

7. cvičení (3. a 9. 11. 2023)

Projektivní klasifikace kuželoseček

Pojmy:

- transformace projektivních homogenních souřadnic;
- projektivní typy kuželoseček.

Úlohy:

1. Na přímce $p: 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$ nalezněte bod polárně sdružený s bodem $A = (3, 3, -1)$ vzhledem ke kuželosečce $k: 2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.
2. Určete rovnici kuželosečky, která prochází body $A = (2, -3, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ a $C = (4, 0, 1)$ a dotýká se přímky $t: 6x_1 + 17x_2 + 11x_3 = 0$ v bodě $T = (1, -1, 1)$.
3. Pomocí transformace projektivních homogenních souřadnic určete normální rovnice a projektivní typ kuželoseček. Určete transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

(a) $k_1: 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$

(b) $k_2: 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$

(c) $k_3: x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$

(d) $k_4: 5x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

(e) $k_5: 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

Řešení

Kuželosečky v projektivní rovině

1. $P = (-6; 4; -1)$
2. $k: 2x_1^2 - 14x_2^2 + 12x_3^2 - 13x_1x_2 - 11x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$
3. (a) $k_1: y_1^2 = 0$, dvojnásobná přímka
(b) $k_2: y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$, reálná regulární kuželosečka
(c) $k_3: y_1^2 + y_2^2 = 0$, dvojice komplexně sdružených přímek
(d) $k_4: y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$, imaginární regulární kuželosečka
(e) $k_5: y_1^2 - y_2^2 = 0$, dvojice reálných přímek