5. cvičení (20. 10. a 26. 10. 2023)

Ortogonální transformace kvadratické formy

Pojmy:

- vlastní čísla a vlastní směry *(opakování z lineární algebry)*;
- Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces *(opakování z lineární algebry)*;
- ortogonální transformace kvadratické formy.

Úlohy:

1. Určete charakteristickou rovnici, vlastní čísla a podprostory vlastních směrů matice A. Každý vlastní podprostor navíc vyjádřete jako lineární obal ortonormálních vektorů.
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. V ortonormální bázi na euklidovském vektorovém prostoru V_3 jsou dány kvadratické formy F_1, F_2 a F_3. Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic, typ formy, ortonormální polární bázi a rovnice transformace souřadnic, které převádí formu do kanonického tvaru.

$$F_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$
$$F_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$
$$F_3(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Řešení

Ortogonální transformace kvadratické formy

1. $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$, $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$ podprostor vlastních směrů příslušný $\lambda_{1,2}$ je generován vektory $(1;0;2)$ a $(1;2;0)$ a podprostor vlastních směrů příslušný λ_3 je generován vektorem $(-2;1;1)$.

2. $F_1(\mathbf{y}) = 3y_1^2 + 2y_2^2$, kladně semidefinitní forma,
   $F_2(\mathbf{y}) = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$, indefinitní forma,
   $F_3(\mathbf{y}) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$, indefinitní forma,