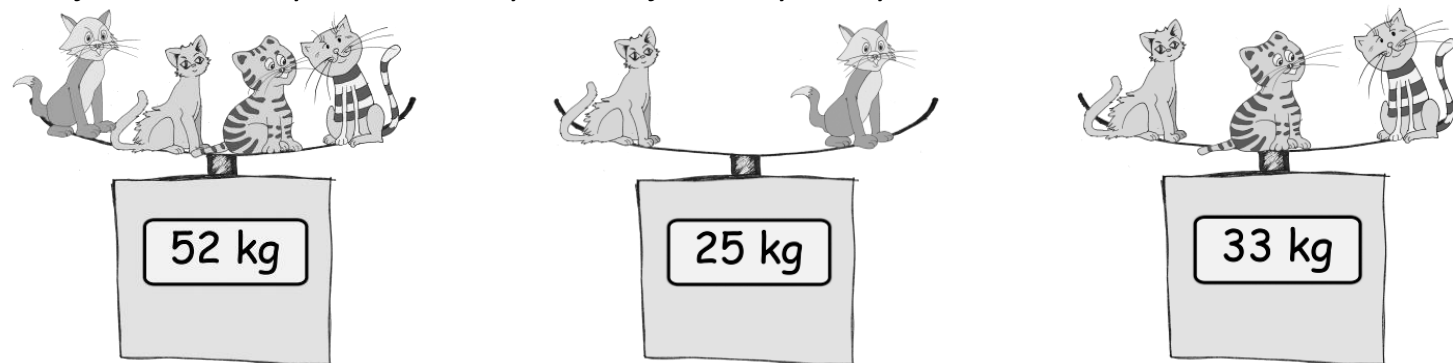


Třikrát jsme zvážili čtyři různé kočky. Podívej se na výsledky:



Spočítej, kolik váží kočka na následujícím obrázku:
Výsledek zdůvodni.



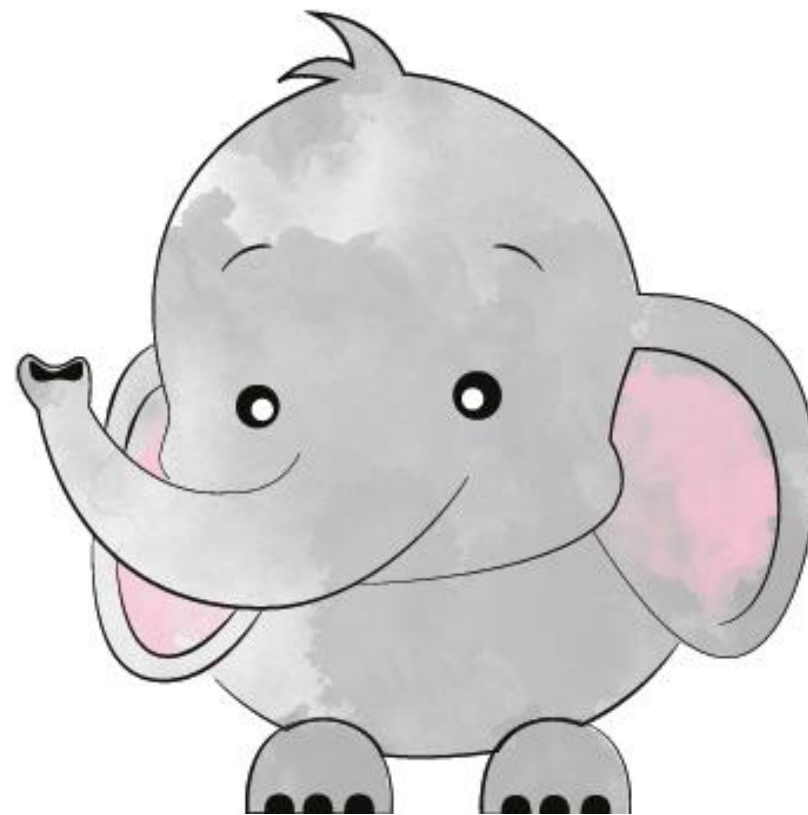
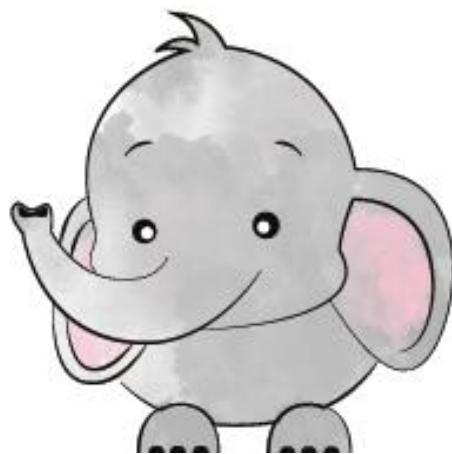
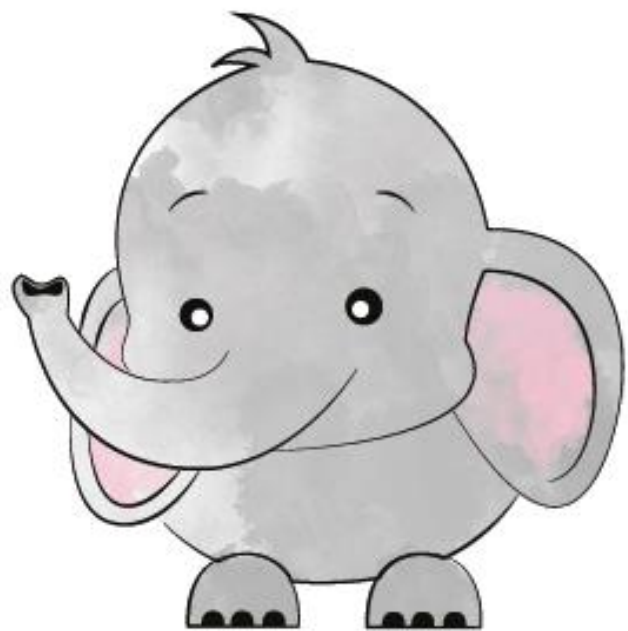
Matematické usuzování a zpracování numerických podnětů

Hynek Cígler, Vendula Šamajová

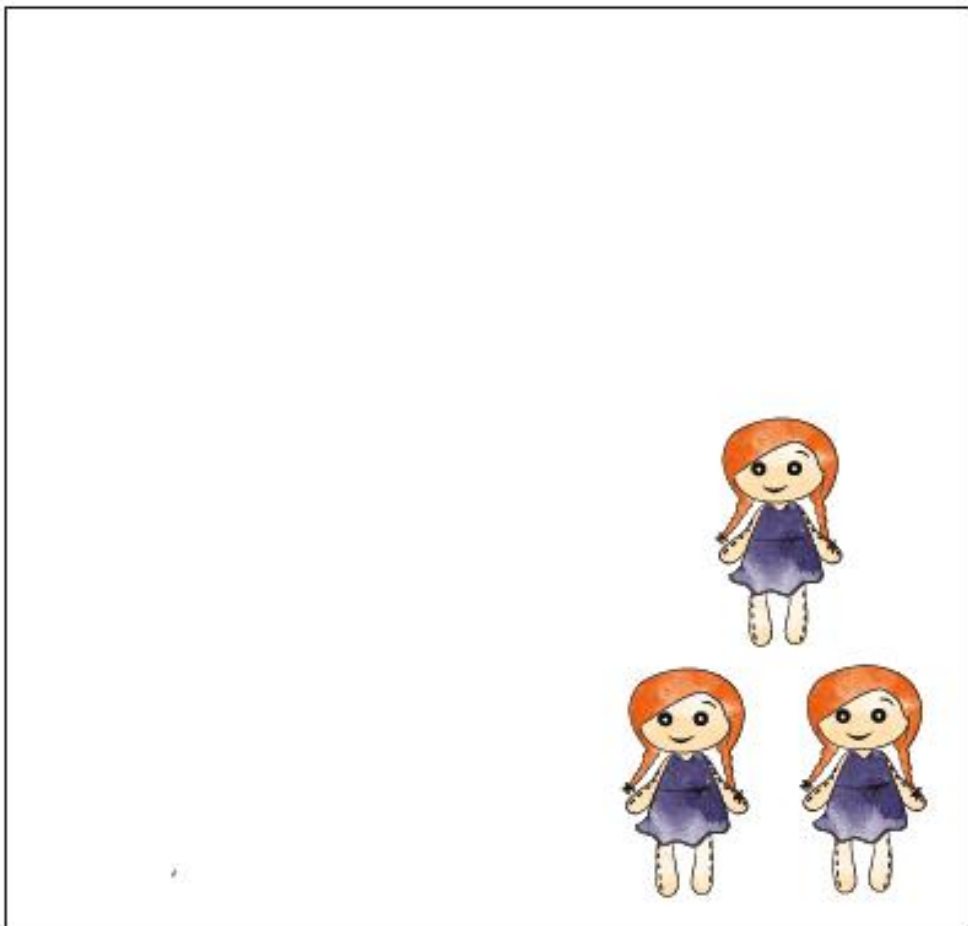
Katedra psychologie & Institut pro výzkum dětí, mládeže a rodiny
Fakulta sociálních studií, Masarykova univerzita

**Co to jsou
matematické
schopnosti?**

Kolik je tady slonů?



