

## 2. ELEKTRICKÁ VODIVOST,

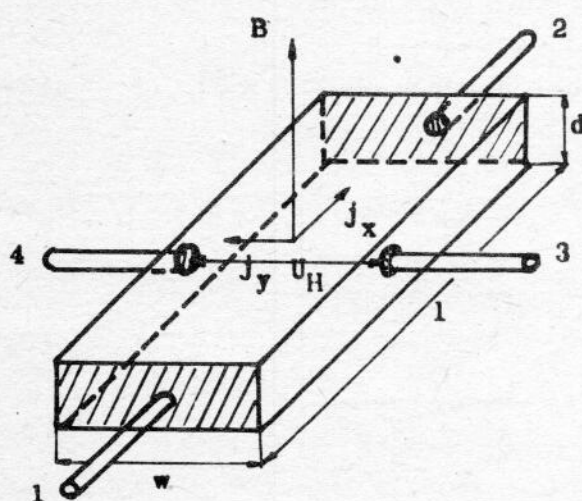
### HALLOVA KONSTANTA,

### MAGNETOVODIVOST POLOVODIČE

Měření elektrické vodivosti a Hallovy konstanty, zejména jejich teplotní závislosti, umožňuje určit důležité parametry polovodiče: typ vodivosti, koncentraci volných nositelů proudu a jejich pohyblivost, šířku pásu zakázaných energií, ionizační energii příměsí a jejich koncentraci. Magnetovodivost umožní určit pohyblivost majoritních nosičů, případně může poskytnout informace o anisotropii efektivní hmotnosti elektronů a děr.

#### 2.1. HALLŮV JEV A PŘÍČNÁ MAGNETOVODIVOST [2.1]

Uvažujme elektrony jako nabitě částice, které se vlivem elektrické síly  $\vec{F}_e = -q \vec{E}$  pohybují driftovou rychlostí  $\vec{v}$  proti směru elektrického pole  $\vec{E}$ . Za přítomnosti magnetického pole o indukci  $\vec{B}$  působí ještě magnetická síla



která vychyluje elektrony kolmo na oba vektory elektrického i magnetického pole a vytváří Hallovo pole  $\vec{E}_H$ , které kompenzuje Lorentzovu sílu. Současně působící obě síly

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad (2.1)$$

Obr. 2.1. Vzorek s elektronovou vodivostí v příčném magnetickém poli.

vytvoří za konstantní teploty dva komplementární galvanomagnetické jevy: Hallův jev a transversální magnetorezistanci. Ve vzorku, který má tvar hranolku podle obr. 2.1, Hallovo pole  $E_H = E_y$  kompenzuje y-složku síly  $\vec{F}$ . Je-li pohyblivost elektronů definována jako

$$\vec{v} = -\mu \cdot \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.2)$$

bude mít vektor driftové rychlosti složky

$$\begin{aligned}
 v_x &= \mu \cdot (E_x - v_y \cdot B) \\
 v_y &= \mu \cdot (E_y - v_x \cdot B) \\
 v_z &= \mu E_z = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Hustota proudu  $\vec{j} = q \cdot n \cdot \vec{v}$  je v oblasti Ohmova zákona úměrná intenzitě elektrického pole  $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$  a má složky

$$j_x = q \cdot n \cdot v_x = \frac{\sigma}{1 + \mu^2 B^2} \cdot E_x - \frac{\sigma \cdot \mu B}{1 + \mu^2 B^2} \cdot E_y
 \tag{2.4}$$

$$j_y = q \cdot n \cdot v_y = \frac{\sigma \cdot \mu B}{1 + \mu^2 B^2} \cdot E_x + \frac{\sigma}{1 + \mu^2 B^2} \cdot E_y$$

Pro  $\vec{B} = 0$  je měrná vodivost homogenní isotropní látky skalární veličina. Pro  $\vec{B} \neq 0$  je tenzorem druhého řádu. Definujeme-li Hallovu konstantu  $R_H$  takto:

$$\vec{E}_H = R_H \cdot (\vec{j} \times \vec{B})
 \tag{2.5}$$

bude v lineárním přiblížení platit

$$\vec{E} = \varrho \cdot \vec{j} - R_H (\vec{j} \times \vec{B}), \text{ nebo } \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} - \sigma R_H (\vec{j} \times \vec{B})
 \tag{2.6}$$

a tenzor vodivosti bude mít složky

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\varrho}{\varrho^2 + R_H^2 \cdot B^2} & \frac{R_H \cdot B}{\varrho^2 + R_H^2 \cdot B^2} \\ \frac{-R_H \cdot B}{\varrho^2 + R_H^2 \cdot B^2} & \frac{\varrho}{\varrho^2 + R_H^2 \cdot B^2} \end{vmatrix}
 \tag{2.7}$$

které jsou závislé na  $B$  a transverzální složky  $\sigma_{12} = -\sigma_{21}$  splňují Onsagerovy relace. Předpokládáme-li, že měrná vodivost uvažovaného vzorku je skalární, bude mít elektrické pole  $\vec{E}$  složky (2.6):

$$\begin{aligned}
 E_x &= \varrho \cdot j_x - R_H \cdot j_y \cdot B \\
 E_y &= \varrho \cdot j_y + R_H \cdot j_x \cdot B
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Předpokládáme-li, že  $j_y = 0$ , tj. mezi elektrodami 3, 4 neprotéká proud, vyplývá z rovnic (2.3) a (2.4)

$$E_y = -\mu B \cdot E_x \quad \text{a} \quad v_x = \mu E_x
 \tag{2.9}$$

a z rovnic (2.8)

$$E_y = R_H \cdot j_x \cdot B \quad (2.10)$$

Hallův úhel  $\vartheta$  je definován jako

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{E_y}{E_x} = \mu B \quad (2.11)$$

a vyjadřuje vzájemné stočení proudových čar a elektrického pole následkem příčného magnetického pole. Z rovnice (2.10) můžeme určit Hallovu konstantu pomocí měřených veličin, Hallova napětí  $U_H$

$$U_H = \int_0^w E_y \cdot dy = E_y \cdot w$$

a proudu  $I = j \cdot w \cdot d$

$$R_H = \frac{U_H \cdot d}{B \cdot I} \quad (2.12)$$

Souvislost Hallovy konstanty s koncentrací elektronů vyplývá z rovnic (2.3), (2.9) a (2.10)

$$R_H = - \frac{1}{q \cdot n} \quad (2.12')$$

Magnetorezistance v homogenním isotropním materiálu může být způsobena částečným nebo úplným zkratováním Hallova pole (tzv. geometrická magnetorezistance). Určíme ji z rovnic (2.4) a (2.8) pro případ úplně zkratovaného Hallova pole, kdy  $E_y = 0$  a teče Hallův proud o hustotě  $j_y$ . Pro poměr hustot proudů  $j_x$  a  $j_y$  platí

$$\frac{j_y}{j_x} = \mu B \quad (2.13)$$

a závislost měrného odporu na magnetické indukci  $\varrho(B) = E_x / j_x$  je

$$\varrho(B) = \varrho(0) \cdot (1 + \mu^2 \cdot B^2), \quad \varrho(0) = 1/\sigma$$

a magnetorezistance  $\Delta \varrho / \varrho_0 = [\varrho(B) - \varrho(0)] / \varrho(0)$  je

