Posloupnosti

M1030 Matematika pro biology

22. 11. 2023

Posloupnosti

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Pojem posloupnosti

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $\mathbb{Z}$.

Označení: a posloupnost, $n \in D(a)$. $a(n) = a_n$ – n-tý člen posloupnosti.
Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem $\mathbb{N} \cup \{0\}$: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:
- ohraničenost
- monotonnost
- periodicita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:
- obecným předpisem
- rekurentně

Rekurentní zápis posloupnosti: předpis pro výpočet n-tého členu posloupnosti pomocí jednoho (nebo několika předchozích) současně se zadáním počátečního členu (nebo několika počátečních členů)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

$d > 0$ neohraničená rostoucí
$d < 0$ neohraničená klesající,

$d = 0$ ohraničená stacionární

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

$q > 1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, $a_0 > 0$ rostoucí, $a_0 < 0$ klesající
$q = 1$	ohraničená (stacionární)
$0 < q < 1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ klesající, $a_0 < 0$ rostoucí
$q = 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ nerostoucí, $a_0 < 0$ neklesající
$-1 < q < 0,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, „tlumené oscilace“
$q = -1,\ a_0 \neq 0$	ohraničená, periodická s periodou 2
$q < -1,\ a_0 \neq 0$	neohraničená, „netlumené oscilace“

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

pro „velká“ n „se chová“ jako geometrická s kvocientem $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ a počátečním členem $\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})$

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
logistická	$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \dfrac{r-1}{r}\dfrac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen a_n	poznámka
aritmetická	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	d – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
geometrická	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	q – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
Fibonacciho	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
logistická	$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \dfrac{r-1}{r}\dfrac{a_n}{K}\right)$		r – růstový koeficient, K – kapacita (úživnost)

$r = 2,\ K = \frac{1}{2}$, $a_n = 2(1 - a_n)$: $a_n = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2a_0)^{2^n}\right)$

$r = 4,\ K = \frac{3}{4}$, $a_n = 4(1 - a_n)$: $a_n = [\sin(2^n \arcsin\sqrt{a_0})]^2$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \;\Rightarrow\; \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí,
$(\forall n)\Delta a_n < 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je klesající
$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je neklesající
$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \;\Rightarrow$ posloupnost je nerostoucí

Δa_n lze chápat jako n-tý člen nějaké posloupnosti;
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \;\Rightarrow\; \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Rekurentní formuli lze přepsat pomocí diference:

Příklad:

$$a_{n+1} = r a_n \left(1 - \frac{r-1}{r}\frac{a_n}{K}\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = r a_n - (r-1)\frac{a_n^2}{K} - a_n$$

$$\Delta a_n = (r-1) a_n \left(1 - \frac{a_n}{K}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu α

Vzdálenost mezi čísly a_n a α: $|a_n - \alpha|$
„a_n je blízko k α“: α: $|a_n - \alpha|$ je menší než „měřítko malosti“, α; $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Proces: zvětšování indexu n

Když zvětšujeme index n tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu α

Ať zvolíme „měřítko malosti“ ε jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti „blízko“ čísla α a při dalším zvětšení indexu n se již od α nevzdálí.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Vlastnosti limity

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n)a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n)a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n)a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n)a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n)a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n)a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$ (posloupnost je *stacionární*) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, pokud $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 - 3(\frac{3}{2})^n} - \frac{1}{2(\frac{2}{3})^n - 3} \right) = 0 - \frac{1}{0 - 3} = \frac{1}{3}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \;\; k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} =$$

$$= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} =$$

$$= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n} = 0$$

Příklady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} =$$

$$= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n} = 0$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Nevlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“ H jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti větší než hranice H a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index n tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“ H jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu n budou členy posloupnosti větší než hranice H a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Nevlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ a_n < H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *diverguje do minus nekonečna.*

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$

$$a_n = n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$$

$$a_n = n^2,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$$a_n = n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$
  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty, b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Vlastnosti nevlastní limity

Operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty$, $c(-\infty) = -\infty$

  $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty$, $c(-\infty) = \infty$
- $\dfrac{c}{\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0$
- $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy: $\dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \dfrac{0}{0},\ 0 \cdot \infty = 0 \cdot \dfrac{1}{0} = \dfrac{0}{0},\ \infty - \infty = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = \dfrac{0-0}{0^2} = \dfrac{0}{0}\right)$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3)$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} - 1\right) n^3 = -\infty$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(1+n)(1-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1-n} - 1 \right) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(1+n)(1-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1-n} - 1\right) = -1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1} = \frac{1+0+0}{0-1} = -1$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1}$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^5}}{3 + \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^5}} = \frac{0 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 0$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 3 + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \infty$$

Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty,\ \ k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right)\infty, & k > m \\ \frac{a_k}{b_m}, & k = m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

Aplikace: Růst homogenní populace

Růst homogenní populace

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost

Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \ \text{tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \ \text{tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \ \text{tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

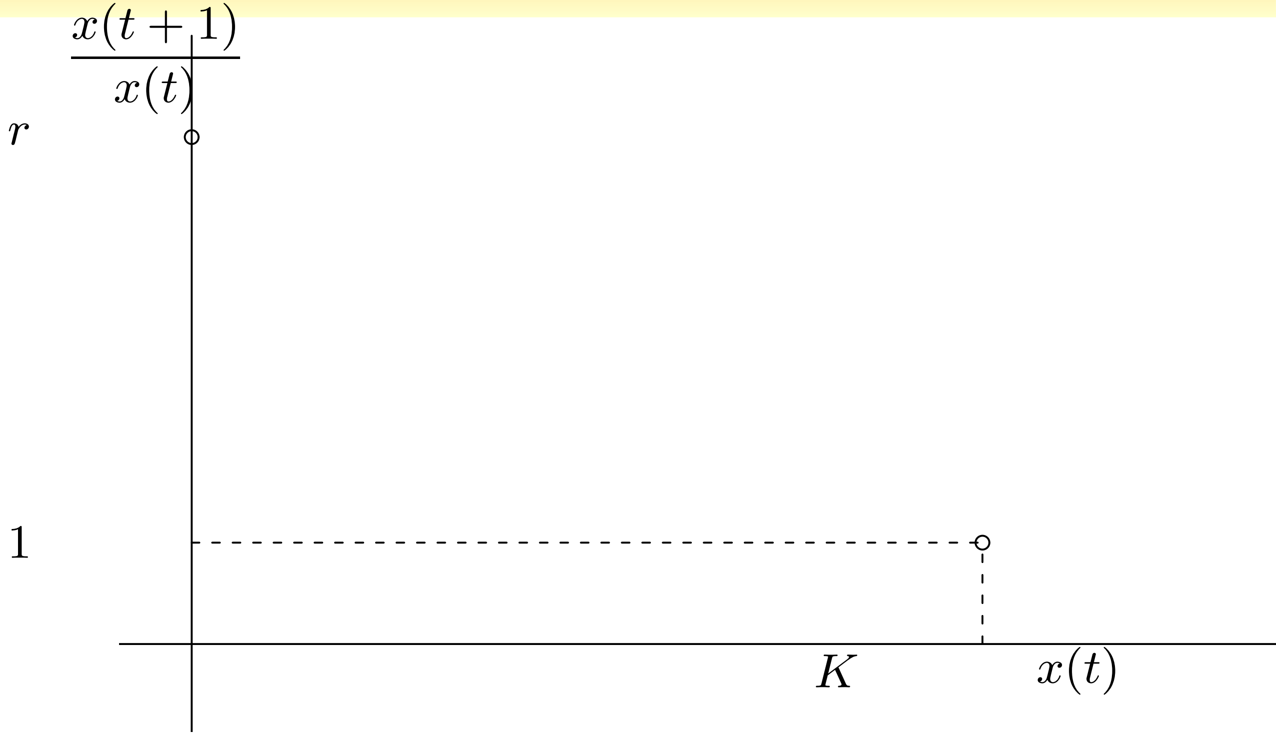
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