Kde je více?



Franta má pět korun.

Petr má o dvě koruny více.

Kolik korun má Petr?

Franta má pět korun.

To je o dvě více, než má Petr.

Kolik korun má Petr?

Umístěte na číselnou osu číslo 134

115



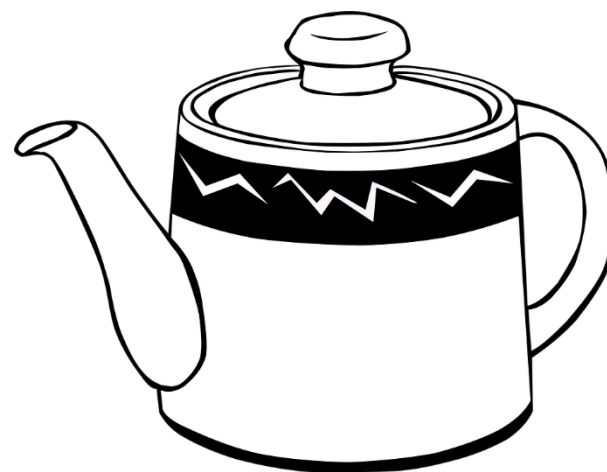
237



Umístěte na číselnou osu číslo 61
v limitu 1,25 sekundy



Do které konvice se vejde více kávy?



Jak pokračuje číselná řada
85, 84, 83, 82... ?

Dva bagry vykopou polovinu
příkopu za tři dny. Za jak dlouho
vykopou celý příkop tři bagry?

$$\cos \frac{x}{2+x} = 2\pi; \quad x = ?$$

Jaká je pravděpodobnost, že na 3 kostkách alespoň jednou z pěti hodů padne součet 14 nebo vyšší?

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou $c=2\text{cm}$ a odvěsnami $a=b=4\text{cm}$.

Zdroje variability

Intraindividuální vs. interindividuální.

- Lokálně-homogenní konstrukty
- Lokálně-heterogenní konstrukty
- Lokálně-irelevantní konstrukty

Rozdílné pohledy:

Psychometrika

interindividuální variabilita

Kognitivní psychologie

zpracování informace, intraindividuální variabilita

Kognitivně-vzdělávací přístup

správné a špatné řešení, kulturní specifika

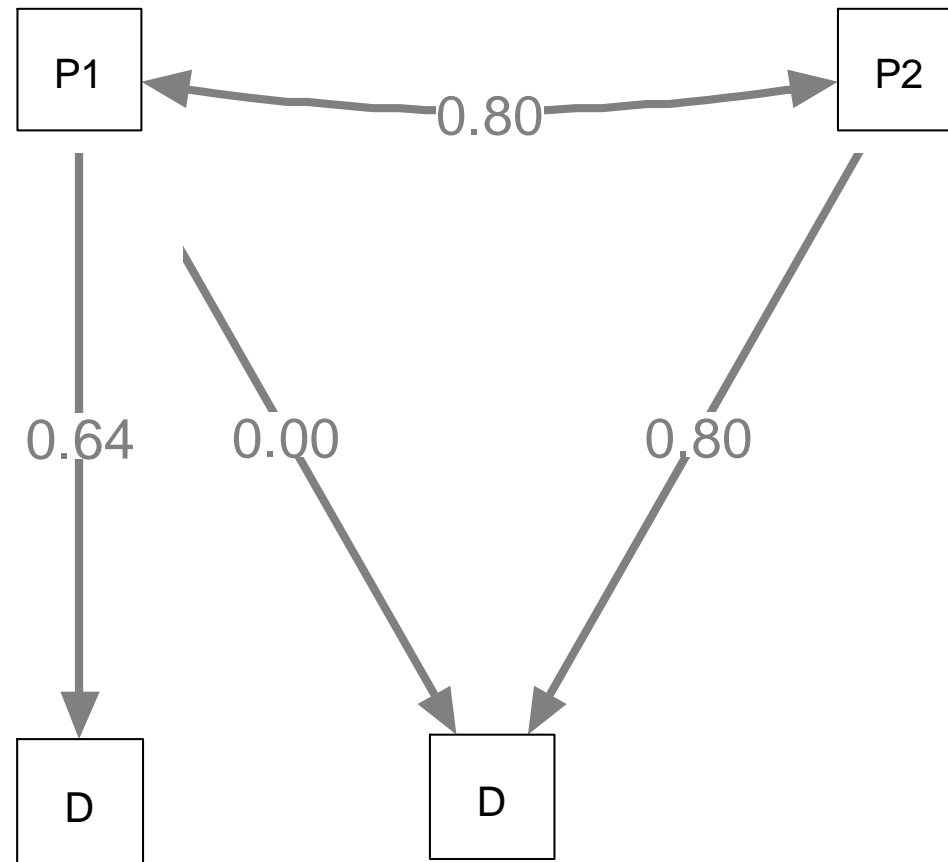
Vyšší matematické schopnosti..

... predikují vyšší velikost příjmu, zaměstnatelnost, kariéerní postup, životní spokojenost a řadu dalších.

- Rivera-Batiz (1992), Paglin a Rufolo (1990), Rose a Betts (2004), Parson a Bynner (2005)