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_0} = \mu^2 \cdot B^2 \quad (2.14)$$

je tedy kvadratickou funkcí magnetické indukce  $B$ . Úplné zkratování Hallova pole lze dosáhnout pouze u kruhového vzorku, tzv. Corbino disku [2.1]. U vzorků ve tvaru hranolku způsobují částečné zkratování Hallova pole proudové plošné kontakty, které se uplatní tím více, čím je menší poměr délky a šířky  $l/w$  vzorku, tj. u krátkých vzorků. Při měření na vzorcích ve tvaru hranolku bude



$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = k \cdot (\mu B)^2 \quad (2.15)$$

kde  $k < 1$  a závisí na poměru  $l/w$  [2.1]. Kromě této geometrické magnetorezistance je změna odporu vzorku v magnetickém poli způsobena ještě anisotropií efektivní hmotnosti elektronů a děr a jejich různou rychlostí. Tato magnetorezistance se nazývá fyzikální. Úvahy v předcházející části platí pro homogenní isotropní vodič, kde všechny elektrony mají stejnou rychlost. Tomuto případu se přibližují kovy.

V polovodičích existují dva druhy nosičů proudu, elektrony a díry, které se vlivem elektrického a magnetického pole pohybují obecně různými rychlostmi. Pro výpočet elektrické vodivosti, Hallovy konstanty a magnetorezistance je třeba vypočítat hustoty proudu  $j_x$  a  $j_y$  jako součet příspěvků od všech elektronů a děr. K tomu je třeba znát rozdělovací funkci elektronů a děr při působení elektrického a magnetického pole. Ta se určí řešením Boltzmanovy transportní rovnice. V aproximaci relaxačního času řešení tohoto problému vede k těmto výsledkům [1.1], [2.1] a [2.2]:

Elektrická vodivost

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu_n + q \cdot p \cdot \mu_p \quad (2.16)$$

$$\mu_n = \frac{q \langle \tau_n \rangle}{m_n^*} \quad \mu_p = \frac{q \langle \tau_p \rangle}{m_p^*}$$

Hallova konstanta

$$R_H = - r_H \cdot \frac{n \cdot \mu_n^2 - p \cdot \mu_p^2}{q(n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)^2} \quad (2.17)$$

$$r_H = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} \quad (2.18)$$

$r_H$  je rozptylový (Hallův) faktor, který je při rozptylu na akustických fononech roven  $r_H = 3\pi/8$ , u kovů a degenerovaných polovodičů je  $r_H=1$ . V rovnicích (2.16) až (2.18) je  $n$ ,  $p$  koncentrace volných elektronů a děr,  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  jsou driftové pohyblivosti elektronů a děr a  $\tau_n$ ,  $\tau_p$  jsou střední hodnoty relaxačních dob elektronů a děr (3.2).

Pro polovodič příměsový, kdy pro  $n$ -typ je  $n \gg p$ , se vztahy zjednoduší:

$$\sigma_n = q \cdot n \cdot \mu_n \quad R_H = - r_H \cdot \frac{1}{q \cdot n} \quad (2.19)$$

a pro  $p$ -typ  $p \gg n$

$$\sigma_p = q \cdot p \cdot \mu_p \quad R_H = + r_H \cdot \frac{1}{q \cdot p} \quad (2.20)$$

Součin měrné vodivosti a Hallovy konstanty definuje Hallovu pohyblivost: pro elektrony

$$\mu_{nH} = |R_H \cdot \sigma_n| = r_H \mu_n \quad (2.21)$$

pro díry

$$\mu_{pH} = R_H \cdot \sigma_p = r_H \mu_p$$

Od driftové pohyblivosti se liší Hallovým faktorem.

Příčná magnetorezistance je u isotropních polovodičů s kulovými ekvienergiovými plochami rovna

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \xi \cdot (\mu_H \cdot B)^2 \quad (2.22)$$

kde

$$\xi = \frac{\langle \tau^3 \rangle \langle \tau \rangle}{\langle \tau^2 \rangle^2} - 1$$

$\xi$  je koeficient magnetorezistance, který závisí na typu rozptylu elektronů. Pro rozptyl na akustických fononech má číselnou hodnotu  $\xi = 0,275$ . Všechny uvedené vztahy pro Hallovu konstantu a magnetorezistanci platí pro slabé magnetické pole, tj. pro  $\mu_H \cdot B < 1$ .

Měřením Hallovy konstanty a měrné vodivosti můžeme určit typ vodivosti polovodiče (podle znaménka  $R_H$ ), koncentraci volných nosičů ( $R_H = -r_H/q \cdot n$ ) a jejich pohyblivost ( $\mu_H = |R_H \cdot \sigma|$ ). Další důležité parametry polovodiče je možné určit měřením teplotní závislosti  $\sigma$  a  $R_H$ . V oblasti vlastní vodivosti při vyšších teplotách můžeme určit šířku pásu zakázaných energií  $E_g$  a v oblasti příměsové vodivosti můžeme určit koncentraci příměsí, pohyblivost volných nosičů, charakter rozptylových procesů, případně ionizační energií příměsí a kompenzovanost polovodiče. K určení posledních dvou parametrů u germania a křemíku je však třeba měřit až do nízkých teplot v oblasti kapalného helia. Protože naše měření lze provádět pouze do teplot kapalného dusíku (77 K), omezíme se na oblast vlastní vodivosti a část příměsové vodivosti, ve které budou ještě všechny příměsové atomy ionisovány. K interpretaci měření bude třeba určit závislost koncentrace volných elektronů a děr na teplotě.

## 2.2. TEPLITNÍ ZÁVISLOST KONCENTRACE ELEKTRONŮ A DĚR

Koncentrace elektronů ve vodivostním pásu je určena Fermi - Diracovou rozdělovací funkcí a hustotou stavů ve vodivostním pásu [1.1]:

$$n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_C \cdot F_{1/2}(y) \quad (2.23)$$

kde  $N_C = 2 \cdot (2\pi m_n \cdot k \cdot T \cdot h^{-2})^{3/2}$  je hustota stavů ve vodivostním pásu



$$F_k(y) = \int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{1 + e^{x-y}} \quad (2.24)$$

je Fermi - Diracův integrál,  $y = E_F/kT$  je redukovaná Fermiho energie a  $x = E/kT$  je redukovaná energie. Je-li  $\exp\{(E - E_F)/kT\} > 1$ , lze Fermi - Diracovu statistiku nahradit Boltzmanovou a koncentrace elektronů ve vodivostním pásu je

$$n = N_C \exp\{(E_F - E_C)/kT\} \quad (2.25)$$

Podobně lze vypočítat koncentraci volných děr ve valenčním pásu

$$p = N_V \exp\{(E_V - E_F)/kT\} \quad (2.26)$$

Kde  $N_V = 2 (2\pi m_p k T h^{-2})^{3/2}$  je hustota stavů ve valenčním pásu. Koncentrace volných elektronů a děr tedy závisí na Fermiho energii  $E_F$ . Ta se určí z podmínky lokální nábojové neutrality, která má pro vlastní polovodič tvar  $n = p$  a Fermiho energie

$$E_F = -\frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} (kT \ln \frac{m_n^*}{m_p^*}) \quad (2.27)$$

leží přibližně uprostřed zakázaného pásu. V termodynamické rovnováze je součin koncentrace elektronů a děr konstantní a podle (2.25) a (2.26) je

$$n \cdot p = n_i^2(E_g, T) = N_C N_V \exp(-E_g/kT) \quad (2.28)$$

$n_i$  je intrinsická koncentrace a při  $T = 300$  K má pro Ge hodnotu  $n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  a pro Si  $n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ .

Jsou-li v polovodiči příměsové atomy, na př. donory s koncentrací  $N_D$ , má podmínka nábojové neutrality tvar

$$n = p + N_D \quad (2.29)$$

neboť předpokládáme úplnou ionizaci donorů. Použijeme-li rovnici (2.28), můžeme určit koncentraci volných elektronů a děr v závislosti na koncentraci donorů a na teplotě

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_D}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D}{2}\right)^2 + n_i^2(T)} \\ p &= \frac{n_i^2}{n} \end{aligned} \quad (2.30)$$

#### Určení šířky zakázaného pásu.

Šířku pásu zakázaných energií  $E_g$  určíme z naměřené teplotní závislosti Hallovy konstanty v oblasti vlastní vodivosti, kde platí

$n = p = n_1 \gg N_D (N_A)$ . Hallova konstanta je pak podle (2.17)

$$R_H = - r_H \frac{1}{q n_1} \cdot \frac{b-1}{b+1} \quad (2.31)$$

$b = \mu_n / \mu_p$  je poměr pohyblivostí elektronů a děr. Po dosazení intrin-  
sické koncentrace  $n_1$  z (2.28) a s přihlédnutím k teplotní závislosti  
hustoty stavů  $N_C$  a  $N_V$ , bude teplotní závislost Hallovy konstanty

$$R_H(T) = \text{konst.} \cdot T^{-3/2} \exp[E_g / 2kT] \quad (2.32)$$

Předpokládali jsme, že závislost pohyblivosti elektronů a děr na teplo-  
tě je stejná a poměr  $b$  je tedy na teplotě nezávislý. Ze vztahu (2.32)  
vyplývá, že závislost  $\ln |R_H T^{3/2}|$  na reciproké teplotě je lineární  
a  $E_g$  lze jednoduše určit.

#### Určení koncentrace příměsí $N_D$ .

Použijeme změřenou teplotní závislost Hallovy konstanty v oblasti  
příměsové vodivosti, kdy jsou všechny donory ionisovány a  $n_1 \ll N_D$ ,  
pak podle (2.30) je  $n = N_D$  a Hallova konstanta podle (2.19) bude

$$R_H = - r_H \frac{1}{q \cdot N_D} \Rightarrow N_D \quad (2.33)$$

V této oblasti teplot by měla být Hallova konstanta téměř nezávislá  
na teplotě.

#### Určení pohyblivosti majoritních nosičů.

V oblasti příměsové vodivosti určíme pohyblivost majoritních nosi-  
čů měřením vodivosti a Hallovy konstanty při téže teplotě:

$$\mu_n = \frac{1}{r_H} \mu_{Hn} \quad \mu_{Hn} = R_H \sigma \quad (2.34)$$

Podobně pro pohyblivost majoritních děr v polovodiči p-typu.

Pohyblivost majoritních nosičů můžeme určit také z magnetorezis-  
tance. Z rovnice (2.22) vypočítáme pohyblivost elektronů

$$\mu_n^2 = \frac{1}{\xi \cdot r_H^2 \cdot B^2} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (2.35)$$

$$\xi = 0,275 \quad \text{a} \quad r_H = 3\pi / 8.$$

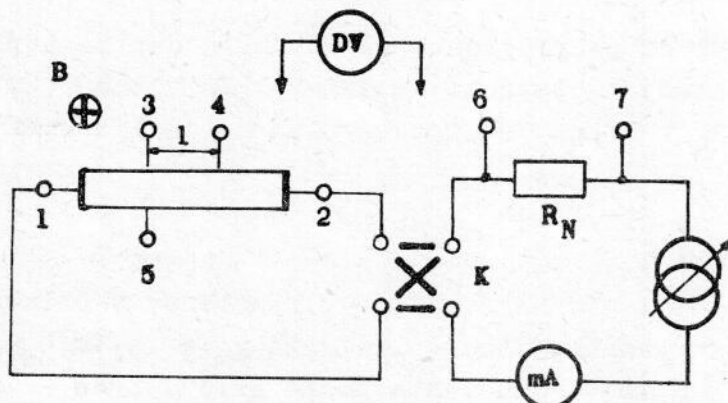
#### Určení typu vodivosti.

Typ vodivosti můžeme určit ze znaménka Hallovy konstanty v oblas-  
ti příměsové vodivosti. Musíme ovšem znát orientaci magnetického pole  
vzhledem k proudu protékajícímu vzorkem a polaritu Hallova napětí. Typ  
vodivosti lze rovněž určit z tvaru teplotní závislosti Hallovy konstan-

ty. Jak vyplývá z rovnice (2.17) dochází ke změně znaménka Hallovy konstanty při přechodu vzorku p-typu do oblasti vlastní vodivosti.

### 2.3. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

Elektrickou vodivost, Hallovu konstantu a magnetorezistanci měříme stejnosměrnou metodou na germaniovém vzorku, který má tvar hranolku s pěti kontakty. Měříme v teplotním rozsahu od 20 do 150°C. Schema zapojení je na obr. 2.



Obr. 2.2. Schema zapojení pro měření vodivosti, magnetorezistance a Hallovy konstanty.

napětí na kontaktech 3, 5 číslicovým voltmetrem DV. Vzorek je umístěn v Dewarově nádobě v oleji, který je elektricky vyhříván. Regulace teploty a její stabilizace je zajištěna kontaktním teploměrem. Teplotu měříme platinovým odporovým teploměrem.

Měrný odpor určíme ze vztahu

$$\rho = \frac{U \cdot S}{I \cdot l} \quad U = (U_{34}^+ + U_{34}^-)/2 \quad (2.36)$$

Měříme při konstantním proudu a komutujeme jeho směr.

