Matematická analýza 1

Elementární funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

2023

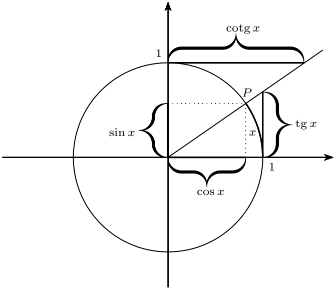
Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice

Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.



Co budeme „často“ používat

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Definice

Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

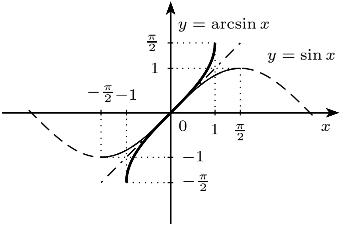
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

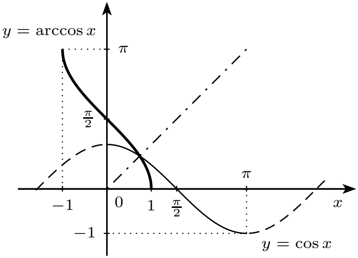
Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce.*

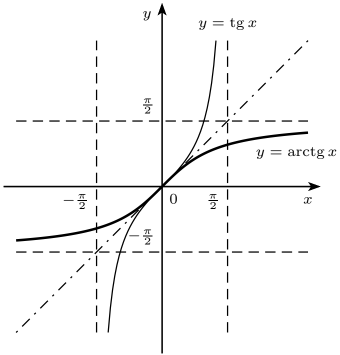
Věta

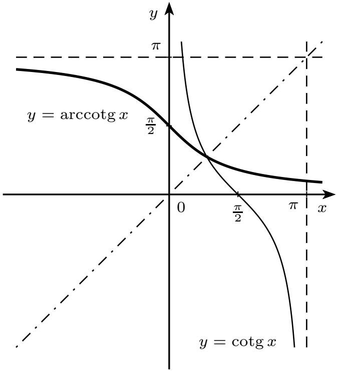
Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

1. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou rostoucí, funkce* $\arccos x$ *a* $\operatorname{arccotg} x$ *jsou klesající.*
2. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou liché.*


$y = \arcsin x$
$y = \sin x$
$\frac{\pi}{2}$
1
$-\frac{\pi}{2}$ -1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$-\frac{\pi}{2}$


$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
π
-1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$y = \cos x$


y
$y = \operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg} x$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
$y = \operatorname{arccotg} x$
$\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
$y = \operatorname{cotg} x$

Polynom

Definice

Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu.
Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, *kde* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *je polynom stupně* $n \geq 0$.

1. *(Základní věta algebry.) Polynom* P *má nad komplexním oborem* $\mathbb{C}$ *právě* n *kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*
2. *Je-li komplexní číslo* α k*-násobným kořenem reálného polynomu* P*, je číslo komplexně sdružené* $\bar{\alpha}$ k*-násobným kořenem polynomu* P*.*
3. *(Rozklad polynomu v oboru reálných čísel.) Jsou-li* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *všechny reálné kořeny polynomu* P *s násobnostmi* $k_1, \ldots, k_r$ *a* $(c_1 \pm id_1)$, …, $(c_s \pm \mathrm{i} d_s)$ *všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*, platí*

$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r} [(x-c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \cdots [(x-c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

4. *Nechť* $a_n = 1$*. Je-li celé číslo* α *kořenem polynomu* P *s celočíselnými koeficienty, pak* α *je dělitelem čísla* a_0*.*

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$.

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci tvaru $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

a) Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k-násobné kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

Malá odbočka

Definice

Buď A množina. Řekneme, že relace $\leq$ na A je *uspořádání*, jestliže

1. $\forall x \in A$ platí $x \leq x$,
2. $\forall x, y \in A$ platí $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$,
3. $\forall x, y, z \in A$ platí $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

Je-li $\leq$ uspořádání na A, pak dvojice $(A, \leq)$ se nazývá *uspořádaná množina*.

Definice

Buď $A \neq \emptyset$ uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, libovolná. Řekneme, že prvek $a \in A$ je *supremum* množiny B, píšeme $a = \sup B$, jestliže

1. $x \leq a$ pro každé $x \in B$,
2. je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$ pro každé $x \in B$, pak $a \leq y$.

Exponenciální a logaritmická funkce

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujme

$$a^c = \sup \{a^x \colon x \in \mathbb{Q}, x \leq c\} \;.$$

Pro $a = 1$ položmě $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a.

Věta

Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = \mathbb{R}$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $a = 1$.
2. *Funkce f je rostoucí v $\mathbb{R}$ pro $a > 1$, klesající v $\mathbb{R}$ pro $a < 1$ a konstantní v $\mathbb{R}$ pro $a = 1$.*

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = \log_a x$.

Věta

Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. *Funkce f je rostoucí na $(0, +\infty)$ pro $a > 1$ a klesající na $(0, +\infty)$ pro $a < 1$.*
3. *Pro $x, y \in (0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Mocninná funkce

Definice

Buď $s \in \mathbb{R}$. Pro $x > 0$ definujeme funkci $y = x^s$ a nazýváme ji *mocninnou funkcí.*

Věta

Mocninná funkce $f(x) = x^s$ *má tyto vlastnosti:*

1. $D(f) = (0, +\infty)$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $s \neq 0$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $s = 0$.
2. *Funkce* f *je rostoucí v* $(0, +\infty)$ *pro* $s > 0$, *klesající v* $(0, +\infty)$ *pro* $s < 0$ *a konstantní v* $(0, +\infty)$ *pro* $s = 0$.
3. *Platí* $f(x) = x^s = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^s = \mathrm{e}^{s \ln x}$ *pro* $x \in (0, +\infty)$.

Poznámka

Je-li $s \in \mathbb{Q}$, definujeme x^s pro $x < 0$, právě když v základním tvaru $\frac{m}{n}$ čísla s je číslo n liché. Pak klademe $x^s = \sqrt[n]{x^m}$ a $\sqrt[1]{a} = a$.

$$x^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{x^2}$$