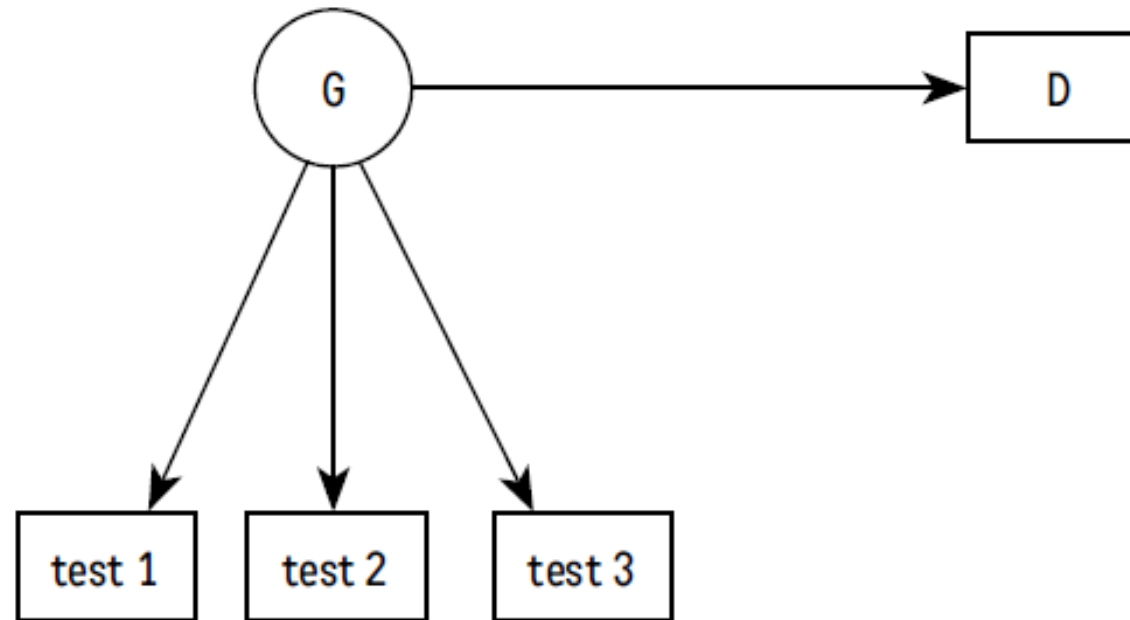
Faktorová indeterminace

LOVE – Left (Out) Variable Error

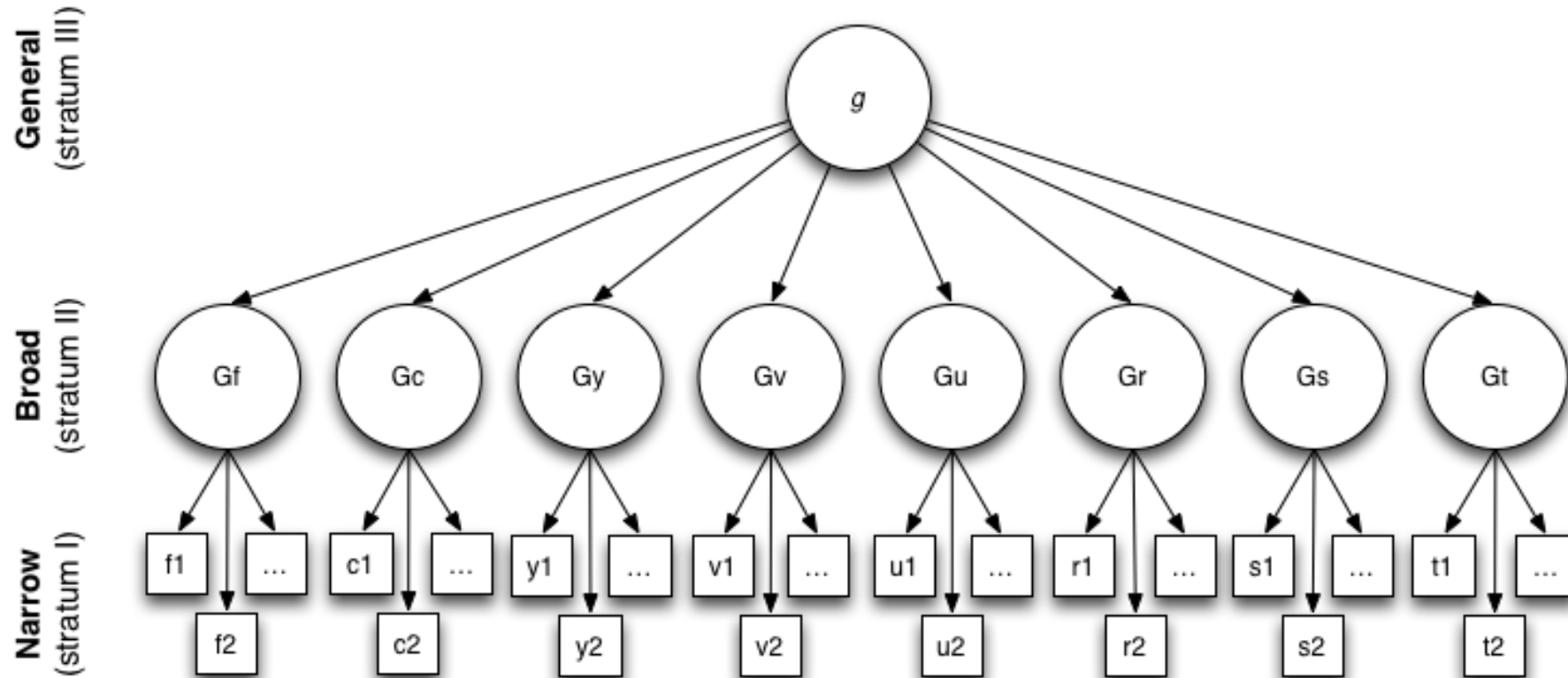


Faktorová indeterminace

LOVE – Left (Out) Variable Error



Psychometrický pohled: CHC teorie



TAB. 1: SEZNAM ŠIROKÝCH A ÚZKÝCH FAKTORŮ DLE CHC TEORIE, KTERÉ LZE OZNAČIT JAKO MATEMATICKÉ

široká schopnost (stratum II)	úzká schopnost (stratum I)	popis, komentář
Fluidní inteligence (<i>Gf</i>)	Kvantitativní usuzování (<i>RQ</i>)	Schopnost induktivních a deduktivních operací s objekty, zahrnující matematické vztahy či vlastnosti.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	–	Hluboké a rozsáhlé vědomosti spojené s matematikou.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	Matematické vědomosti (<i>KM</i>)	Šířka obecných znalostí matematiky.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	Matematický výkon ^a (<i>A3</i>)	Měřený matematický výkon.
Rychlost zpracování (<i>Gs</i>)	Číselná zručnost ^b (<i>N</i>)	Schopnost rychlé a přesné manipulace s čísly, a to od jednoduššího počítání a rozpoznávání čísel a množství až po pokročilé sčítání, odčítání, násobení a dělení.

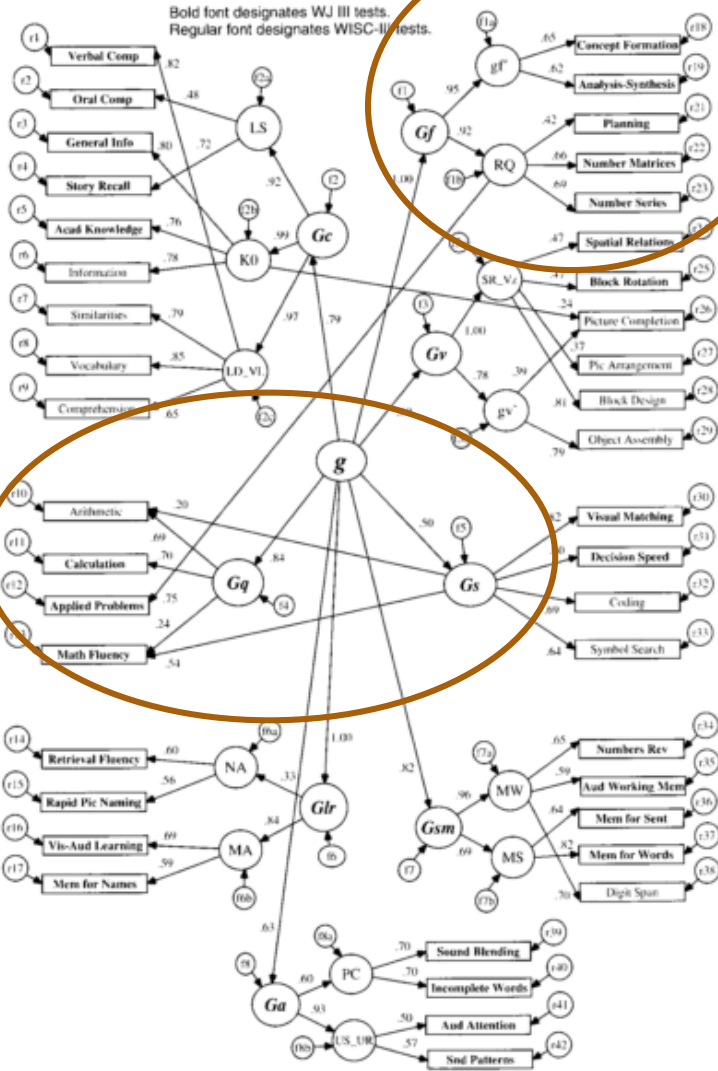
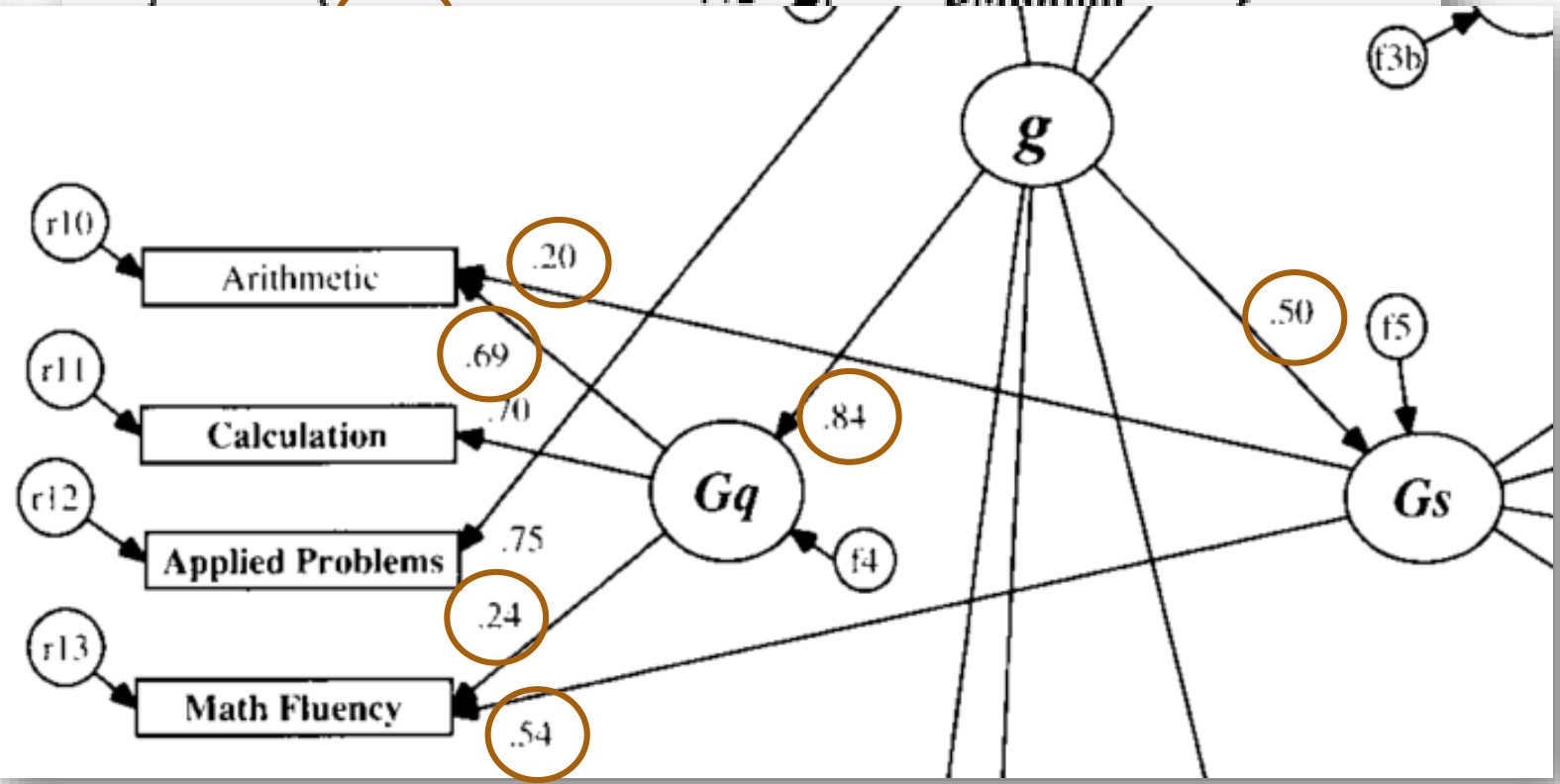
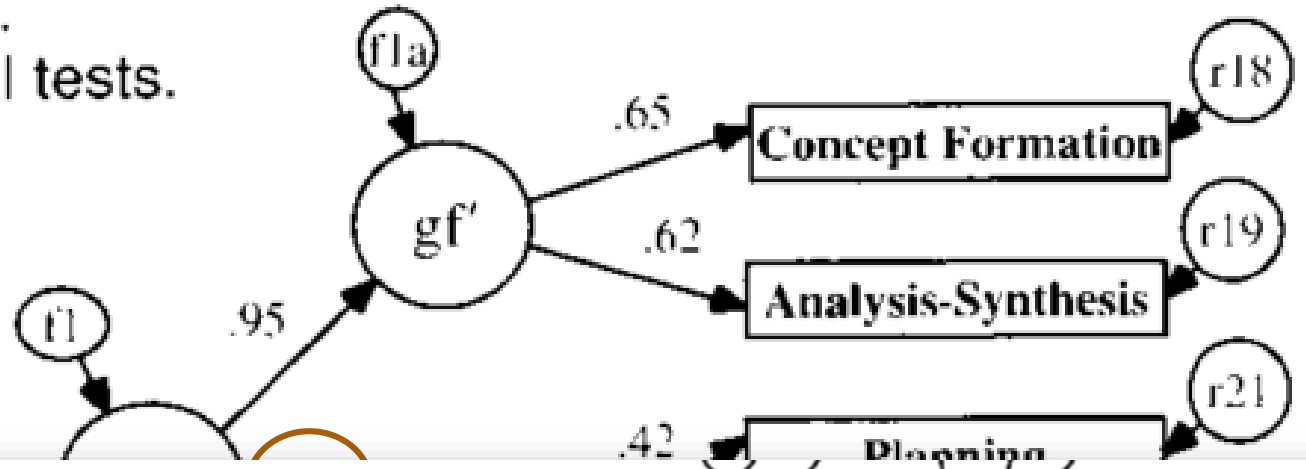
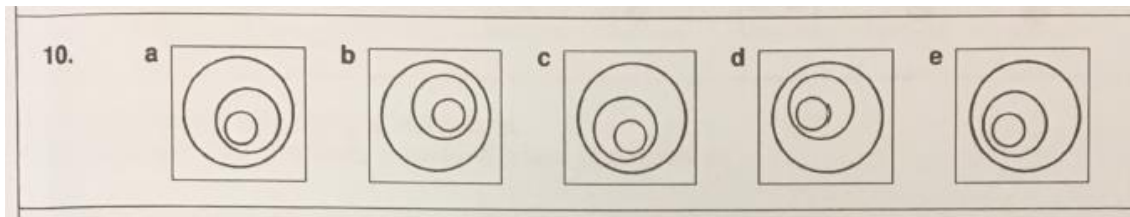
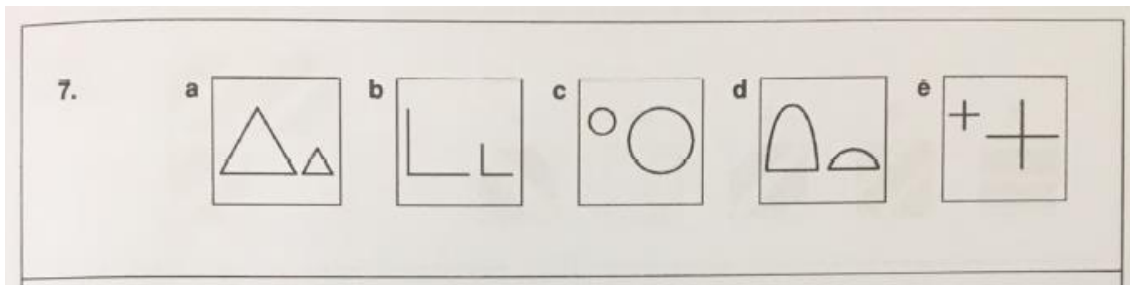
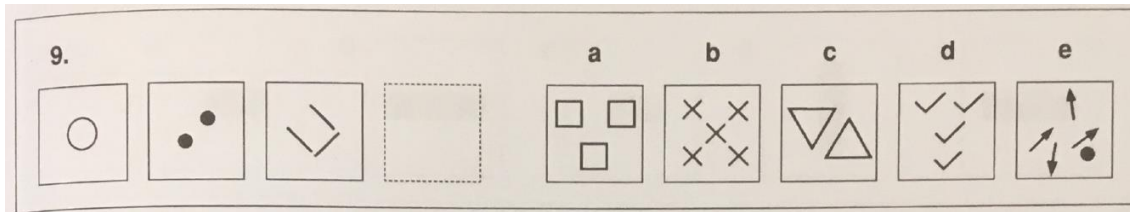