Hallovu konstantu určíme ze vztahu (2.12)

$$R_H = \frac{U_H \cdot d}{I \cdot B} \quad (2.37)$$

kde  $U_H$  je napětí určené ze čtyř hodnot naměřených na kontaktech 3, 5 při komutaci proudu vzorkem i magnetického pole při téže teplotě:

$$U_H = \frac{1}{4} [U_{35}(+I, +B) - U_{35}(-I, +B) + U_{35}(-I, -B) - U_{35}(+I, -B)] \quad (2.38)$$

Komutaci směru proudu a magnetického pole je nutné provádět proto, aby byl omezen vliv nežádoucích galvanomagnetických a termomagnetických jevů [2.1]. Tak lze vyloučit všechna nežádoucí napětí s výjimkou napětí Ettinghausenova.



Pokud provádíme měření na krátkých vzorcích ( $l/w \leq 3$ ), dochází vlivem proudových kontaktů k částečnému zkratování Hallova pole a ke zmenšení Hallova napětí. V takovém případě se provádí korekce měřené Hallovy konstanty násobením korekčním faktorem, který závisí na poměru  $l/w$  a na Hallově úhlu [2.1].

#### Měření magnetorezistance.

Měří se při konstantní teplotě tak, že měříme vodivostní napětí na kontaktech 3,4 bez magnetického pole  $U(0)$  a s magnetickým polem  $U(B)$ . Magnetické pole měníme změnou magnetizačního proudu elektromagnetu. Protože měříme při konstantním proudu, bude

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{U(B) - U(0)}{U(0)} \quad (2.39)$$

Napětí opět měříme při všech komutacích proudu a magnetického pole. Provedeme šest měření:

$U(+B), U(0), U(-B)$  při  $+I$

$U(-B), U(0), U(+B)$  při  $-I$

Ze čtyř změřených rozdílů vypočítáme průměrnou změnu a dosadíme do (2.39). Vzhledem k tomu, že změny napětí jsou malé, je třeba toto měření provádět při dobře ustálené teplotě, tedy před měřením teplotních závislostí.

#### 2.4. ÚKOL PRO MĚŘENÍ

- Při konstantní teplotě změřte závislost magnetorezistance na magnetické indukci,
  - ověřte platnost kvadratické závislosti (2.22)
  - určete pohyblivost majoritních nosičů
- Změřte teplotní závislost měrné vodivosti a Hallovy konstanty v rozsahu 300 - 450 K,
  - naměřené závislosti znázorněte grafy funkcí  $\log \sigma = f(1/T)$  a  $\log |R_H| = f(1/T)$
  - určete: šířku zakázaného pásu  $E_g$  z obou měření
    - typ vodivosti
    - koncentraci příměsí
    - pohyblivost majoritních nosičů
  - sestrojte graf závislosti koncentrace elektronů a děr na teplotě pro změřenou koncentraci příměsí podle (2.30) ve tvaru  $\log n = f(1/T)$ .

LITERATURA

- [2.1] Wieder H. H.: Laboratory notes on electrical and galvanomagnetic measurements, Elsevier Sci. Publ. Comp., Amsterdam 1979
- [2.2] Blat F. J.: Theory of mobility of electrons in solids, ruský překlad, Moskva 1963



### 3. TEPLOTNÍ ZÁVISLOST POHYBLIVOSTI

Pohyblivost volných nositelů proudu závisí na rozptylovém mechanismu. Změřením teplotní závislosti pohyblivosti můžeme rozptylový mechanismus určit.

#### 3.1. DRUHY ROZPTYLU

Pohyblivost volných nositelů proudu závisí na rozptylových procesech, které působí proti driftovému pohybu volných nosičů. Můžeme je charakterisovat relaxační dobou  $\tau$ , která byla zavedena při řešení Boltzmannovy kinetické rovnice jako časová konstanta při návratu nerovnovážné rozdělovací funkce do rovnovážného stavu po vypnutí elektrického pole. Relaxační dobu lze interpretovat také mikroskopicky jako střední dobu mezi dvěma po sobě následujícími srážkami. Rozptylový proces můžeme dále charakterisovat střední volnou dráhou nositele proudu  $\langle l \rangle = v \cdot \langle \tau \rangle$ , kde  $v$  je tepelná rychlost volných nositelů. Pohyblivost volného nositele s efektivní hmotností  $m^*$  a nábojem  $q$  je

$$\mu = \frac{q}{m^*} \langle \tau \rangle \quad (3.1.)$$

kde  $\langle \tau \rangle$  je střední hodnota relaxační doby [1.1] :

$$\langle \tau \rangle = \frac{2}{3 F_{1/2}(y)} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} e^{x-y}}{(1 + e^{x-y})^2} dx \quad (3.2.)$$

$F_{1/2}(y)$  je Fermi-Diracův integrál (2.24.),  $x$  je redukováná energie a  $y$  je redukováná Fermiho energie.

Výpočet střední hodnoty relaxační doby nebo pohyblivosti není jednoduchý, avšak pro většinu významných rozptylových procesů můžeme vyjádřit závislost relaxační doby na energii funkcí typu

$$\tau = C(T) \cdot E^s \quad (3.3.)$$

kde  $C$  je funkcí teploty a parametr  $s$  charakterisuje jednotlivé typy rozptylu. Výpočet středních relaxačních dob a pohyblivostí pro některé rozptylové procesy je uveden v monografii [3.1] s těmito výsledky:

Rozptyl na akustických fononech ( $s = -1/2$ )

$$\tau = \frac{\tau_0}{kT} E^{-1/2} \quad \mu \sim T^{-3/2} \quad (3.4.)$$

Rozptyl na ionisovaných příměsích (  $s = 3/2$  )

$$\tau = \tau_{0J} E^{3/2} \quad \mu_I \sim T^{3/2} \quad (3.5.)$$

Rozptyl na optických fononech (  $s = 1/2$  )

$$\tau = \frac{\tau_{OP}}{kT} E^{1/2} \quad \mu_P \sim T^{-1/2} \quad (3.6.)$$

V případě, že existuje několik rozptylových procesů probíhajících současně a na sobě nezávisle, lze určit výslednou relaxační dobu. Je-li také reciproká hodnota relaxační doby má význam pravděpodobnosti procesu, bude výsledná pravděpodobnost dvou relaxačních procesů

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad (3.7.)$$

V polovodičích se současně vyskytuje na příklad rozptyl na akustických fononech a rozptyl na ionisovaných příměsových atomech. Pak můžeme výslednou pohyblivost vyjádřit podle (3.4.), (3.5.) a (3.7.):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_I} = A \cdot T^{3/2} + B \cdot T^{-3/2} \quad (3.8.)$$

kde A, B jsou konstanty.

Experimentálně zjištěné teplotní závislosti pohyblivosti elektronů a děr v germaniu a v křemíku při rozptylu na akustických fononech se poněkud liší od závislosti vypočtené. Hodnota exponentu v (3.4.) se liší od  $-3/2$  a je různá pro elektrony a pro díry. Dekker [3.2] uvádí pro germanium tyto pohyblivosti:

$$\begin{aligned} \text{pro elektrony} \quad \mu_L &= 4,9 \cdot 10^7 \cdot T^{-1,66} \text{ cm}^2/\text{Vs} \\ \text{pro díry} \quad \mu_L &= 1,05 \cdot 10^9 \cdot T^{-2,33} \text{ cm}^2/\text{Vs} \end{aligned} \quad (3.9.)$$

Rozdíl může být způsoben složitější pásovou strukturou germania.

