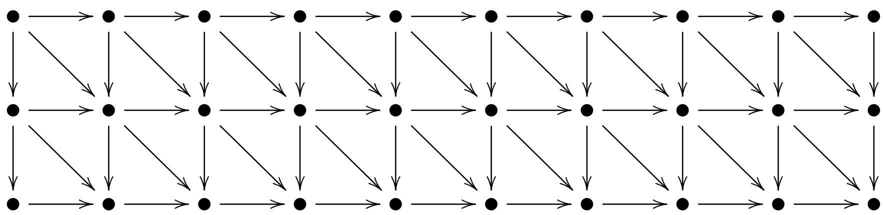
Domácí úkol z kombinatoriky, 7. prosince 2023

Přestože tento domácí úkol nebudete odevzdávat, měli byste si jej ve vlastním zájmu sepsat. Nezapomeňte vždy zapsat i úvahu, kterou jste k výsledku došli, způsobem, kterým byste svůj postup vysvětlili spolužákovi.

Vzorové řešení zadaných úloh bude uveřejněno v interaktivní osnově 10. prosince 2023, abyste si svůj domácí úkol mohli sami opravit.

1. Ve čtvercové síti je povoleno jít dolů, doprava a diagonálně vpravo dolů (viz náčrtek). Označme a_n, kde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, počet cest z daného startovního bodu do cílového bodu, který je o dvě délky strany čtverce níže a o n délek strany čtverce vpravo (náčrtek popisuje situaci pro $n = 9$).

   Nalezněte rekurentní vztah pro výpočet členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ pomocí předchozích členů. Vypočtěte a_{13}.

2. Rekurentní posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je dána svými počátečními hodnotami $b_0 = 1$, $b_1 = 5$, a rekurentním vztahem $b_{n+1} = 4b_n - 7b_{n-1}$ platným pro každé přirozené číslo n. Nalezněte explicitní vyjádření členu b_n této posloupnosti, tj. vyjádření, ve kterém nebudou vystupovat jiné členy této posloupnosti (jedinou proměnnou bude n).

3. Kolik anagramů můžeme vytvořit ze slova ABCDE? Určete, kolik z těchto anagramů splňuje, že každé jejich písmeno stojí na jiném místě než stálo v původním slově (tj. dotyčný anagram nezačíná písmenem A, nemá na druhém místě písmeno B, nemá na třetím místě písmeno C, nemá na čtvrtém místě písmeno D, ani nekončí písmenem E).

Vzorové řešení

1. Ze startovního bodu musíme vyjít jedním ze tří způsobů.

   Vyjdeme-li vpravo, dostaneme se do bodu, odkud můžeme pokračovat právě a_{n-1} různými cestami.

   Vyjdeme-li dolů, dostaneme se do bodu, ze kterého je cílový bod vzdálen o jednu délky strany čtverce níže a o n délek strany čtverce vpravo. Při pokračování cesty musíme tedy právě jednou jít buď dolů anebo jít diagonálně vpravo dolů, všechny ostatní kroky už budou vpravo. Šipek dolů je $n+1$, šipek vpravo dolů je n. Protože každá z těchto cest je jednoznačně určena tím, kterou z těchto $2n+1$ šipek použijeme, je počet cest, kterými můžeme pokračovat, roven $2n+1$.

   Vyjdeme-li diagonálně vpravo dolů, dostaneme se do bodu, ze kterého je cílový bod vzdálen o jednu délky strany čtverce níže a o $n-1$ délek strany čtverce vpravo. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že počet cest, kterými můžeme pokračovat, je roven $2n-1$.

   Z tohoto rozboru plyne rekurentní vztah $a_n = a_{n-1} + 4n$. Je zřejmé, že $a_0 = 1$.

   Užitím rekurentního vztahu postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 4 \cdot 1 = 5,\\
a_2 &= a_1 + 4 \cdot 2 = 13,\\
a_3 &= a_2 + 4 \cdot 3 = 25,\\
a_4 &= a_3 + 4 \cdot 4 = 41,\\
a_5 &= a_4 + 4 \cdot 5 = 61,\\
a_6 &= a_5 + 4 \cdot 6 = 85,\\
a_7 &= a_6 + 4 \cdot 7 = 113,\\
a_8 &= a_7 + 4 \cdot 8 = 145,\\
a_9 &= a_8 + 4 \cdot 9 = 181,\\
a_{10} &= a_9 + 4 \cdot 10 = 221,\\
a_{11} &= a_{10} + 4 \cdot 11 = 265,\\
a_{12} &= a_{11} + 4 \cdot 12 = 313,\\
a_{13} &= a_{12} + 4 \cdot 13 = 365.
\end{aligned}
$$

   Hledané $a_{13} = 365$.