FIGURE 2. Narrow+Broad+ g Model

S. III tests.



g vs. *Gq/RQ*: CFT vs. TIM



B5. Čísla jsou zapsána za sebou podle určitého pravidla. Doplň čísla

18 17 15 12 8 _____

B8. Můžeš použít jen číslice 2, 5 a 8. Kolik dvojciferných čísel můžeš pomocí těchto číslic napsat? Zapiš je všechna.

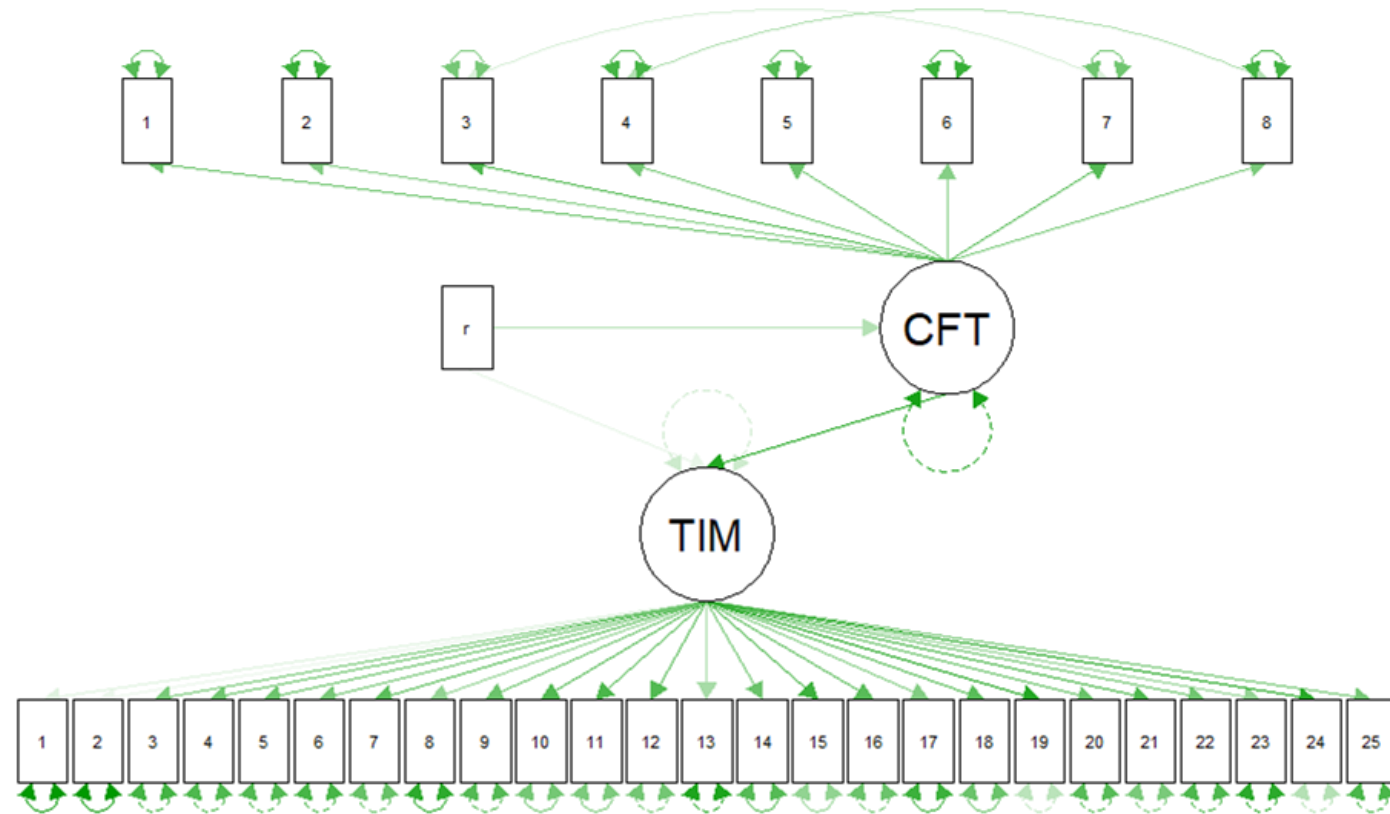
B18. Do 3. B chodí 12 chlapců a 12 děvčat. Do keramiky chodí z této třídy 15 dětí, do souboru chodí z této třídy také 15 dětí. Každé dítě chodí aspoň do jednoho kroužku. Kolik dětí ze 3. B navštěvuje oba kroužky zároveň?

