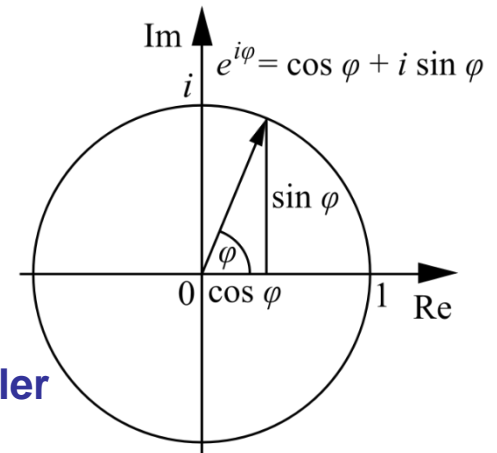


## komplexní tvar Fourierovy řady

Nevýhody vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí řeší komplexní tvar Fourierovy řady. Vychází z geometrického významu komplexního čísla a z tzv. Eulerovy věty.



Leonhard Paul Euler  
(1707-1783)



$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in 2 \pi f t}$$





Komplexní tvar převádí goniometrické funkce sinus a cosinus na vyjádření pomocí exponenciální funkce  $e^x$  s komplexní proměnnou.

V tomto tvaru si pak můžeme všechny koeficienty ( $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ) vyjádřit jediným (ovšem komplexním) koeficientem.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in 2\pi f t}$$



určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu

protože je to komplexní číslo, zahrnuje také informaci o fázi

určuje sledovanou frekvenci

Komplexní tvar Fourierovy řady se jeví méně intuitivní, má ale dvě velké výhody.

Pro každou frekvenci si vystačí s jedinou konstantou  $C_n$  – jelikož jde o komplexní číslo, může nést současně dvě informace (o amplitudě i o fázi vlny).

Součet goniometrických dvou různých funkcí (sinus a cosinus) je nahrazen jedinou exponenciální funkcí se kterou se lépe pracuje.

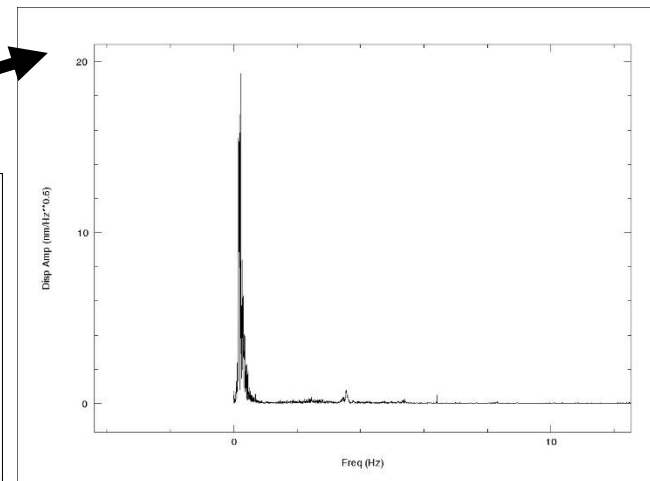
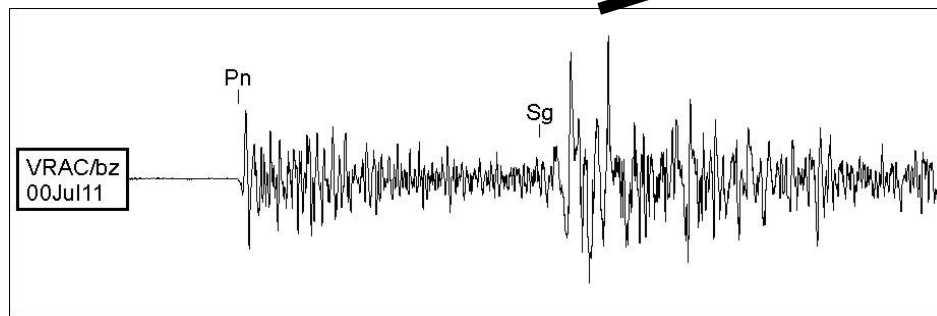
**Komplexní tvar je důležitý pro odvození tzv. Fourierovy transformace.**



## 3.1.b: Seismický signál jako funkce frekvence

Vezmeme-li v úvahu určitý časový úsek, můžeme v tomto časovém úseku určit amplitudy příslušející jednotlivým frekvencím (koeficienty  $b_n$  a  $a_n$ ) a můžeme tak číselně vyjádřit, v jaké míře se jednotlivé konkrétní frekvence podílejí na popisu celkového signálu. Můžeme tedy sestavit funkci, která popisuje amplitudu signálu v závislosti nikoli na čase, ale na frekvenci, tj. **frekvenční spektrum**.

Matematická operace, která popisuje převod časové funkce signálu (seismogram) na funkci závislou na frekvenci (Fourierovo spektrum), se nazývá **Fourierova transformace**.



# Fourierova transformace

Míru zastoupení různých frekvencí v signálu v určitém zvoleném časovém okně lépe vyjádří funkce ukazující závislost amplitudy  $U(f)$  nikoli na čase, ale na frekvenci.

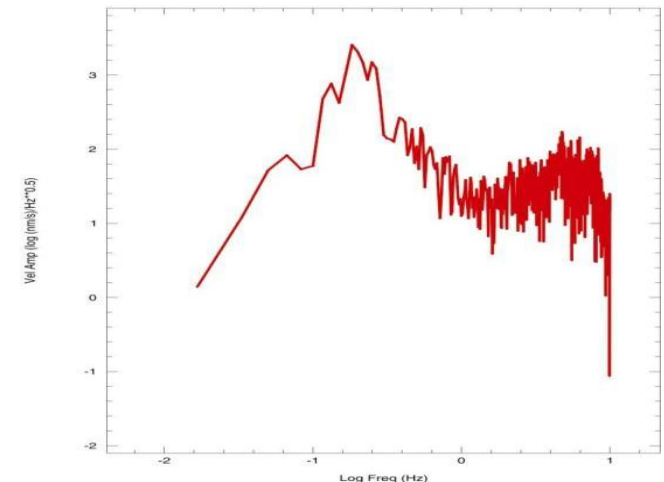
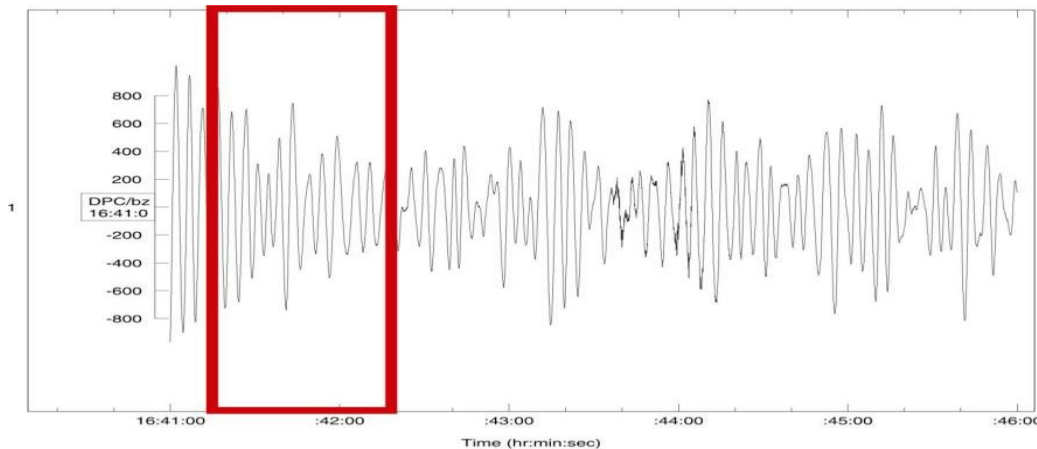
Převod signálu z funkce času na funkci frekvence se nazývá **Fourierova transformace**

signál jako funkce času

$u(t)$

$U(f)$

signál jako funkce frekvence



Funkce  $U(f)$  závislá na frekvenci se nazývá **spektrum**.

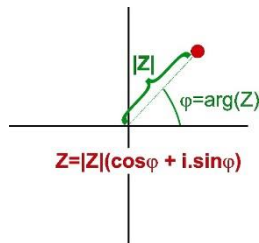
$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$



-Spektrum je komplexní veličina.

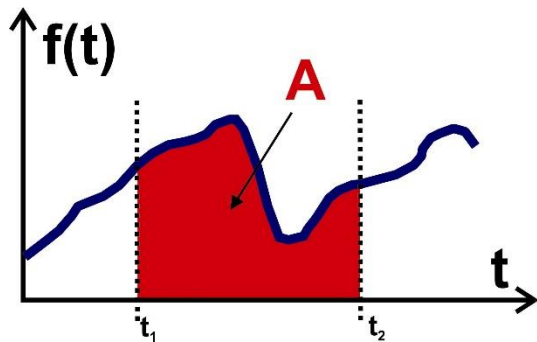
velikost  $|U(f)|$  udává tzv. **amplitudové spektrum**

úhel  $\arg(U(f))$  reprezentuje tzv. **fázové spektrum**



V čem je podstata vztahu pro Fourierovu transformaci?

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$



$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

jde tedy o plochu pod křivkou funkce  $f(t)$ , kde

$$f(t) = u(t) \cdot e^{-2\pi ft},$$

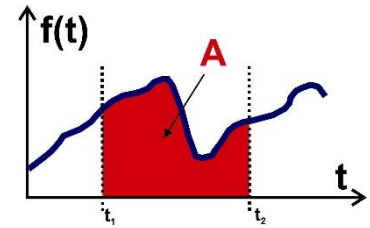
a to v celém rozsahu křivky (pro čas od minus nekonečna do nekonečna)

Integrál funkce času  $f(t)$  od  $t_1$  do  $t_2$  je plocha pod křivkou dané funkce ve stanoveném intervalu.

integrál není  
funkcí času

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

integrál je funkcí frekvence



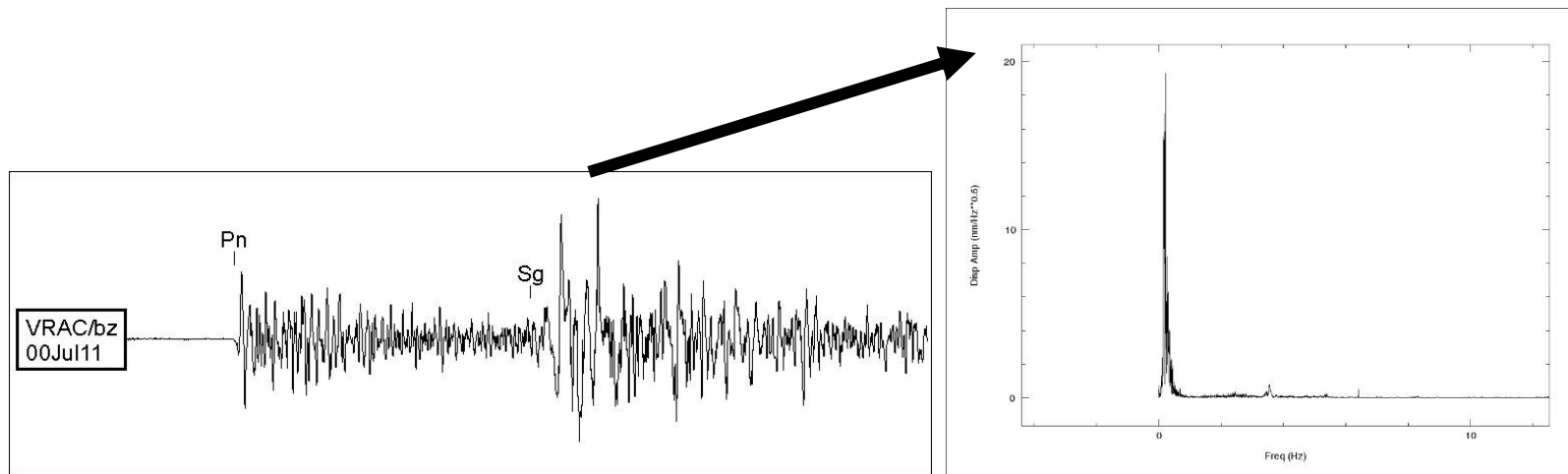
Vymezením času od minus nekonečna do nekonečna je však čas fixován – ať do vztahu dosadíme za čas  $t$  jakoukoli hodnotu, plocha pod křivkou daná integrálem bude stejná.