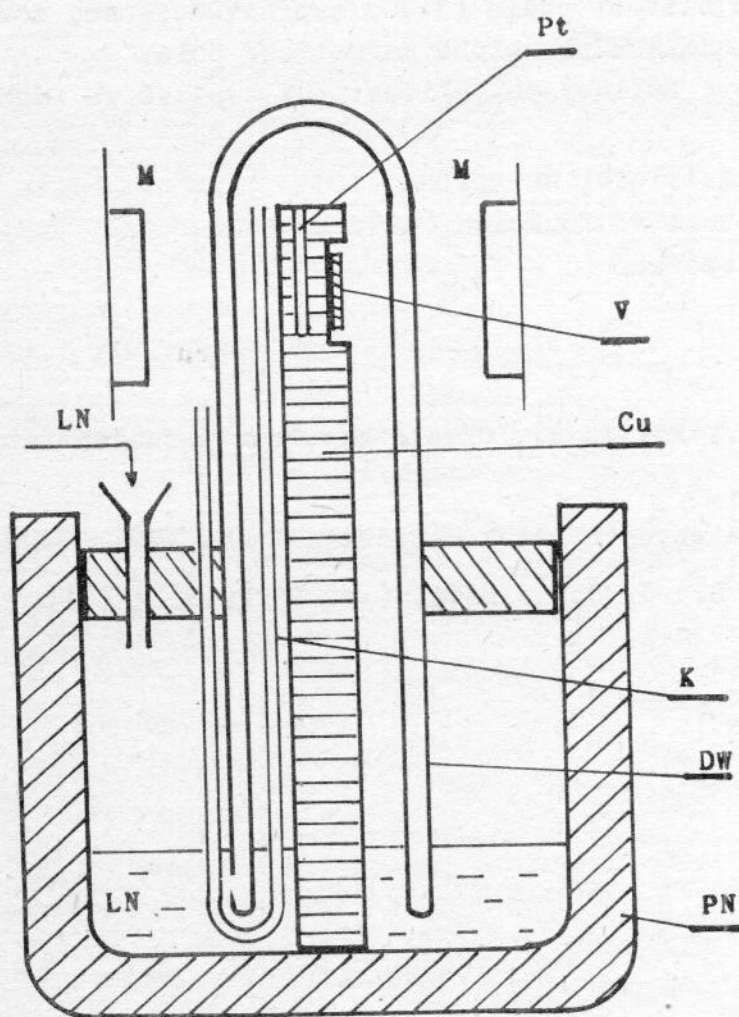
### 3.2. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

Měření teplotní závislosti Hallovy pohyblivosti budeme provádět v teplotním rozmezí od 300 do 80 K. Měří se při stejné teplotě měrná elektrická vodivost  $\sigma(T)$  a Hallova konstanta  $R_H(T)$  způsobem, který je popsán v návodu k úloze Elektrická vodivost, Hallova konstanta a magnetovodivost polovodiče. Hallova pohyblivost je

$$\mu_H(T) = |R_H(T) \cdot \sigma(T)| \quad (3.10.)$$

Experimentální uspořádání se liší pouze umístěním vzorku a způsobem jeho ochlazování. Princip ochlazování a umístění vzorku je na





Obr.3.1. Aparatura pro měření teplotní závislosti vodivosti a Hallovy konstanty při 80 - 300 K.

obr. 3.1. podle [3.3] . Vzorek V je umístěn na Cu válci, který je postaven v polystyrenové nádobě PN do kapalného dusíku LN (nalévá se trychtýřem) a je překryt skleněnou Dewarovou nádobou DW. Odpařený dusík uniká kapilárou K z prostoru vzorku do okolí. Teplota se měří platino-  
vým odporovým teploměrem Pt. Oblast vzorku je v magnetickém poli elektromagnetu M. Při měření se postupuje od laboratorní teploty k nízkým teplotám tak, že se v malých dávkách přilévá kapalný dusík a po ustálení se provede postupně měření teploty, měření šesti hodnot vodivostního a Hallova napětí a kontrola teploty, případně proudu vzorkem. V

případě potřeby je možno vzorek ohřát elektrickým ohřevem měděné tyče. Elektrické schéma zapojení je uvedeno na obr. 2.2. Před měřením je vhodné kontrolovat linearitu vodivostního napětí na kontaktech 3,4 a Hallova napětí na kontaktech 3,5 v závislosti na proudu a u Hallova napětí i lineární závislost na magnetické indukci.

### 3.3. ÚKOL PRO MĚŘENÍ

1. Změřte teplotní závislost elektrické vodivosti a Hallovy konstanty germaniového vzorku v rozsahu teplot od 300 do 80 K.
2. Na začátku a konci měření proveďte kontrolu linearitu vodivostního a Hallova napětí v závislosti na proudu, případně na magnetické indukci.

3. Vypočítejte Hallovu pohyblivost podle (3.10) a přesvědčte se, zda byla při měření splněna podmínka pro slabé magnetické pole.
4. Sestrojte graf závislosti Hallovy pohyblivosti na teplotě ve formě  $\log \mu_H = f(\log T)$ 
  - určete exponent  $n$  v závislosti  $\mu \sim T^n$
  - srovnajte jej s hodnotami ve funkcích (3.9.)
  - určete typ vodivosti vzorku.

#### LITERATURA

- [3.1] Hrivnák L., Bezák V., Foltin J., Ožvold M.: Teoria tuhých látek, SAV Bratislava 1985
- [3.2] Dekker A. J.: Fyzika pevných látek, Academia Praha 1966
- [3.3] Schmidt E., Bočánek L.: J. Sci. Instr. ( J. Phys. E) 4 (3), 250, (1971)



## Poznámka k teplotní závislosti Hallova faktoru

V komentáři ke vztahu pro Hallův faktor (2.18) ve skriptu [1]

$$r_H = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} \quad (1)$$

je zmíněno, že v polovodičích nabývá  $r_H$  hodnoty  $3\pi/8 \approx 1.17$  při rozptylu na akustických fononech. Ukazuje se, že v složitějších situacích, kdy se vodivost odehrává v různých pásech, může být situace komplikovanější. Konkrétně v p-dopovaném Ge se tento faktor jednak citelně odlišuje od této hodnoty a je navíc teplotně závislý. Ze srovnání vodivostní a Hallovy pohyblivosti je možno pro p-dopované germanium odvodit následující empirickou závislost Hallova faktoru [2]

$$r_H = 0.8314 + 0.00354T, \quad (2)$$

kde  $T$  je teplota ve stupních Kelvina. Tato závislost byla odvozena z rozsahu teplot 80–250 K. Použijte tento vztah pro zpracování výsledků z měření Hallova jevu a při výpočtu pohyblivosti. Pro n-dopované germanium je  $r_H \approx 0.9$  s velmi malou závislostí na teplotě [3].