g vs. Gq/RQ: CFT vs. TIM

Pozorované: $r = 0,643$

SEM: $\beta = 0,867$

- (po kontrole věku)
 - $\beta_{TIM} = 0,090$
 - $\beta_{CFT} = 0,293$
- MG mixed CFA (WLSMV).
 - $\chi^2(1077) = 1159,9, p = 0,040,$
 $TLI = 0,974, RMSEA = 0,020$
 $s CI_{90\%} = [0,005; 0,028]$
 - $N = 401.$



TAB. 2: VZTAH KOGNITIVNÍCH SCHOPNOSTÍ (DLE CHC TEORIE) A MATEMATICKÉHO VÝKONU PODLE VĚKU

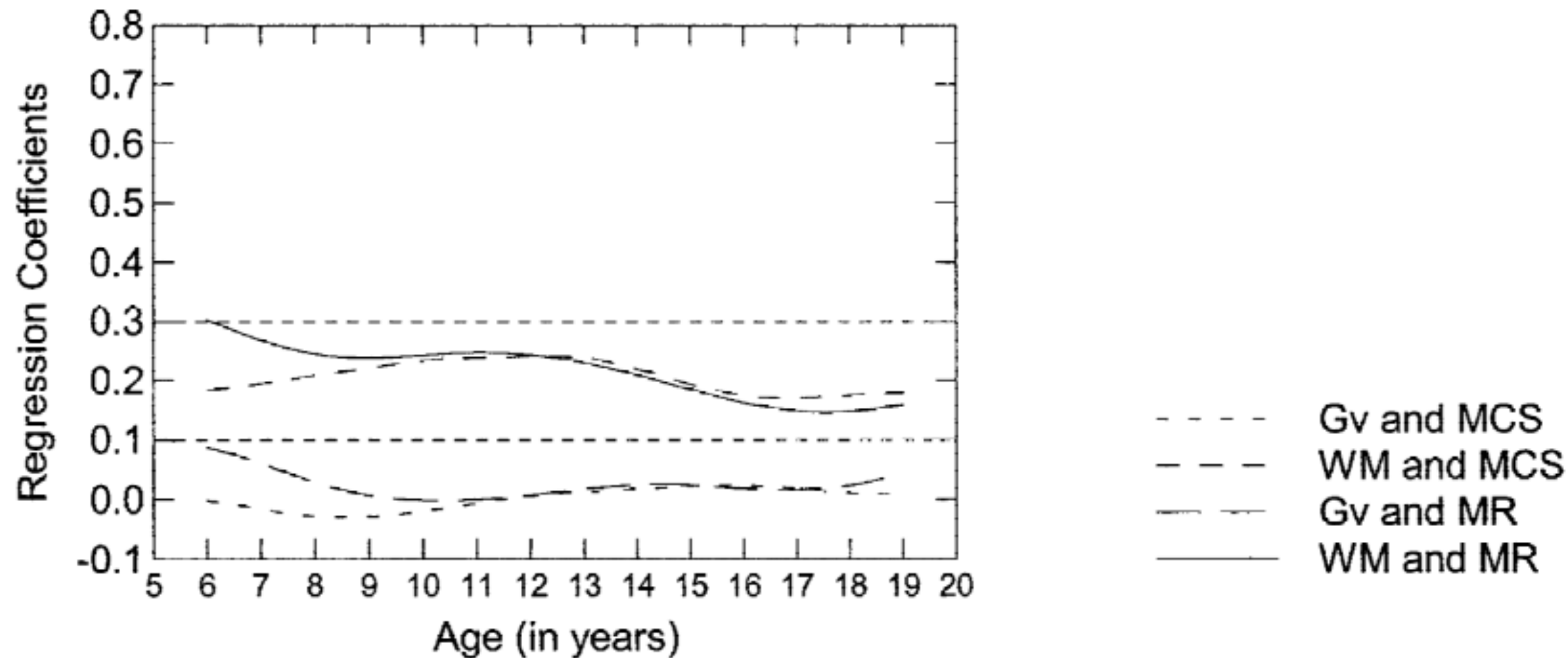
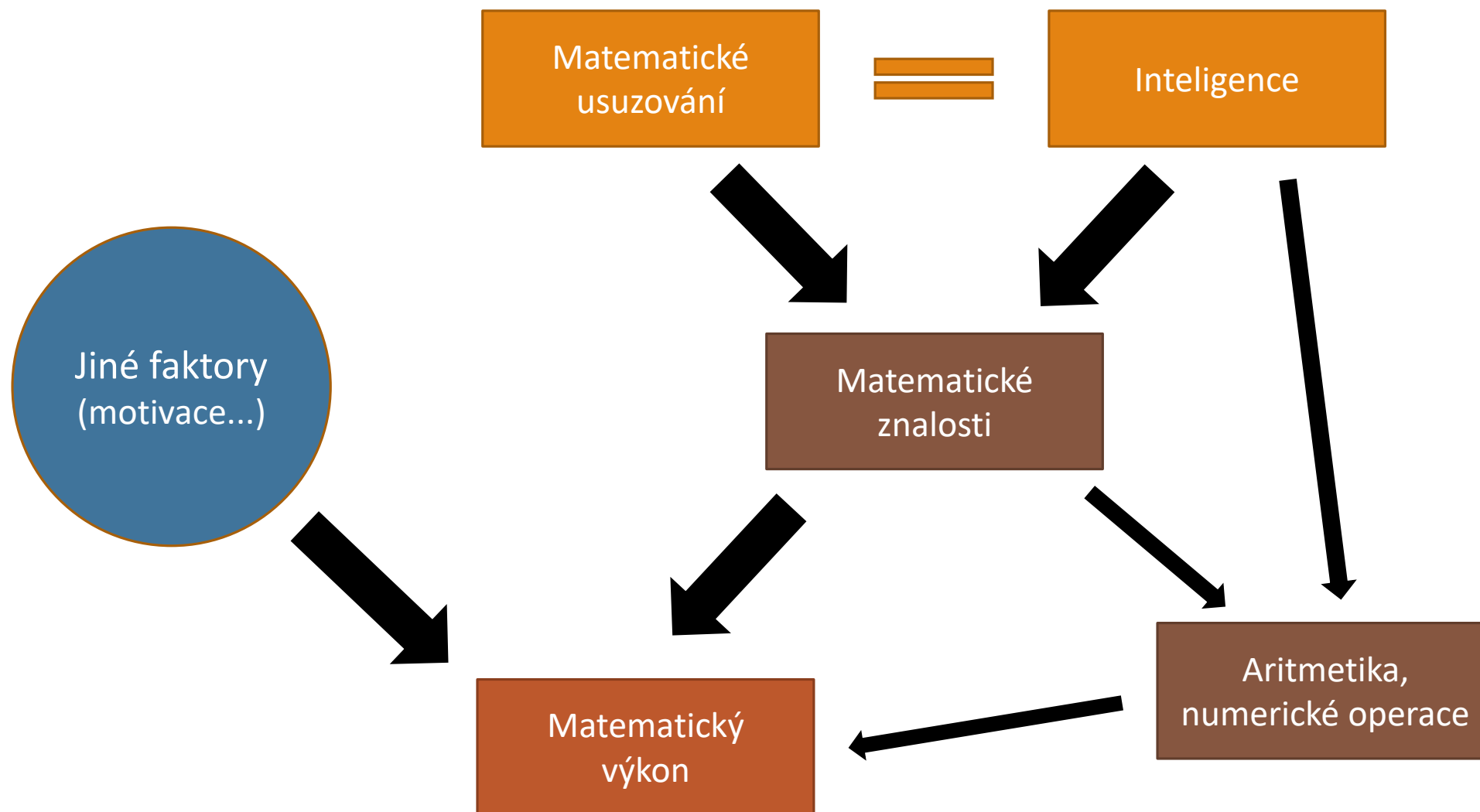


FIGURE 4. Standardized regression coefficients as a function of age for Visual-Spatial Thinking (Gv) and for Working Memory (WM) with Math Calculation Skills (MCS) and Math Reasoning (MR).



Matematické vzdělávání

Thorndike (1922): znalost výpočtu obsahu obdélníku nelze transformovat do znalosti výpočtu obsahu trojúhelníku.

Schoenfeld (1988): příliš názorná výuka zhoršuje porozumění.

Carbonneau a kol. (2013): metaanalýza ($n=55$) efektivity pomůcek. Zapamatování, řešení problémů, transfer znalosti.

- Míra instruování podporuje zapamatování, snižuje transfer.
- Nejefektivnější je krátká doba používání pomůcky (do 14 dní), bez vlivu na transfer; dlouhá doba má negativní efekt.
- Pro transfer se efekty neliší dle oblasti matematiky, jinak ano (výhodné u zlomků, znalosti v algebře).
- Percepční bohatost podporuje transfer, naopak snižuje zapamatování a řešení problémů (a naopak).
- Různé efekty pro různě staré děti (zejm. zapamatování a konkrétní stadium).

Vývoj matematického usuzování, nekognitivní aspekty

Muryama a kol. (2013): longitudinální analýza dětí mezi 5.-10. třídou.