**Tedy – přestože  $f(t)$  [ $f(t) = u(t) \cdot e^{-2\pi ft}$ ] je funkcí času, daný integrál již funkcí času není (nezávisí na času  $t$ )!**

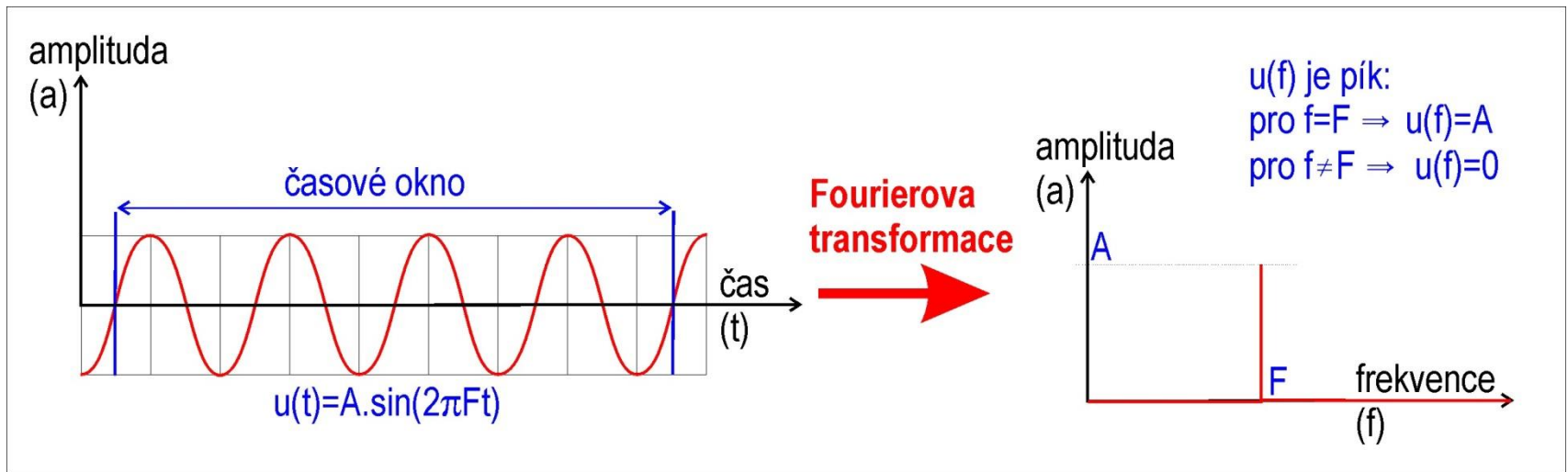
**Současně vidíme, že plocha pod křivkou funkce  $f(t)$  bude různá pro různé frekvence  $f$  ... tedy, že daný integrál je funkcí frekvence!**



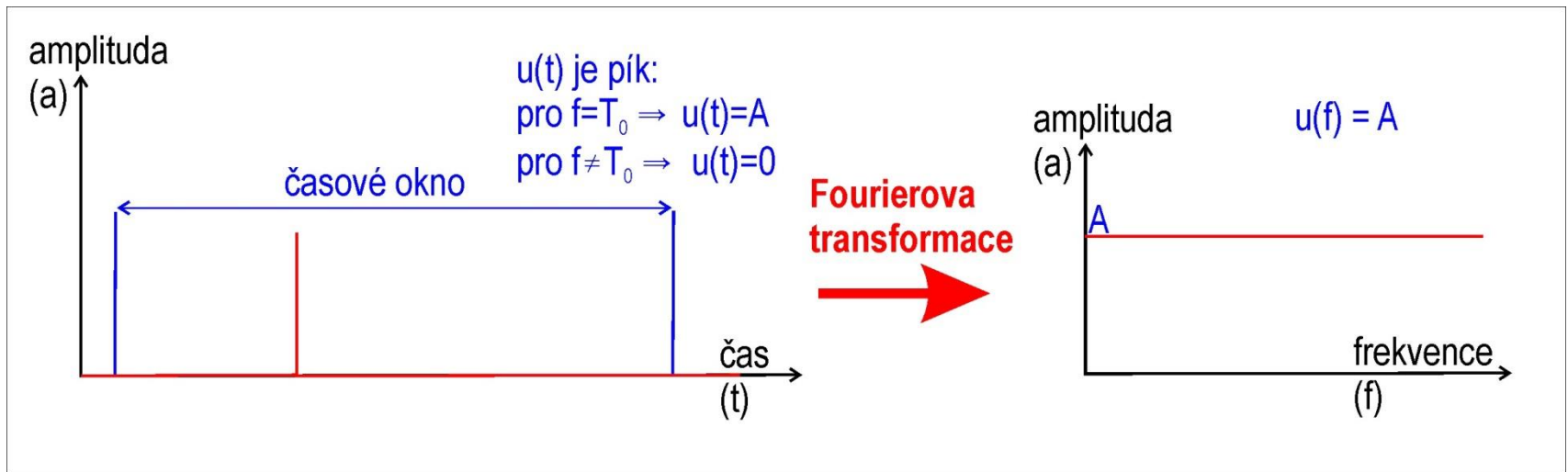
Fourierovu transformaci a její význam si můžeme demonstrovat na dvou jednoduchých příkladech – na transformaci jednoduché sinusoidy a na transformaci píku (impulzu).



**Jednoduchá sinusoida** je funkce popsaná jednou konkrétní hodnotou frekvence **F** a jednou konkrétní hodnotou amplitudy **A**. Její frekvenční popis je tedy funkce, která má nenulovou hodnotu pouze v bodě o frekvenci F, všude jinde je nulová (tzv. **impuls** neboli **pík**).



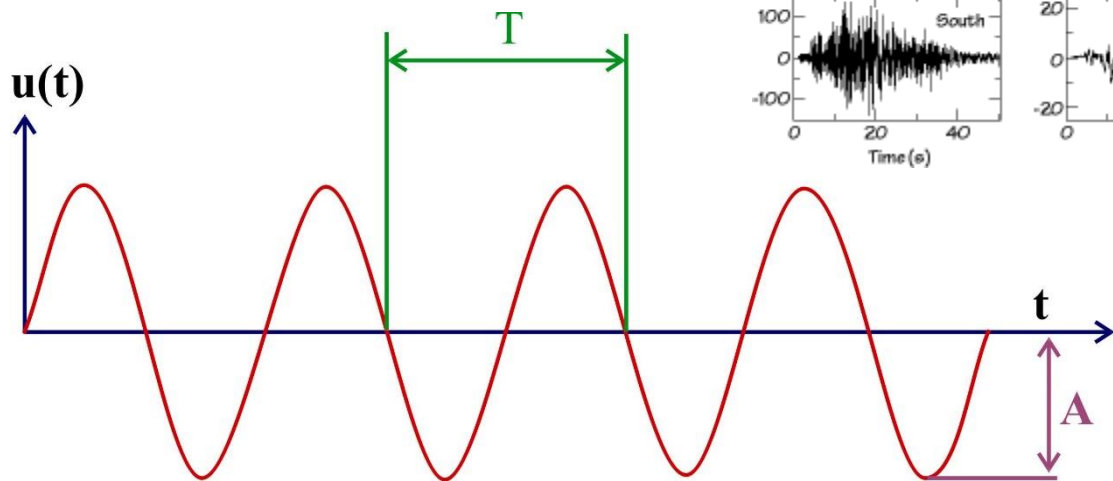
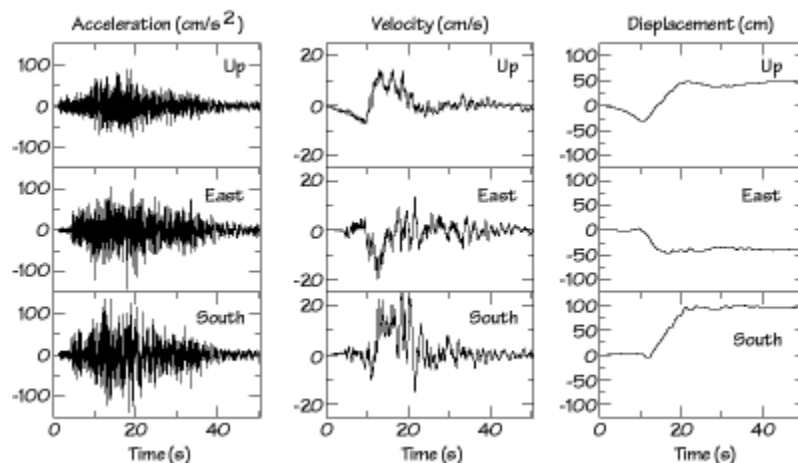
Také **pík** lze popsat jako součet sinusoidových křivek. V tomto případě potřebujeme sčítat nekonečně mnoho křivek (musíme použít všechny možné frekvence) a že amplituda všech jednotlivých křivek je stejná (v píku jsou obsaženy stejnou měrou všechny frekvence).



# Typy signálů a jejich frekvence

Seismický záznam může zachycovat kmitání částic kontinua ve smyslu:

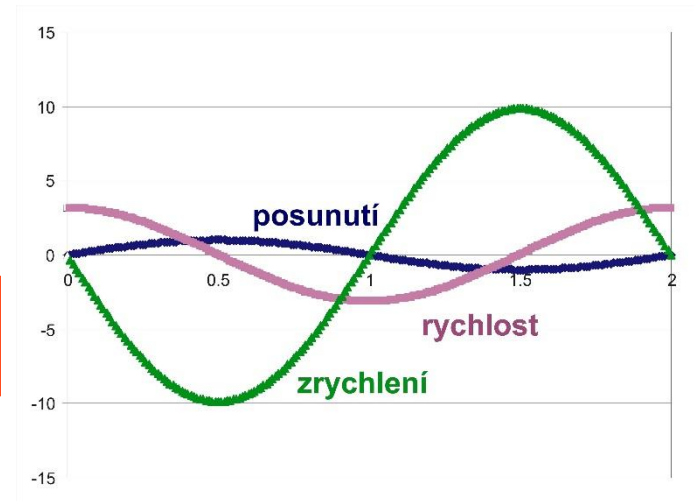
- posunutí polohy částice
- rychlost posunutí polohy částice
- zrychlení posunutí polohy částice



Při převedení téhož signálu z posunutí na rychlost či zrychlení vidíme, že změna amplitudy v různých typech signálů je závislá na frekvenci.

