Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Implikovaná volatilita

Mezi všemi parametry Black-Scholesova modelu, tedy

$S_0, \; K, \; T, \; r, \; \sigma,$

je σ je jediný parametr, který nelze pozorovat. Existují dva

základní způsoby počítání s volatilitou:

– odhad z historických dat

–používání implikované volatility

Volatilita σ měří naši nejistotu ohledně zisku z akcie. V

Black-Scholesově modelu předpokládáme

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t$$

Z Itôova lemmatu dostaneme

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T + \mu T\right],$$

odtud zlogaritmováním

$$\ln S_T - \ln S_0 = \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T + \mu T.$$

$\ln S_T - \ln S_0$ má tedy rozdělení

$$N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right),$$

odpovídající Brownově pohybu s driftem.

Odtud plyne že $\ln S_T$ má střední hodnotu

$$\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$$

a rozptyl $\sigma^2 T$. Náhodná veličina S_T má log-normální rozdělení, jinak řečeno, $\ln S_T$ má normální rozdělení.

Máme

$$S_T = S_0 \, \mathrm{e}^{xT},$$

kde

$$x = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{S_T}{S_0}$$

a x má rozdělení

$$N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right),$$

Střední směrodatná odchylka x je tedy $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$.

Definice: Veličina x se nazývá *míra zisku akcie*,

$$x \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right).$$

Měření volatility

Volatilita je míra nejistoty o výnosech akcie. Typické hodnoty σ jsou 0,15 - 0,60.

Z předchozího víme, že $x \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$, tedy σ je střední směrodatná odchylka míry zisku akcie za 1 rok.

Pro malé $T = \Delta t$ máme

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right).$$

Odtud plyne, že $\sigma\sqrt{T}$ je tedy střední směrodatná odchylka

relativní změny ceny akcie za čas T.

Příklad: Nechť $\sigma = 0,3$ (30% ročně) a $S_0 = 50$ Kč.

Střední směrodatná odchylka procentuální změny ceny akcie

za 1 týden je pak

$$30 \cdot \sqrt{\frac{1}{52}} \doteq 4,16\%.$$

Tedy pohyb o 1 odchylku je $50 \cdot 0,0416 \doteq 2,08$ Kč.

Odhad volatility z historických dat Označme

$n+1$	...	počet pozorování
S_i	...	cena akcie na konci i-tého intervalu, $i = 0, 1, \ldots, n$
τ	...	délka časového intervalu v letech

Dále nechť

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

a nechť s je střední směrodatná odchylka u_i,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},$$

kde $\bar{u}$ je střední hodnota u_i.

Víme, že střední směrodatná odchylka u_i je $\sigma \cdot \sqrt{\tau}$ a je tedy odhadem $\sigma\sqrt{\tau}$. Odhad σ je pak

$$\boxed{\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}}$$

Obchodní × kalendářní dny:

V praxi se ignorují dny, ve kterých se neobchoduje, tedy

$$\text{volatilita za rok} \;=\; \text{vol. za 1 obch. den} \cdot \sqrt{\text{počet obch. dnů za rok}}.$$

Životnost opce se s touto konvencí počítá jako

$$T = \frac{\text{počet obch. dnů do expirace}}{\text{počet obch. dnů za rok } (=252)}.$$

Implikovaná volatilita a volatility smile

Připomeňme, že podle předpokladů Black-Scholesova modelu ceny akcie sledují geometrický Brownův pohyb, tedy pravděpodobnostní rozdělení cen akcie S_t je lognormální.

Empirické výsledky naopak ukazují významnou odchylku od tohoto předpokladu. Následující tabulka obsahuje procenta dnů kdy pohyby kursů jsou větší než 1, 2, 3, 4, 5, 6 středních směrodatných odchylek.

	realita (% dnů)	lognormální B.-S. model (% dnů)
> 1 SSO	25,00	32,00
> 2 SSO	5,00	5,00
> 3 SSO	1,30	0,27
> 4 SSO	0,30	0,01
> 5 SSO	0,08	0,00
> 6 SSO	0,03	0,00

Jak toho využít? V začátcích používání Black-Scholesova

vzorce šlo na této velké odchylce profitovat.