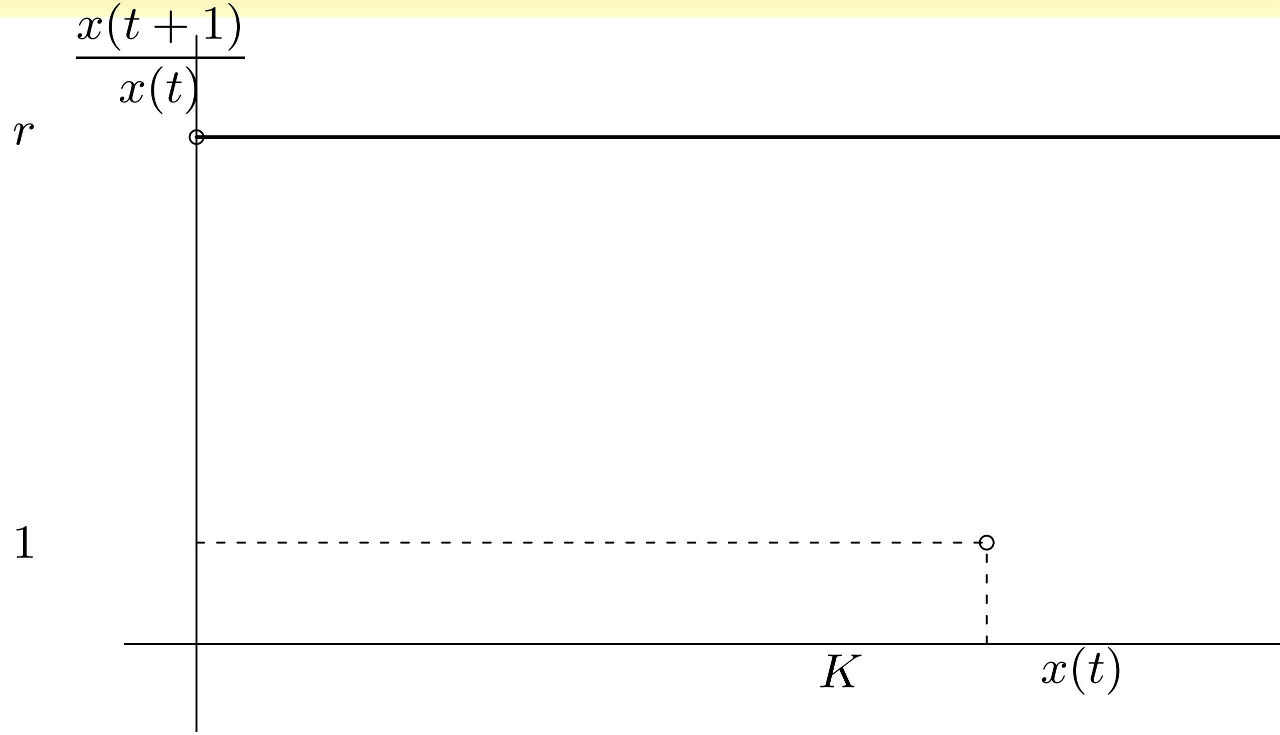
$$r = r\big(x(t)\big)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

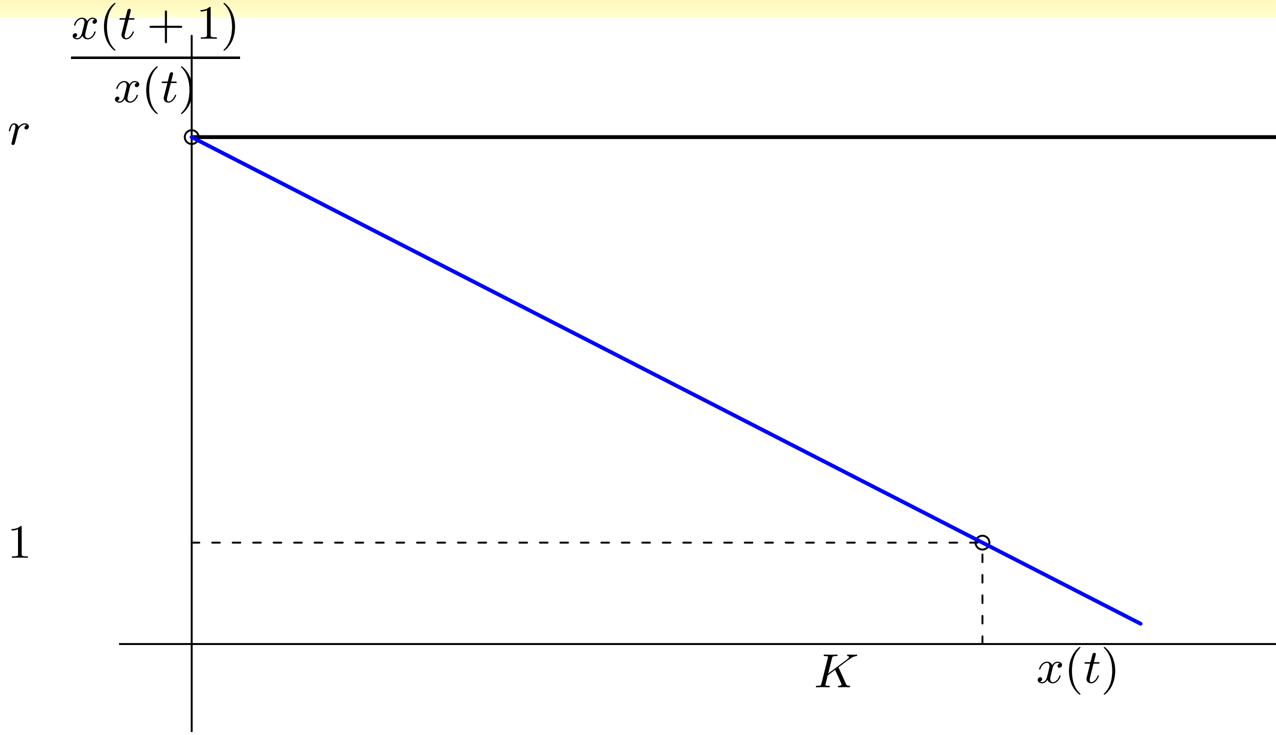
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$

