M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 17. listopadu 2023.

10 Goniometrické funkce

Cvičení konaná 20. a 21. 11. 2023.

Příklad 10.1: Odvoďte základní vztahy:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
2. $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$,
4. $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$,
5. $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$.
6. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Příklad 10.2*: Předpokládejme, že platí $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kde x je libovolné reálné číslo. Dále předpokládejme, že pro umocňování reálného čísla e na komplexní čísla platí obvyklé vlastnosti pro umocňování. Odvoďte součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

Součtových vzorců využijte k odvození vzorců (e) a (f) z předchozího příkladu.

Příklad 10.3: Odvoďte dále vztahy:

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
2. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
3. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Nápověda: V částech 2. a 3. napište $x = \alpha + \beta$ a $y = \alpha - \beta$ a použijte součtové vzorce.

Příklad 10.4: Za předpokladu, že výrazy dávají smysl, dokažte následující rovnosti. Popište, pro které hodnoty tyto rovnosti platí.

1. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
2. $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
3. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

Nápověda: 1) Ve vztahu $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$ *použijte součtové vzorce pro* $\sin(x+y)$ *a* $\cos(x+y)$. *2) Ve vztahu* $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ *použijte součtové vzorce pro* $\sin(x-y)$ *a* $\cos(x-y)$. *3) Ve výrazu* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ *použijte vzorce pro* $sin(\frac{\pi}{2} + x)$ *a* $cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

Příklad 10.5: Odvoďte následující vztahy (a promyslete, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí):

1. $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,
2. $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,
3. $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

Nápověda: Ve všech případech na pravé straně použijte $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ *a následně upravte složený zlomek.*