Maticové rekurence

MIN101 Matematika I

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

15. listopadu 2022

Konvence

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_k} = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_{jt}} = \begin{pmatrix} x_{1jt} \\ x_{2jt} \\ \vdots \\ x_{njt} \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\mathsf{A})_{ij} = a_{ij}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\boldsymbol{x}_0,$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_0, \\ &\boldsymbol{x}_1 = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_0, \end{aligned}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0\,,\\
&\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_0\,,\\
&\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_1
\end{aligned}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_1 = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_2 = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathsf{A}\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 = \mathsf{A}^2\boldsymbol{x}_0,
\end{aligned}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{A}\mathrm{A}\boldsymbol{x}_0 = \mathrm{A}^2\boldsymbol{x}_0, \\
&\boldsymbol{x}_3 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{A}^3\boldsymbol{x}_0, \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0,\\
&\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_0,\\
&\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{A}\mathrm{A}\boldsymbol{x}_0 = \mathrm{A}^2\boldsymbol{x}_0,\\
&\boldsymbol{x}_3 = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{A}^3\boldsymbol{x}_0,\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{x}_0.
\end{aligned}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t \boldsymbol{x}_0$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{x}_0$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Má-li vlastní hodnota algebraickou násobnost m, píšeme ji m krát.
Všechny vlastní hodnoty jsou jednoduchého typu.
Vlastní vektory jsou lineárně nezávislé.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{x}_0$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Položíme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}.$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x_{t+1}} = \mathsf{A}\boldsymbol{x_t}$$

Řešení: $\boldsymbol{x_t} = \mathsf{A}^t\boldsymbol{x_0}$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_m}$.

Položíme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \cdots & \boldsymbol{w_n} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathsf{A} = \mathsf{W}\Lambda\mathsf{W}^{-1},$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t \boldsymbol{x}_0$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Položíme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathrm{A} = \mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}, \quad \text{tedy } \mathrm{A}^t = \mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}\,\mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1} \cdots \mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t\boldsymbol{x}_0$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Položíme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathsf{A} = \mathsf{W}\Lambda\mathsf{W}^{-1}, \quad \text{tedy } \mathsf{A}^t = \mathsf{W}\Lambda\mathsf{W}^{-1}\,\mathsf{W}\Lambda\mathsf{W}^{-1}\cdots\mathsf{W}\Lambda\mathsf{W}^{-1} = \mathsf{W}\Lambda^t\mathsf{W}^{-1}.$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Řešení: $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t \boldsymbol{x}_0$

Předpoklad: matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
a příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$.

Položíme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathrm{A} = \mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}, \quad \text{tedy } \mathrm{A}^t = \mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}\mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1}\cdots\mathrm{W}\Lambda\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{W}\Lambda^t\mathrm{W}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{x}_t = \mathrm{W}\Lambda^t\mathrm{W}^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ řešení, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ je řešení.

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y}_t = \mathsf{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ □

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ řešení, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ je řešení.

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ $\square$

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}, \ \{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ $\square$

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \dots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ □

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \dots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

Řešení $\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ jsou nezávislá $\Rightarrow$ $\dim\mathcal{P}$ je aspoň n.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}\,,\ \{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ $\square$

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.
Řešení $\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ jsou nezávislá $\Rightarrow$ $\dim\mathcal{P}$ je aspoň n.

$\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{y}_0$ libovolné řešení.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ □

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.
Řešení $\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ jsou nezávislá $\Rightarrow$ $\dim\mathcal{P}$ je aspoň n.

$\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{y}_0$ libovolné řešení.
Ale $\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\boldsymbol{z}_i$, neboť $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^n$. Tedy $\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem (Princip superpozice)

$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *řešení,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *je řešení.*

D.: $\alpha\boldsymbol{x}_{t+1} + \beta\boldsymbol{y}_{t+1} = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}\left(\alpha\boldsymbol{x}_t + \beta\boldsymbol{y}_t\right)$ □

Důsledek: Množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \dots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.
Řešení $\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ jsou nezávislá $\Rightarrow$ dim$\mathcal{P}$ je aspoň n.