**posunutí**

$$u_0(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$



**rychlost**

$$v_0(t) = \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$$

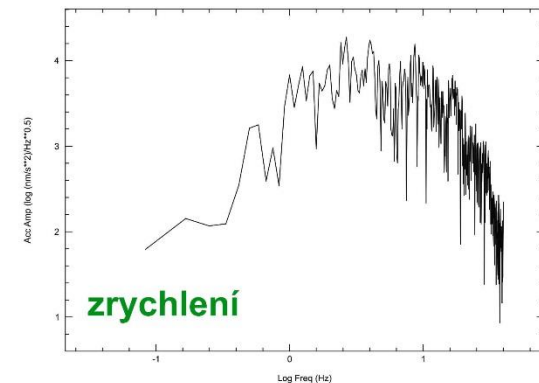
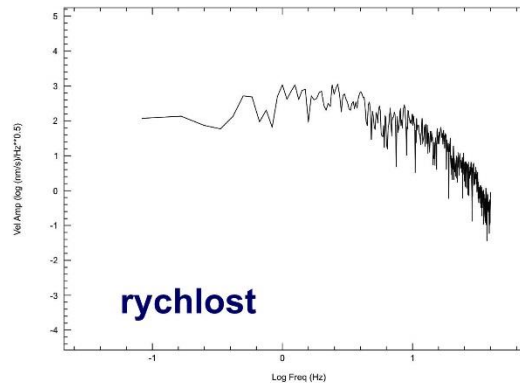
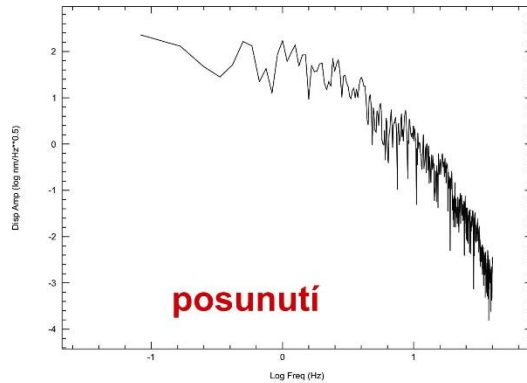
$$v_0(t) = 2\pi \cdot f \cdot A \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$$

**zrychlení**

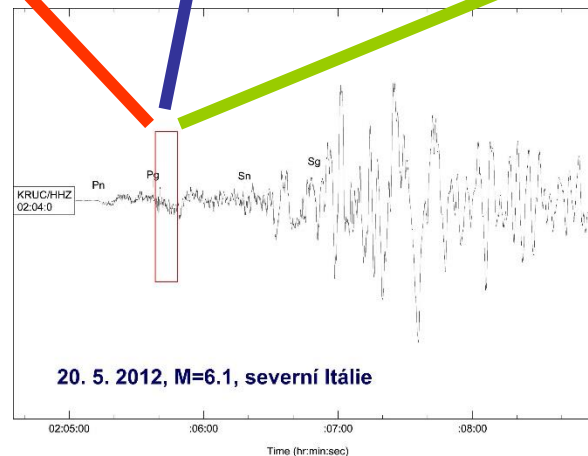
$$s_0(t) = \frac{\partial v_0(t)}{\partial t}$$

$$s_0(t) = -(2\pi \cdot f)^2 \cdot A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Spektrum signálu se tedy zásadně liší podle toho, zda jde o spektrum posunutí, rychlosti či zrychlení.



20. 5. 2012, M=6.1, severní Itálie



20. 5. 2012, M=6.1, severní Itálie

V případě jednoduché sinusovky platí následující vztahy pro přepočet mezi amplitudami posunutí, rychlostí a zrychlení:

$$u_0(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

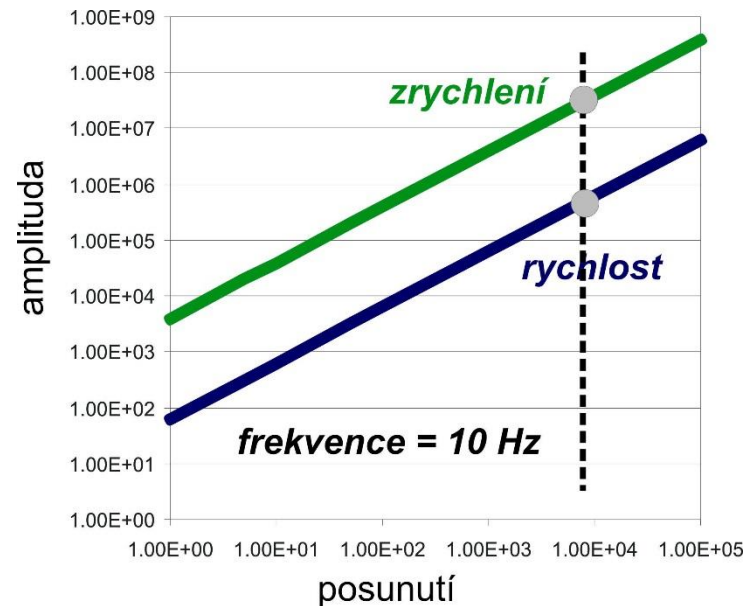
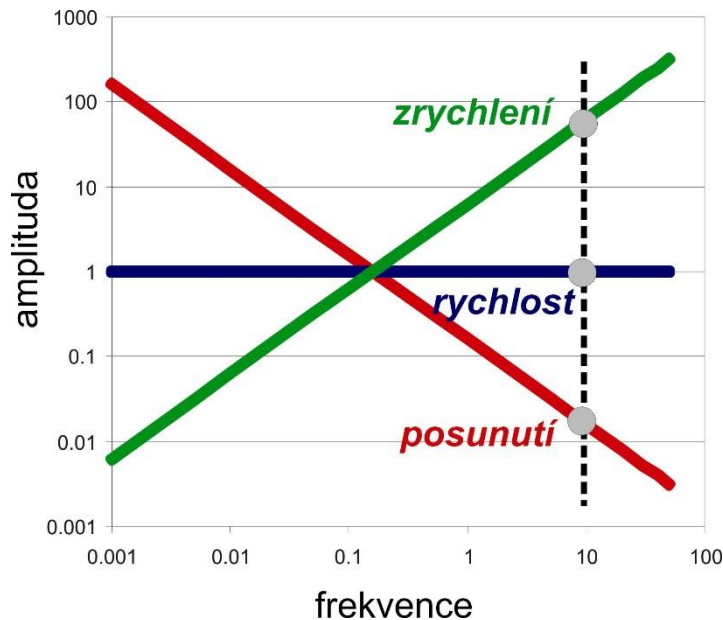
$$v_0(t) = 2\pi \cdot f \cdot A \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$s_0(t) = -(2\pi \cdot f)^2 \cdot A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$A_v = A_u (2\pi \cdot f)$$

$$A_s = A_v (2\pi \cdot f)$$

$$A_s = A_u (2\pi \cdot f)^2$$



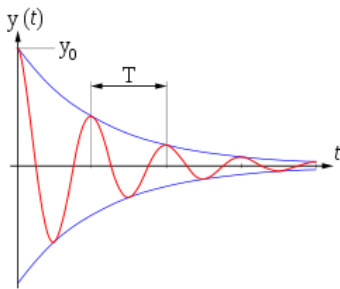
## 3.2: Vliv prostředí na seismickou vlnu



## 3.2.a: Signál jako tlumené kmity a coda

# Útlum

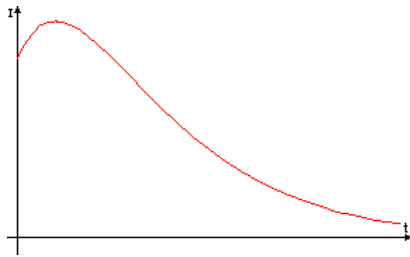
Horninové prostředí se chová elasticky a impuls vede k tlumeným kmitům částic kontinua ( $\delta$  – součinitel tlumení).



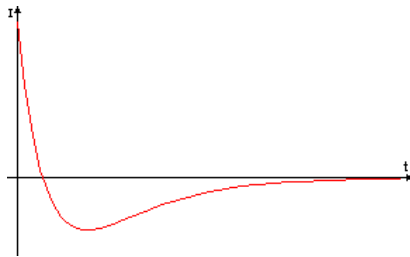
$$u(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_t \cdot t + \varphi_0)$$

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

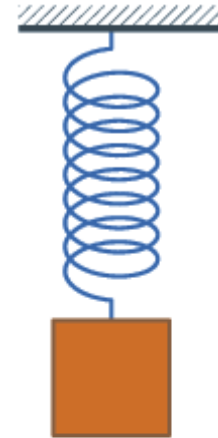
podkritický útlum



kritický útlum

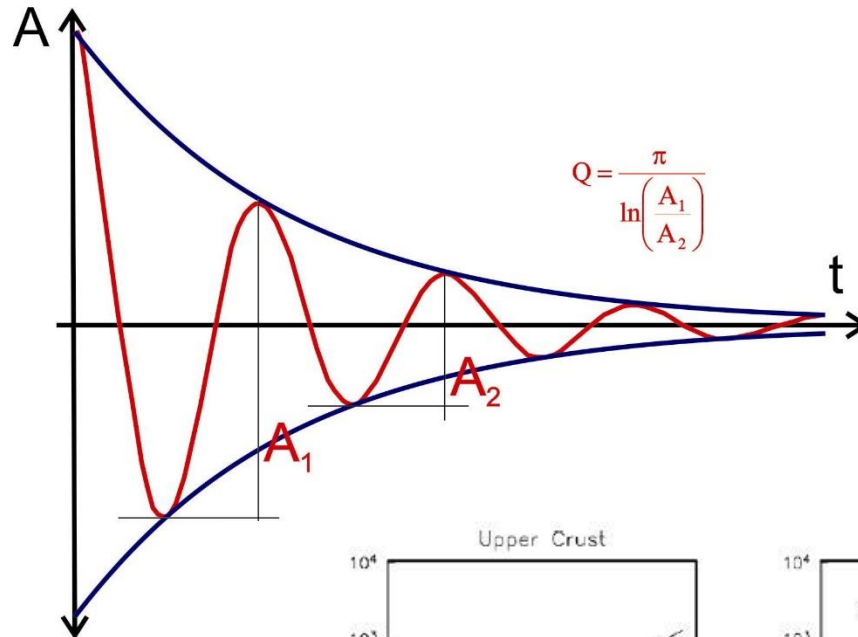


nadkritický útlum



Pro charakteristiku útlumu je široce používána veličina  $Q$  (quality factor):

$$Q_t = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}$$



$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\pi f t}{Q_t}}$$

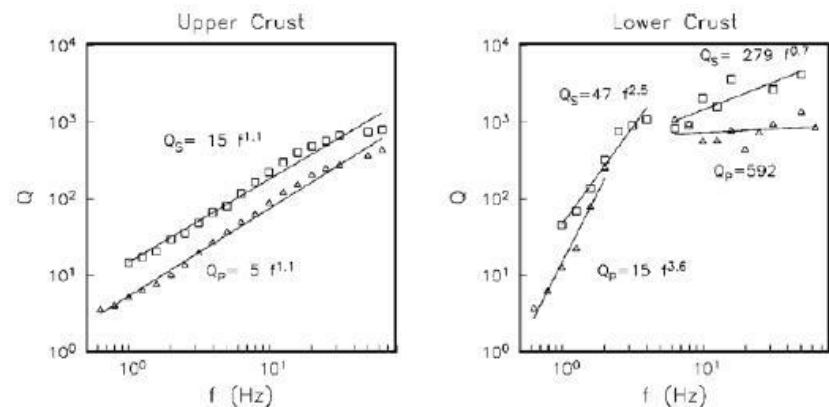
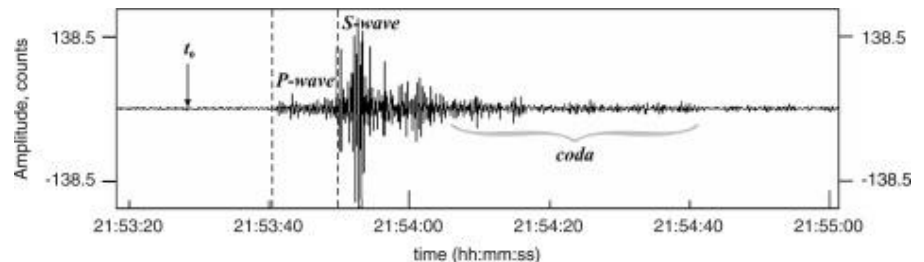
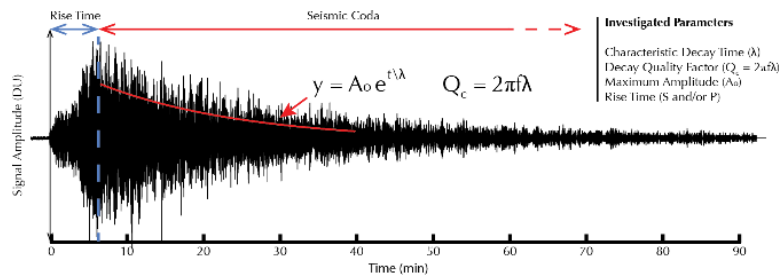