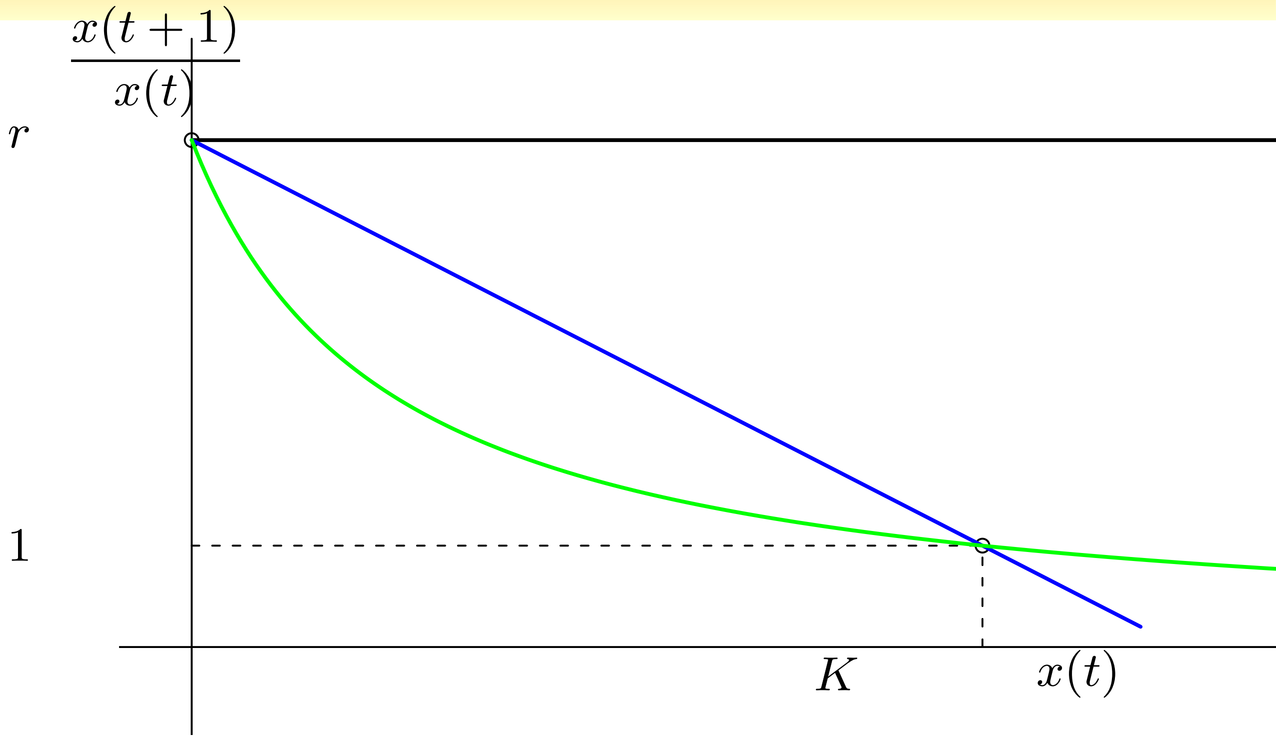


Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

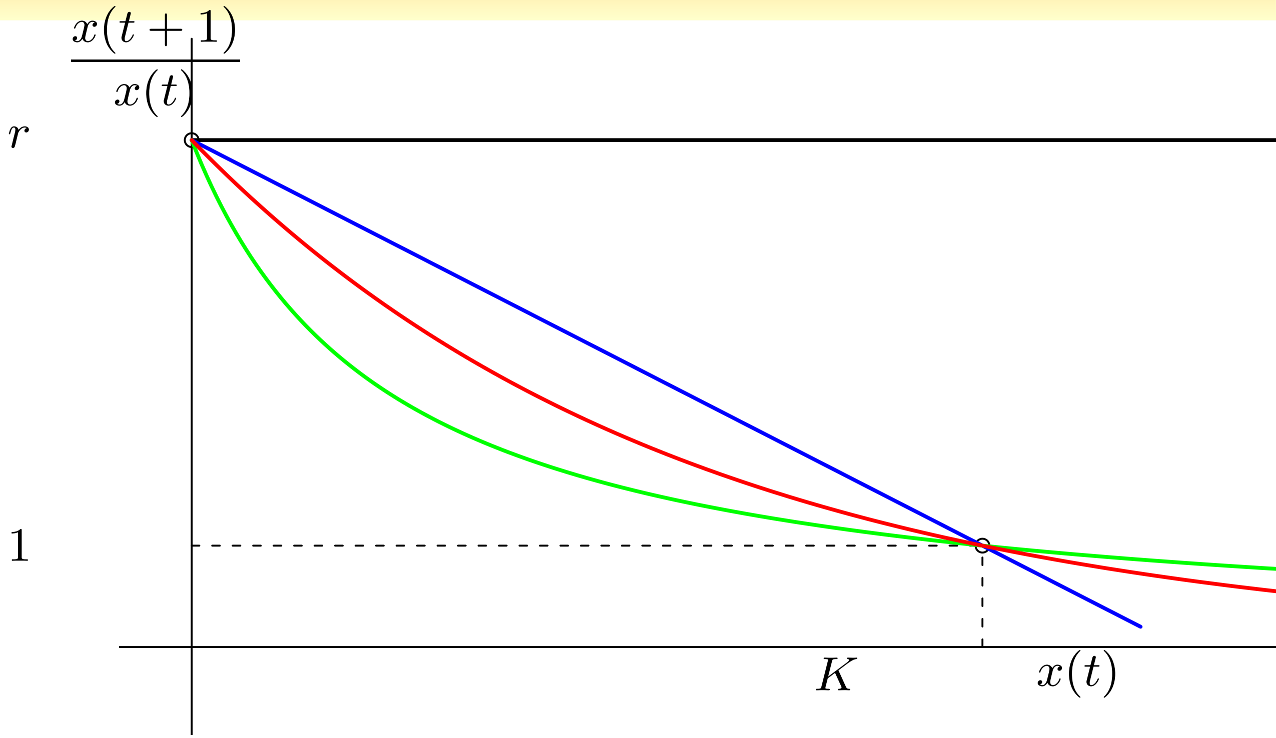
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$



Ricker:

