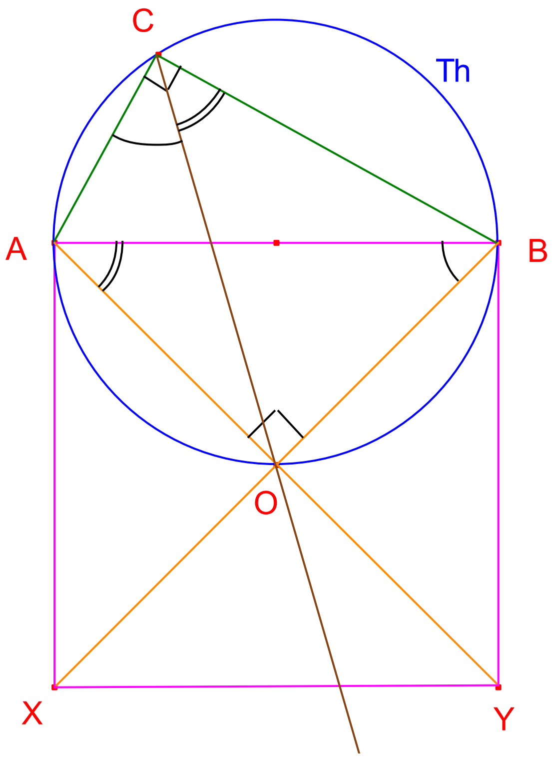
1) Nad přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC je v polorovině opačné k polorovině ABC sestrojen čtverec se středem O. Dokažte, že polopřímka CO je osou úhlu ACB.

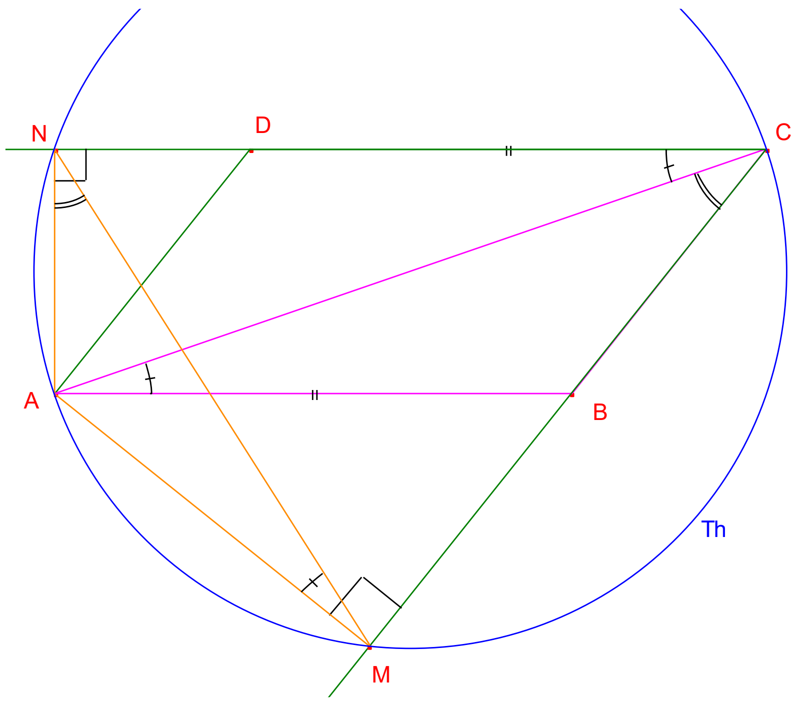


Úhlopříčky ve čtverci jsou kolmé - bod O leží na Thaletově kružnici Th.

Úhly vyznačené stejným symbolem jsou shodné - obvodové úhly k témuž oblouku.

Trojúhelník ABO je rovnoramenný.

2) Nechť je dán rovnoběžník ABCD. Označme M kolmý průmět bodu A na přímku BC a N kolmý průmět bodu A na přímku CD. Dokažte, že trojúhelníky MAN a ABC jsou podobné.



Podle Thaletovy věty leží body M a N na kružnici nad průměrem AC.