Stačilo nakoupit opce hluboko mimo peníze, podle Black-Scholesova modelu jsou velmi levné, a čekat.

Protože velké výkyvy mají daleko větší pravděpodobnost než v lognormálním modelu, některé opce se dostaly do peněz.

Při **použití Black-Scholesova modelu v praxi** se dovolí, aby volatilita závisela na realizační ceně opce a čase do expirace.

Ze skutečných tržních cen opcí dopočítáme volatilitu v Black-Scholesově vzorci, která vede k této ceně. To je *implikovaná volatilita*.

Pokud by Black-Scholesův model beze zbytku platil, pak by tato volatilita byla stejná pro všechny realizační ceny K. Ve skutečnosti ale σ závisí na K (volatility smile, skew).

Tvar této závislosti závisí na povaze podkladového aktiva.

Budeme uvažovat dva základní případy.

Opce na směnné kurzy

Připomeňme, že hodnota opce v čase $t = 0$ je rovna diskontovanému očekávání hodnoty opce v čase expirace $t = T$, vzhledem k risk-neutrální pravděpodobnostní míře.

Levý i pravý chvost skutečného rozdělení je *"těžší"* (větší) než u lognormálního rozdělení.

Uvažujeme call opci s realizační cenou K_2. Opce bude v penězích pro $S_T > K_2$. Pravděpodobnost toho, že $S_T > K_2$ je větší pro skutečné rozdělení než pro lognormální. Z toho plynou následující důsledky:

Větší pravděpodobnost $\Rightarrow$ větší očekávání $\Rightarrow$ větší cena opce $\Rightarrow$ větší volatilita $\Rightarrow$ zvednutí grafu implikované volatility $\Rightarrow$ "půlka" volatility smile.

Tak dostaneme levou půlku volatility smile. Analogicky pro K_1 uvažujeme put opci s realizační cenou K_1. Z put-call parity plyne, že implikovaná volatilita je stejná pro put i call opci se stejnými parametry.

Stejným argumentem dostaneme druhou půlku volatility smile.

Opce na akcie

Levý chvost je u skutečného rozdělení *větší* než u lognormálního rozdělení, *pravý chvost* je *menší*.

Dostaneme tedy jen levou půlku volatility smile, celkově dostaneme graf směřující šikmo dolů, který se nazývá *skew*.

Ukazuje se, že velké rozšíření stejných jistící strategií sice snižuje riziko každému jednotlivému investorovi, ale vede naopak k větší volatilitě celého trhu.

Mechanismus který Δ-hedging působí funguje takto:

pohyb ceny nahoru $\Rightarrow$ nákup $\Rightarrow$ další růst ceny

pohyb ceny dolů $\Rightarrow$ prodej $\Rightarrow$ další pokles

Jištění tedy zesiluje pohyb cen a tím zvyšuje celkovou volatilitu na trhu.

Plocha implikované volatility

Jak se ukazuje, u skutečných ceny opcí nezávisí implikovaná volatilita jen na realizační ceně, ale také na čase expirace. Tak vzniká "časová struktura" volatility (volatility term structure).

Volatilita bývá rostoucí funkcí času pokud je současná volatilita historicky nízká. Důvodem je očekávání investorů že dojde k jejímu nárůstu.

Naopak, pokud je současná volatilita historicky vysoká, pak volatita bude klesající funkcí času, opět kvůli očekávání jejího poklesu.

Plocha implikované volatility dává současně závislost implikované volatility na čase a na realizační ceně.

Když obchodník s opcemi chce ocenit nový opční kontrakt, požije příslušnou volatilitu kterou mu dává plocha implikované volatility.

Jednotlivými časovými řezy plochy volatility dostaneme volatility smiles pro různé doby expirace. Jak čas do expirace roste, volatility smile obvykle bývá méně výrazný.

V souvislosti s předchozími fakty se nabízí otázka jaká je reálná role Black-Scholesova modelu při praktickém oceňování opcí.

Podle některých názorů slouží především jako interpolační nástroj, který pomáhá k tomu, aby konkrétní opce (zejména OTC opce) byly oceněny konzistentně s ostatními opcemi dostupnými na trhu.