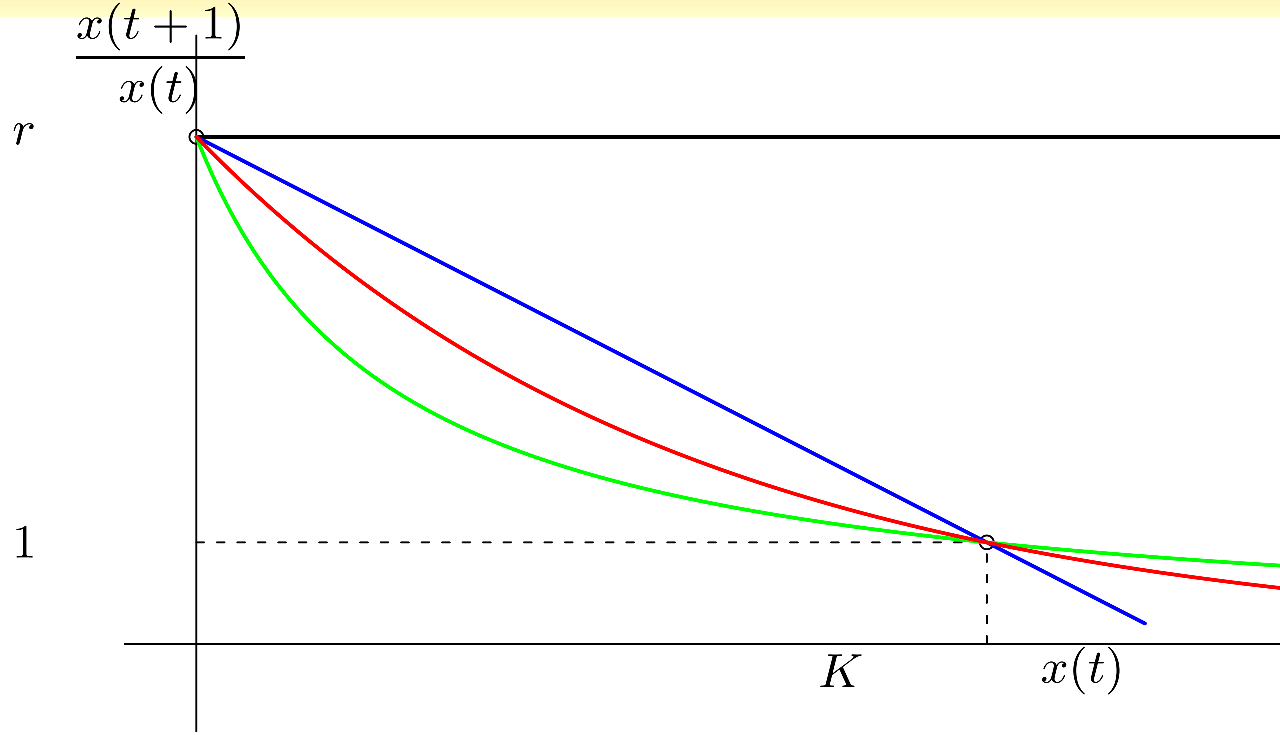
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$



Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Ricker:
$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

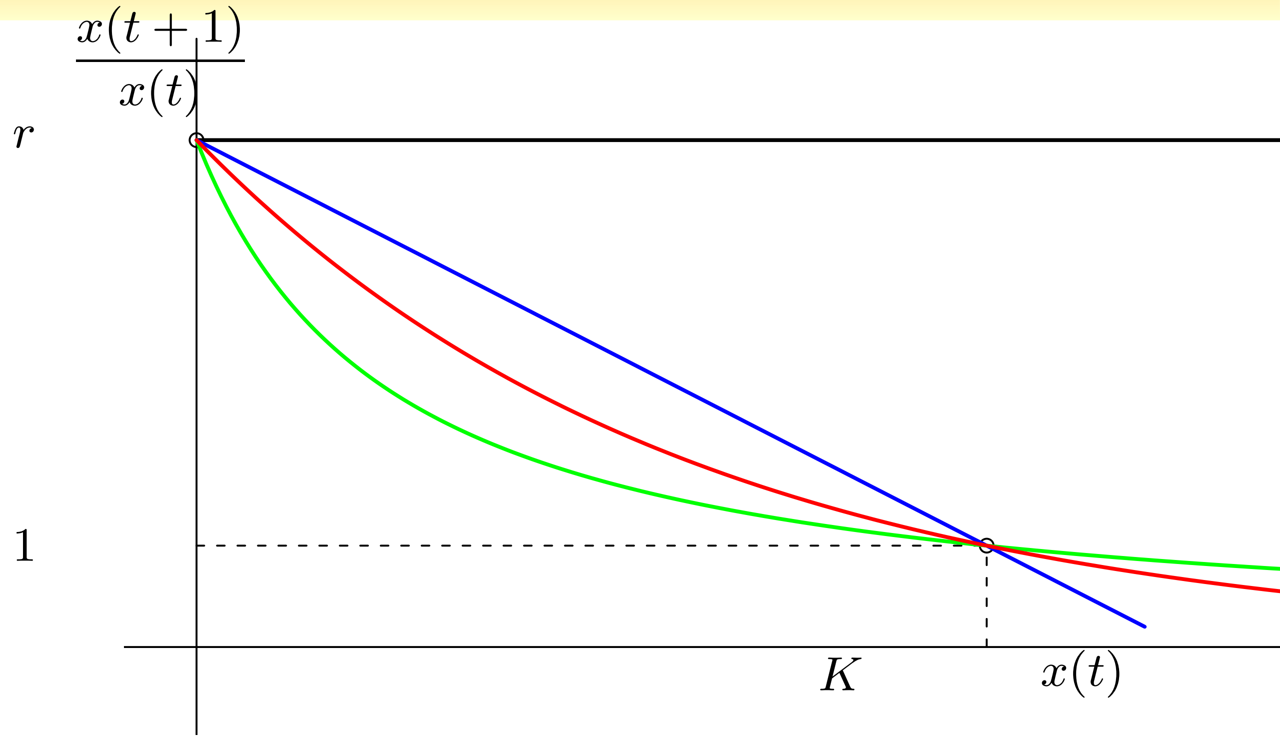
Maynard Smith, May:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\dfrac{x(t)}{K}}\, x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$