Fig. 4. Total  $Q$  estimated using a 2-layer model. Left frame correspond to the first 23-25 km of the crust and the right frame to the next 25 km. Triangles correspond to  $P$  waves ( $Q_p$ ) and squares to  $S$  waves ( $Q_s$ ). The lines are the least-squares fit obtained with the estimates of  $Q$  shown.

V homogenním prostředí má seismický signál spíše charakter impulsu.

V důsledku anelastických nehomogenit v reálném horninovém prostředí dochází k odrazům a k rozptylu seismických vln a ke vzniku reziduálních tlumených kmitů s výrazně menším útlumem, které vytváří v seismickém záznamu část označovanou jako „**coda**“.

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\pi f t}{Q_t}}$$



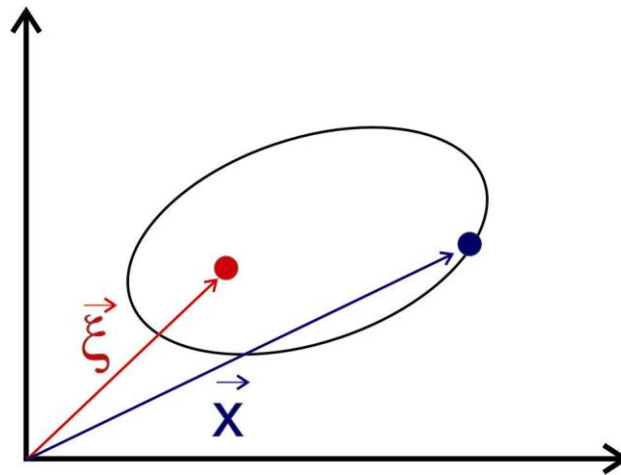
## 3.2.b: Změna amplitudy jako funkce místa

Dále od zdroje je posunutí (a tedy tvar signálu) ovlivněno nejen dynamikou a kinematikou zdroje, ale také vlastnostmi horninového prostředí. Vliv prostředí nám popisuje tzv. **greenův tenzor**.

$$u_n(\vec{x}, t) = M_{pq}(\vec{\xi}, \tau) * G_{np,q}(\vec{x}, t; \vec{\xi}, \tau)$$

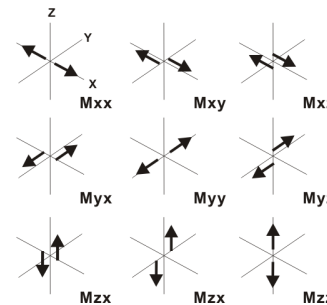
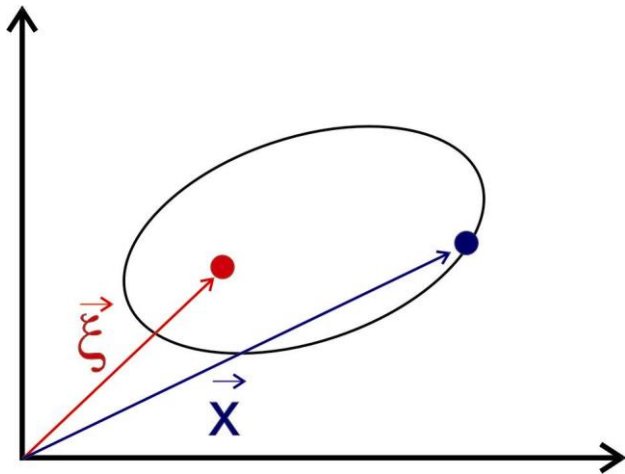


George Green  
(1793-1841)



Výsledné posunutí je popisováno jako reakce na silový impuls působící v místě  $\xi$  a v čase  $\tau$ , přičemž greenův tenzor popisuje odezvu prostředí na tento impuls v místě  $x$  a čase  $t$ .

$$u_n(\vec{x}, t) = M_{pq}(\vec{\xi}, \tau) * G_{np,q}(\vec{x}, t; \vec{\xi}, \tau)$$



**momentový tenzor –**  
popisuje působící momenty sil v místě  $\xi$  a čase  $\tau$ , které způsobily pohyb

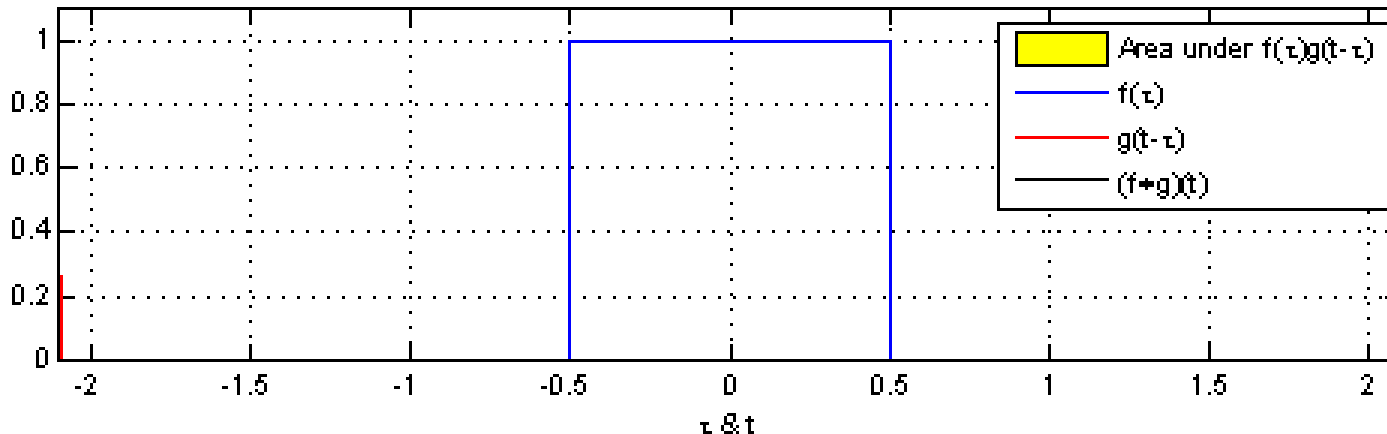
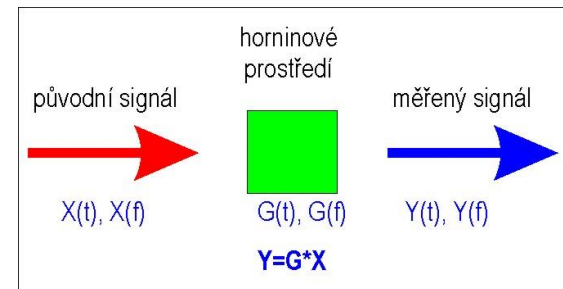
**greenův tenzor –**  
popisuje odezvu v místě  $x$  a čase  $t$

$$u_n(\vec{x}, t) = M_{pq}(\vec{\xi}, \tau) * G_{np,q}(\vec{x}, t; \vec{\xi}, \tau)$$



Operace mezi funkcemi M a G v časové oblasti je konvoluce.

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{pq}(\alpha) \cdot G_{np,q}(t - \alpha) d\alpha$$



Při vyjádření v závislosti na frekvenci degraduje na součin.



Se změnou místa se tedy mění jak amplituda tak i frekvenční charakteristika signálu.

Amplituda se mění zejména z důvodu:

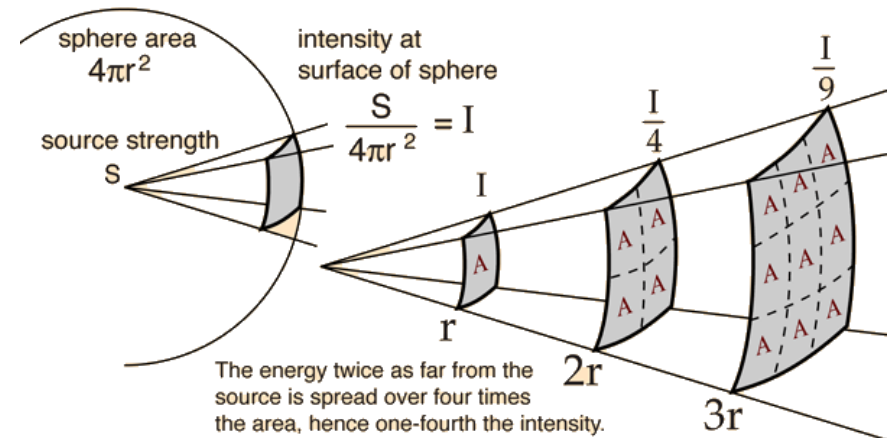
- a) geometrického rozšiřování vlnoplochy
- b) absorpce seismických vln v důsledku nedokonalé elasticity horninového prostředí

## rozšiřování sférické vlnoplochy (geometrical spreading)

Má-li být zachována konstantní suma energie  $E_0$  na kulové ploše, tak s rostoucím poloměrem  $r$  připadá na jeden bod kulové plochy část energie  $E_r$ :

$$E_r = \frac{E_0}{4\pi r^2}$$

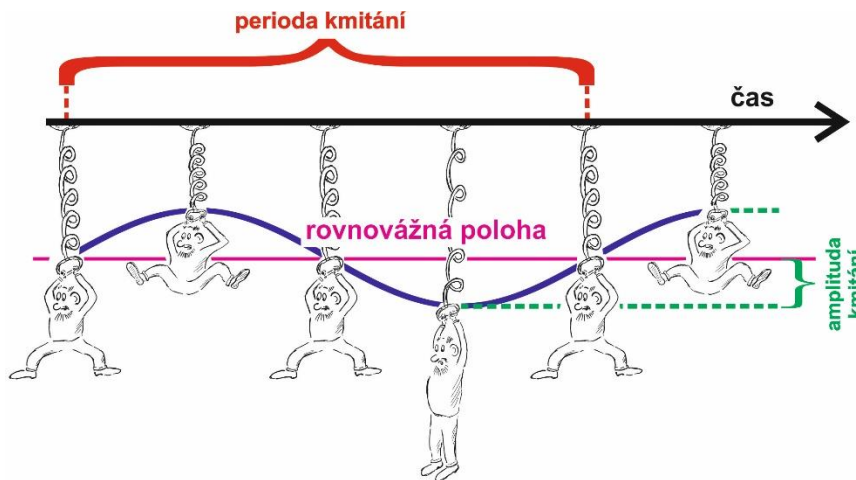
Tj. velikost seismické energie klesá úměrně druhé mocnině vzdálenosti.



