Tenzorový součin

Připomenutí. • $U\otimes V = \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{K})^*$ „druhý duál pro vk prostorů"

• (e_i) báze U, $(\bar{e}_j)$ báze V $\Rightarrow$ $e_i\otimes \bar{e}_j$ báze $U\otimes V$

• univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd} (u,v) \arrow[d, mapsto] & U\times V \arrow[r, "F", "\text{bilin.}"'] \arrow[d, "t"', "\text{bilin.}"] & W \\ u\otimes v & U\otimes V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi\ \text{lin.}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Uparrow$ φ jedn. určeno F, F jedn. určeno $F(e_i,\bar{e}_j) = \varphi(e_i\otimes\bar{e}_j)$

Pozn. existují jiné konstrukce

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \\ \mathbb{K}\{U\times V\} \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[d] & \\ \mathbb{K}\{U\times V\}/(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)\ \text{atd.} \arrow[uur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

φ ex. pro libovolné F

φ ex. pokud F je bilin.

• vztah k duálnímu prostoru:

$$V^*\otimes U^* \longrightarrow \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{K}) \cong (U\otimes V)^*$$

$$\theta\otimes\eta \longmapsto \theta\circ\eta$$

$\Rightarrow$ budeme ztotožňovat, takže můžeme zapomenout na $\circ$

$$\begin{tikzcd} V^*\times U^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lin}_2(U,V;\mathbb{K}) \\ V^*\otimes U^* \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

+ báze na bázi $f^r\otimes f^i \longmapsto f^r\circ f^i$

Věta. Je-li U kon. dim., pak zobrazení

$$V\otimes U^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V), \quad v\otimes\eta \longmapsto (v\cdot\eta : u\longmapsto v\cdot\eta(u))$$

je izomorfismus.

Důkaz. Nechť $\varphi\in\mathrm{Hom}(U,V)$ a hledejme vzor, ve tvaru

$$\sum_{i,j} a^i_j\cdot(\bar{e}_i\otimes f^j)$$

v souřadnicích $\bar{e}_i\otimes f^j \longmapsto \bar{e}_i\cdot f^j = E^j_i$

$v\otimes\eta\longmapsto v\cdot\eta$ $\quad \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} \cdots 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$\uparrow$ součin matic

$U \xrightarrow{\eta} \mathbb{K} \xrightarrow{v} V$

tedy hledáme koeficienty a^i_j tak, aby

$$\sum_{i,j} a^i_j\,(\bar{e}_i\cdot f^j) = \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sum a^i_j\,(\bar{e}_i\cdot f^j(e_s)) = \varphi(e_s)$$

$$a^i_s\,\bar{e}_i = \varphi(e_s) \xrightarrow{f^r()} a^r_s = f^r(\varphi(e_s))$$

takže koeficienty existují jediné $\longrightarrow$ a^r_s = r-tá souřadnice $\varphi(e_s)$. $\square$

Poznámka. Souřadnice a^i_j jsou prvky matice zobrazení φ

horní index i je řádkový index ... vektory $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

dolní index j je sloupcový index ... formy $(y_1 \cdots y_n)$

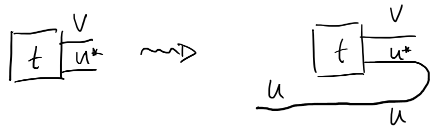
Poznámka. Jednoduché tenzory $v\otimes\eta$ odpovídají zobrazením $v\cdot\eta$ hodnosti 1 (případně 0, pokud $v=0$ nebo $\eta=0$)

a těch moc není $\Rightarrow$ většina tenzorů není jednoduchých.

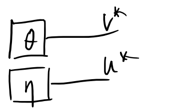
Dualita. Bilineární zobrazení $(\, , \,)_U : U^* \times U \to \mathbb{k}$ indukuje lineární zobrazení $U^* \otimes U \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{k}$, podobně $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(U,U) \cong U \otimes U^*$ indukuje lineární zobrazení $\mathbb{k} \xrightarrow{\delta} U \otimes U^*$. Pomocí nich lze izomorfismus

$$V \otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(U,V) \qquad \delta = \sum \underbrace{\delta^i_j}_{\text{matice id}} e_i \otimes f^j = \sum e_i \otimes f^i$$

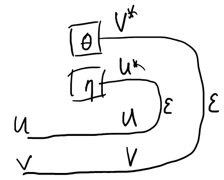
názorně graficky reprezentovat



$\eta \in U^*$, $\theta \in V^*$



$\theta \otimes \eta \in V^* \otimes U^*$



$\longleftrightarrow$ $U \otimes V \longrightarrow \mathbb{k}$

$\theta \circ \eta \in (U \otimes V)^*$

Souřadnice tenzorů.

