

Matematická analýza 1

Elementární funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

26.09.2025

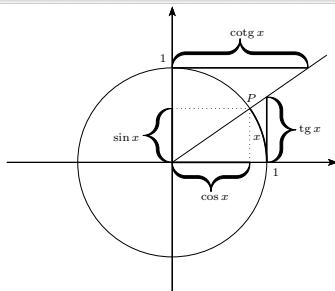
Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice

Buď $x \in \mathbb{R}$. Necht' P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.



Co budeme „často“ používat

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Definice

Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

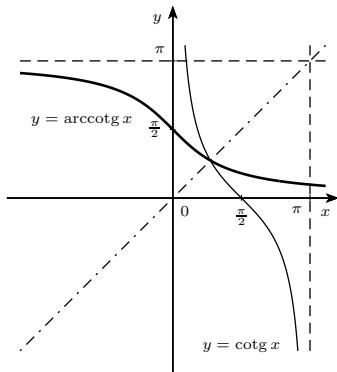
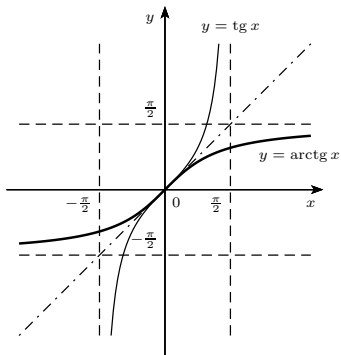
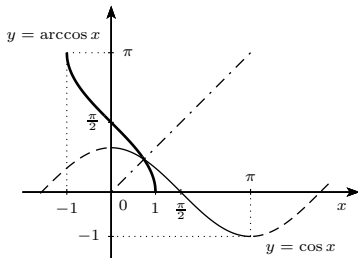
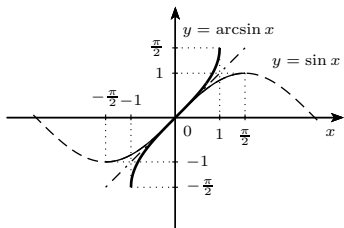
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce*.

Věta

Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

1. *Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou rostoucí, funkce $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.*
2. *Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou liché.*



Polynom

Definice

Funkci $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu.

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P , jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P , existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q , tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá *násobnost kořene* α polynomu P .

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ je polynom stupně $n \geq 0$.

1. (Základní věta algebry.) Polynom P má nad komplexním oborem $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.
2. Je-li komplexní číslo α k -násobným kořenem reálného polynomu P , je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha}$ k -násobným kořenem polynomu P .
3. (Rozklad polynomu v oboru reálných čísel.) Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ všechny reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $k_1, \dots, k_r$ a $(c_1 \pm id_1), \dots, (c_s \pm id_s)$ všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$, platí

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} [(x - c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \dots [(x - c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

4. Nechť $a_n = 1$. Je-li celé číslo α kořenem polynomu P s celočíselnými koeficienty, pak α je dělitelem čísla a_0 .

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P , Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\text{st } P < \text{st } Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\text{st } P \geq \text{st } Q$.

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci tvaru $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

- a) Je-li číslo α reálný k -násobný kořen polynomu Q , pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

- b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k -násobné kořeny polynomu Q , pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

Malá odbočka

Definice

Bud' A množina. Řekneme, že relace $\leq$ na A je *uspořádání*, jestliže

1. $\forall x \in A$ platí $x \leq x$,
2. $\forall x, y \in A$ platí $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$,
3. $\forall x, y, z \in A$ platí $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$.

Je-li $\leq$ uspořádání na A , pak dvojice $(A, \leq)$ se nazývá *uspořádaná množina*.

Definice

Bud' $A \neq \emptyset$ uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, libovolná. Řekneme, že prvek $a \in A$ je *supremum* množiny B , píšeme $a = \sup B$, jestliže

1. $x \leq a$ pro každé $x \in B$,
2. je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$ pro každé $x \in B$, pak $a \leq y$.