Energie kmitajícího bodu je dána součtem jeho kinetické a potenciální energie.

Kinetická energie  $E_k$  je úměrná hybnosti objektu, v závislosti na rychlosti si ji můžeme vyjádřit vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$



$$u(t) = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

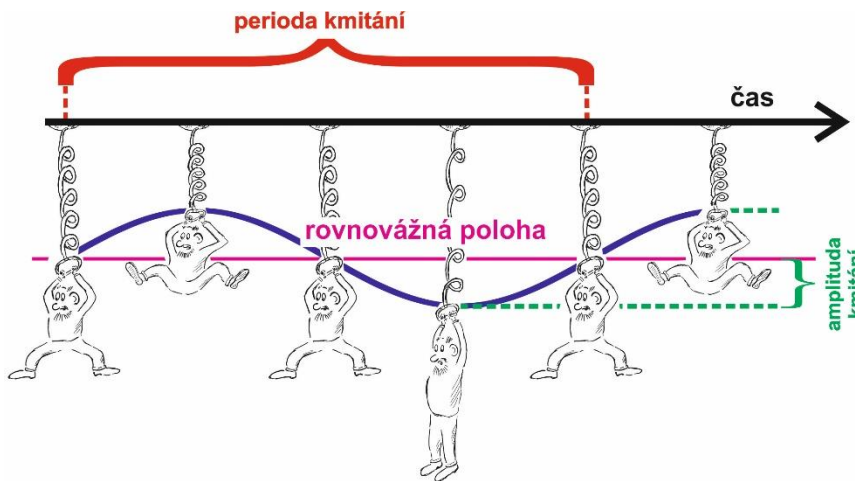
V případě objektu kmitajícího na pružině si stačí uvědomit, že rychlost je derivací výchylky

$$v = A2\pi f \cdot \cos(2\pi f t)$$

a po dosazení tak máme:

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2(2\pi f)^2 \cdot \cos^2(2\pi f t)$$

Potenciální energie  $E_p$  je úměrná působící síle, v případě kmitání pružiny si můžeme působící sílu vyjádřit vztahem ( $k$  je tuhost pružiny):



$$F = -kA$$

Potenciální energie je pak úměrná práci, která je vlivem daná síly vykonána přemístěním do rovnovážného stavu (tedy do stavu  $A=0$ ), přičemž síla se během přemístění mění, takže musíme vztah integrovat:

$$E_p = - \int F dA = \frac{1}{2} k A^2$$

## rozšiřování sférické vlnoplochy (geometrical spreading)

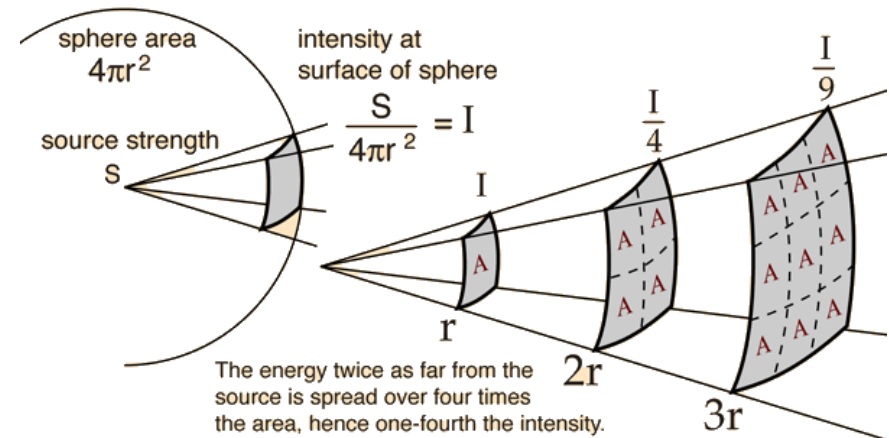
Má-li být zachována konstantní suma energie  $E_0$  na kulové ploše, tak s rostoucím poloměrem  $r$  připadá na jeden bod kulové plochy část energie  $E_r$ :

$$E_r = \frac{E_0}{4\pi r^2}$$

Tj. velikost seismické energie klesá úměrně druhé mocnině vzdálenosti.

**Energie je úměrná druhé mocnině amplitudy  $A$** , takže amplituda pak klesá úměrně se vzdáleností:

$$E_r \approx A^2 \wedge E_r \approx \frac{1}{r^2} \Rightarrow A \approx \frac{1}{r}$$

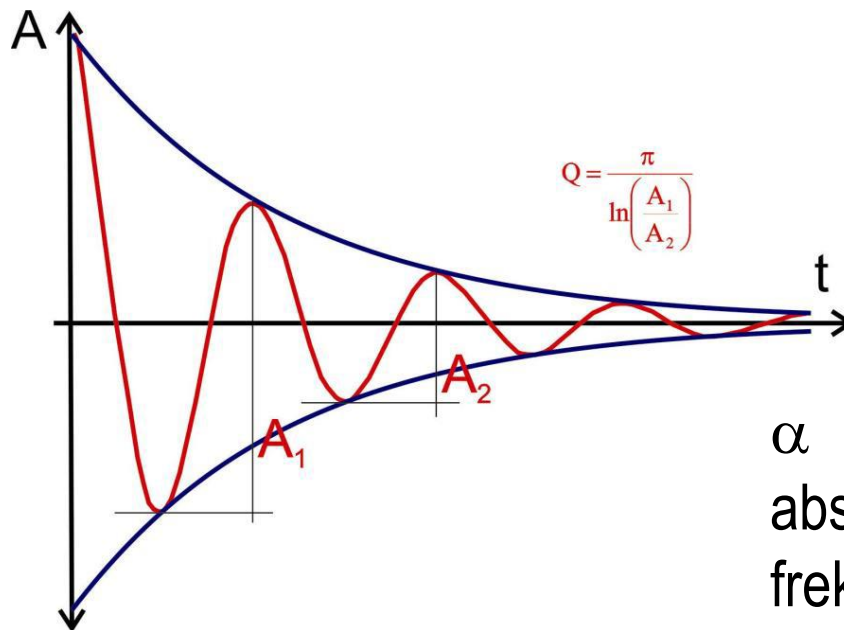


## útlum v důsledku absorpce prostředí

Je dán vztahem pro tlumené kmity, kde amplituda  $A$  ve vzdálenosti  $r$  závisí kromě vzdálenosti na frekvenci  $f$ , rychlosti  $v$  a tzv. „kvalitě oscilátoru“ (quality factor)  $Q$ :

$$A(r) = a_0 e^{-\frac{\pi f}{Qv} r}$$

$$A(r) = a_0 e^{-\alpha r}$$

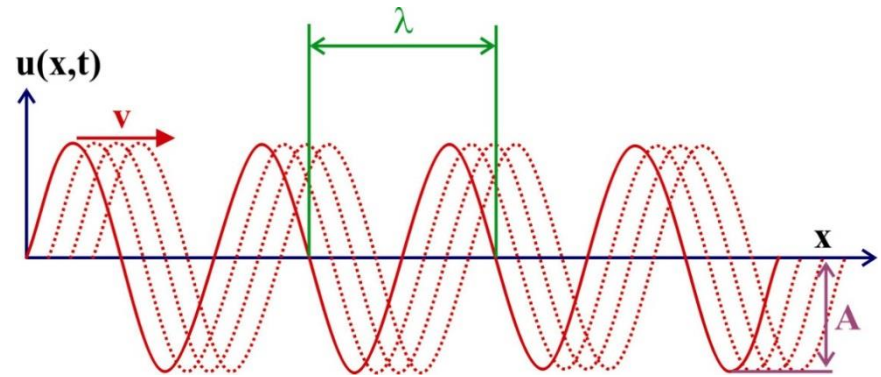


$\alpha$  ... koeficient absorpce  
absorpce je frekvenčně závislá, vyšší  
frekvence jsou absorbovány rychleji.

## 3.3: Rychlost seismických vln

Odvození rychlosti seismických vln vychází z tzv. vlnových rovnic. Např. pro rovinnou podélnou vlnu platí pohybová rovnice (tj. vlnová rovnice), ve které vystupuje fázová rychlost  $v$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}$$



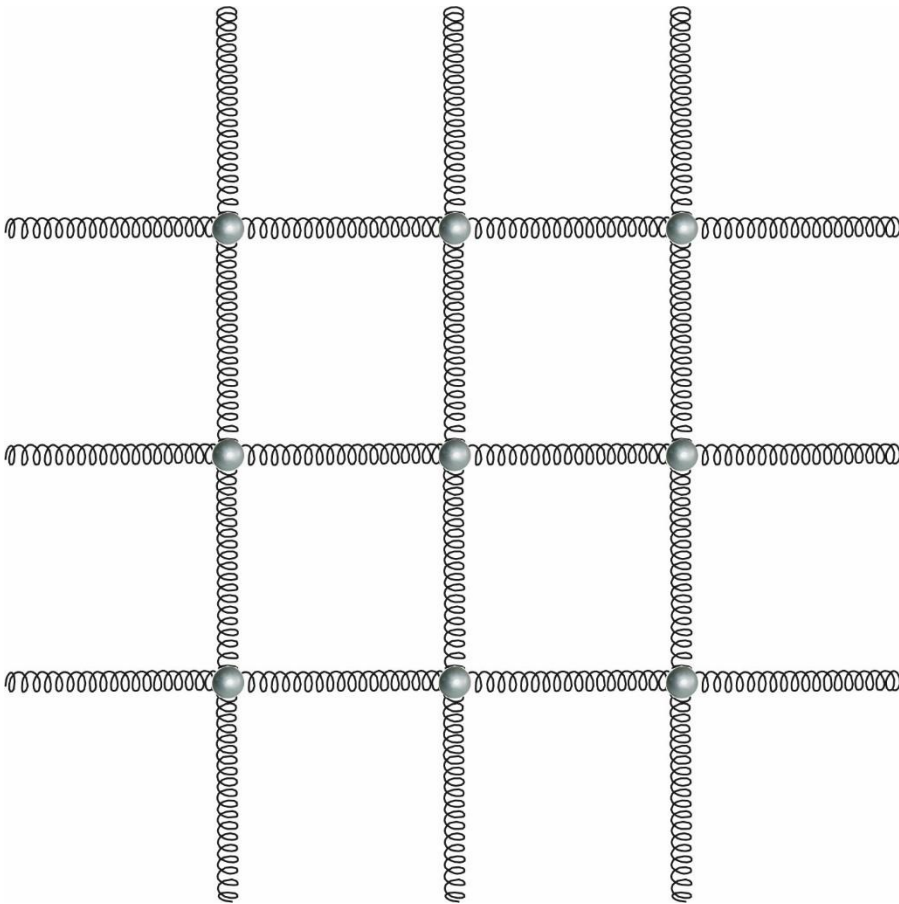
Současně lze na základě Newtonových zákonů zformulovat vlnovou rovnici (za předpokladu zanedbání objemových sil, např. gravitace):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j}$$