$\boldsymbol{y}_t = \mathrm{A}^t\boldsymbol{y}_0$ libovolné řešení.
Ale $\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{z}_i$, neboť $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \dots, \boldsymbol{z}_n)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^n$. Tedy $\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$.
Dimenze nemůže být větší, než n.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem

Množina všech řešení homogenní rekurence tvoří vektorový prostor dimenze n.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem

Množina všech řešení homogenní rekurence tvoří vektorový prostor dimenze n.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

$\mathrm{Y}_\mathrm{t} = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}$ …*fundamentální matice;*
její sloupce tvoří bázi prostoru všech řešení rekurence.

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem

Množina všech řešení homogenní rekurence tvoří vektorový prostor dimenze n.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

$\mathrm{Y}_\mathrm{t} = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}$ …*fundamentální matice;*
její sloupce tvoří bázi prostoru všech řešení rekurence.

Platí: $\mathrm{Y}_{\mathrm{t}+1} = \mathrm{A}\mathrm{Y}_\mathrm{t}$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem

Množina všech řešení homogenní rekurence tvoří vektorový prostor dimenze n.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

$\mathrm{Y}_\mathrm{t} = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}$ …*fundamentální matice;*
její sloupce tvoří bázi prostoru všech řešení rekurence.

Platí: $\mathrm{Y}_{\mathrm{t}+1} = \mathrm{A}\mathrm{Y}_\mathrm{t}$

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{z}_1 + c_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{z}_n = \mathrm{Z}\boldsymbol{c}$$

Homogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t$$

Theorem

Množina všech řešení homogenní rekurence tvoří vektorový prostor dimenze n.

Regulární matice Z typu $n \times n$ taková, že $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)\mathrm{A}^t\boldsymbol{z}_i$ je řešení.

$\mathrm{Y}_\mathrm{t} = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}$ ...*fundamentální matice;*
její sloupce tvoří bázi prostoru všech řešení rekurence.

Platí: $\mathrm{Y}_{\mathrm{t}+1} = \mathrm{A}\mathrm{Y}_\mathrm{t}$

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{z}_1 + c_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{z}_n = \mathrm{Z}\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^\mathrm{t}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}$$

Přitom $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_0)$.

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t$$

$\boldsymbol{x}_t$, $\boldsymbol{y}_t$ dvě řešení. Pak

$$\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{y}_{t+1} = (\mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t) - (\mathsf{A}\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{b}_t) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t),$$

tj. rozdíl řešení je prvkem prostoru řešení homogenní rekurence.

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t$$

$\boldsymbol{x}_t$, $\boldsymbol{y}_t$ dvě řešení. Pak

$$\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{y}_{t+1} = (\mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t) - (\mathsf{A}\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{b}_t) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t),$$

tj. rozdíl řešení je prvkem prostoru řešení homogenní rekurence.

Theorem

Množina všech řešení nehomogenní rekurence tvoří afinní prostor.
Jeho zaměřením je vektorový prostor řešení přidružené homogenní *rekurence*

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t,$$

jeho počátkem je libovolné řešení dané rekurence.

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Struktura množiny řešení

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t$$

$\boldsymbol{x}_t$, $\boldsymbol{y}_t$ dvě řešení. Pak

$$\boldsymbol{x}_{t+1} - \boldsymbol{y}_{t+1} = (\mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t) - (\mathsf{A}\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{b}_t) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t),$$

tj. rozdíl řešení je prvkem prostoru řešení homogenní rekurence.

Theorem

Množina všech řešení nehomogenní rekurence tvoří afinní prostor.
Jeho zaměřením je vektorový prostor řešení přidružené homogenní *rekurence*

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t,$$

jeho počátkem je libovolné řešení dané rekurence.

$$\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}_t,$$

kde vektor $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$ splňuje $\tilde{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{x}}_t + \boldsymbol{b}_t$.