ACM, ANM ... obvodové úhly k AM

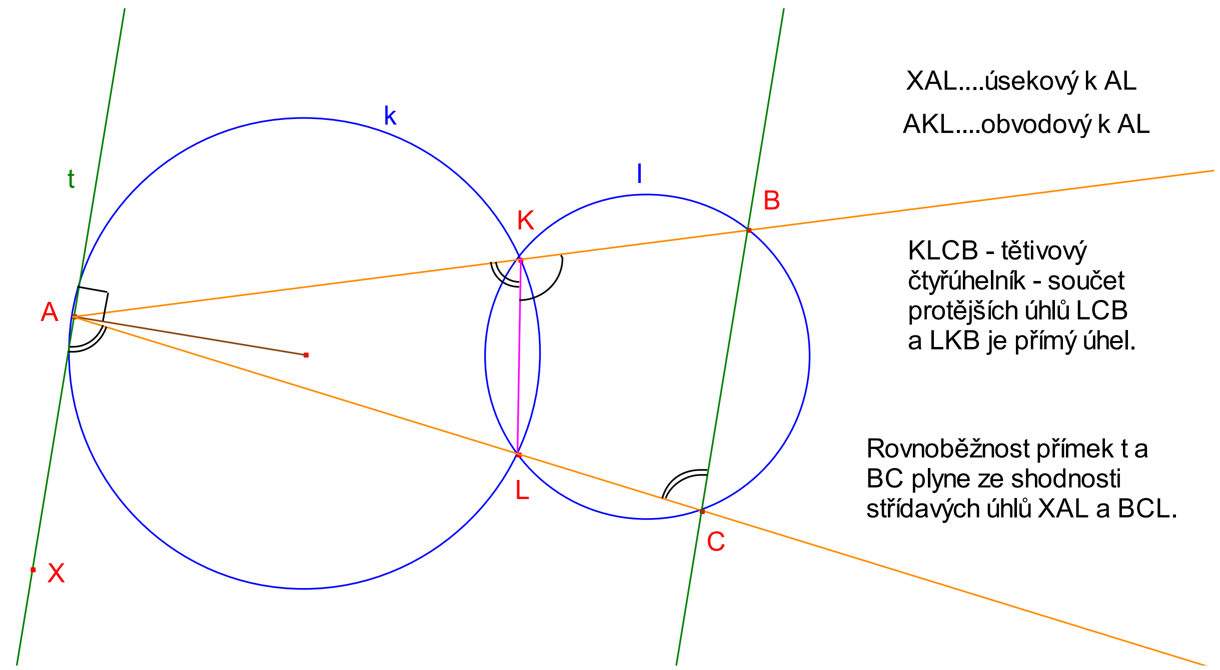
NCA, NMA - obvodové úhly k AN

ACD, CAB ... střídavé úhly

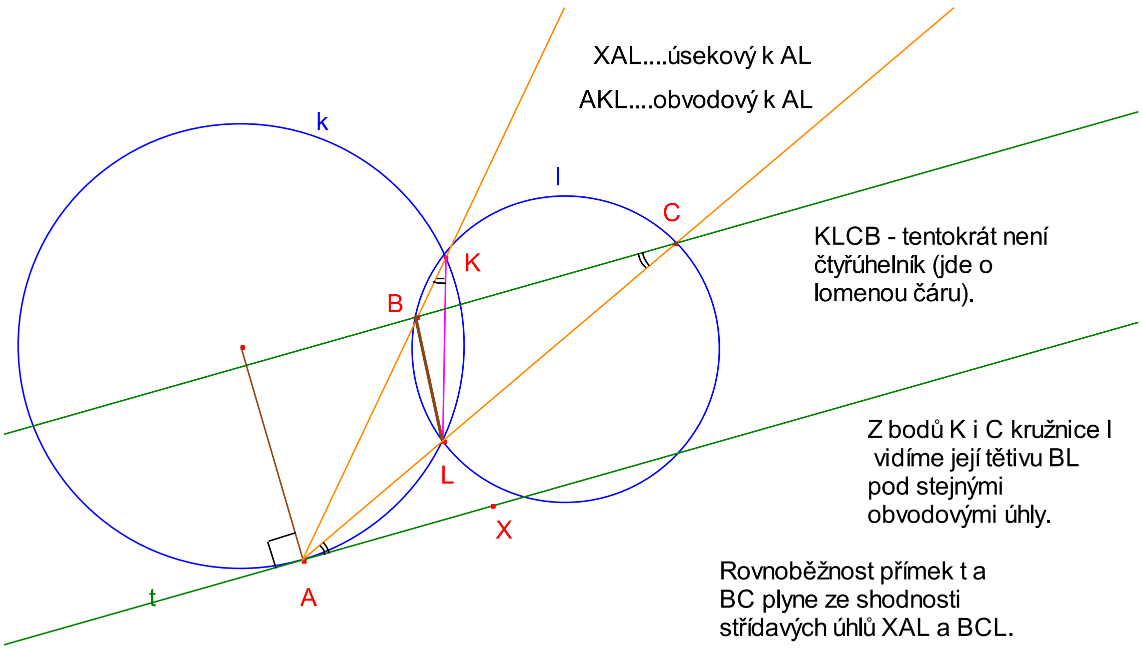
Trojúhelníky ABC a MAN jsou podobné podle věty uu.