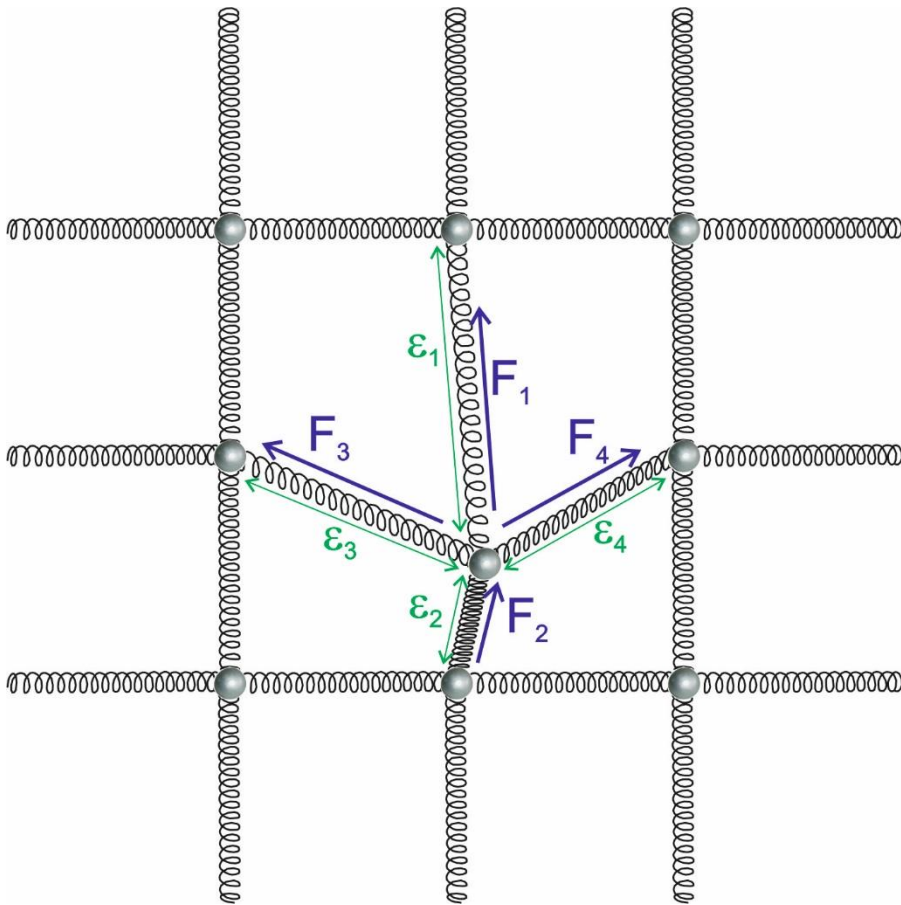




Pro přiblížení významu uvedených rovnic si nahradíme horninové prostředí jednoduchým modelem – soustavou kuliček a pružin. Sledujme kuličku uprostřed modelu.



V důsledku průchodu vlny je kulička vychýlena ze své středové polohy. To ale vede k deformaci pružin, v jejichž důsledku na kuličku působí síly orientované tak, aby vedly k návratu do středové polohy.



Uvědomíme-li si, že ...

- druhá derivace výchylky hmotného bodu  $u$  podle času  $t$  je zrychlení udělené danému hmotnému bodu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \dots \text{zrychlení}$$



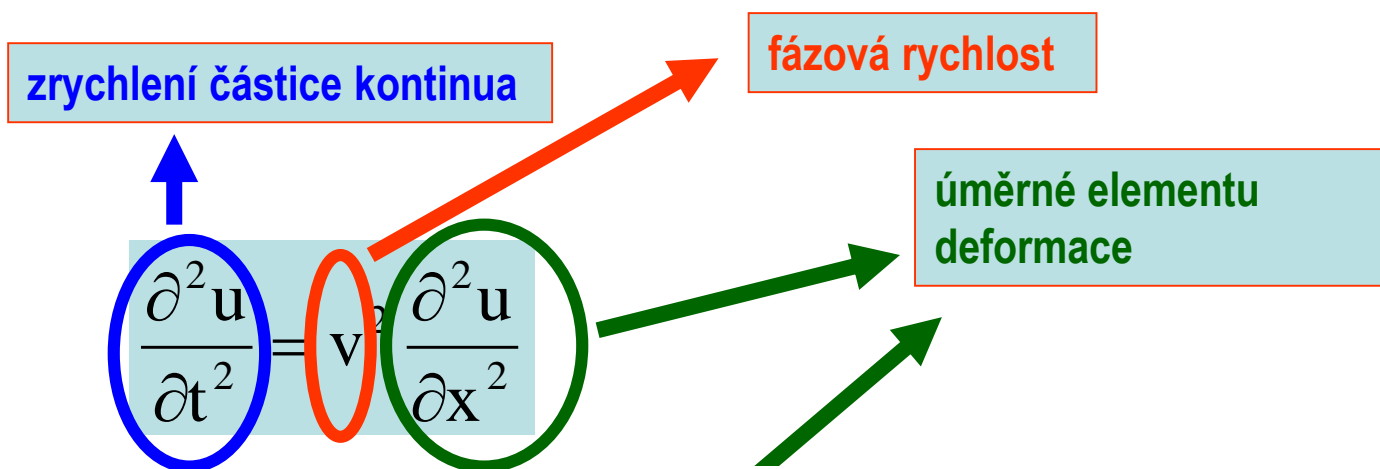
- součin hmotnosti a zrychlení je síla (tudíž součin hustoty  $\rho$  a zrychlení je síla působící na jednotkový objem):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = F_i \dots \text{složka síly}$$

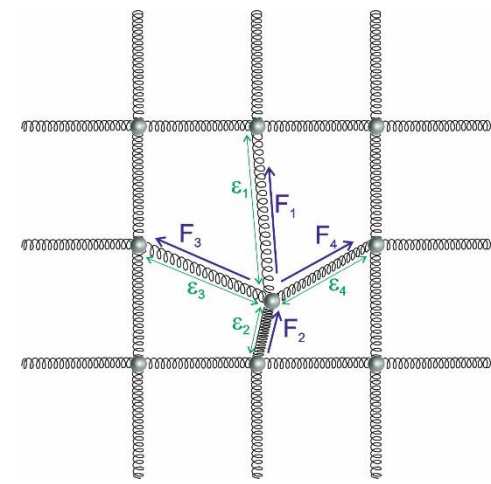
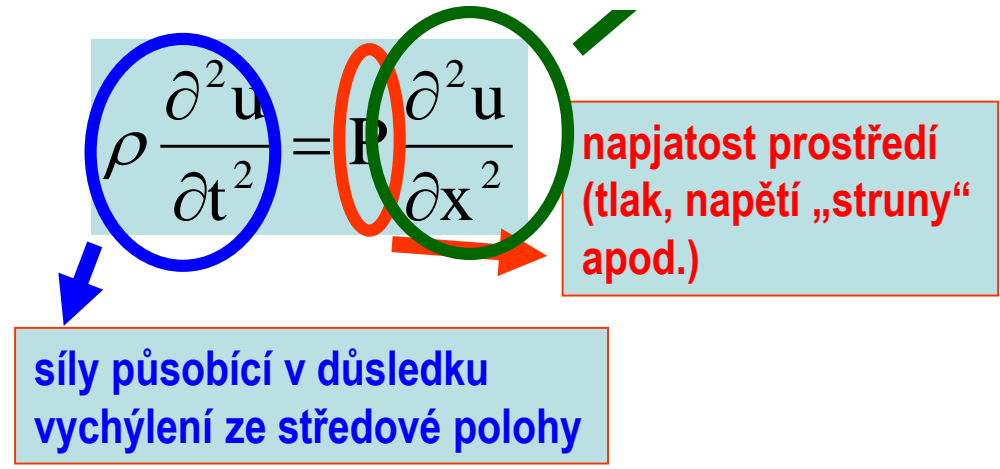
- druhá derivace výchylky podle vzdálenosti  $x$  je úměrná elementům deformace

... tak potom vidíme, že ...

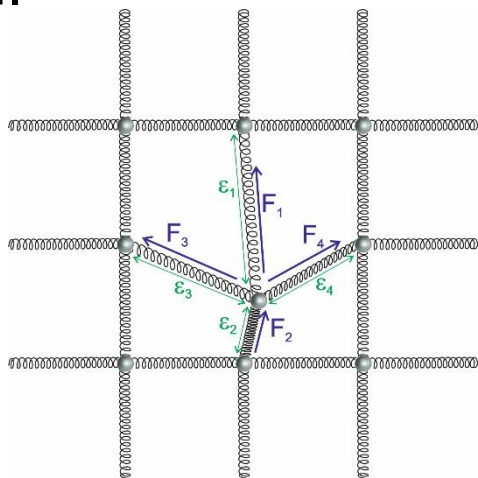
První rovnice uvádí souvislost mezi výchylkou (zrychlením) a elementy deformace.



Respektive mezi elementy síly a deformace.



Druhá z rovnic uvádí jednoduchou souvislost mezi složkami síly a napětí.

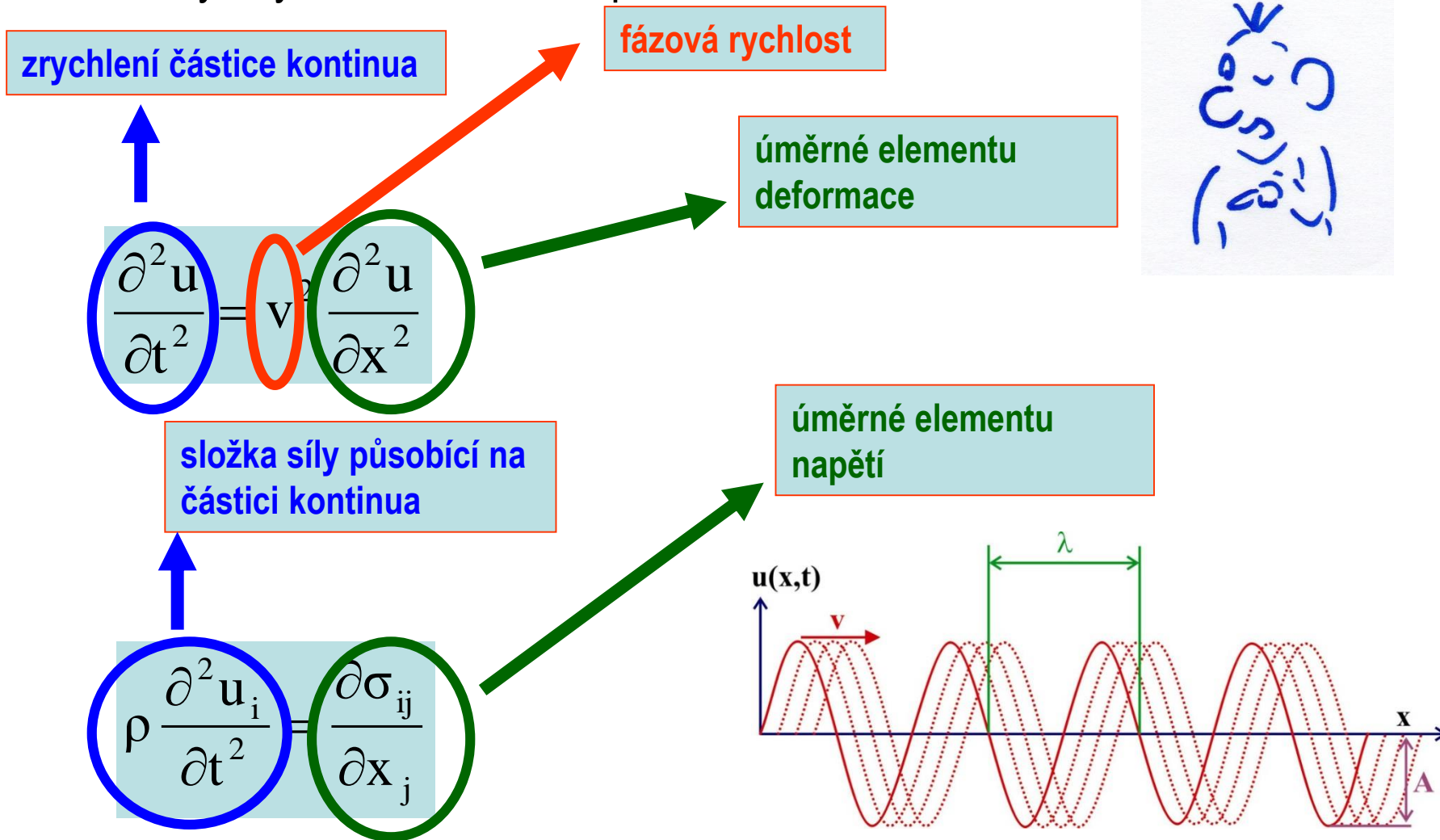


složky síly působící na částici kontinua

úměrné elementu napětí

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Máme tedy rovnice uvádějící souvislost mezi fázovou rychlostí a elementy síly, deformace a napětí.

