M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

Aktuální verze sbírky ze dne 10. listopadu 2023.

9 Exponenciální a logarimické funkce – dokončení

Cvičení konaná 13. a 14. 11. 2023.

Příklad 9.1: Pomocí čísel a, b, c vyjádřete x:

1. $x = \log_{100} 40; \quad a = \log_2 5.$
2. $x = \log_6 16; \quad a = \log_{12} 27.$
3. $x = \log \frac{1}{300}; \quad a = \log 2,\ b = \log 3,\ c = \log 5.$
4. $x = \log_{140} 63; \quad a = \log_2 3,\ b = \log_3 5,\ c = \log_7 2.$

Řešení: 1) $\frac{a+3}{2+2a}$. *2)* $\frac{4(3-a)}{3+a}$. *3)* $-(2a+b+2c)$. *4)* $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Příklad 9.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $4^x + 2^{x+1} = 24.$
2. $|x|^{x^2-2x} = 1.$
3. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0.$
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x.$

Řešení: 1) 2. 2) −1, 1, 2. 3) 1, −1. 4) 1 (lze snadno ukázat, že má právě jedno řešení).

Příklad 9.3: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20).$
2. $\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$
3. $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1.$
4. $\log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2} + 2.$

Řešení: 1) $3/2$, 10. *2)* $\sqrt{2}/2$, 1, 4. *3)* $1/15$, $1/3$. *4) nemá řešení.*

Příklad 9.4: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
2. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.
3. $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.
4. $x^{\log_2 x} > 2$.

Řešení: 1) $(-1,1]$. *2)* $(-\infty,0)$. *3)* $(2,3) \cup (27/8,4)$. *4)* $(0,1/2) \cup (2,\infty)$.

Příklad 9.5: a) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\log_3 x^2 \cdot \log_9 x = 3$.
b) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $\log_3(|z|+1)^2 \cdot \log_9(|z|+1) = 3$.
Řešení: a) $x = 3^{\sqrt{3}}$ *nebo* $x = 3^{-\sqrt{3}}$. *b)* $z = 3^{\sqrt{3}} - 1$ *a* $z = -3^{\sqrt{3}} + 1$.

Příprava na druhou vnitrosemestrální písemku

V písemce bude jedna úloha na výroky s kvantifikátory. Další tři úlohy budou analogické úlohám z roku 2021.

1. *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $4 + 2x - x^2 = |x-1| + |x+2|$.
Řešení: $x \in \{1-\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.

2. *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2} > 1$.
Řešení: $x \in [-\sqrt{2}, -\sqrt[4]{\frac{7}{4}}) \cup (\sqrt[4]{\frac{7}{4}}, \sqrt{2}]$.

3. *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.
Řešení: $x \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

4. *Určete všechna řešení nerovnice* $\log_{x+1}(2x+1) > 2 + \log_{x+1}(\frac{3x-1}{x+1})$.
Řešení: $x \in (\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

5. *Uvažujme funkci* f *danou předpisem* $f(x) = \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x$.
a) Určete definiční obor funkce a zdůvodněte, že funkce je na něm rostoucí.
b) Pro libovolné $n \in \mathbb{R}$ *vypočtěte* $f(4^n)$. *[Výsledek zapište jako polynom v proměnné* $n \in \mathbb{Z}$.*]*
c) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $2\log_2 x + 2\log_4 x + 2\log_8 x + 11 = 0$.
d) Podobně vyřešte nerovnici $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < \log_{16} x^5$.
Řešení: a) Jde o součet tří rostoucích funkcí, a proto je to rostoucí funkce na celém svém definičním oboru kladných reálných čísel. b) $f(4^n) = \frac{11}{3} \cdot n$. *c)* $x = \frac{1}{8}$. *d)* $x \in (0,1)$.