Aleš Kobza

3) Uvažujme dvě kružnice k a l, které se protínají ve dvou bodech K a L. Nechť A je libovolný bod kružnice k, který je různý od bodů K, L a dále takový, že každá z přímek AK a AL protíná kružnici l ve dvou bodech. Průsečík kružnice l s přímkou AK různý od K označme B, průsečík kružnice l s přímkou AL různý od L označme C. Konečně označme t tečnu kružnice k vedenou bodem A. Dokažte, že přímky t a BC jsou rovnoběžné.

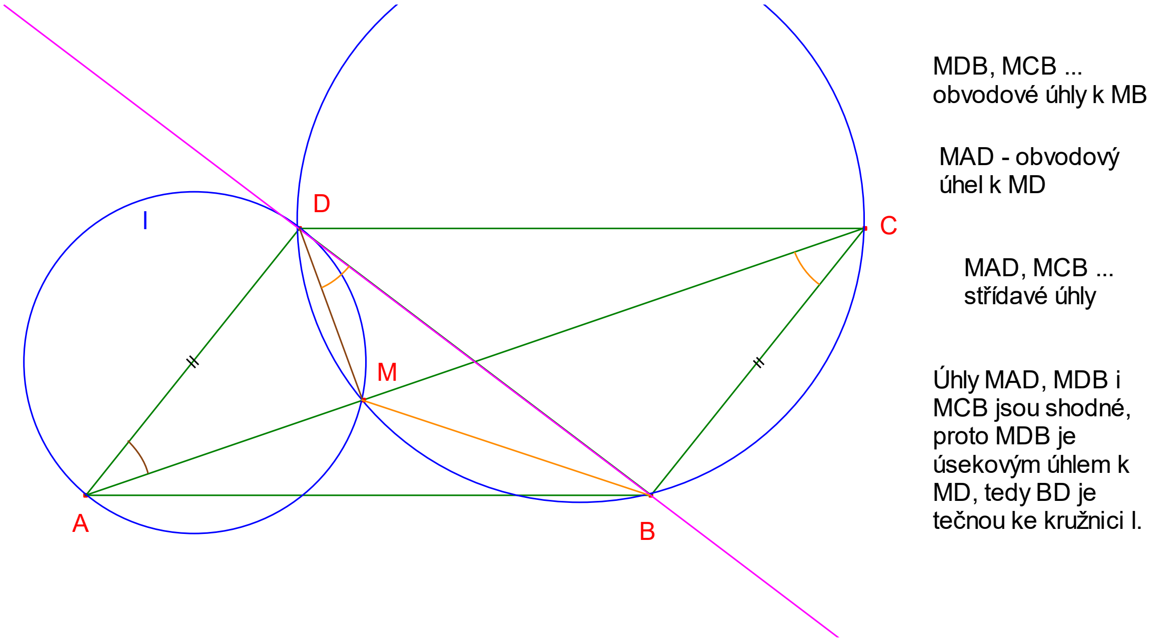


Výše uvedená poloha není jediná, která může nastat. Níže následuje rozbor druhé možné polohy zadaných útvarů. Argumentace je zde částečně odlišná.