- Inteligence vysvětlila intercept vývojové křivky, nikoli sklon.
- Rychlost učení vysvětlily motivace a kognitivní strategie, nikoliv inteligence.

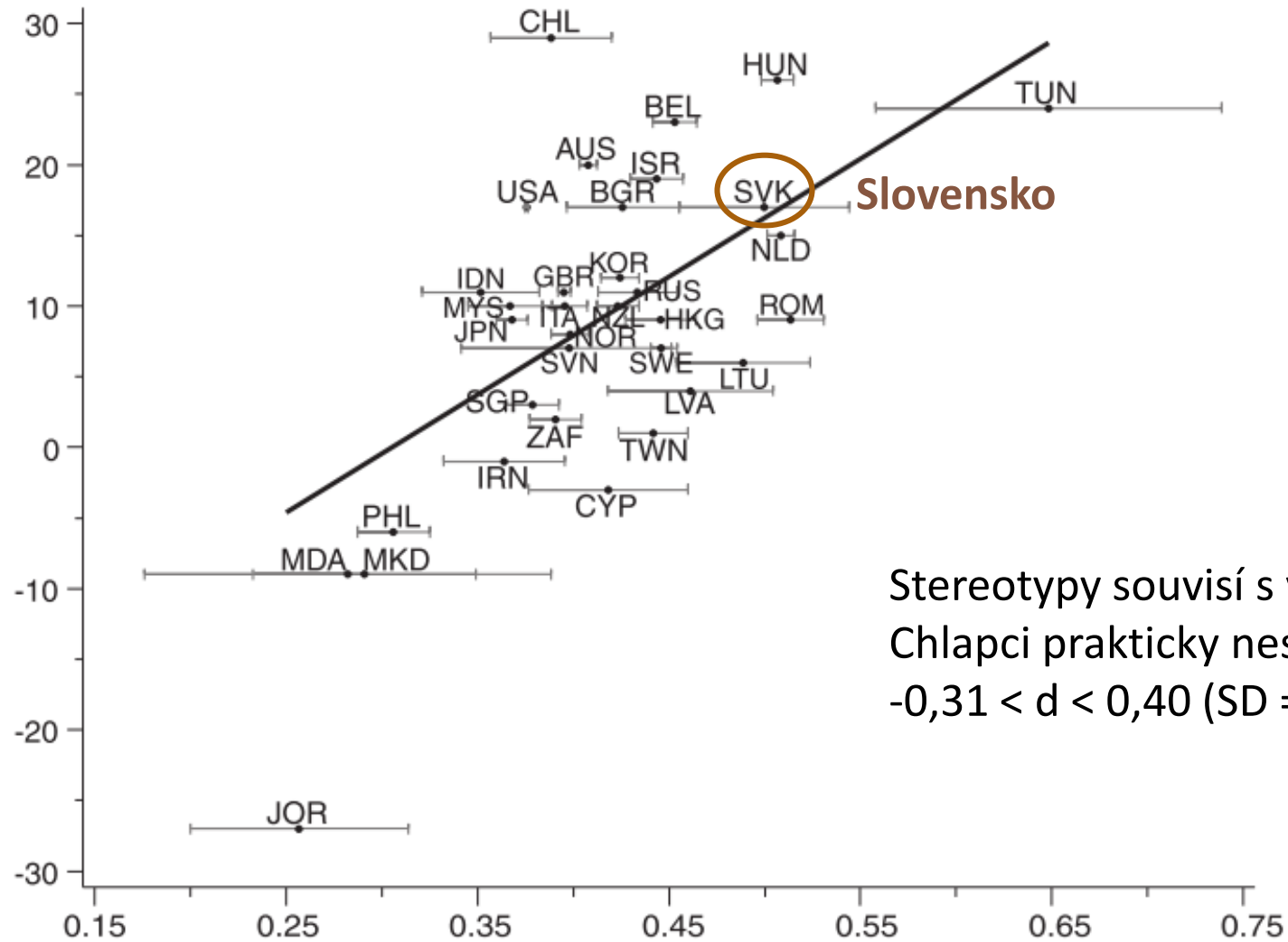
Matematická úzkostnost, matematické self-efficacy.

Emoce ve výuce (moderují matematický výkon; McLeod, 1992).

Předpoklady se neliší dle pohlaví či rasy, jiné důvody (Jacobs, 2005).

Nosek a kol. (2009): mezinárodní studie **genderových stereotypů** (IAT) a skutečného rozdílu ve výkonu mužů a žen v testu TIMSS.

2003 Male Advantage TIMSS
(8th Grade Science)



Stereotypy souvisí s výkonem, $\beta = 0,63^{***}$.
Chlapci prakticky neskórují lépe než dívky:
 $-0,31 < d < 0,40$ (SD = 0,15).

Male = Science & Female = Liberal arts
Implicit Associations (IAT *D*)

Jak ale lidé k řešení
matematických úloh dospějí?

Kognitivní procesy vedoucí k řešení

Rutinní vs. nerutinní problém

- „*Kvantitativní myšlení o kvalitativních problémech.*“
- (Mayer a kol., 1992).

Mayer (1994): Model reprezentace problému.

- **Překlad.**
- **Integrace.**
- Plánování.
- Provedení postupu.

Strategie **přímého překladu** vs. **tvorba modelu**.

Hypotéza konzistentního jazyka

Konzistentní: Petr má o 5 korun více než Pavel. **Pavel má 10 korun.**
Kolik korun má Petr?

Nekonzistentní: Petr má o 5 korun více než Pavel. **Petr má 10 korun.**
Kolik korun má Pavel?

Příznakovost.

- Sčítání vs. odčítání, násobení zlomkem $2/3$ vs. $3/2$.

Typické chyby v matematice

Racionální omyl (Ben-Zeev, 1995; 1996): Chybná indukce pravidel.

- např. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

Analogické usuzování, **chybný transfer** informace.

- Transfer znalostí nefunguje tak jednoznačně, jak se obecně soudí.
 - (Viz Thorndikovy experimenty s obsahem geometrických obrazců.)
- Hejného metoda?

REASON model (Ben-Zeev, 1998) vysvětluje právě chybu v analogii a uplatnění jinde správného pravidla na neadekvátní kontext.

Jak ale „numerace“ vzniká?
Jak se vyvíjí?

Vývoj matematických představ

Thorndike (1921): Dril v aritmetice, **transfer** dovedností.

Piaget (a Szeminska, 1952): konstruktivismus

- (resp. strukturalismus).

Gelman a Gallistel (1979): Počátek moderních přístupů.

Moderní přístupy, kognitivní i nekognitivní aspekty.

Od enumerace k numeraci

Pět pravidel podle Gellmana a Galistela (1979):

- 1. „one-to-one correspondence“;
- 2. pořadí čísel je neměnné ;
- 3. počítání je kardinální;
- 4. počítání je abstraktní;
- 5. prvky lze počítat v libovolném pořadí.

Zpravidla v 5 letech, ale chyby v doplňkových dovednostech:

- 6. počítání probíhá vždy z jedné strany na druhou (NE!);
- 7. je vždy nutné počítat sousedící prvky (NE!).

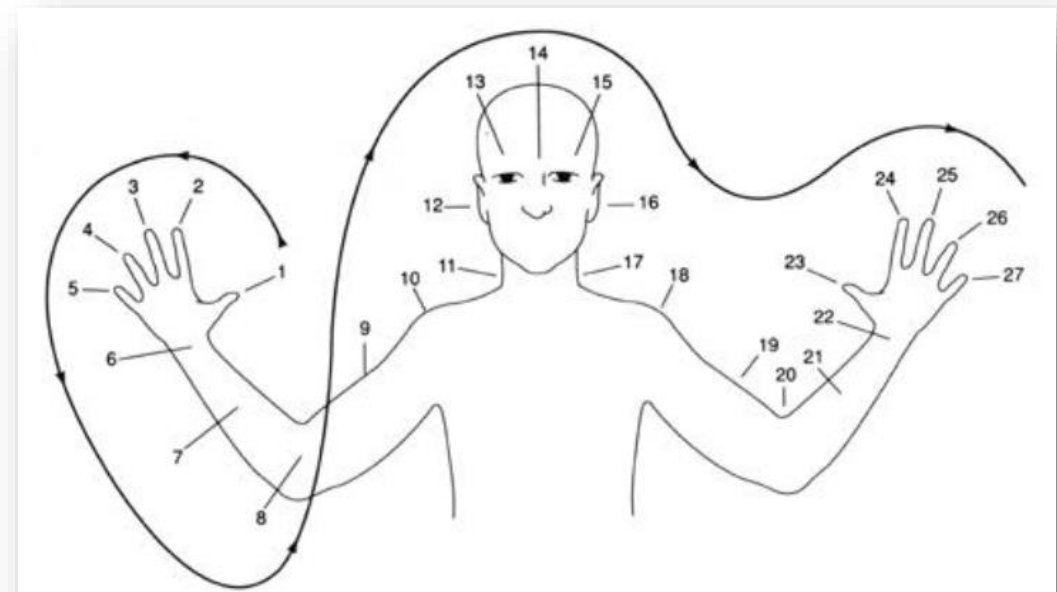
Od enumerace k numeraci

Saxe (1982) zkoumal tribální kmen Oksapmin z Papui.