   Poznámka: Z rekurentního vztahu lze v tomto případě snadno získat explicitní vyjádření postupným dosazováním

$$a_n = 4n + 4(n-1) + 4(n-2) + \cdots + 8 + 4 + 1.$$

Sečtením členů aritmetické posloupnosti dostaneme

$$a_n = 2n(n+1) + 1 = 2n^2 + 2n + 1.$$

Proto je možné vypočítat hledané a_{13} také dosazením do tohoto explicitního vyjádření: $a_{13} = 2 \cdot 13 \cdot 14 + 1 = 365$.

2. Protože jde o lineární rekurentní formuli druhého řádu s konstantními koeficienty, tvoří posloupnosti, které ji vyhovují, vektorový prostor dimenze 2. Charakteristický polynom je polynom, jehož kořeny jsou kvocienty $q \neq 0$ geometrických posloupností vyhovujících této formuli. Protože podmínka $q^{n+1} = 4q^n - 7q^{n-1}$ je splněna pro každé přirozené číslo n, právě když $q^2 = 4q - 7$, je charakteristický polynom $x^2 - 4x + 7$. Ten má jednoduché kořeny $2 + i\sqrt{3}$, $2 - i\sqrt{3}$. Proto je daná posloupnost lineární kombinací posloupností $\{(2+i\sqrt{3})^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{(2-i\sqrt{3})^n\}_{n=0}^{\infty}$. Pro vhodná čísla $u, v \in \mathbb{C}$ proto platí

$$b_n = u \cdot \left(2 + i\sqrt{3}\right)^n + v \cdot \left(2 - i\sqrt{3}\right)^n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

Čísla u, v dostaneme porovnáním hodnot počátečních členů

$$\begin{aligned} 1 &= b_0 = u + v, \\ 5 &= b_1 = u \cdot \left(2 + i\sqrt{3}\right) + v \cdot \left(2 - i\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic je $u = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $v = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Tím jsme dostali explicitní vyjádření b_n. Pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ tedy platí

$$b_n = \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 + i\sqrt{3}\right)^n + \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 - i\sqrt{3}\right)^n.$$

3. Protože všechna písmena slova ABCDE jsou po dvou různá, má množina M všech anagramů vytvořených z tohoto slova právě 5! prvků. Označme M_i podmnožinu množiny M, jejímiž prvky jsou právě ty anagramy, které mají na i-tém místě stejné písmeno jako má slovo ABCDE. Pak sjednocení $\bigcup_{i=1}^{5} M_i$ se skládá právě z těch anagramů, které na alespoň jednom místě mají stejné písmeno jako slovo ABCDE. Podle zadání máme spočítat počet prvků rozdílu množin $M - \bigcup_{i=1}^{5} M_i$. Hledaný počet $5! - |\bigcup_{i=1}^{5} M_i|$ spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze. Platí, že pro každé i je $|M_i| = 4!$ (poloha i-tého písmene je předepsaná, zbylá čtyři písmena můžeme permutovat 4! způsoby). Podobně průnik libovolných dvou různých z těchto pěti množin má 3! prvků (poloha dvou písmen je předepsaná, zbylá tři písmena můžeme permutovat 3! způsoby), průnik libovolných tří různých z těchto pěti množin má 2!

prvků (poloha tří písmen je předepsaná, zbylá dvě písmena můžeme permutovat 2! způsoby). Konečně průnik libovolných čtyř z těchto pěti množin, podobně jako průnik všech pěti množin obsahuje jediné slovo (totiž ABCDE).

Princip inkluze a exkluze proto dává

$$\left|\bigcup_{i=1}^{5} M_i\right| = 5 \cdot 4! - \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{3} \cdot 2! - \binom{5}{4} + \binom{5}{5}.$$

Hledaný počet je

$$\begin{aligned}\left|M - \bigcup_{i=1}^{5} M_i\right| &= 5! - 5 \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = \\ &= 10 \cdot 3! - 10 \cdot 2! + 5 - 1 = 44.\end{aligned}$$