## Reference

- [1] J. Hlávka, L. Bočánek, Praktikum z fyziky pevných látek II., Masarykova univerzita v Brně, 1990.
- [2] F. J. Morin, Phys. Rev. **93**,62 (1954)
- [3] V. M. Babich, P. I. Baranskii, I. V. Dakhovskii, and A. G. Samoylovich, Ukrain Fiz. Zhurnal 14, 3 (1969) 418-422.





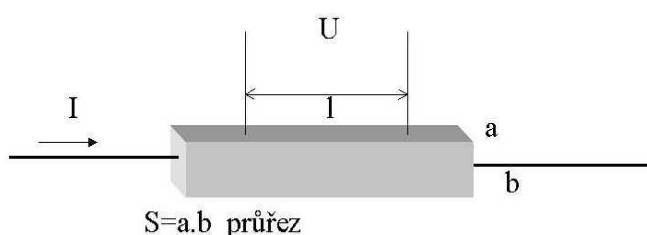
## Měření měrné vodivosti.

Při určování měrné vodivosti homogenní vodivé látky vycházíme z měření odporu vzorku této látky určitého tvaru a známých rozměrů. Protože mezi odporem a měrným odporem je u homogenních vodičů přímá úměra

$$R = c \cdot \rho, \quad (26)$$

kde  $c$  je koeficient úměrnosti – *geometrický faktor* – můžeme při jeho znalosti měrný odpor určit.

Odpor vzorku můžeme měřit přímou metodou, můstkovou nebo srovnávací metodou. Vzorek zapojujeme do měřicího obvodu pomocí buď dvou kontaktů, nebo čtyř kontaktů. V tomto druhém případě jsou napěťové přírady připojeny do jiných míst vzorku než jsou kontakty pro přívod proudu. Vzorky pro určení měrného odporu mohou mít různý tvar: drát, pásek, hranolek, planparalelní deska, ingot. Pro měření můžeme zvolit některou z těchto možností:

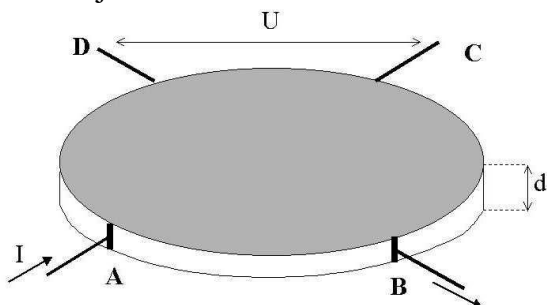


1. Měření na hranolku – obr. 1. Používáme dvoukontaktní nebo čtyřkontaktní zapojení. Tento způsob lze použít i pro dráty a pásy. Měrný odpor je

$$\rho = \frac{U S}{I l}. \quad (27)$$

Obr. 1. Měření měrného odporu na hranolku.

2. Měření na deskách libovolného tvaru – metoda van der Pauw [4]. Po obvodu planparalelní desky tloušťky  $d$  jsou



vytvořeny čtyři čárové kontakty – obr. 2. Ve vzorku je elektrické pole stacionárního proudu s válcovými ekvipotenciálami, které vznikne připojením proudového zdroje ke dvěma sousedním kontaktům A, B. Napětí měříme na druhé dvojici kontaktů C, D. Poměr takto určeného napětí a proudu je odpor  $R_1$ . Připojíme proudový zdroj k další dvojici kontaktů B, C, změříme napětí mezi kontakty D, A a určíme odpor  $R_2$ .

Měrný odpor je

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{(R_1 + R_2)}{2} f\left(\frac{R_1}{R_2}\right), \quad (28)$$

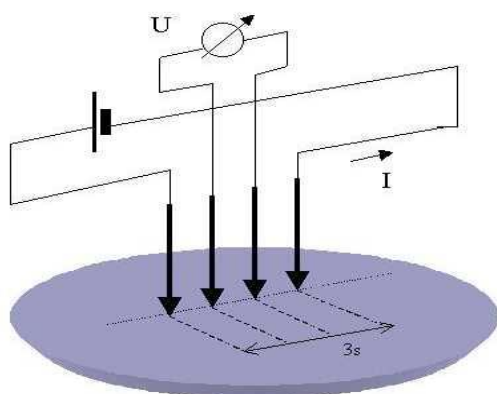
$$R_1 = \frac{U_{CD}}{I_{AB}}, \quad R_2 = \frac{U_{DA}}{I_{BC}},$$

$d$  je tloušťka desky a aproximace funkce  $f(R_1/R_2)$  má tvar

$$f\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \cong 1 - \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)^4 \left[ \frac{(\ln 2)^2}{4} - \frac{(\ln 2)^3}{12} \right]$$

V případě, že vzorek má tvar čtverce nebo kruhu a kontakty nejsou bodové je třeba provést korekce, o kterých je pojednáno v [5].

3. Měření čtyřsondou – čtvercovou nebo lineární – na libovolných vzorcích s rovinnou plochou – obr. 3. Čtyřsondu tvoří čtyři kovové hroty umístěné buď ve vrcholech čtverce o



Obr. 3. Měření  $\rho$  lineární čtyřsondou.

straně  $s$  nebo na přímce ve vzdálenosti  $s$ . Hroty přitlačíme na povrch vzorku. U lineární čtyřsondy přivádíme proud do vnější dvojice hrotů a na vnitřní dvojici měříme napětí. U čtvercové čtyřsondy se proud přivádí do sousedních hrotů a napětí se měří na druhé dvojici hrotů podobně jako u metody van der Pauw. Ve vzorku vznikne elektrické pole stacionárního proudu s kulovými ekvipotenciálami. Jestliže je vzorek polonekonečný, tj. vzdálenost hranice vzorku od hrotů je mnohem větší než vzdálenost hrotů  $s$ , je při měření lineární čtyřsondou měrný odpor [6]

$$\rho = 2\pi s \frac{U}{I} \quad (29)$$

Pro ohraničené vzorky je třeba při výpočtu použít tzv. korekční funkce, kterými se hodnota platná pro polonekonečný vzorek násobí [6], [5].

Při měření odporu kteroukoliv z uvedených metod postupujeme tak, že napětí na vzorku  $U$  určujeme ze dvou hodnot  $U^+$  a  $U^-$  naměřených při opačných směrech proudu vzorkem  $I$  (předpokládáme, že proud má při obou směrech stejnou velikost). Tímto postupem se odstraní vliv termoelektrických napětí  $U_T$ , která mohou v obvodu voltmetru vzniknout, zejména i při malých teplotních gradientech na vzorcích polovodiče, protože mají vysokou hodnotou koeficientu termoelektrického napětí:

$$\begin{aligned} U^+ &= +I.R + U_T && \text{při } +I \\ U^- &= -I.R + U_T && \text{při } -I \\ R &= \frac{U}{I}, \quad U = \frac{U^+ - U^-}{2} = \frac{1}{2}(|U^+| + |U^-|) \end{aligned} \quad (30)$$

Tento postup vychází z předpokladu, že velikost a polarita termoelektrická napětí  $U_T$  v obvodu se při komutaci proudu namění.