- Prearitmetická práce s čísly.
- Většina kmene negramotná.

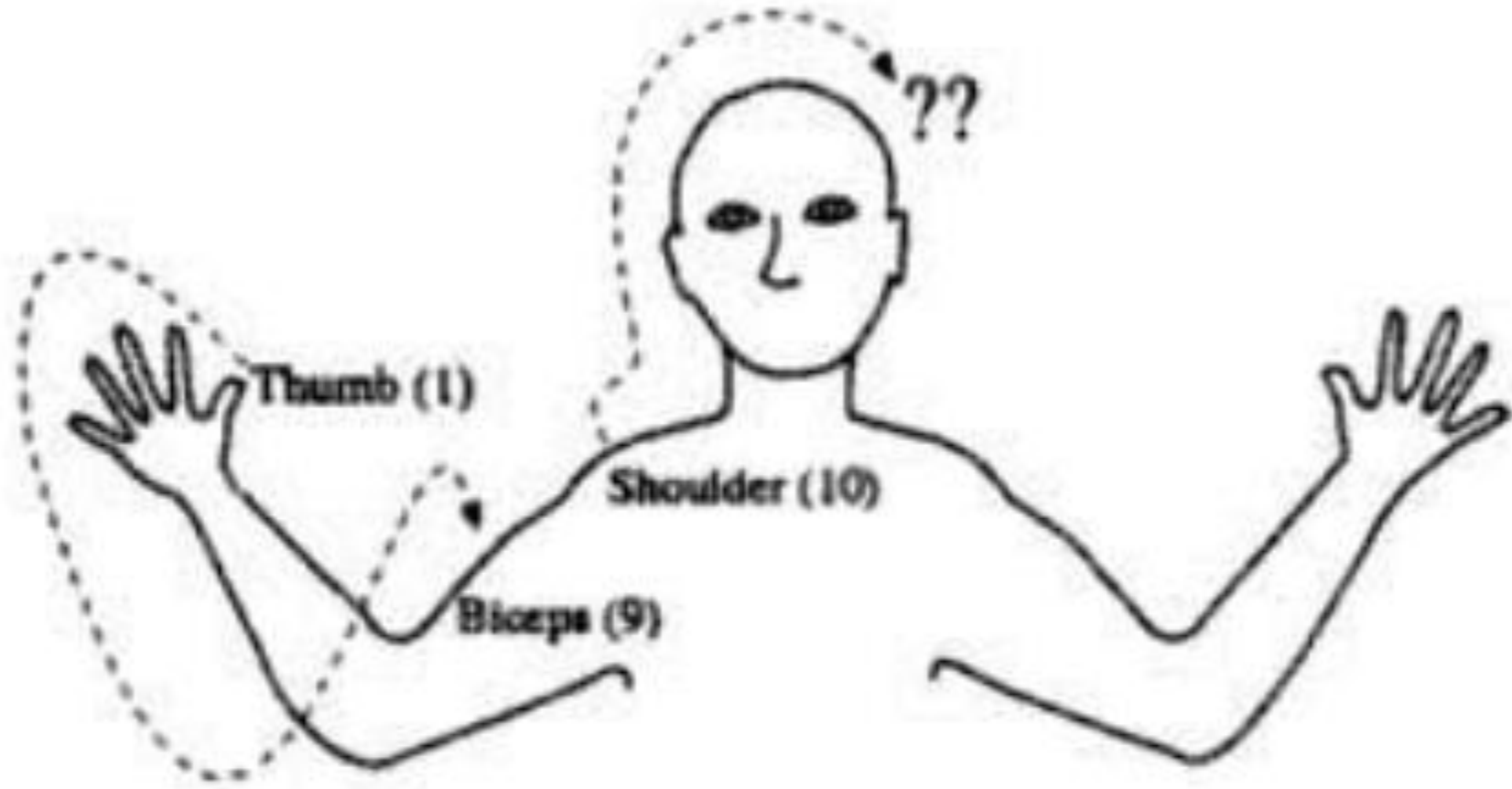
Příklad 9+7:

Jak bude Oksapmin postupovat?



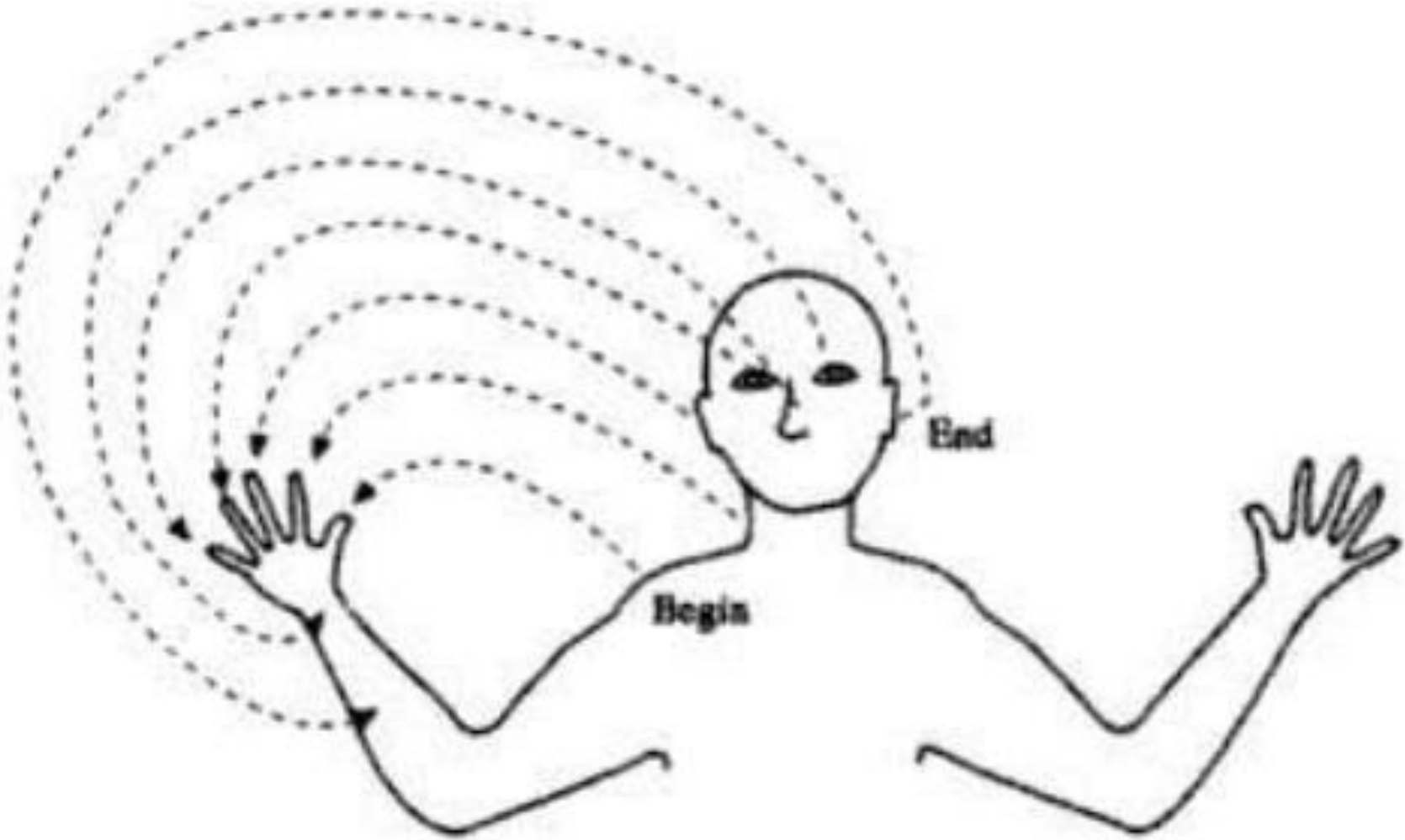
OBR. 4

Číselný systém kmene Oksapmin. Převzato ze Saxe a kol. (1996)