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_{t+1}$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_{t+1} \\ &= \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t = \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t\right) + \boldsymbol{b}_t = \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_{t+1} \\ &= \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t\right) + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\left(\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t\right) = \boldsymbol{b}_t$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_{t+1} \\
&= \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t\right) + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{b}_t
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\left(\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t\right) &= \boldsymbol{b}_t \\
\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t &= \mathrm{Z}^{-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{t+1}\boldsymbol{b}_t
\end{aligned}$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_{t+1} \\ &= \mathsf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t = \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^t\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t\right) + \boldsymbol{b}_t = \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^{t+1}\mathsf{Z}\left(\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t\right) &= \boldsymbol{b}_t \\ \boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t &= \mathsf{Z}^{-1}\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{t+1}\boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Tyto rovnosti sečteme pro hodnoty indexu od 0 po $t-1$:

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_{t+1} \\ &= \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t\right) + \boldsymbol{b}_t = \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\left(\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t\right) &= \boldsymbol{b}_t \\ \boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t &= \mathrm{Z}^{-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{t+1}\boldsymbol{b}_t \end{aligned}$$

Tyto rovnosti sečteme pro hodnoty indexu od 0 po $t-1$:

$$\mathrm{Z}^{-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{k+1}\boldsymbol{b}_k = \sum_{k=0}^{t-1}\left(\boldsymbol{c}_{k+1} - \boldsymbol{c}_k\right) = \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_{k+1} - \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_k = \sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{c}_k - \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{c}_t - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}_t$$

Nehomogenní rekurence s konstantní maticí

Metoda variace konstant

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

Předpokládáme, že A je regulární.
Řešení hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_t = \mathrm{A}^t\mathrm{Z}\boldsymbol{c}_t$
Tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{t+1}\mathrm{Z}\left(\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t\right) &= \boldsymbol{b}_t \\
\boldsymbol{c}_{t+1} - \boldsymbol{c}_t &= \mathrm{Z}^{-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{t+1}\boldsymbol{b}_t
\end{aligned}$$

Tyto rovnosti sečteme pro hodnoty indexu od 0 po $t-1$:

$$\mathrm{Z}^{-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{k+1}\boldsymbol{b}_k = \sum_{k=0}^{t-1}\left(\boldsymbol{c}_{k+1} - \boldsymbol{c}_k\right) = \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_{k+1} - \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_k = \sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{c}_k - \sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{c}_t - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}_t$$

Celkem

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \mathrm{A}^t\sum_{k=0}^{t-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{k+1}\boldsymbol{b}_k$$

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$

$p_{ij} = P$(přechod ze stavu $\mathcal{S}_j$ do stavu $\mathcal{S}_i$ za jednotku času)

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$
$p_{ij} = P$(přechod ze stavu $\mathcal{S}_j$ do stavu $\mathcal{S}_i$ za jednotku času)
s_{it} ... množství jedinců, kteří jsou v čase t ve stavu $\mathcal{S}_i$.

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$
$p_{ij} = P$(přechod ze stavu $\mathcal{S}_j$ do stavu $\mathcal{S}_i$ za jednotku času)
s_{it} ... množství jedinců, kteří jsou v čase t ve stavu $\mathcal{S}_i$.

$$s_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} s_{jt}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{s}_{t+1} = \mathrm{P}\boldsymbol{s}_t$$

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$
$p_{ij} = P$(přechod ze stavu $\mathcal{S}_j$ do stavu $\mathcal{S}_i$ za jednotku času)
s_{it} ... množství jedinců, kteří jsou v čase t ve stavu $\mathcal{S}_i$.

$$s_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} s_{jt}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{s}_{t+1} = \mathsf{P}\boldsymbol{s}_t$$

$$x_{it} = \frac{s_{it}}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{jt}}$$

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$
$p_{ij} = P(\text{přechod ze stavu } \mathcal{S}_j \text{ do stavu } \mathcal{S}_i \text{ za jednotku času})$
s_{it} ... množství jedinců, kteří jsou v čase t ve stavu $\mathcal{S}_i$.

$$s_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} s_{jt}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{s_{t+1}} = \mathsf{P}\boldsymbol{s_t}$$

$$x_{it} = \frac{s_{it}}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{jt}}$$

