Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Lineární komplementarita pro americké opce

Pro americkou call a put opci platí parc. dif. nerovnost

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \qquad (1)$$

pro všechna $S \in (0, \infty)$ a $t \in (0, T)$.

Pro ověření tohoto tvrzení uvažujme americký call s dividendami. Víme, že pro $0 < S < S_u(t)$ platí Black-Scholesova rovnice, tedy nastává rovnost.

Je-li naopak $S \geq S_u(t)$ pak

$$V(S,t) = \max(S-K,0) = S-K \tag{2}$$

neboť $S_u(t) \geq K$. Dosazením funkce $S-K$ do levé strany

Black-Scholesovy rovnice dostaneme

$$(r-d)S - r(S-K) = rK - dS \leq rK - dS_u(t) \leq 0, \tag{3}$$

neboť platí

$$S_u(t) \geq K \max(\frac{r}{d}, 1) \tag{4}$$

Tedy hodnota americké call opce splňuje následující úlohu lineární komplementarity

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \tag{5}$$

$$V(S,t) \geq \max(S-K,0) \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)(V(S,t) - \max(S-K,0)) = 0 \tag{7}$$

pro $S \in (0,\infty)$ a $t \in (0,T)$.

Analogie - problém překážky

– elastická struna je upevněná v bodech A, B.

– prochází okolo konvexní překážky

– nevíme, kde se má dotknout překážky, jen to, že musí ležet nad překážkou

– musí mít zápornou nebo nulovou křivost

– musí být spojitá

– derivace musí být spojitá

Problém vede na úlohu o lineární komplementaritě

překážka je popsána funkcí g

$$u''(u-g)=0, \qquad -u''\geq 0, | \quad u-g\geq 0.$$

navíc

$$u(-1)=u(1)=0$$

Vhodný tvar pro numerické řešení.

Řešení úlohy o lineární komplementaritě

Máme dánu matici A a vektory b a g.

Chceme řešit úlohu o lin. komplementaritě v diskrétním tvaru

$$Au \geq b, \qquad u \geq g \tag{8}$$

a

$$(Au - b)(u - g) = 0, \tag{9}$$

kde všechny tři vztahy jsou chápány po složkách.

Nechť A je tridiagonální a diagonálně dominantní matice, tedy platí

$$\alpha_i > |\beta_i| + |\gamma_i|, \tag{10}$$

pro každé i, kde α_i jsou hodnoty na hlavní diagonále a β_i, γ_i hodnoty na vedlejších diagonálách.

Projektovaná SOR metoda

V každém jednotlivém kroku přejdeme od vektoru aproximace u^p k u^{p+1} tak aby platilo

$$u^{p+1} \geq g. \tag{11}$$

Pak se ukáže že limita těchto aproximací je řešení úlohy.

Definujeme posloupnost aproximací řešení úlohy vztahy

$$u^0 = C, \qquad u^{p+1} = \max(T_\omega u^p + c_\omega, g), \tag{12}$$

kde maximum opět bereme po složkách.

Platí

Věta: Pokud posloupnost u^p konverguje k u, pak u je řešením úlohy.

Označme

$$F(u) = \max(T_\omega u + c_\omega, g). \tag{13}$$

Zřejmě F je nelineární zobrazení. Nicméně důkaz toho že je to kontrakce se redukuje na ověření stejné vlastnosti pro lineární operátor T.

F je kontrakce pokud $\|T_\omega\| < 1$, tedy pokud T samo o sobě je kontrakce.

Numerické metody pro americké opce

Chceme řešit úlohu lineární komplementarity

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,t) - g(x,t)) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0 \tag{15}$$

a

$$u(x,t) - g(x,t)) \geq 0 \tag{16}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T$.

Funkce $g(x,t)$ je transformovaná výplata příslušného typu opce.

Provedeme diskretizaci jako v případě evropských opcí.

Pro příslušné aproximace funkcí u a g označíme u^j a g^j hodnoty na časové vrstvě t_j, tedy

$$u^j = (u^j_{-N+1}, \ldots, u^j_{N-1}) \in \mathbb{R}^{2N-1} \tag{17}$$

Opět zvolíme N tak velké, abychom mohli v krajních bodech aproximovat řešení pomocí okrajových podmínek, jako u evropských opcí.

Můžeme vzít

$$u^j_{-N} = g(x_{-N}, t_j), \qquad u^j_N = g(x_N, t_j) \tag{18}$$

protože pro velké hodnoty x je okrajová podmínka přibližně rovna příslušné počáteční podmínce.

Pak diskrétní verze úlohy o lineární komplementaritě má vektorový tvar

$$Au^{j+1} \geq u^j + b^j, \qquad u^{j+1} \geq g^{j+1}, \qquad j = 0, \ldots, m-1 \quad (19)$$

$$(Au^{j+1} - b)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0, \qquad (20)$$

pro všechna $i = 1, \ldots, 2N-1$.

Matice A je stejná jako u implicitní metody pro evropské opce,

tedy tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & \dots & & \\ & & & \dots & \gamma \\ & & & \gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix} \tag{21}$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma g(x_{-N}, t_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma g(x_N, t_{j+1}) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Řešení najdeme opět pomocí projektované SOR metody.