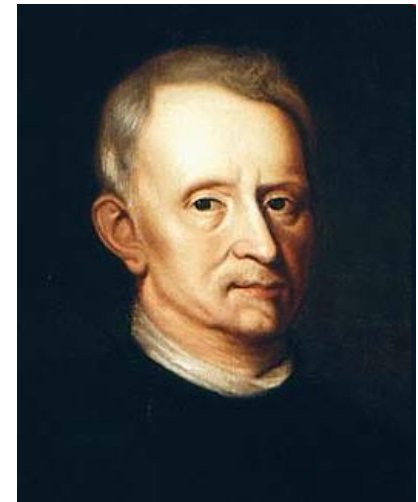


Navíc existují vztahy mezi deformací a napětím (respektive silou).  
Elastické vlastnosti prostředí popisuje Hookův zákon:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

kde  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí,  $e_{kl}$  jsou složky tenzoru deformace a  $C_{ijkl}$  jsou elastické koeficienty

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$



*Robert Hooke (1635-1703)*

Zobecněný Hookův zákon:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

kde  $\delta_{ij}$  je tzv. Kroneckerův symbol,  $e_I$  je stopa tenzoru deformace a  $\lambda$  a  $\mu$  jsou tzv. Lamého parametry.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow i = j \\ 0 & \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$$

$$e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$



**Gabriel Léon Jean  
Baptiste Lamé (1795-1870)**



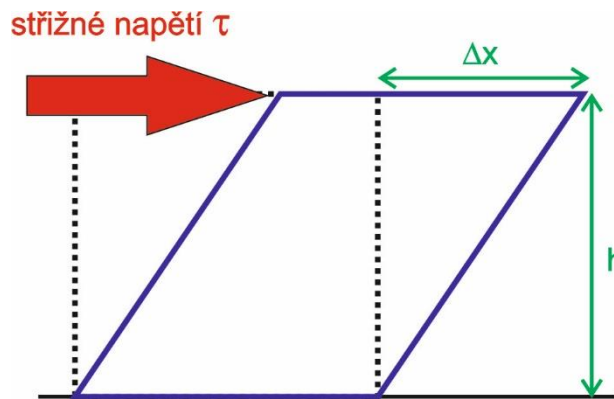
Modul pružnosti ve smyku (Lamého parametr  $\mu$ ):

$$\mu = \frac{\tau}{\gamma}$$

kde  $\tau$  je střížné napětí a  $\gamma$  je střížná deformace.

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\gamma = \frac{\Delta x}{I}$$



střížná deformace  $\gamma$ :  
 $\gamma = \Delta x / h$

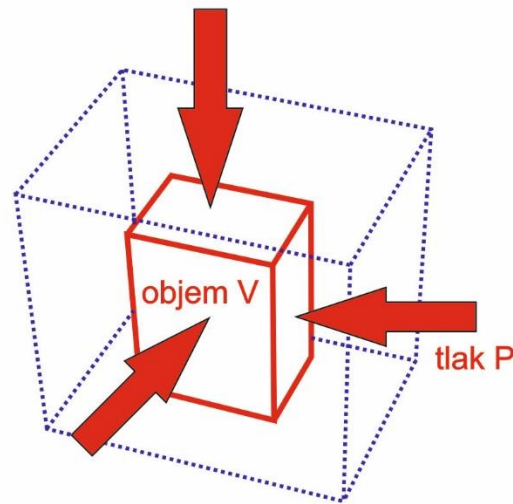
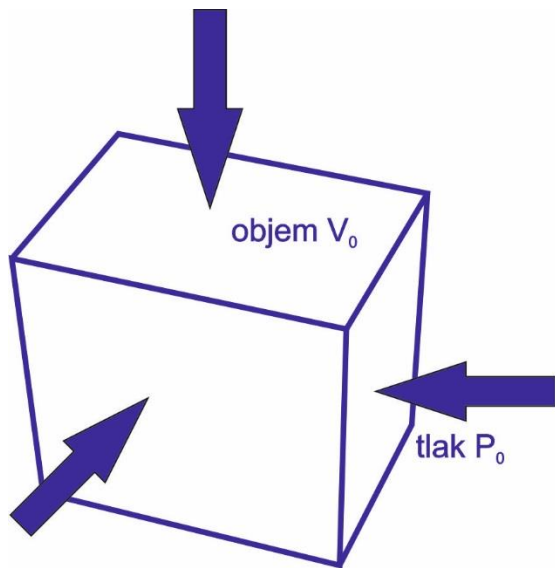
modul pružnosti ve smyku  $G$ :  
 $G = \tau / \gamma$

## Lamého parametr $\lambda$ a modul objemové pružnosti $K$

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

$$K = -V \frac{dP}{dV}$$

kde  $P$  je tlak a  $V$  objem.



změna tlaku  $\Delta P$ :  
 $\Delta P = P - P_0$

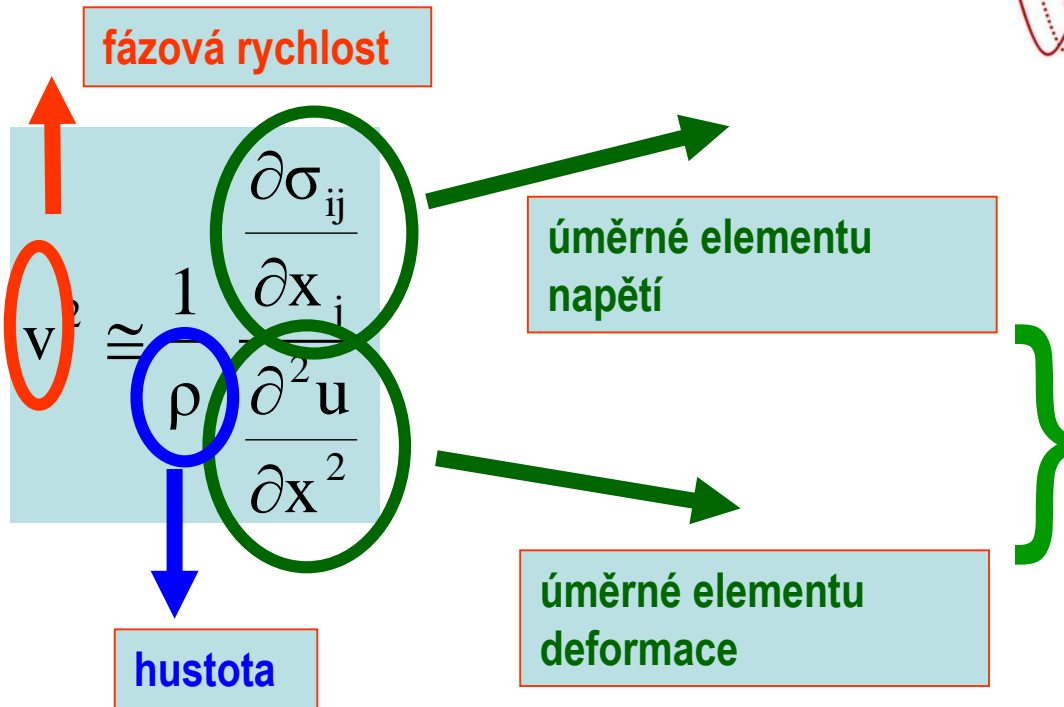
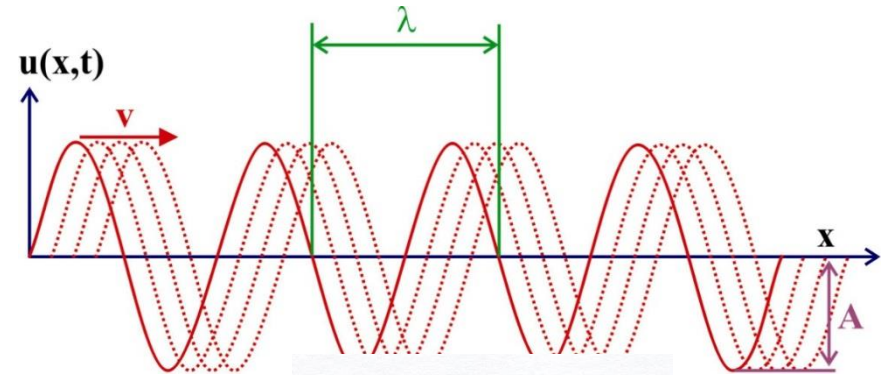
změna objemu  $\Delta V$ :  
 $\Delta V = V - V_0$

modul objemové pružnosti  $K$ :

$$K = - \frac{\Delta P}{\Delta V / V_0}$$

S využitím Hookova zákona si pak můžeme z vlnových rovnic odvodit fázovou rychlost v závislosti na hustotě prostředí a elastických modulech.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \quad \Bigg/ \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j}$$



tj. je to funkce úměrná elastickým koeficientům

napětí = el. koef. x deformace  
tedy  
el. koef. = napětí / deformace

Rychlost vlny šířící se elastickým prostředím tedy závisí na hustotě a na elastických parametrech daného prostředí.

Pro rychlost P-vlny platí:

$$v_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti,  $\mu$  je modul pružnosti ve smyku,  $\lambda$  je tzv. první Lamého parametr a  $\rho$  je hustota.

Pro rychlost S-vlny platí:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

kde  $\mu$  je modul pružnosti ve smyku a  $\rho$  je hustota.

Modul pružnosti v kapalinách má hodnotu  $\mu=0$ .

Z toho plyne, že rychlost S-vlny v kapalinách je rovněž nulová:  $v_s=0$ .

Při znalosti hustoty a elastických parametrů horniny pak můžeme odvodit rychlosti seismických vln:

hornina	$\mu$ [GPa]	K [GPa]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	vp [m/s]	vs [m/s]
granit	24.1	36.6	2.6-2.7	5093	3016
bazalt	25.0	41.7	2.8-3.0	5089	2938
rula	24.2	33.7	2.6-2.9	4898	2967
kvarcit	30.8	33.8	2.6-2.8	5266	3379
mramor	18.8	28.6	2.4-2.7	4588	2717
vápenec	20.2	33.6	2.3-2.7	4918	2840
pískovec	6.7	9.8	2.2-2.8	2686	1571
jíl. břidlice	6.3	5.4	2.4-2.8	2312	1562

S růstem kompakce a pevnosti materiálu rostou hodnoty elastických parametrů mnohem rychleji, než hustota!

$$V_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Proto s hloubkou roste jak hustota horninového prostředí tak rychlost seismických vln.