Evoluční rovnice

$$\boldsymbol{x_{t+1}} = \mathsf{P}\boldsymbol{x_t}$$

Aplikace

Náhodné procesy

Stavy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$
$p_{ij} = P$(přechod ze stavu $\mathcal{S}_j$ do stavu $\mathcal{S}_i$ za jednotku času)
s_{it} ... množství jedinců, kteří jsou v čase t ve stavu $\mathcal{S}_i$.

$$s_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} s_{jt}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{s_{t+1}} = \mathrm{P}\boldsymbol{s_t}$$

$$x_{it} = \frac{s_{it}}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_{jt}}$$

Evoluční rovnice

$$\boldsymbol{x_{t+1}} = \mathrm{P}\boldsymbol{x_t}$$

Platí

$$0 \le p_{ij} \le 1 \quad \text{pro} \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$$

P ... stochastická matice.

Aplikace

Populační modely

Populace je roztříděna na n tříd.
Některé třídy představují „novorozence“; některé třídy jsou plodné, „produkují novorozence“.

Aplikace

Populační modely

Populace je roztříděna na n tříd.
Některé třídy představují „novorozence“; některé třídy jsou plodné, „produkují novorozence“.

$p_{ij} = P$(jedinec z j-té třídy přežije časovou jednotku a přejde do i-té třídy)
f_{ij} … očekávaný počet „novorozenců“ třídy i, které „vyprodukuje“ jedinec třídy j

Aplikace

Populační modely

Populace je roztříděna na n tříd.
Některé třídy představují „novorozence“; některé třídy jsou plodné, „produkují novorozence“.

$p_{ij} = P$(jedinec z j-té třídy přežije časovou jednotku a přejde do i-té třídy)
f_{ij} … očekávaný počet „novorozenců“ třídy i, které „vyprodukuje“ jedinec třídy j
x_{it} … počet jedinců třídy i v čase t

Aplikace

Populační modely

Populace je roztříděna na n tříd.
Některé třídy představují „novorozence“; některé třídy jsou plodné, „produkují novorozence“.

$p_{ij} = P$(jedinec z j-té třídy přežije časovou jednotku a přejde do i-té třídy)
f_{ij} … očekávaný počet „novorozenců“ třídy i, které „vyprodukuje“ jedinec třídy j
x_{it} … počet jedinců třídy i v čase t

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{F}\boldsymbol{x}_t + \mathrm{P}\boldsymbol{x}_t = (\mathrm{F} + \mathrm{P})\boldsymbol{x}_t$$

Aplikace

Populační modely

Populace je roztříděna na n tříd.
Některé třídy představují „novorozence“; některé třídy jsou plodné, „produkují novorozence“.

$p_{ij} = P$(jedinec z j-té třídy přežije časovou jednotku a přejde do i-té třídy)
f_{ij} … očekávaný počet „novorozenců“ třídy i, které „vyprodukuje“ jedinec třídy j
x_{it} … počet jedinců třídy i v čase t

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathrm{F}\boldsymbol{x}_t + \mathrm{P}\boldsymbol{x}_t = (\mathrm{F} + \mathrm{P})\boldsymbol{x}_t$$

Platí

$$0 \leq p_{ij} < 1 \text{ pro } i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} < 1 \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f_{ij} \geq 0.$$

Nezáporné matice

A taková, že $a_{ij} \geq 0$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Nezáporné matice

$$\mathsf{A} \text{ taková, že } a_{ij} \geq 0 \text{ pro } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Definition

Nezáporná matice A se nazývá *primitivní,* pokud

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i, j = 1, 2, \ldots, n)\, (\mathsf{A}^k)_{ij} > 0.$$

Nezáporné matice

$$\mathrm{A} \text{ taková, že } a_{ij} \geq 0 \text{ pro } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Definition

Nezáporná matice A se nazývá *primitivní,* pokud

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i, j = 1, 2, \ldots, n)\,(\mathrm{A}^k)_{ij} > 0.$$

Theorem (Perron)

Je-li nezáporná matice A *primitivní, pak existuje její vlastní hodnota* λ_1 *taková, že pro každou vlastní hodnotu* $\lambda_i \neq \lambda_1$ *platí* $\lambda_1 > |\lambda_i|$.

MASARYKOVA
UNIVERZITA