# Matematická analýza 1

## Limita funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

2023

# Definice limity pomocí okolí

## Definice

Nechť $x_0$, $L \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ *limitu* rovnu $L$ a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu $L$ existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu $x_0$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Pomocí kvantifikátorů lze psát

$$\forall \mathcal{O}(L)\, \exists \mathcal{O}(x_0)\, \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \colon f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

# $\varepsilon - \delta$ definice

## Definice

Nechť $x_0$, $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

## Definice

Řekneme, že $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \, \exists A > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon x > A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

atd.

## „Naivní“ definice

Funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu $L$, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu $L$ tak, že vezmeme hodnoty $x$ dostatečně blízké hodnotě $x_0$, ale různé od $x_0$. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu rovnu $+\infty$, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty $x$ dostatečně blízké hodnotě $x_0$, ale různé od $x_0$. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě $+\infty$ limitu $L$, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu $L$ tak, že vezmeme hodnoty $x$ dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě vlastní limitu*.

# Jednostranné limity

## Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ limitu zprava rovnu číslu $L$ a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}(L)\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\colon f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Podobně definnujeme limitu zleva $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Opět „naivně“ řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu zleva rovnu $L$, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit $L$ tak, že vezmeme hodnoty $x$ menší než $x_0$ a dostatečně blízké hodnotě $x_0$.

# Věty o limitách

## Věta

*Funkce $f$ má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.*

## Věta

*Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f$ je na $\mathcal{O}(x_0)$ ohraničená.*

## Věta

*Platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

## Věta

*Nechť existují obě vlastní limity* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ , $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a)
$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2,$$

b)
$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2,$$

c) *Je-li* $L_2 \neq 0$, *pak*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2},$$

d)
$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|.$$

### Věta

*Nechť* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. *Jestliže pro funkci* $g$ *existuje okolí* $\mathcal{O}(x_0)$ *bodu* $x_0$ *takové, že* $g$ *je v něm ohraničená, pak* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

### Věta

*Nechť existuje ryzí okolí bodu* $x_0$, *v němž platí* $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. *Jestliže* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

### Věta

*Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

1. *Jestliže* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
2. *Jestliže* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x_0)$ *takové, že pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$ *je* $f(x) > 0$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
3. *Jestliže* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x_0)$ *takové, že pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$ *je* $f(x) < 0$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Nevíme tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$