Pro jednoduchost budeme pracovat s tenzorovými součiny U, U^*

$\to$ tenzorová algebra: $T^p_q U = \bigotimes^p U \otimes \bigotimes^q U^* \cong \mathrm{Hom}(\bigotimes^q U, \bigotimes^p U)$

prvky: tenzory typu (p,q)

Algebra? Něco víc než jen kolekce vektorových prostorů – máme součiny

$$T^{p_1}_{q_1} U \otimes T^{p_2}_{q_2} U \xrightarrow{\otimes} T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2} U \qquad \longleftrightarrow \qquad T^{p_1}_{q_1} U \times T^{p_2}_{q_2} U \to T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2} U$$

bilineární

$$\| $$

$$(\bigotimes^{p_1} U \otimes \bigotimes^{q_1} U^*) \otimes (\bigotimes^{p_2} U \otimes \bigotimes^{q_2} U^*)$$

$$\bigotimes^{p_1} U \otimes \bigotimes^{p_2} U \otimes \bigotimes^{q_1} U^* \otimes \bigotimes^{q_2} U^* \cong \bigotimes^{p_1+p_2} U \otimes \bigotimes^{q_1+q_2} U^*$$

Definice. Algebra = vektorový prostor A + bilineární násobení $A \times A \to A$ takové, že A společně se sčítáním a tímto násobením je okruh.

Příklady.
- $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, obecněji libovolné rozšíření těles
- $\mathbb{H}$ nad $\mathbb{R}$ kvaterniony — v tomto předmětu
- $\mathrm{Mat}_{n \times n} \mathbb{k}$ nad $\mathbb{k}$
- $\mathbb{k}[x]$ nad $\mathbb{k}$, $\mathbb{k}[X]$ nad $\mathbb{k}$

Definice. Graduovaná algebra = kolekce vektorových prostorů (A_n) + bilineárních násobení $A_n \times A_m \to A_{n+m}$ splňujících axiomy okruhu (n, m cokoliv – typicky $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

Příklady.
- $\mathbb{k}^{(*)}[x] = (\mathbb{k}^{(n)}[X])$ = homogenní polynomy stupně n

ohraničen (u, m coloků − typicky ...)

Příklady. • $\mathbb{k}^{(*)}[x] = (\mathbb{k}^{(n)}[x])$ = homogenní polynomy stupně n

• $T^*_* U = (T^p_q U)$ tenzorová algebra

a její varianty symetrická, vnější algebra, Cliffordova algebra (zobec. kvaternionů)

graduovaná algebra $A = (A_n) \rightsquigarrow \mathrm{Tot}\, A = \bigoplus_n A_n$ algebra

$\mathbb{k}^{(*)}[x] \rightsquigarrow \mathbb{k}[x]$ ← formální konečné součty $a_0 + a_1 + \dots + a_r$ lib. délky

Nechť U má bázi (e_i), U^* duální bázi (f^j).

$t \in T^p_q U = \bigotimes^p U \otimes \bigotimes^q U^*$ ... báze $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \dots \otimes f^{j_1}$

$\Rightarrow$ jednoznačné vyjádření $$t = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes f^{j_q} \otimes \dots \otimes f^{j_1}$$

↑ souřadnice tenzoru t vzhledem k bázi α

$T^p_q U$ — p horních indexů, q dolních indexů v souřadnicích t

Příklady.