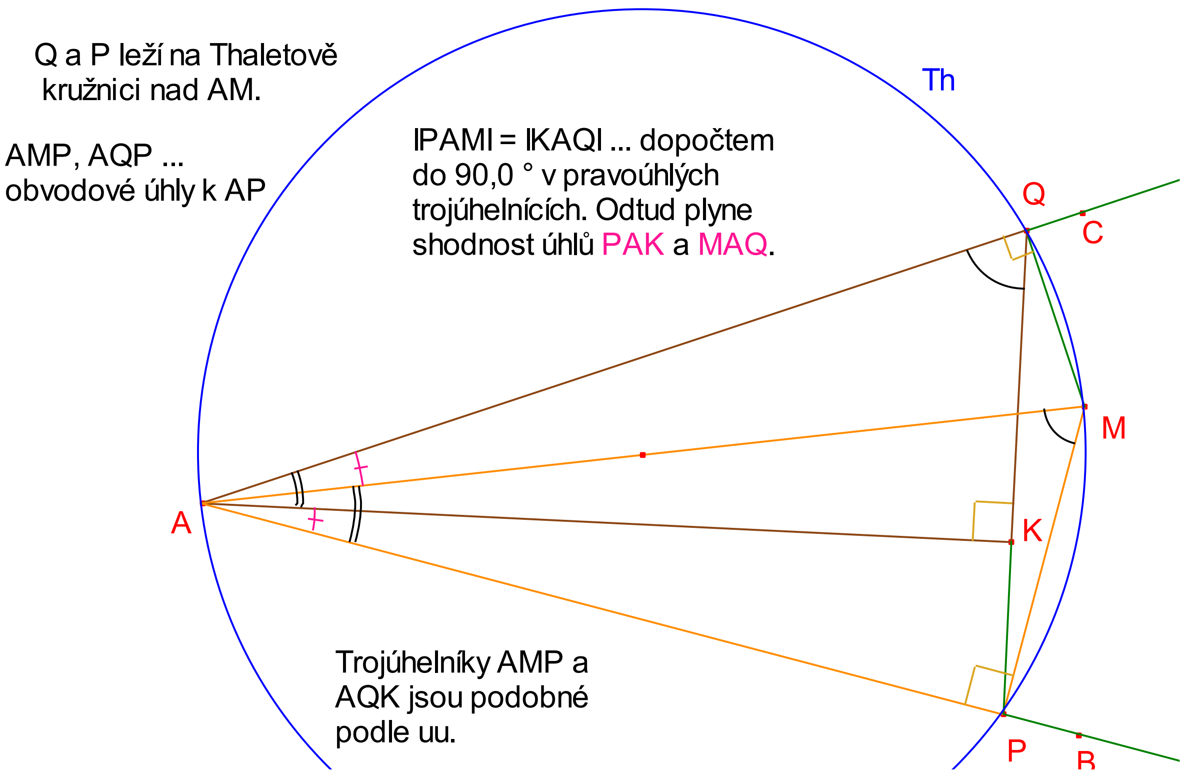


Aleš Kobza

4) Nechť AB je delší stranou rovnoběžníku ABCD. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku BCD protíná úsečku AC v jejím vnitřním bodě, označme jej M. Dokažte, že přímka BD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ADM.