Empiricky odvozená Gardnerova rovnice (1974):

$$\rho = \alpha \cdot V_p^\beta \approx 0,31 \cdot V_p^{0,25}$$

Gerald Henry  
Frazier Gardner  
(1926-2009)



Pro elastické vlastnosti většiny horninového prostředí platí, že hodnoty Lamého parametrů  $\mu$  a  $\lambda$  jsou vzájemně velmi blízké:

$$\mu \approx \lambda$$

hornina	$\mu$ [GPa]	K [GPa]	$\lambda$ [GPa]
granit	24.1	36.6	20.5
bazalt	25.0	41.7	25.0
rula	24.2	33.7	17.5
kvarcit	30.8	33.8	6.0
mramor	18.8	28.6	16.0
vápenec	20.2	33.6	20.2
pískovec	6.7	9.8	5.7
jíl. břidlice	6.3	5.4	1.2



Pro elastické vlastnosti většiny horninového prostředí platí, že hodnoty Lamého parametrů  $\mu$  a  $\lambda$  jsou vzájemně velmi blízké:

$$\mu \approx \lambda$$

Pro rychlosti seismických vln pak z toho plyne:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{3} \cdot v_S$$

$$\frac{v_P}{v_S} \approx \sqrt{3}$$

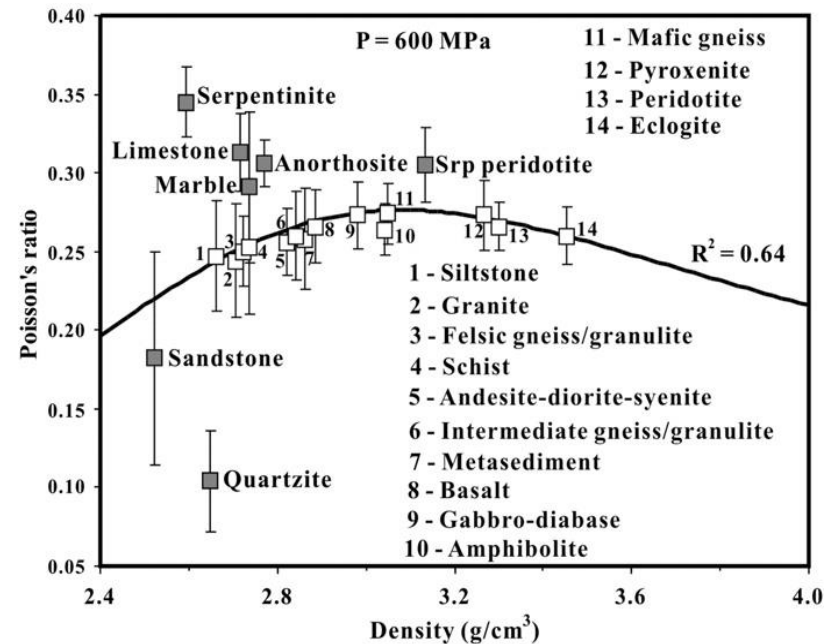
S využitím Poissonova čísla  $\nu$  můžeme poměr rychlostí podévné a příčné vlny přepsat:

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$$

$$\mu = \frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$$

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}}$$

Poměr rychlostí podévné a příčné vlny se tedy dá vyjádřit jako funkce závislá pouze na jediném elastickém koeficientu, a to Poissonově čísle. Poměr  $V_p/V_s$  přibližně  $\sqrt{3}$  odpovídá Poissonovu číslu  $1/4$ .

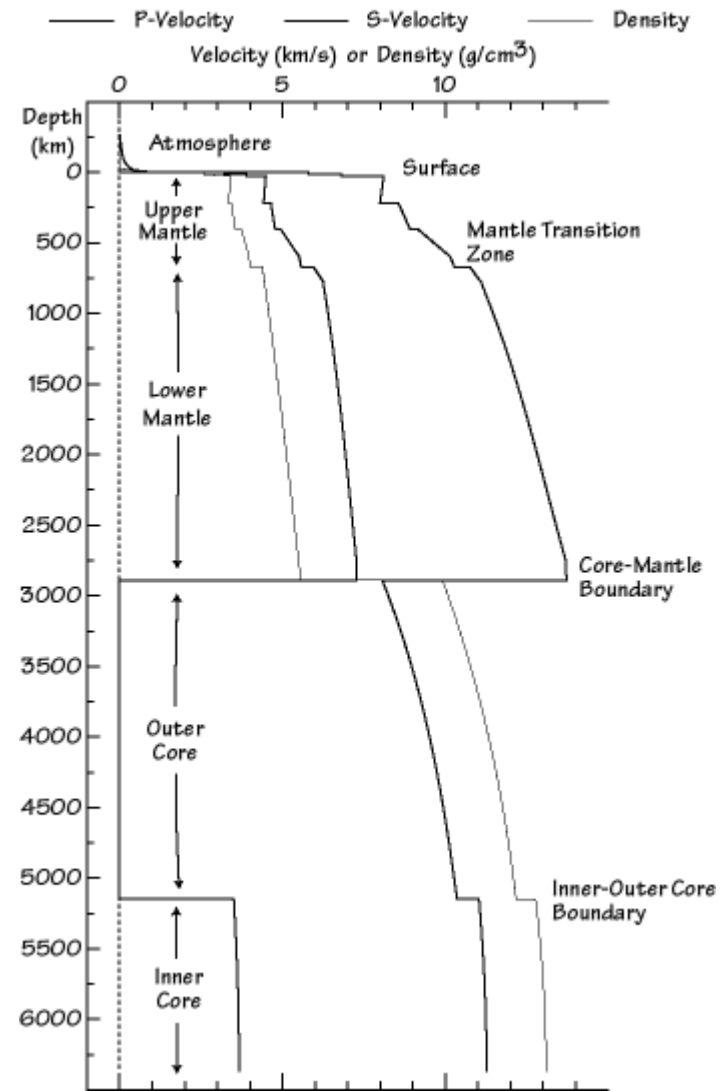


**Poissonovo číslo některých hornin (podle Ji et al. 2009)**

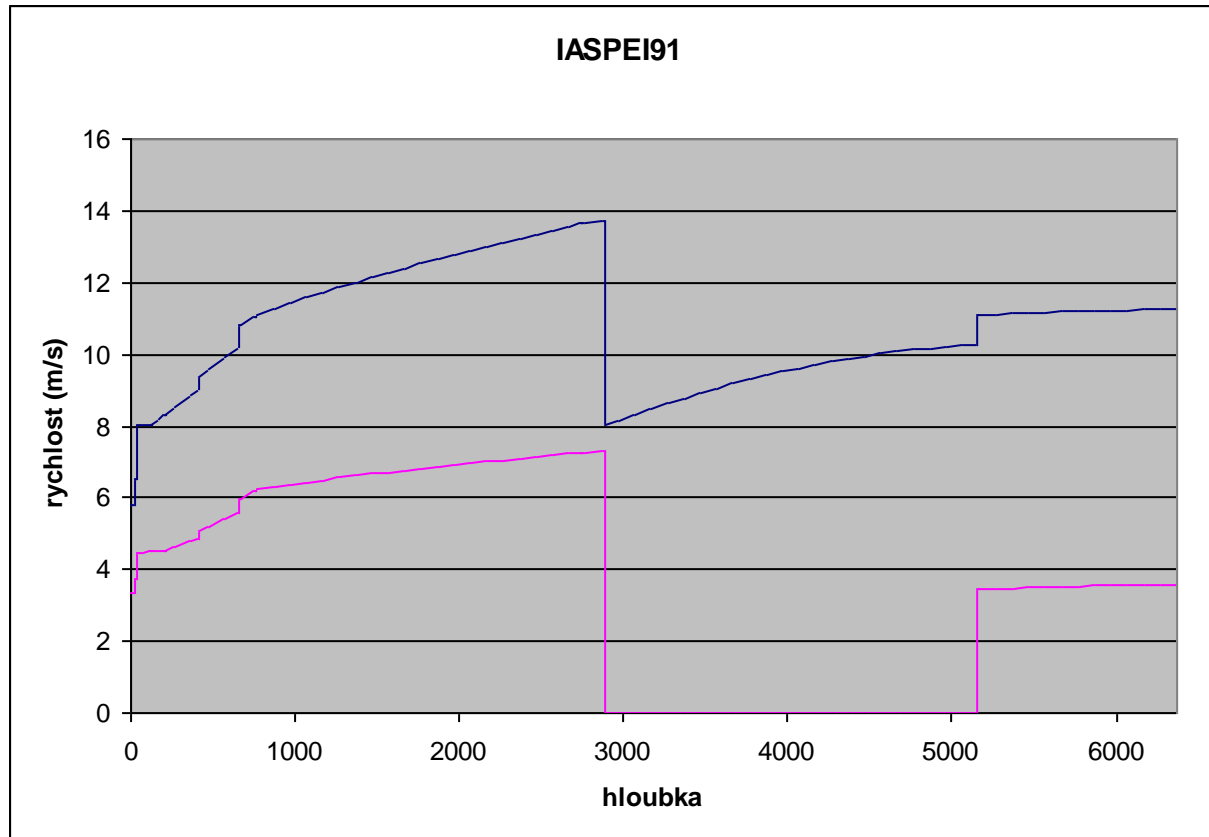
Variabilitu rychlostí seismických vln se snaží popsat tzv. rychlostní modely.

Pro řešení většiny úloh seismologie jsou dostatečné jednorozměrné modely, které popisují pouze změny rychlostí seismických vln v závislosti na hloubce.

***Hustoty horninového prostředí a rychlosti seismických vln podle modelu PREM.***



Existuje více globálních modelů, nepoužívanější byly modely PREM, IASPEI91 a ak135.



***Rychlosti seismických vln podle modelu IASPEI91.***

Rychlosti seismických vln v různých materiálech dosahují řádově hodnot  $\times 100$  až  $\times 1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Table 4.2** Examples of P-wave velocities

Material	$V_p$ (m/s)
Air	330
Water	1450–1530
Petroleum	1300–1400
Loess	300–600
Soil	100–500
Snow	350–3000
Solid glacier ice*	3000–4000
Sand (loose)	200–2000
Sand (dry, loose)	200–1000
Sand (water saturated, loose)	1500–2000
Glacial moraine	1500–2700
Sand and gravel (near surface)	400–2300
Sand and gravel (at 2 km depth)	3000–3500
Clay	1000–2500
Estuarine muds/clay	300–1800
Floodplain alluvium	1800–2200
Permafrost (Quaternary sediments)	1500–4900
Sandstone	1400–4500
Limestone (soft)	1700–4200
Limestone (hard)	2800–7000
Dolomites	2500–6500
Anhydrite	3500–5500
Rock salt	4000–5500
Gypsum	2000–3500
Shales	2000–4100
Granites	4600–6200
Basalts	5500–6500
Gabbro	6400–7000
Peridotite	7800–8400
Serpentinite	5500–6500
Gneiss	3500–7600
Marbles	3780–7000
Sulphide ores	3950–6700
Pulverised fuel ash	600–1000
Made ground (rubble etc.)	160–600
Landfill refuse	400–750
Concrete	3000–3500
Disturbed soil	180–335
Clay landfill cap (compacted)	355–380

\* Strongly temperature dependent (Kohnen 1974)