

Matematická analýza 1

Elementární funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

03.10.2025

Exponenciální a logaritmická funkce

Definice

Bud' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujeme

$$a^c = \sup \{a^x : x \in \mathbb{Q}, x \leq c\}.$$

Pro $a = 1$ položmě $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujeme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

Definice

Bud' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a .

Věta

Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = (0, +\infty)$ pro $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$.
2. Funkce f je rostoucí v $\mathbb{R}$ pro $a > 1$, klesající v $\mathbb{R}$ pro $a < 1$ a konstantní v $\mathbb{R}$ pro $a = 1$.

Definice

Bud' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a , značí se $y = \log_a x$.

Věta

Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. Funkce f je rostoucí na $(0, +\infty)$ pro $a > 1$ a klesající na $(0, +\infty)$ pro $a < 1$.
3. Pro $x, y \in (0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$ platí

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Mocninná funkce

Definice

Bud' $s \in \mathbb{R}$. Pro $x > 0$ definujeme funkci $y = x^s$ a nazýváme ji *mocninou funkcí*.

Věta

Mocninná funkce $f(x) = x^s$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$ a $H(f) = (0, +\infty)$ pro $s \neq 0$, $H(f) = \{1\}$ pro $s = 0$.
2. Funkce f je rostoucí v $(0, +\infty)$ pro $s > 0$, klesající v $(0, +\infty)$ pro $s < 0$ a konstantní v $(0, +\infty)$ pro $s = 0$.
3. Platí $f(x) = x^s = (e^{\ln x})^s = e^{s \ln x}$ pro $x \in (0, +\infty)$.

Poznámka

Je-li $s \in \mathbb{Q}$, definujeme x^s pro $x < 0$, právě když v základním tvaru $\frac{m}{n}$ čísla s je číslo n liché. Pak klademe $x^s = \sqrt[n]{x^m}$ a $\sqrt[n]{a} = a$.

$$x^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{x^2}$$

Hyperbolické funkce

Definice

Funkci f definovanou

$$f: y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

nazýváme *hyperbolický sinus*. Podobně funkci

$$g: y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

nazýváme *hyperbolický kosinus*.

Platí dva základní vztahy

$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh 2x$$