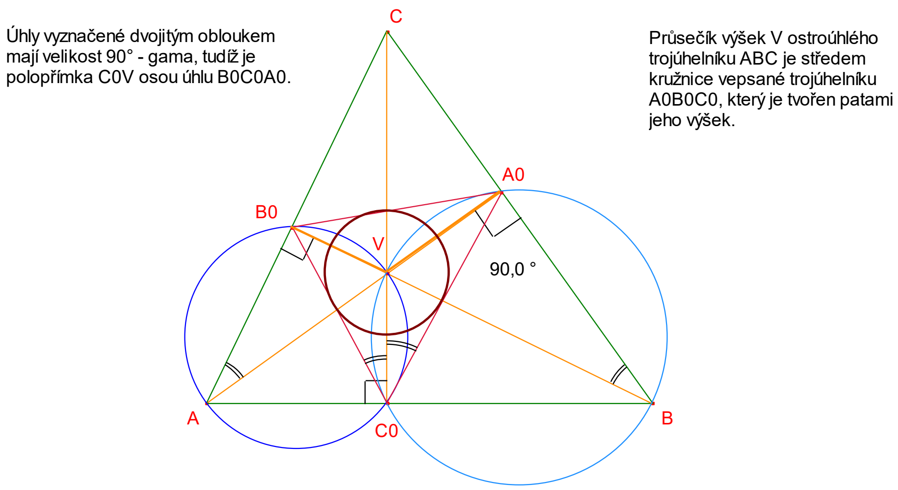


5) Uvnitř úhlu BAC je dán bod M. Označme po řadě P, Q jeho kolmé průměty na ramena AB, AC. Nechť dále K značí kolmý průmět A na PQ. Dokažte, že úhly PAK a MAQ mají stejné velikosti.

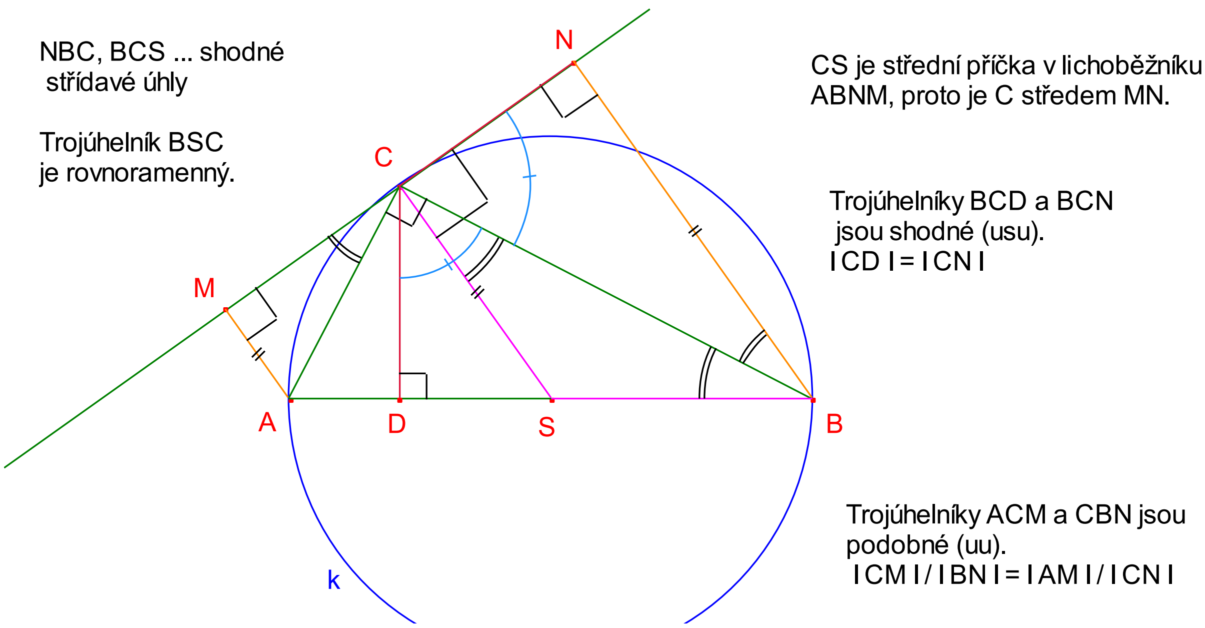


Aleš Kobza

6) Uvažujme ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme A_0, B_0, C_0 po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C. Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníku ABC je středem kružnice vepsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$.