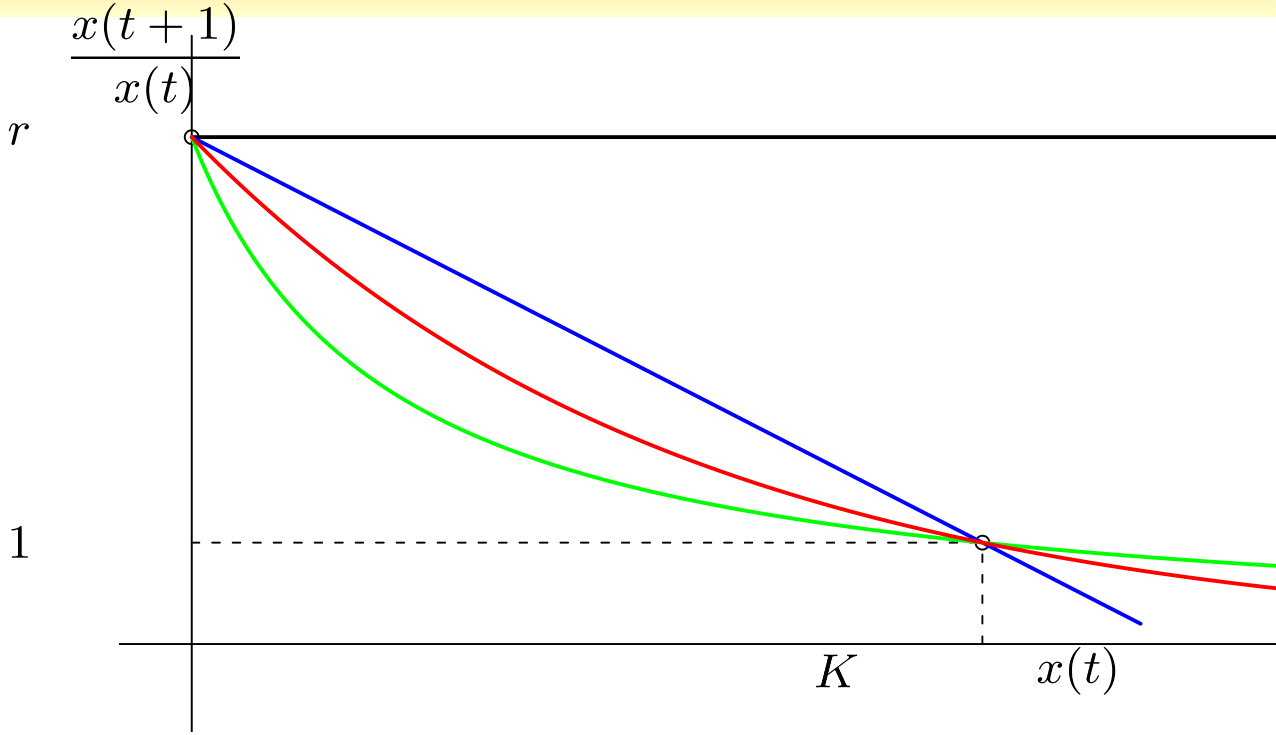
Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right) x(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$



Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$

$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$

Ricker:
$x(t+1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

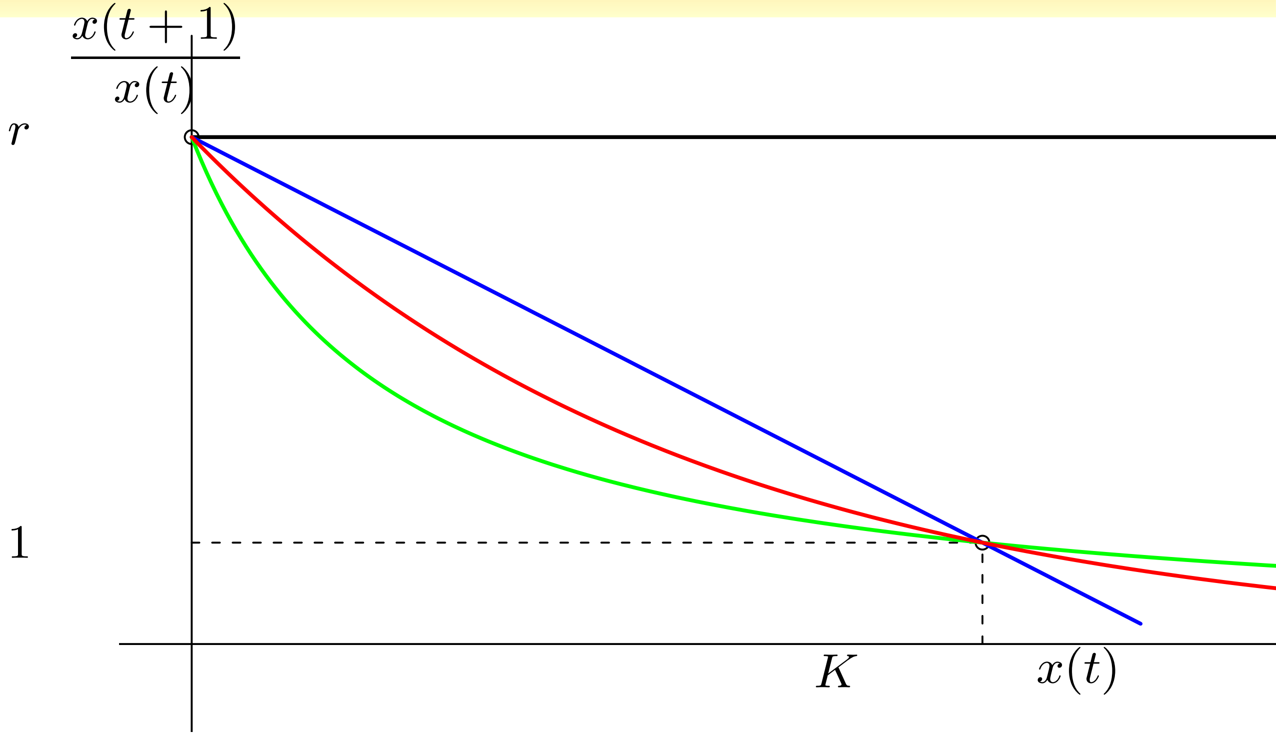
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Maynard Smith, May:

