

Téma 6. Práce a mechanická energie

Úloha 6.1

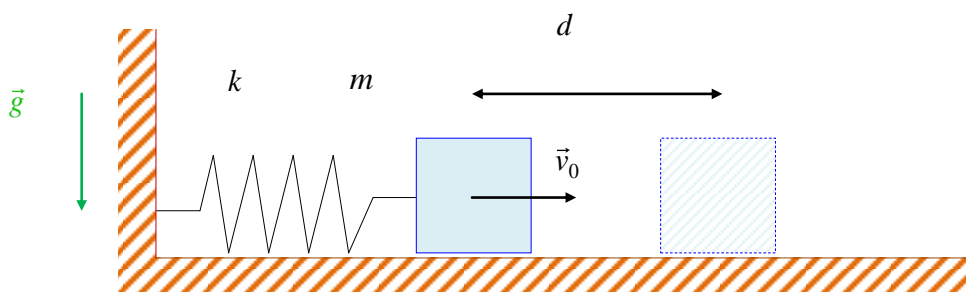
V rovině jsou dány body $A = (0; 0)$, $B = (1; 1)$, $C = (1; 0)$ a $D = (0, 1)$, souřadnice jsou zadány v kartézské soustavě souřadnic a jsou udávány v metrech. Jedna ze sil působících na hmotný bod má složky $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \sim (\alpha xy, \beta(y - x))$, kde $\vec{r} \sim (x, y)$ a α a β jsou rozměrové konstanty, jejichž číselná hodnota v soustavě SI je 1, tj. $\alpha = 1 \text{ Nm}^{-2}$, $\beta = 1 \text{ Nm}^{-1}$. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{F} , přemístí-li se hmotný bod z bodu A do bodu B

- po úsečce AB ,
- po oblouku paraboly $y = x^2$,
- po oblouku kubické paraboly $y = x^3$,
- po lomené čáře ACB ,
- po lomené čáře ADB .

Vzhledem k tomu, že práce nezávisí na parametrizaci křivky, zvolte ji co nejjednodušeji.

Úloha 6.2

Kostka o hmotnosti m je upevněna na vodorovné pružině o tuhosti k a spočívá na vodorovném stole. Pružina není napjatá ani stlačená a při napínání či stlačování se řídí Hookeovým zákonem.



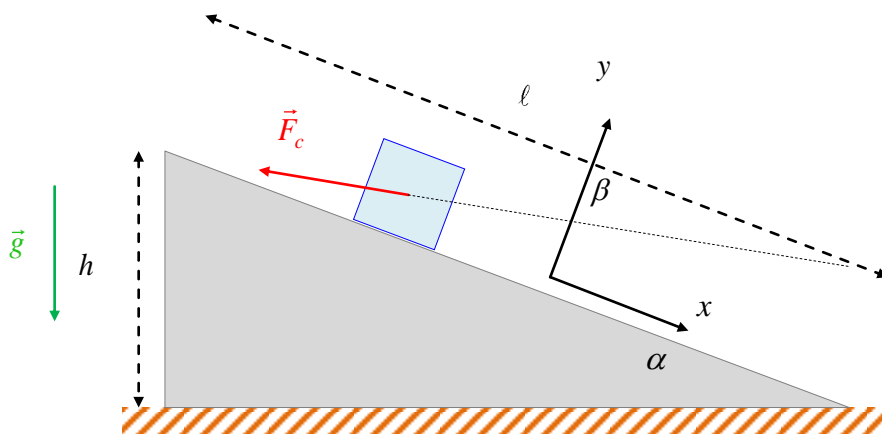
V okamžiku $t = 0$ je kostce udělena vodorovná rychlost \vec{v}_0 směřující vpravo. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a stolem je f , koeficient statického tření je f_0 . Určete

- vzdálenost d prvního bodu obratu při pohybu kostky od její původní polohy,
- dobu t_0 , za kterou kostka do bodu obratu dorazí,
- práci každé ze sil, jimiž na kostku působí okolní objekty, v časovém intervalu $t \in [0, t_0]$.

Tíhové pole Země považujte za homogenní, odpor vzduchu při pohybu kostky za zanedbatelný. Zanedbatelná je i hmotnost pružiny. Výsledky uveďte pro číselné hodnoty $m = 0,20 \text{ kg}$, $k = 20 \text{ Nm}^{-1}$, $f = 0,15$, $f_0 = 0,20$, $v_0 = 1,5 \text{ ms}^{-1}$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

Úloha 6.3

Kostka ledu o hmotnosti $m = 100 \text{ kg}$ klouže po nakloněné rovině délky $\ell = 5,0 \text{ m}$ a výšky $h = 3,0 \text{ m}$. Zpočátku je kostka v klidu. Proti pohybu kostky působí člověk stálou silou, která svírá s nakloněnou rovinou úhel $\beta = 30^\circ$, měřeno v kladném geometrickém smyslu vzhledem k nakloněné rovině.



