

7 Výroky s kvantifikátory, počítání s odmocninami

Cvičení konaná 30.10. a 31.10. 2023.

Příklad 7.1: Pomocí kvantifikátorů pro všechny \forall a existuje \exists a výroků s logickými spojkami napište

1. definici lineární nezávislosti vektorů u_1, u_2, \dots, u_k v reálném vektorovém prostoru U ,
2. definici spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě x_0 .

Napište negace těchto definičních výroků.

Příklad 7.2: Z definice dokažte: Vektory u_1, u_2, \dots, u_k jsou lineárně nezávislé v reálném vektorovém prostoru U , právě když pro každý vektor $v \in U$ existuje nejvýše jedna k -tice $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ taková, že

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = v.$$

Příklad 7.3: Z předchozího dokažte: Vektory u_1, u_2, \dots, u_k tvoří bázi reálného vektorového prostoru U , právě když

$$\forall v \in U \quad \exists!(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k : \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = v.$$

Symbol $\exists!$ znamená "existuje právě jedna".

Příklad 7.4: Pomocí definice spojitosti a její negace rozhodněte o spojitosti či nespojitosti následujících funkcí

1. funkce $f(x) = x$ v bodě $x_0 = 3$,
2. funkce $f(x) = 1$ pro $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ pro $x < 0$ v bodě $x_0 = 0$,
3. funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ v bodě $x_0 = 0$,
4. funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 7.5: Řešte v \mathbb{R} rovnice:

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$,
2. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$,
3. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5x+3} + 2\sqrt{2x+1}$.

Řešení: a) 8, b) 4, c) -1/2.

Příklad 7.6: Řešte v \mathbb{R} nerovnice:

1. $3 > x + 3 \cdot \sqrt{1 - x^2}$,

2. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 1}$,

3. $1 \geq x + \sqrt{4 - x^2}$.

4. $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1} > \sqrt{x + 4} - \sqrt{x + 2}$

5. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 3}$.

Řešení: 1) $[-1, 0) \cup (3/5, 1]$. 2) $[1, 3/2)$. 3) $[-2, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{7})]$. 4) $[\frac{1}{2}, 3)$. 5. $x \in [3/2, 2)$.