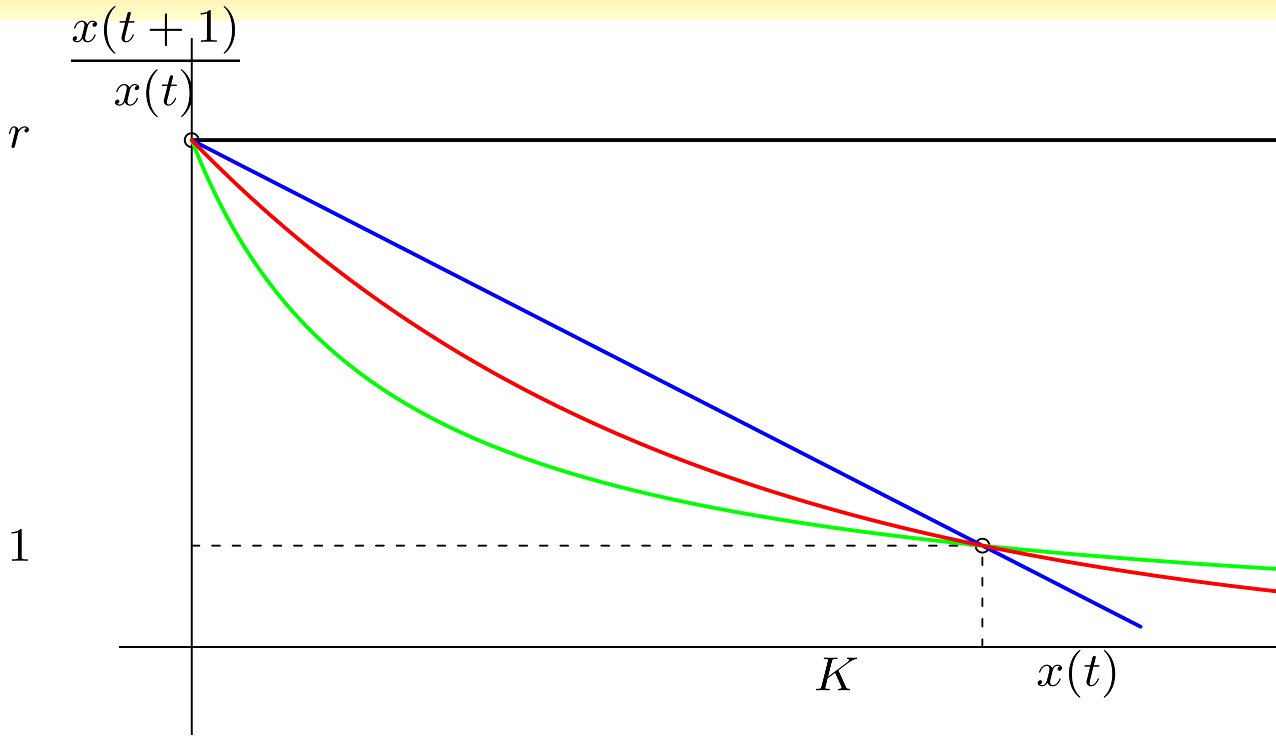
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

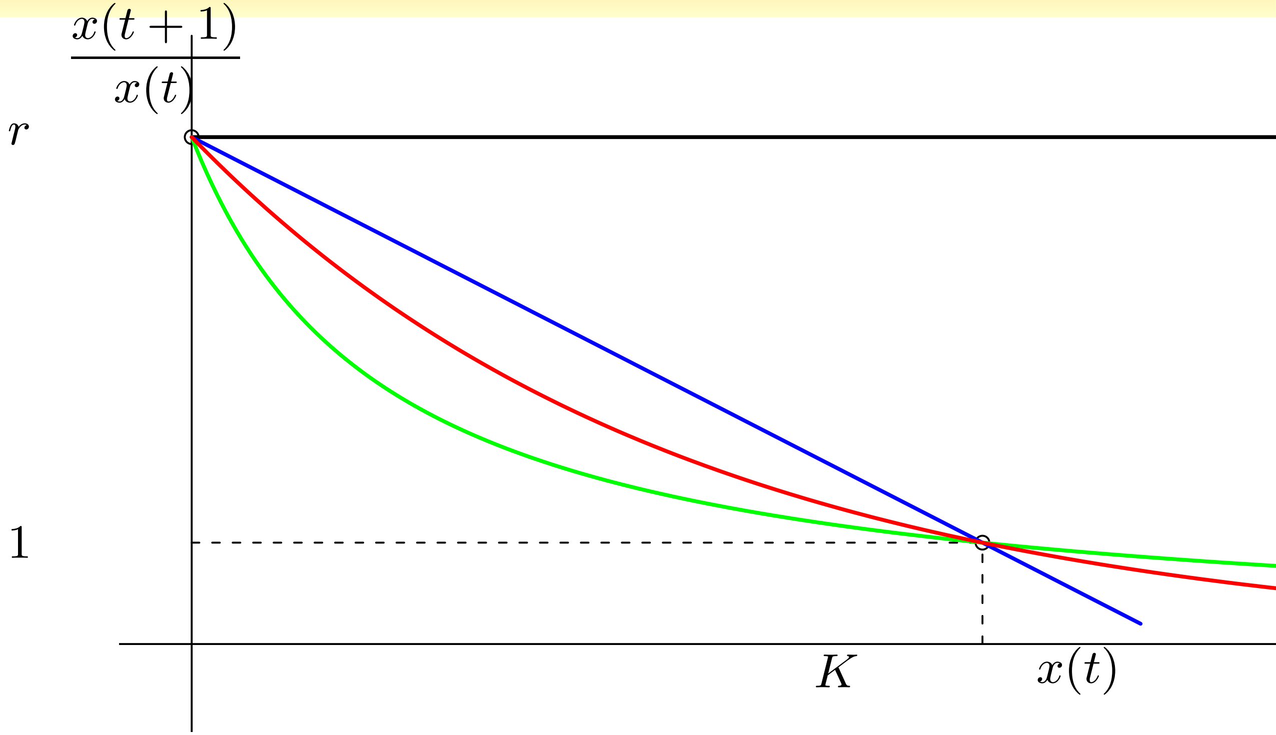
$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

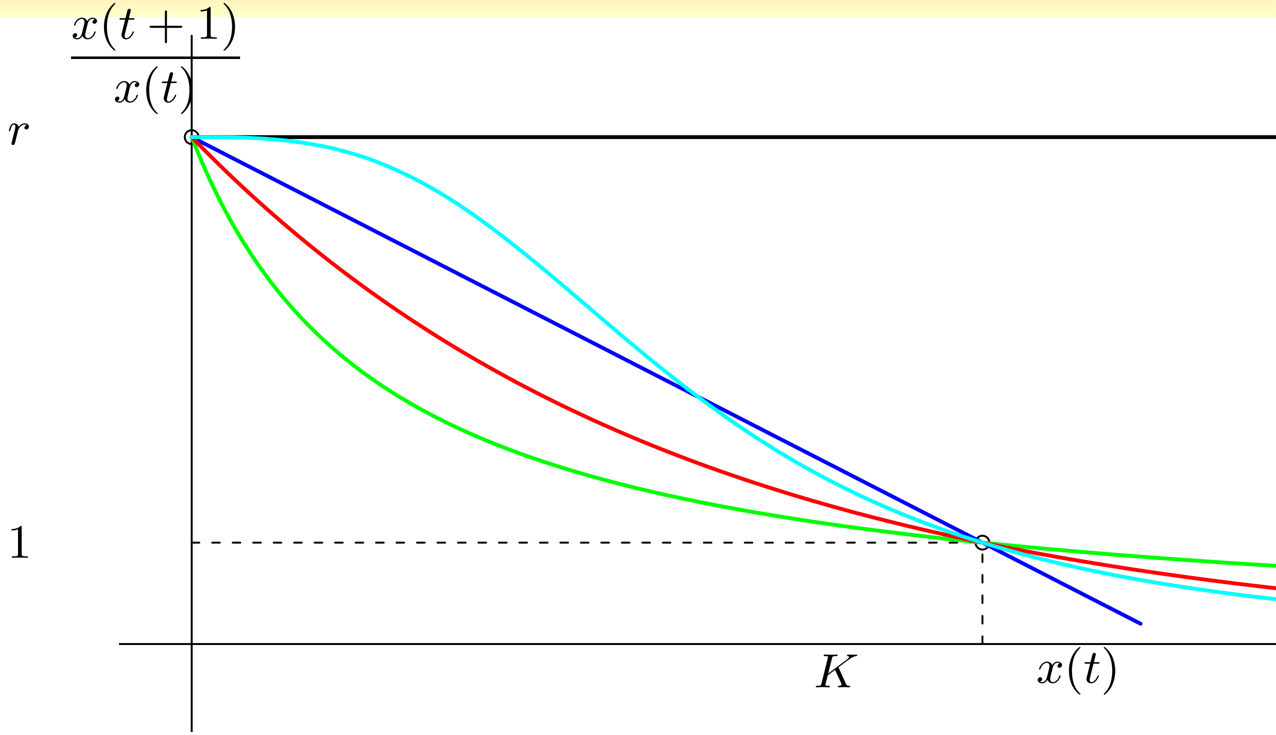
$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