Kostka se pohybuje se stálým zrychlením o velikosti $a = 1,0 \text{ ms}^{-2}$. Koeficient dynamického tření mezi ledem a podložkou je $f = 0,01$. Tíhové pole Země považujeme za homogenní, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$, odpor vzduchu je zanedbatelný. V časovém intervalu $[0, t_0]$, kde t_0 je okamžik, v němž se kostka octne na konci nakloněné roviny, určete:

- práci, kterou vykoná tíhová síla,
- práci, kterou vykoná třecí síla,
- práci, kterou vykoná člověk,
- celkovou práci všech sil, jimiž okolní objekty působí na kostku,
- změnu velikosti rychlosti kostky,
- vzdálenost, kterou urazí kostka po vodorovné rovině (poté, co sklouzne z nakloněné roviny) než se zastaví.

Úloha 6.4

Na dně svislé kruhové smyčky o poloměru R leží tělísko (hmotný bod) o hmotnosti m . Tělísku je udělena rychlost \vec{v}_0 ve vodorovném směru. Soustava je umístěna v tíhovém poli Země, které považujeme za homogenní (tíhové zrychlení je \vec{g}). Tření mezi tělískem a smyčkou a odpor vzduchu zanedbáváme. Pohyb tělíska posuzujeme v laboratorní vztažné soustavě, kterou považujeme za inerciální. (V této úloze použijete mj. zákon zachování energie.)

- Jaká musí být nejmenší velikost v_0 rychlosti \vec{v}_0 , aby tělísko prošlo nejvyšším bodem smyčky?
- Bude-li rychlost \vec{v}_0 menší, než je stanoveno v bodě a), určete výšku nad úrovní dolního bodu smyčky, v níž tělísko ztratí se smyčkou kontakt.
- Jaký bude další pohyb tělíska? (Stačí kvalitativně charakterizovat.)

Úloha 6.5

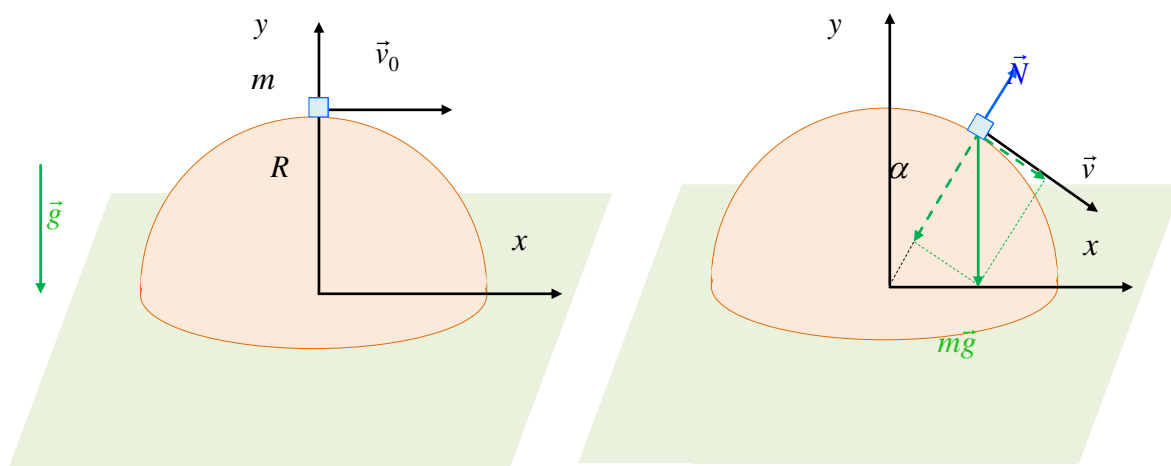
Střela opustila hlaveň, jejíž ústí je ve výšce $h = 1,5 \text{ m}$ nad vodorovným povrchem Země, rychlostí o velikosti $v_0 = 350 \text{ m s}^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha = 30^\circ$. Pomocí zadaných hodnot určete kinetickou a potenciální energii střely vzhledem k laboratorní soustavě spojené se Zemí (přesněji jde v případě potenciální energie o soustavu střela-Země) v následujících bodech její trajektorie, resp. okamžicích jejího letu:

- bezprostředně po opuštění ústí hlavně,
- v nejvyšším bodě trajektorie,
- při průchodu bodem na úrovni ústí hlavně,
- v okamžiku dopadu na povrch Země.

Co platí po součet kinetické a potenciální energie? Nulovou hladinu potenciální energie zvolte na úrovni ústí hlavně, odpor vzduchu zanedbejte.

Úloha 6.6

Na vrchol polokoule o poloměru R pevně spojené s vodorovnou podložkou položíme malé tělísko (hmotný bod) o hmotnosti m a udělíme mu vodorovnou rychlost o velikosti v_0 (obrázek).



Tělísko klouže po povrchu koule bez tření, odpor vzduchu je zanedbatelný. Určete výšku nad podložkou, ve které se tělísko oddělí od povrchu koule. (K řešení potřebujete mj. zákon zachování mechanické energie.)

Úloha 6.7

Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po vodorovné podložce po kružnici o poloměru R . Při pohybu na něj působí (kromě dalších sil) také třecí síla, koeficient dynamického tření je f . Jakou práci vykoná třecí síla při jednom oběhu kružnice a) v kladném směru, b) v záporném směru? Můžeme určit práci výslednice ostatních sil působících na hmotný bod? Pokud ano, určete ji, pokud ne, závěr zůvodněte.