Před měřením odporu homogenních vzorků kovů nebo polovodičů je vhodné si ověřit, že v oblasti proudů, kde budeme měření provádět, splňují vzorky Ohmův zákon, tj. jejich odpor nezávisí na velikosti proudu.

Při měření teplotní závislosti odporu se vzorky zahřívají nebo ochlazují a jejich teplota se stabilizuje vhodným termostatem. Pro teploty do 150 °C je možné použít olejové médium v termostatu, pro teploty vyšší se používají různé pícky s ochrannou atmosférou nebo s vakuem. Pro měření při nízkých teplotách do 77 K se jako chladicí médium používá kapalný dusík a vzorek se vkládá do kryostatu, který může být opět buď vakuový nebo s ochrannou atmosférou. Pro měření při nejnižších teplotách do 4 K se používají heliové kryostaty. Teplotu měříme termočlánkem, platinovým odporovým teploměrem nebo polovodičovou diodou.



## Dodatek

### 1. Měření lineární čtyřsondou.

Přiložíme-li na rovinu ohraničující poloprostor s konstantním měrným odporem  $\rho$  bodový kontakt, kterým vtéká stacionární proud  $I$ , vznikne v poloprostoru elektrické pole stacionárního proudu. Vektorové pole hustoty proudu  $\mathbf{j}(r)$  a také elektrické intenzity  $\mathbf{E}(r)$  ve vzdálenosti  $r$  od kontaktu jsou radiální a ekvipotenciály pole jsou polokoule o poloměru  $r$  se středem v kontaktu. Vytéká-li jiným bodovým kontaktem z poloprostoru proud  $-I$  vznikne podobné elektrické pole, ale s opačně orientovanou hustotou a elektrickou intenzitou vzhledem k polohovému vektoru  $\mathbf{r}$ . Působí-li oba proudy současně, tj. jedním kontaktem proud vtéká a druhým vytéká, vznikne pole stacionárního proudu, které je superpozicí obou polí.

Závislost elektrické intenzity na vzdálenosti od kontaktu určíme z definičního vztahu pro měrný odpor, resp. materiálovým vztahem mezi elektrickou intenzitou a hustotou proudu,

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad (\text{D1})$$

tak, že proudovou hustotou ve vzdálenosti  $r$  od prvního bodového kontaktu, viz obr.3, vyjádříme pomocí vtékajícího proudu  $I$  tekoucího polokulovou plochou  $S = 2\pi r^2$

$$j = I/S = I/2\pi r^2$$
$$E^+(r) = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \frac{1}{r^2} \quad (\text{D2})$$

Podobně také elektrická intenzita od proudu  $-I$ , který vytéká čtvrtým bodovým kontaktem je

$$E^-(r) = -\frac{\rho \cdot I}{2\pi} \frac{1}{r^2},$$

kde  $r$  je vzdálenost od čtvrtého kontaktu. Napětí mezi druhým a třetím kontaktem je

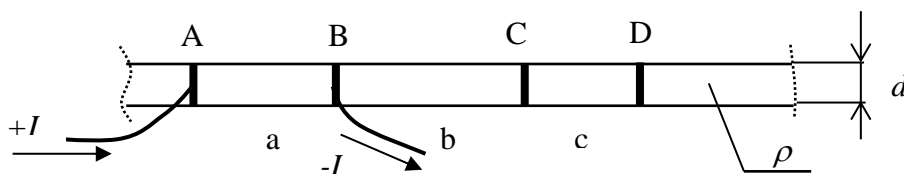
$$U = \varphi_2 - \varphi_3 = -\int_3^2 E^+ dr - \int_3^2 E^- dr = -\frac{\rho \cdot I}{2\pi} \int_{2s}^s \frac{dr}{r^2} + \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \int_s^{2s} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} \right] = \frac{\rho \cdot I}{2\pi s}$$

a měrný odpor homogenního vodivého poloprostoru je

$$\rho = 2\pi s \frac{U}{I}. \quad (\text{D3})$$

### 2. Metoda van der Pauw.

Budeme uvažovat o elektrickém poli stacionárního proudu v homogenní vodivé polonekonečné desce tloušťky  $d$  s měrným odporem  $\rho$ . Pole vznikne proudem  $I$  vtékajícím do desky čárovým kontaktem A a proudem  $-I$  vytékajícím z desky čárovým kontaktem B. Kontakty A, B, C a D leží na rovinné ploše, která tvoří hranici polonekonečné vodivé desky. Vzdálenost kontaktů je  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ .



Vektorová pole elektrické intenzity i hustoty proudu jsou radiální a ekvipotenciální hladiny jsou poloválcové plochy se společnou osou v čárovém kontaktu. Závislost elektrické intenzity  $\mathbf{E}(r)$  na vzdálenosti  $r$  od kontaktu určíme z definice měrného odporu  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$  a ze závislosti hustoty proudu na proudu  $I$  a vzdálenosti  $r$ . Hustota proudu  $\mathbf{j}(r)$  má na

ekvipotenciální ploše  $S = \pi r d$  stejnou velikostí  $j = I/S = I/\pi r d$  a závislost velikosti elektrické intenzity na vzdálenosti od čárového kontaktu A je

$$E_A(r) = \frac{\rho I}{\pi d} \frac{1}{r} \quad (D4)$$

Podobný výsledek platí i pro elektrickou intenzitu od proudu  $-I$  vytékajícího z kontaktu B.

$$E_B(r) = -\frac{\rho I}{\pi d} \frac{1}{r},$$

kde  $r$  je vzdálenost od kontaktu B. Napětí mezi kontakty C a D je

$$\begin{aligned} U_{CD} &= \varphi_D - \varphi_C = -\int_C^D E_A(r) dr - \int_C^D E_B(r) dr = \\ &= \frac{\rho I}{\pi d} \left[ -\int_{a+b}^{a+b+c} \frac{dr}{r} + \int_b^{b+c} \frac{dr}{r} \right] = \frac{\rho I}{\pi d} \left[ \ln \frac{a+b}{a+b+c} + \ln \frac{b+c}{b} \right] = \frac{\rho I}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)b} \end{aligned}$$

Napětí mezi kontakty C a D je

$$U_{CD} = I \frac{\rho}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)b} \quad (D6)$$

Nyní připojíme zdroj proudu  $I$  ke kontaktům B a C a určíme napětí mezi kontakty D a A

$$U_{DA} = \varphi_A - \varphi_D$$

stejným postupem jako v předešlém případě obdržíme

$$U_{DA} = I \frac{\rho}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ac} \quad (D7)$$

