Matematická analýza 1

Diferenční rovnice

Petr Liška

Masarykova univerzita

06.12.2023

Lineární diferenční rovnice 1. řádu

Definice

Nechť $p(n)$ a $r(n)$ jsou posloupnosti, přičemž $p(n) \neq 0$ pro všechna n. Rovnici tvaru

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n). \tag{1}$$

nazýváme *lineární diferenční rovnice prvního řádu*. Je-li $r(n) \equiv 0$, nazývá se rovnice

$$y(n+1) - p(n)y(n) = 0. \tag{2}$$

homogenní.
Řešením rovnice (1) rozumíme posloupnost $y(n) = a(n)$ takovou, že

$$a(n+1) - p(n)a(n) = r(n)\,.$$

Obecným řešením rovnice (1) rozumíme posloupnost, která je řešením dané rovnice a závisí na konstantě c.

Věta

Nechť posloupnost $y = a(n)$ je řešením rovnice (2), pak také posloupnost $y = c \cdot a(n)$, $c \in \mathbb{R}$, je řešením rovnice (2).

Věta

Nechť $p(n) \neq 0$. Je-li $n \geq 1$, pak řešením rovnice (2) je posloupnost

$$u(n) = u(1) \prod_{k=1}^{n-1} p(k)\,. \tag{3}$$

Věta

Nechť $p(n) \neq 0$. Potom všechna řešení rovnice (1) jsou tvaru

$$y(n) = u(n) \left[\sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + c \right],$$

kde $c \in \mathbb{R}$ a $u(n)$ je posloupnost daná (3).