Stochastické procesy ve finanční matematice

Martin Kolář

Osnova:

náhodná procházka

generující funkce

Polyova věta a zákon arcsinu

Poissonův proces

Cramér-Lundbergův model

Diskrétní modely oceňování finančních derivátů

Základní věta arbitrážní teorie, úplnost trhu

Brownův pohyb

Itôovo lemma a Black-Scholesova rovnice pro oceňování opcí

Motivace

– Matematické modely ve financích jsou *stochastické*.

– Základní nástroj: *teorie pravděpodobnosti*.

Příklad:

$X_{12102020}$ ... cena akcie firmy Apple příští pondělí na konci obchodování

Dnes ... cena je neznámá a modelujeme ji jako *náhodnou veličinu*.

Příští týden v pátek ... cena je známou hodnotou (konstantou).

Pro matematické modelování ve financích je typická tato interakce náhodných a známých veličin.

Vzájemnému působení náhodnosti a plynutí času se věnuje **teorie stochastických procesů**.

Systém náhodných veličin X_t, $t \in I$, kde I je indexová množina, se nazývá stochastický proces.

Příklad: X_t … cena zvolené akcie v budoucím čase t.

Jaký je vztah mezi X_t a X_{t+1}? Mohou to být nezávislé náhodné veličiny?

Hodnota X_t obsahuje informaci o pravděpodobnostním rozdělení náhodné veličiny X_{t+1}.

Jak je to s přírustky $X_{t+2} - X_{t+1}$ a $X_{t+1} - X_t$?

Ve většině našich modelů budou *nezávislé*.

Souvisí s tzv.hypotézou efektivního trhu.

“Všechny informace dostupné v čase t jsou již obsaženy v ceně X_t.”

Důsledek: geometrický Brownův pohyb je “přirozeným ” modelem vývoje cen akcií.

Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je hlavním nástrojem modelování ve finanční matematice.

Co je to pravděpodobnost?

Frekventistický přístup:

Pravděpodobnost jevu je *limita jeho relativní četnosti* při velkém počtu opakování téhož experimentu.

Nevýhoda: omezení na *opakovatelné jevy*.

Předpoklad opakovatelnosti konkrétní situace na trhu není úplně reálný.

Bayesovský přístup:

Pravděpodobnost vyjadřuje *míru naší nejistoty* o pravdivosti nějakého tvrzení, založenou na informacích, které v danou chvíli máme.

Každá pravděpodobnost je tedy *podmíněná* (informacemi, které právě máme).

Pravděpodobnost padnutí šestky na kostce je $P(X = 6) = \frac{1}{6}$, pokud nemáme žádnou informaci o tom, jak je kostka vyrobena.

Budeme-li mít více informací, může se tato pravděpodobnost změnit.

Matematická technika výpočtů nicméně na interpretaci ve většině případů *nezávisí* a je stejná pro obě pojetí.

Opakování základních pojmů teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor (model) obvykle označujeme $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde

– Ω je prostor elementárních jevů, t.j. všech možných stavů modelovaného systému, *které chceme rozlišovat* (např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u hodu kostkou).

– $\mathcal{A}$ je množina všech *pozorovatelných jevů*. Prvky $\mathcal{A}$ jsou podmnožiny Ω.

Jev je tedy formálně vzato množina elementárních jevů, které *jsou s ním slučitelné.*

Například jev "padne sudé číslo" je množina $\{2, 4, 6\}$

Je-li Ω konečná nebo spočetná (tak tomu bude u všech diskrétních modelů), je $\mathcal{A}$ v definici pravděpodobnostního prostoru nadbytečné, neboť automaticky $\mathcal{A}$ je rovno $\exp \Omega$, *množině všech podmnožin* Ω.

– $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ je pravděpodobnostní míra. V diskrétním případě stačí znát hodnoty této míry na elementárních jevech.

Tedy $P : \Omega \to \langle 0, 1 \rangle$. $P(\omega)$ je pak pravděpodobnost elementárního jevu ω a pro obecný jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Pokud je ale Ω nespočetná, pak $\exp \Omega$ má příliš velkou mohutnost, aby se na ní dala definovat pravděpodobnostní míra. Musíme se pak omezit na menší σ-algebru. S tím se setkáme až u spojitých modelů.

Diskrétní náhodné proměnné

Diskrétní náhodná proměnná (náhodná veličina) je funkce

$$X : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R},$$

kde $\{x_1, x_2, \dots\}$ je diskrétní podmnožina $\mathbb{R}$.

Definice 1.1. *Pravděpodobnostní funkce* náhodné veličiny X je definována jako

$$f(x) = P(X = x).$$

Definice 1.2. *Distribuční funkce* náhodné veličiny X je

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Připomeňme si ještě definici nezávislosti dvou jevů.

Definice 1.3. Jevy A, $B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, jestliže

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tedy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Jinak řečeno nastal-li jev B, *nezmění* to pravděpodobnost jevu A.