Ricker:

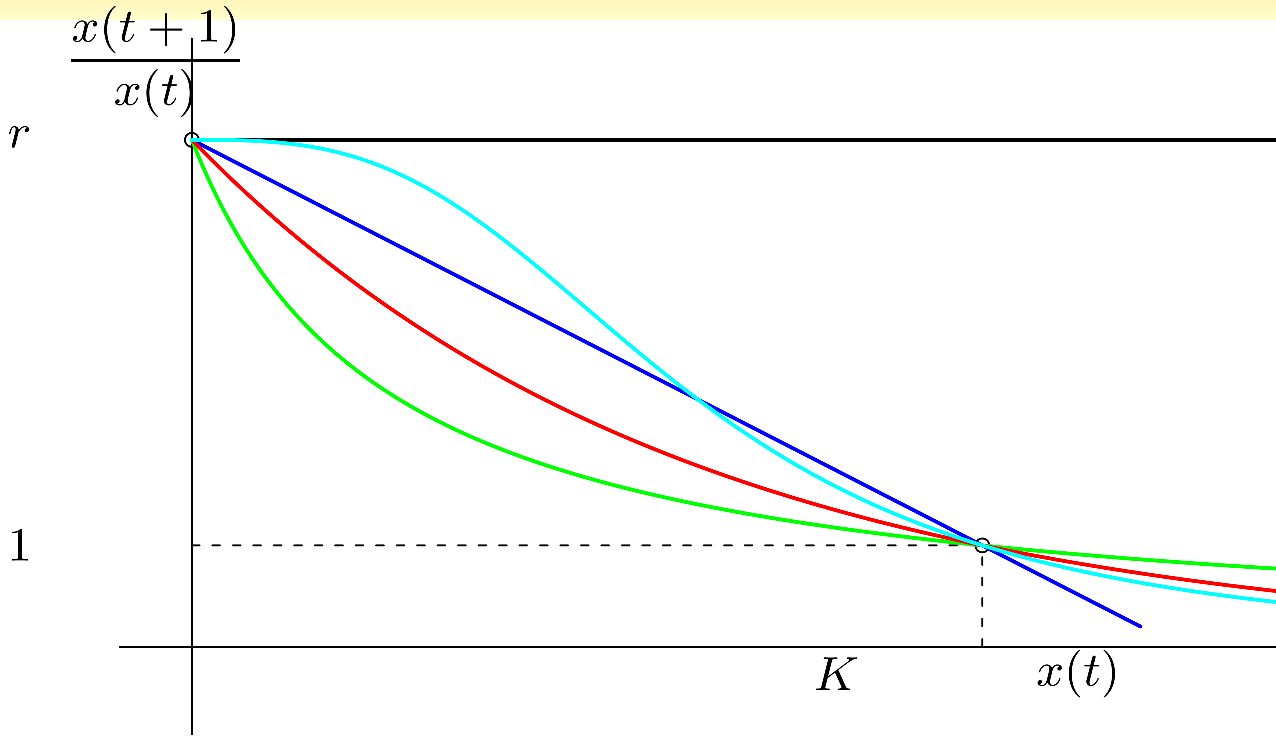
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

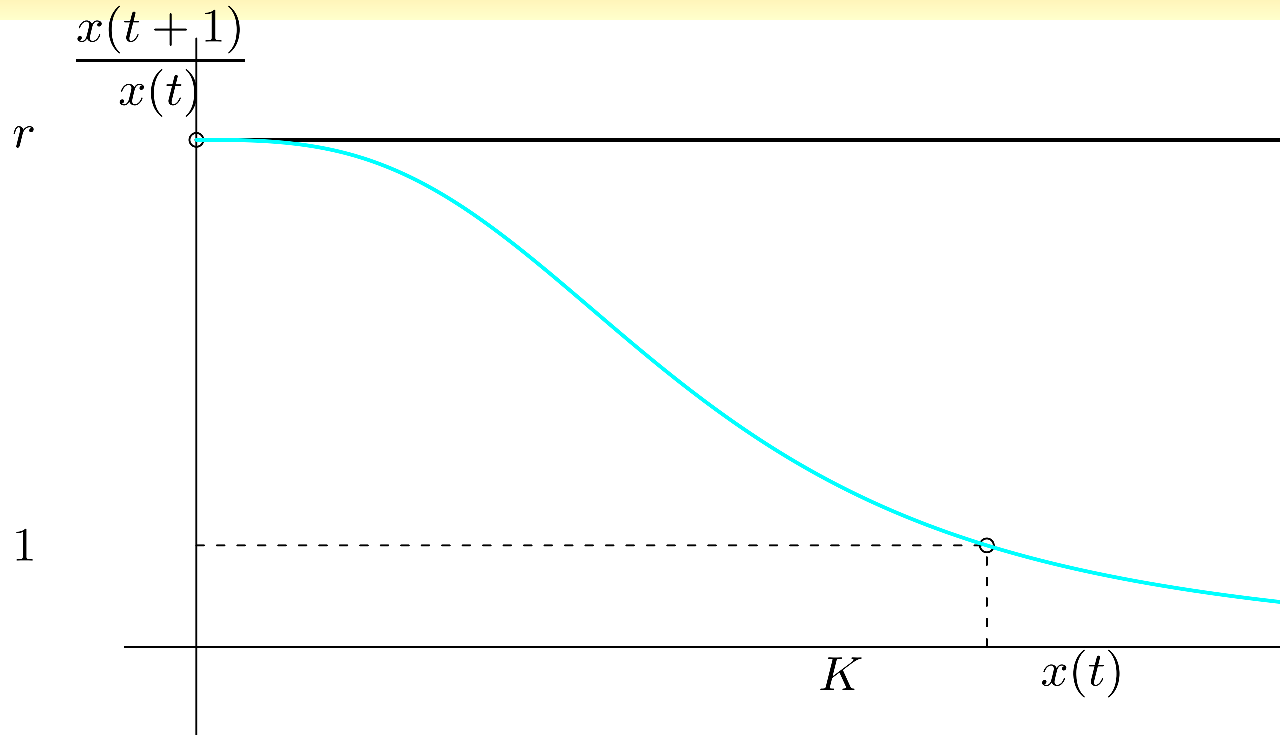


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right) x(t) = \frac{r-1}{r} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right) x(t+1)$$