• tenzory typu $(1,0)$ = vektory: $T^1_0 U = U$

$u = \sum u^i e_i$ klasické souřadnice

• tenzory typu $(0,1)$ = lineární formy: $T^0_1 U = U^*$

$\eta = \sum \eta_j f^j$ klasické souřadnice

• tenzory typu $(0,2)$ = bilineární formy: $T^0_2 U = U^* \otimes U^* \cong (U \otimes U)^* = \mathrm{Lin}_2(U, U; \mathbb{k})$

$g = \sum g_{jk} f^k \otimes f^j \longleftrightarrow \sum g_{jk} f^k \circ f^j$

$\Rightarrow g(u,v) = \sum g_{jk} f^j(u) f^k(v) = \sum g_{jk} u^j v^k \quad (= u^T A v)$

• tenzory typu $(1,1)$ = lineární zobrazení: $T^1_1 U = U \otimes U^* \cong \mathrm{Hom}(U, U)$

$\varphi = \sum \varphi^i_j e_i \otimes f^j \longleftrightarrow \sum \varphi^i_j e_i f^j$

$\Rightarrow \varphi(u) = \sum \varphi^i_j e_i f^j(u) = \sum \underbrace{\varphi^i_j u^j}_{} e_i$

souřadnice $\varphi(u)$ jsou Au

Souřadnice tenzorů při změně báze.

$(e_1 \dots e_n) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \cdot A \longrightarrow \boxed{e_k = \sum \bar{e}_i a^i_k}$

Jaký je vztah mezi duálními bázemi?

$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \vdots \\ \bar{f}^n \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{f^\ell = \sum b^\ell_j \bar{f}^j}$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{f}^n \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{f^i = \sum b^i_j \bar{f}^j}$$

Přitom:

$$E = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = B \begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \vdots \\ \bar{f}^n \end{pmatrix} (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)\, A = BA \implies \underline{\underline{B = A^{-1}}}$$

$$t = \sum t^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}\, e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_p} \otimes f^{l_q} \otimes \dots \otimes f^{l_1}$$

$$= \sum t^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \left(\sum \bar{e}_{i_1} a^{i_1}_{k_1}\right) \otimes \dots \otimes \left(\sum \bar{e}_{i_p} a^{i_p}_{k_p}\right) \otimes \left(\sum b^{l_q}_{j_q} \bar{f}^{j_q}\right) \otimes \dots \otimes \left(\sum b^{l_1}_{j_1} \bar{f}^{j_1}\right)$$

$$= \sum a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_p}_{k_p}\, t^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}\, b^{l_q}_{j_q} \dots b^{l_1}_{j_1}\; \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p} \otimes \bar{f}^{j_q} \otimes \dots \otimes \bar{f}^{j_1}$$

Věta. Souřadnice $\bar{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ vzhledem k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ splňují

$$\bar{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \\ l_1, \dots, l_q}} a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_p}_{k_p}\, t^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}\, b^{l_q}_{j_q} \dots b^{l_1}_{j_1}$$

Příklady.

- $U = T^1_0 U$:

  $\bar{u}^i = \sum a^i_k u^k \qquad (u)_{\bar\alpha} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\bar\alpha\alpha}}}\, (u)_\alpha$

- $U^* = T^0_1 U$

  $\bar{\eta}_j = \sum \eta_l b^l_j \qquad (\eta)_{\bar\alpha} = (\eta)_\alpha \overset{B}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\alpha\bar\alpha}}}$

- $Lin_2(U, U; \mathbb{K}) = T^0_2 U$

  $\bar{g}_{jk} = \sum g_{lm} b^k_m b^j_l \qquad (g)_{\bar\alpha} = (id)^T_{\alpha\bar\alpha}\, (g)_\alpha\, (id)_{\alpha\bar\alpha}$

- $Hom(U, U) = T^1_1 U$

  $\bar{\varphi}^i_j = \sum a^i_k \varphi^k_l b^l_j \qquad (\varphi)_{\bar\alpha\bar\alpha} = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\bar\alpha\alpha}}}\, (\varphi)_{\alpha\alpha}\, \overset{B}{\overset{\shortparallel}{(id)_{\alpha\bar\alpha}}}$

Symetrické a antisymetrické tenzory

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\otimes^p U, V) & \supseteq & \mathrm{Hom}(S^p U, V) & \Rightarrow & S^p U \text{ je } \dots \\ \cong & & \cong & & \\ \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V) & \supseteq & \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V)_{sym} & & \end{array}$$

Definice. Řekneme, že p-lineární zobrazení $\Phi: U\times\dots\times U \to V$ je symetrické, jestliže pro každou permutaci $\sigma\in\Sigma_p$ platí

$$\begin{array}{ccc} \Phi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) & = & \Phi(u_1,\dots,u_p) \\ \| & & \| \\ G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & & G(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \end{array}$$

tj. budeme chtít $u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \in \ker G$

