

Orientace v reálných a komplexních prostorech

V $\mathbb{R}^2$ jsou báze $(1, 0)$, $(0, 1)$ a báze $(0, 1)$, $(1, 0)$ opačně orientované. Nelze je spojit křivkou dvojic vektorů, které tvoří bázi v $\mathbb{R}^2$. Důvodem je, že determinanty matic vytvořených z těchto dvou bází mají různá znaménka. V $\mathbb{C}^2$ to ale udělat lze, například takto:

Od matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ přejdeme k matici $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ křivkou matic

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \in [0, \pi/2]$. Ty mají všechny determinant $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Dále od matice $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ přejdeme k matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ křivkou matic

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos \beta + i \sin \beta \\ \cos \beta + i \sin \beta & 0 \end{pmatrix},$$

kde β jde od $\pi/2$ do 0. Jejich determinant je $-(\cos 2\beta + i \sin 2\beta)$, tedy nenulový v $\mathbb{C}$.