Definice 1.4. Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou *nezávislé*, jestliže jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ jsou nezávislé pro všechna x a y. Jinými slovy, znalost hodnoty X nedává žádnou informaci o

hodnotě Y.

Pravděpodobnostní funkce obsahuje všechny informace o uvažované náhodné veličině. Často nám ale stačí její *číselné charakteristiky*.

Definice 1.5. *Očekávání* (střední hodnota) náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $f(x)$ je definována jako

$$E(X) = \sum_{x:\, f(x)>0} x f(x),$$

Očekávání můžeme vypočítat také pomocí vztahu

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Definice 1.6. Je-li k přirozené číslo, *k-tý moment* m_k náhodné veličiny X je definován jako

$$m_k = E(X^k).$$

Definice 1.7. *k-tý centrální moment* σ_k je definován jako

$$\sigma_k = E((X - m_1)^k).$$

Speciálně,

$$m_1 = E(X)$$

je *střední hodnota* a

$$\sigma_2 = E((X - E(X))^2)$$

je *rozptyl* (variance). Tedy $\sigma_2 = \sigma^2$, kde $\sigma = \sqrt{\sigma_2}$ je střední směrodatná odchylka.

Definice 1.8. Nechť A je jev, tj. $A \subseteq \Omega$, a nechť $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina definovaná vztahem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A \end{cases}.$$

Pak I_A se nazývá *indikátorová funkce* jevu A.

Libovolnou náhodnou veličinu můžeme zapsat pomocí indikátorových funkcí jevů $A_i = \{X = x_i\}$. Máme

$$X = \sum_i x_i I_{A_i}.$$

I_A je Bernoulliovská náhodná veličina. Nabývá jen hodnot 0 a 1.

Závislost a nezávislost náhodných veličin

Lemma 1.9. *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Důkaz: Označme $A_x = \{X = x\}$ a $B_y = \{Y = y\}$. Pak

$$XY = \sum_{x,y} xyI_{A_x \cap B_y},$$

tedy

$$E(XY) = \sum_{x,y} xyE(I_{A_x \cap B_y}) = \sum_{x,y} xyP(A_x \cap B_y) =$$

$$\sum_{x,y} xyP(A_x)P(B_y) = (\sum_x xP(A_x))(\sum_y yP(B_y)) = E(X)E(Y).$$

Opak obecně neplatí.

Definice 1.10. Říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou *nekorelované*, jestliže platí:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Věta 1.11. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Pak*

— $Var(aX) = a^2 Var(X)$ pro $a \in \mathbb{R}$.

— Jsou-li X a Y nekorelované (speciálně nezávislé) náhodné veličiny, pak

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Definice 1.12. ***Kovariance*** náhodných veličin X a Y je definována jako

$$cov(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right].$$

Korelační koeficient X a Y je

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Platí:

$$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow cov(X,Y) = 0$$

a

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Dále je

$$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

Jak ověřit nezávislost dvou daných náhodných veličin?

Definice k tomu většinou vhodná není.

Definice 1.13. Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny (na stejném pravděpodobnostním prostoru). *Sdružená distribuční funkce* X a Y je definovaná vztahem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y).$$

Definice 1.14. ***Sdružená pravděpodobnostní funkce***:

$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ je definovaná vztahem

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y).$$

Analogicky se definuje sdružená pravděpodobnostní funkce pro více náhodných veličin. Následující lemma dává dobře ověřitelné kriterium nezávislosti.

Lemma 1.15. *Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Ze znalosti sdružené pravděpodobnostní funkce $f_{X,Y}$ můžeme vypočítat *marginální pravděpodobnostní funkce* f_X a f_Y. Máme

$$f_X(x) = P(X = x) = P\Big(\bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\})\Big)$$

$$= \sum_y P(X = x \ \wedge \ Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x, y).$$

Příklad 1.16. Nechť $X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$a $Y : \Omega \to \{-1, 0, 2\}$ jsou náhodné veličiny a sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

	$y = -1$	$y = 0$	$y = 2$	f_X
$x = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
$x = 2$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
$x = 3$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
f_Y	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{18}{18}$

Jsou X a Y nezávislé?

Zřejmě ne, v tom případě by řádky tabulky musely být násobkem jeden druhého.

Vypočteme kovarianci těchto dvou náhodných veličin. Máme

$$XY : \Omega \to \{-1, 0, -2, -3, 2, 4, 6\} .$$

Dále

$$E(X) = \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{37}{18}, \quad E(Y) = \frac{13}{18}$$

a

$$E(XY) = -1\frac{1}{18} + 2\frac{2}{18} - 2\frac{2}{18} + 4\frac{3}{18} + 6\frac{3}{18} = \frac{29}{18}$$

Celkem tedy

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{29}{18} - \frac{481}{324} = \frac{522-481}{324} = \frac{41}{324}.$$