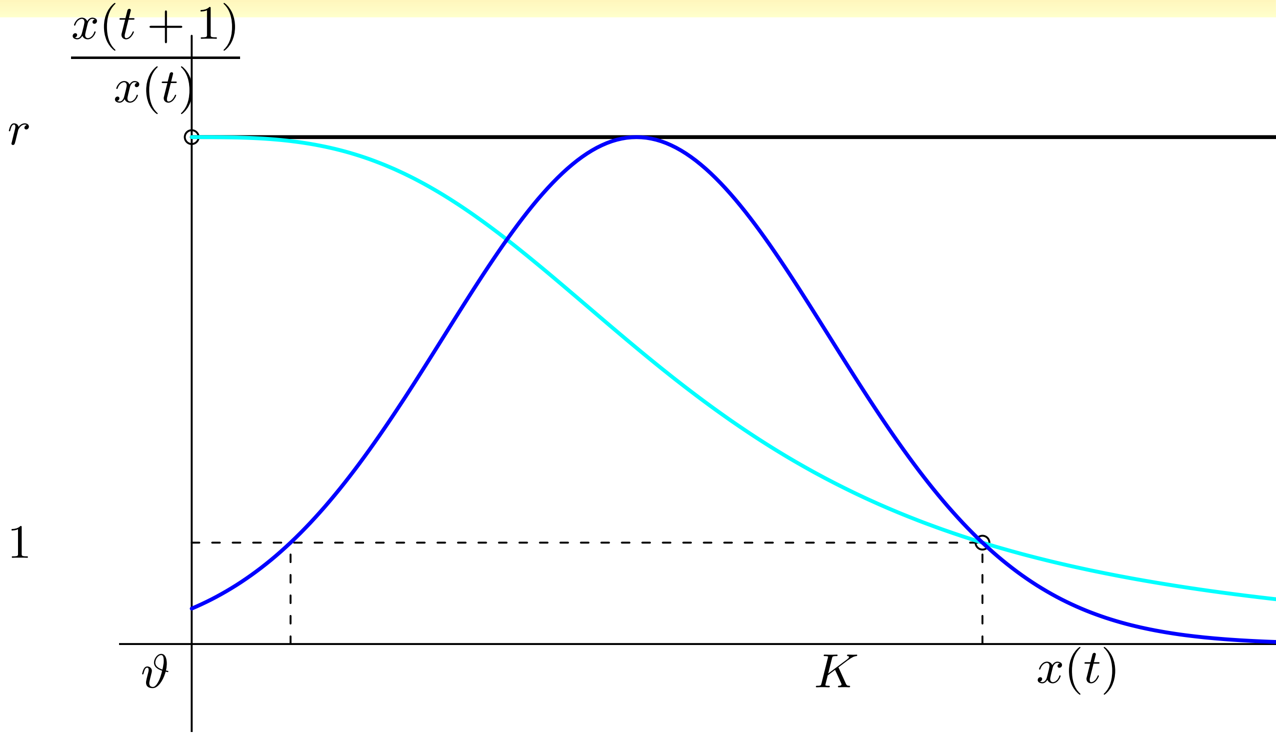
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t-k)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

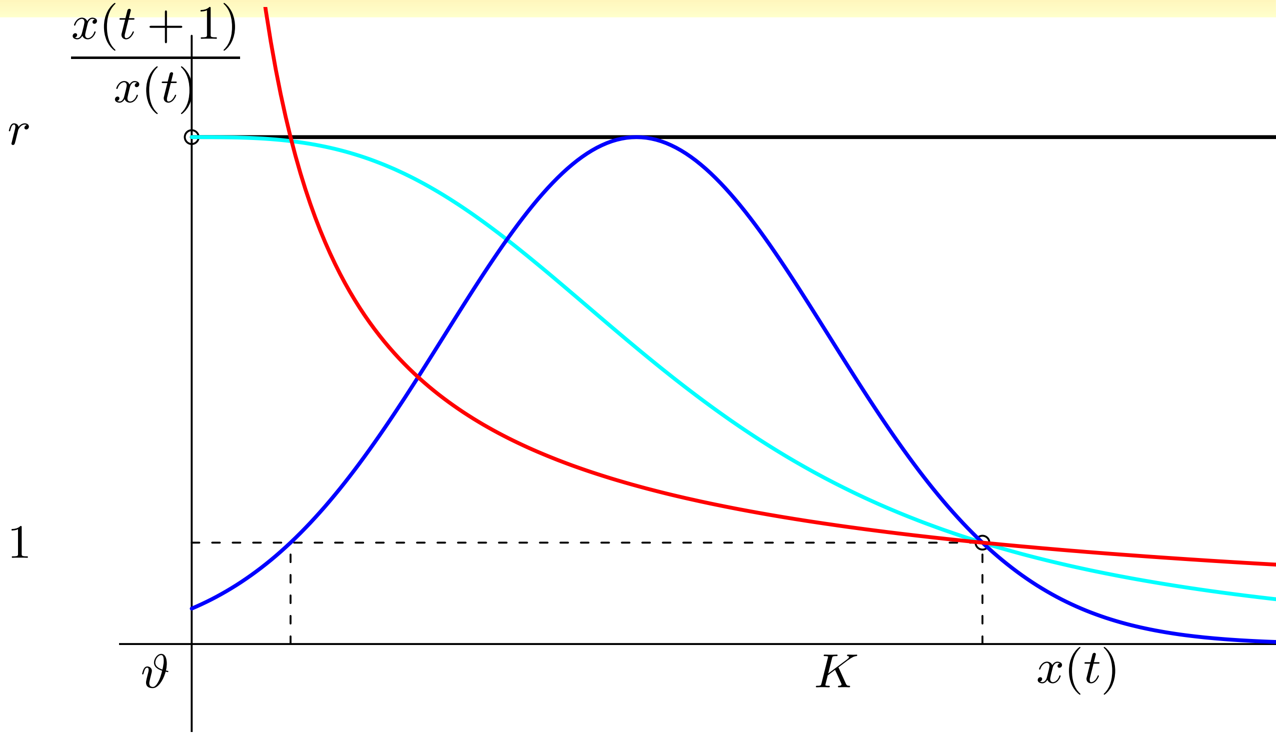
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Gompertz:

$$x(t+1) = \left(r x(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}} \right) x(t)$$