9. cvičení (23. a 24. 11. 2023)

Kuželosečky v euklidovské rovině

Pojmy:

- osa kuželosečky, vrchol kuželosečky;
- euklidovská klasifikace kuželoseček;
- metoda invariantů.

Úlohy:

1. Určete osy a vrcholy kuželosečky $k\colon x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$.
2. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete typ, kanonickou rovnici a transformační rovnice, které převedou rovnici kuželoseček do kanonického tvaru.
   (a) $k_1\colon 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
   (b) $k_2\colon 7x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x + 4y + 7 = 0$
   (c) $k_3\colon x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 12y + 20 = 0$
   (d) $k_4\colon 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$
3. Zodpovězte na otázky:
   (a) Které kuželosečky protínají nevlastní přímku právě v jednom nevlastním bodě?
   (b) Regulární kuželosečka má hlavní čísla 3 a -2. O kterou kuželosečku se jedná?
   (c) Jsou dány dvě různé, na sebe kolmé přímky p a q a kladné reálné číslo d. Množina všech bodů X v rovině, pro které platí $|Xp| : |Xq| = d$, je kuželosečka. Jaká?
   (d) Které singulární kuželosečky jsou eliptického typu?
   (e) Které kuželosečky mají právě jeden reálný vlastní bod?

Řešení

Kuželosečky v euklidovské rovině

1. $o_1\colon x - y = 0$,
   $o_2\colon x + y = 0$,
   $V_1[1,1]$, $V_2[1,-1]$, $V_3\left[\frac{\mathrm{i}\sqrt{5}}{5}, -\frac{\mathrm{i}\sqrt{5}}{5}\right]$, $V_4\left[-\frac{\mathrm{i}\sqrt{5}}{5}, \frac{\mathrm{i}\sqrt{5}}{5}\right]$.

2. (a) hyperbola
   $x'^2 - \frac{y'^2}{4} - 1 = 0$
   $S[2,-1], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 2$
   $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1$

   (b) komplexně sdružené různoběžky
   $8x'^2 + 3y'^2 = 0$
   $S[-1,-1], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
   $x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 1$
   $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 1$

   (c) parabola
   $x'^2 + \sqrt{32} \cdot y' = 0$
   $V\left[0;2\right], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$
   $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 2$

   (d) reálné rovnoběžky
   $x'^2 - 1 = 0$
   $S\left[0,2\right], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right), \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$
   $x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'$
   $y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' + 2$

3. (a) Parabola, dvojice reálných rovnoběžek, dvojice komplexně sdružených rovnoběžek, dvojnásobná přímka.
   (b) Je to hyperbola.
   (c) Je to dvojice různoběžek.
   (d) Je to dvojice komplexně sdružených různoběžek.
   (e) Pouze dvojice komplexně sdružených různoběžek.