Označíme poměry napětí a proudů jako odpory  $R_1$  a  $R_2$  :

$$\frac{U_{CD}}{I} \equiv R_1 = \frac{\rho}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)b} \quad \frac{U_{DA}}{I} \equiv R_2 = \frac{\rho}{\pi d} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ac}$$

vytvoříme inverzní funkce

$$e^{-R_1 \frac{\pi d}{\rho}} = \frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)} \quad e^{-R_2 \frac{\pi d}{\rho}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}$$

a ty sečteme

$$e^{-R_1 \frac{\pi d}{\rho}} + e^{-R_2 \frac{\pi d}{\rho}} = 1, \quad (D8)$$

obdržíme transcendentní rovnici pro neznámou hodnotu měrného odporu  $\rho$ . Tuto rovnici řešíme buď postupem uvedeným výše pomocí rovnice (28) a korekční funkce  $f(R_1/R_2)$ , nebo Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou [7]:

Označíme

$$f(\rho) \equiv e^{-R_1 \frac{\pi d}{\rho}} + e^{-R_2 \frac{\pi d}{\rho}} - 1$$



a  $n+1$  aproximace řešení rovnice

$$f(\rho) = 0 \quad (\text{D9})$$

je

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{f(\rho_n)}{f'(\rho_n)} \quad (\text{D10})$$

Jako první aproximaci volíme hodnotu  $\rho$  vypočtenou z (28) s hodnotou korekční funkce 1. Dosadíme-li do poslední rovnice konkrétní hodnoty funkce  $f(\rho_n)$  a její derivace  $f'(\rho_n)$  obdržíme konečný tvar  $n+1$  aproximace

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\rho_n^2}{\pi d} \left( \frac{\alpha_n + \beta_n - 1}{R_1 \alpha_n + R_2 \beta_n} \right) \quad (\text{D11})$$

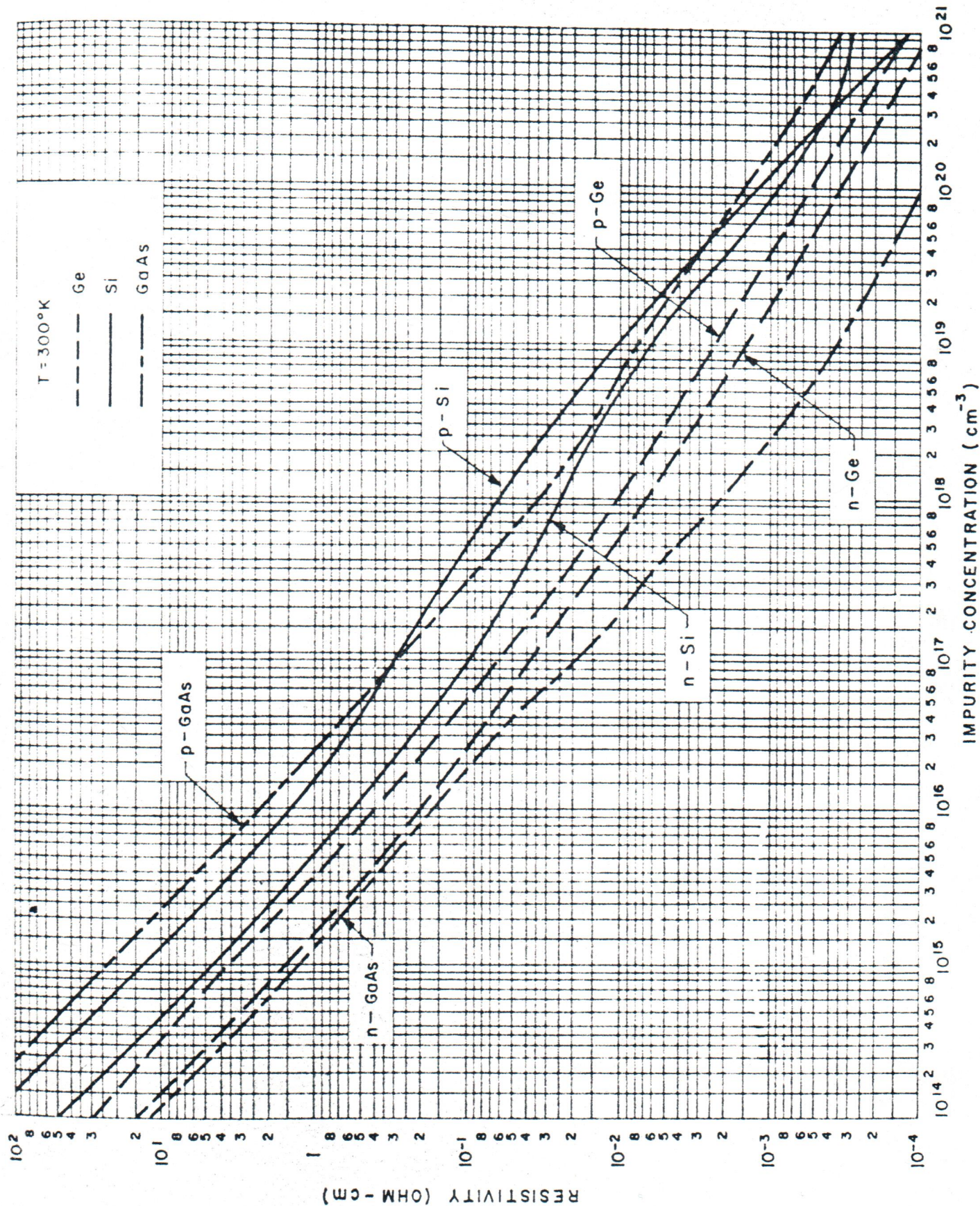
kde

$$\alpha_n = e^{-R_1 \frac{\pi d}{\rho_n}} \quad \beta_n = e^{-R_2 \frac{\pi d}{\rho_n}}$$

Závěrem je třeba poznamenat, že uvedený postup odvození transcendentní rovnice (D9), kdy jsme předpokládali polonekonečnou deskou s rovinnou hranicí, platí pro libovolný vzorek ve tvaru desky s libovolnou uzavřenou hranicí [4].

## Literatura

- [1] Dekker, A. J.: *Fyzika pevných látek*, Academia Praha 1966, kap. 11.
- [2] Blatt, F. J.: *Theory of Mobility of Electrons in Solids*, ruský překlad: *Teoriya podvizhnosti elektronov v tverdyh telach*, Moskva 1963.
- [3] Kittel, Ch.: *Úvod do fyziky pevných látek*, Academia Praha 1984, kap. 6.
- [4] L. J. van der Pauw: *Philips Res. Repts* **13**, 1 (1958), 1
- [5] Wieder, H. H.: *Laboratory Notes on Electrical and Galvanomagnetic Measurements*, Els.Sci. Publ. Comp. Amsterdam 1979, kap. 1.
- [6] Valdes, L. B.: *Proceedings of the I.R.E.* **42** (1954), 420-427
- [7] Humlíček J.: *Základní metody numerické matematiky*, SPN Praha 1981



Resistivity vs. impurity concentration for Ge, Si, and GaAs at 300°K. (After Cuttriss, Ref. 44; Irvin, Ref. 45; and Sze and Irvin, Ref. 28.)