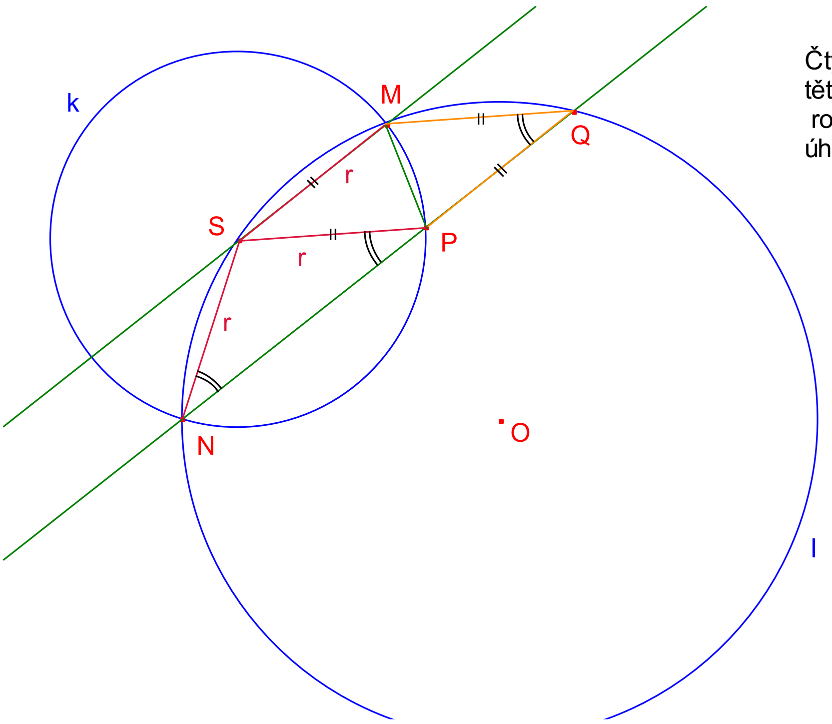
7) Úsečka AB je průměrem kružnice k. Přímka t je tečnou k s dotykovým bodem C. Označme po řadě M, N kolmé průměty bodů A, B na přímku t. Nechť D značí kolmý průmět bodu C na úsečku AB. Dokažte, že pak platí $|CD|^2 = |AM| \cdot |BN|$.



Podobně jsou shodné trojúhelníky ACD a ACM.

Aleš Kobza

8) Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný.
Poznámka. Označení vrcholů P, Q v trojúhelníku MPQ není důležité. Označme proto bez újmy na obecnosti P ten z bodů přímky vedené bodem N rovnoběžně s přímkou MS, který leží na kružnici k.



Čtyřúhelník NQMS je tětivový lichoběžník, takže je rovnoramenný. Proto jsou úhly SNQ a MQP shodné.

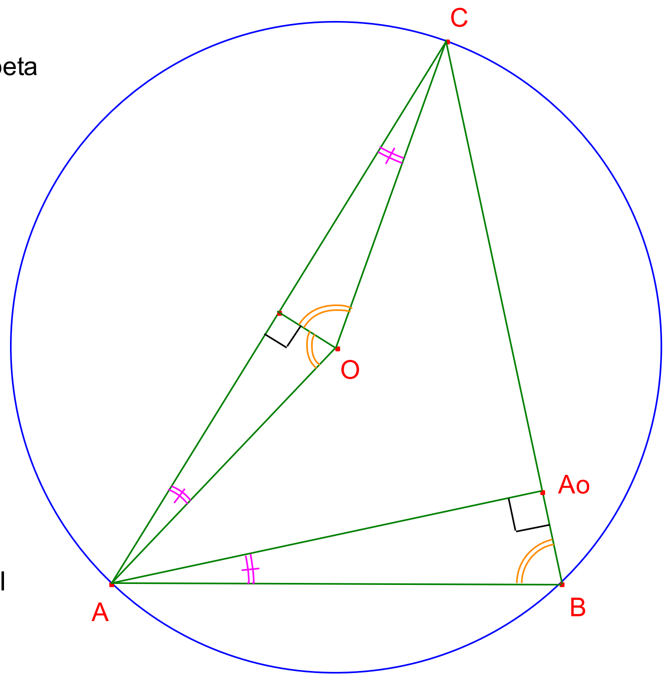
Trojúhelník NPS je rovnoramenný, proto jsou jeho úhly při základně SPN a SNP shodné.

Ze shodnosti souhlasných úhlů SPN a MQP vyplývá rovnoběžnost úseček SP a MQ.

Čtyřúhelník SPQM je tedy kosočtverec, takže | MQ | = | PQ |.

9) Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme O střed kružnice jemu opsané a A_0 patu výšky z bodu A. Dokažte, že úhly BAA_0 a OAC mají stejné velikosti.

| AoAB | = 90° - beta



Trojúhelník AOC je rovnoramenný. Dopočtem do 180° pro velikost úhlu při základně vypočteme, že
| OAC | = 90° - beta.

ABC ...
obvodový k AC

AOC ...
středový k AC

2 * | ABC | = | AOC |

Aleš Kobza