Definice. Definujme symetrickou mocninu S^pU jakožto kvocient

$$S^pU = \otimes^p U / \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p \mid \sigma\in\Sigma_p,\ u_1,\dots,u_p\in U\}$$
$$= \mathrm{span}\{p_\sigma(t) - t \mid \sigma\in\Sigma_p,\ t\in\otimes^p U\}$$

Označme $\mathrm{pr}: \otimes^p U \to S^pU$ kanonickou projekci

$$\mathrm{pr}(u_1\otimes\dots\otimes u_p) = \text{třída } u_1\otimes\dots\otimes u_p =: u_1\vee\dots\vee u_p = u_1\cdots u_p$$

Protože

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr}(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)}) & \overset{\text{rozdíl 0 v kvocientu}}{=} & \mathrm{pr}(u_1\otimes\dots\otimes u_p) \\ \| & & \| \\ u_{\sigma(1)}\vee\dots\vee u_{\sigma(p)} & & u_1\vee\dots\vee u_p \end{array}$$

je tento součin vektorů komutativní, lépe symetrický:

$$\begin{tikzcd} (u_1,\dots,u_p) \arrow[ddd, mapsto] & \Pi^p U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t"] \arrow[dd, bend right, "t^{sym}\ \text{sym}\ p\text{-lin}"'] & V \\ & \otimes^p U \arrow[ur, dashed, "\exists! G"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \\ & S^p U \arrow[uur, dashed, "\exists! F"'] & \\ u_1\vee\dots\vee u_p & & \end{tikzcd}$$

Φ sym. p-lin.

$\Rightarrow$ ex. jediné G lineární a

$G(u_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes u_{\sigma(p)} - u_1\otimes\dots\otimes u_p) = 0$

$\Rightarrow$ ex. jediné F lineární

$F(u_1\vee\dots\vee u_p) = \Phi(u_1,\dots,u_p)$

Reformulace. Zobrazení

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(S^pU, V) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Lin}_p(U,\dots,U;V) \\ F & \longmapsto & F\circ t^{sym} \end{array}$$

je bijekce.

Poznámka. Dá se ukázat, že (S^pU) je kvocientem $(T^pU) = (T^p_0 U)$ podle ideálu $\Rightarrow$ je to opět algebra se součinem

$$\begin{array}{ccc} T^pU \times T^qU & \longrightarrow & T^{p+q}U \\ \big\downarrow \mathrm{pr}\times\mathrm{pr} & & \big\downarrow \mathrm{pr} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^p U \times T^q U & \longrightarrow & T^{p+q} U \\ \downarrow {\scriptstyle pr \times pr} & & \downarrow {\scriptstyle pr} \\ S^p U \times S^q U & \overset{\vee}{\dashrightarrow} & S^{p+q} U \end{array}$$

Označme $\underbrace{e_1 \vee \dots \vee e_1 \vee}_{a_1 \times} \dots \vee \underbrace{e_n \vee \dots \vee e_n}_{a_n \times} = e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$

Věta. $\{e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n} \mid a_1 + \dots + a_n = p\}$ tvoří bázi $S^p U$.

Důkaz. Je potřeba ukázat, že $F: S^p U \to V$ je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $e_1^{a_1} \dots e_n^{a_n}$. Ekvivalentně $\Phi: U \times \dots \times U \to V$ symetrické p-lineární je jedn. určeno svými lib. hodnotami na $(e_1, \dots, e_1, \dots, e_n, \dots, e_n)$ ... tedy $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ kde $i_1 \leq \dots \leq i_p$. $\square$

Příklad. $U = (\mathbb{k}^n)^*$ s bází $(f^1, \dots, f^n) = (x^1, \dots, x^n)$

$\Rightarrow$ $S^p (\mathbb{k}^n)^*$ má bázi $(x^1)^{a_1} \dots (x^n)^{a_n}$ = homogenní polynomy stupně p

$\cong \mathbb{k}^{(p)}[x^1, \dots, x^n]$

$\Rightarrow$ $S(\mathbb{k}^n)^* \cong \mathbb{k}[x^1, \dots, x^n]$ ... známe, z pohledu lin. alg. méně zajímavé

Pozn. symetrie tenzoru $\neq$ symetrie polynomu