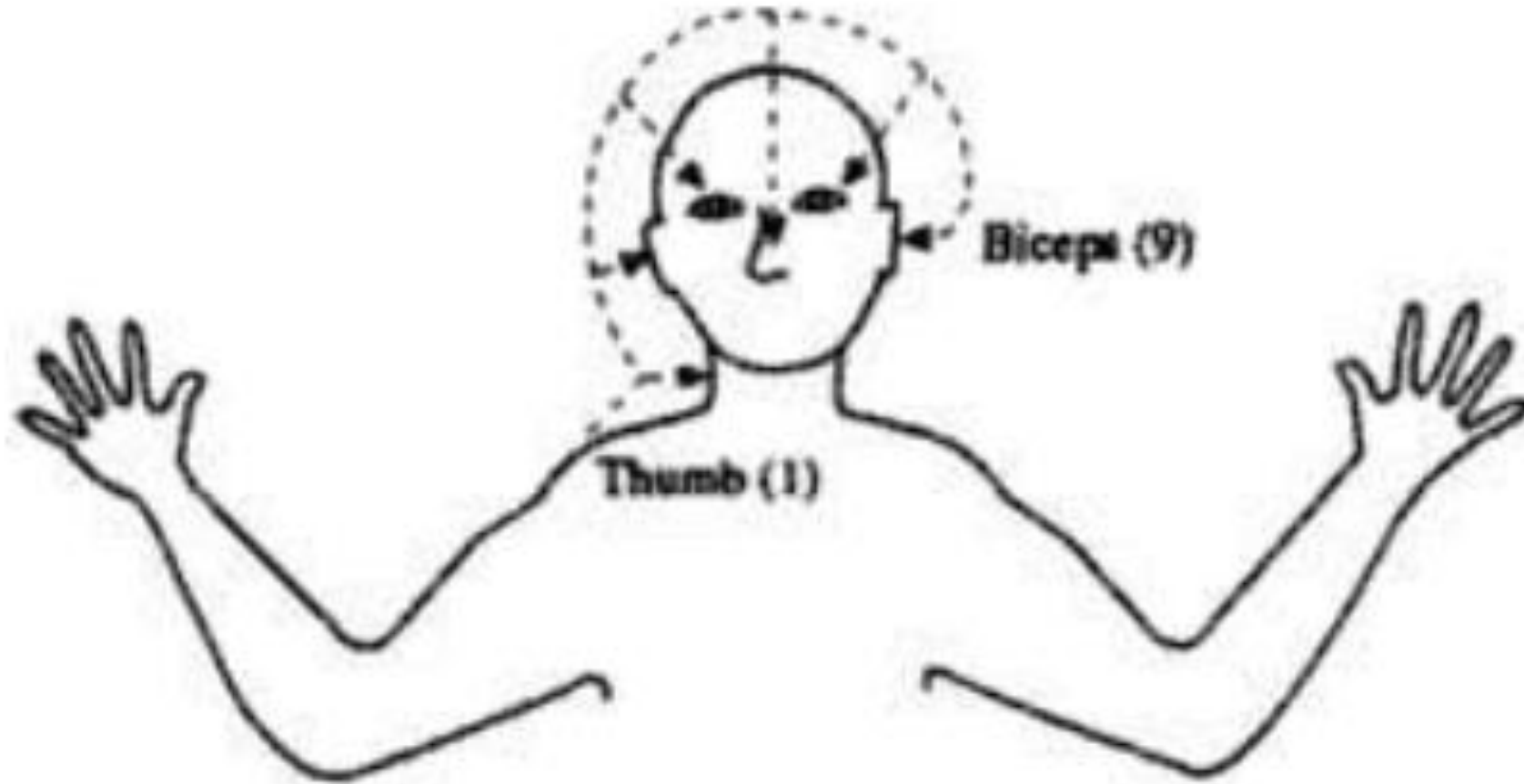


A. GLOBAL ENUMERATION

9+7

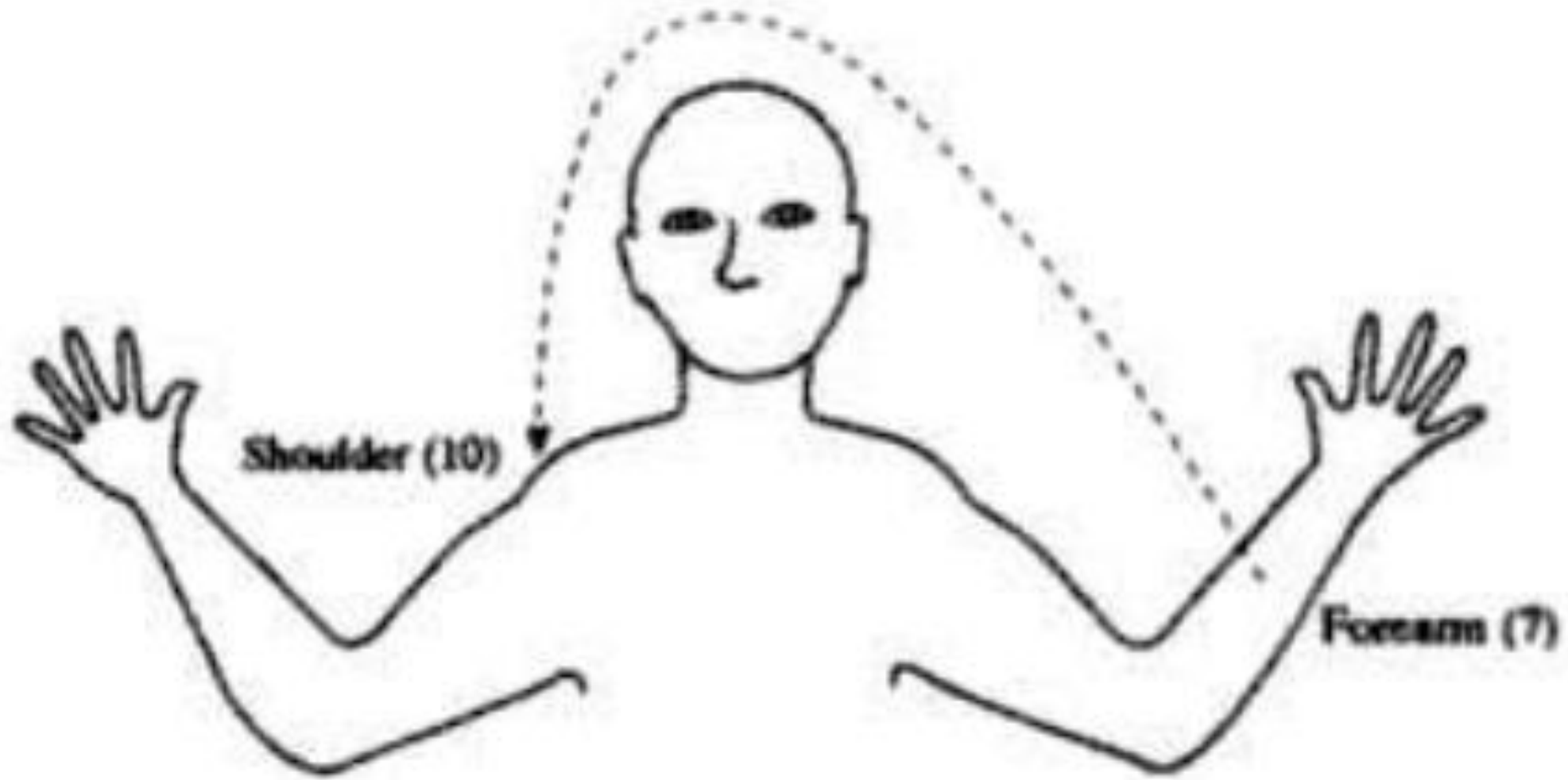


B. DOUBLE ENUMERATION



C. BODY SUBSTITUTION

9+7



D. HALVED BODY PROCEDURE

Od enumerace k numeraci

Osvojování si aritmetiky probíhá stejně ve všech kulturách.

- Jen jiné tempo (Piantadosi a kol., 2014; Butterworth a kol., 2008).

Označení čísel ovlivňuje základní aritmetické operace, typické chyby i chápání množství.

- S rostoucí mírou „profesionality“ a abstraktnosti reprezentace se vliv stírá.
- Rozdíl mezi asijskými a euroamerickými dětmi v PISA, TIMSS atd. nemusí být způsobem motivací či výukou, ale i kulturními rozdíly (v pozdějším věku se rozdíly zmenšují).

Vliv pravidelnosti číselného systému

a) From one to ten

Arabic Numeral	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chinese (written)	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
Chinese (spoken)	yī	èr	sān	sì	wū	liù	qī	bā	jiǔ	shí
Korean Formal	il	i	sam	sa	o	yeuk	chil	pal	ku	sip
Korean Informal	hana	dool	set	net	dasut	yusut	ilgob	yudulb	ahob	yul
English	one	two	three	four	five	six	seven	eight	nine	ten
German	eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn
Italian	uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove	dieci
Spanish	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	diez
French	un	deux	trois	quatre	cing	six	sept	huit	neuf	dix
Latin	unus,-a,-um	duo,-ae,-a	tres,tria	quattuor	quinque	sex	septem	octo	novem	decem
Roman Numeral	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

b) Eleven to twenty

Arabic Numeral	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chinese (written)	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十
Chinese (spoken)	shí yī	shí èr	shí sān	shí sì	shí wū	shí liù	shí qī	shí bā	shí jiǔ	èr shí
Korean Formal	sip il	sip i	sip sam	sip sa	sip o	sip yeuk	sip chil	sip pal	sip ku	i-sip
Korean Informal	yul hana	yul dool	yul set	yul net	yul dasut	yul yusut	yul ilgob	yul yudulb	yul ahob	sumul
English	eleven	twelve	thirteen	fourteen	fifteen	sixteen	seventeen	eighteen	nineteen	twenty
German	elf	zwölf	dreizehn	vierzehn	fünfzehn	sechzehn	siebzehn	achtzehn	neunzehn	zwanzig
Italian	undici	dodici	treddici	quattordici	quindici	sedici	diciassette	diciotto	diciannove	venti
Spanish	once	doce	trece	catorce	quinze	diez y seis	diez y siete	diez y ocho	diez y nueve	veinte
French	onze	douze	treize	quatorze	quinze	seize	dix-sept	dix-huit	dix-neuf	vingt
Latin	undecim	duodecim	tredecim	quattuordecim	quindecim	sedecim	septendecim	octodecim	undeviginti	viginti
Roman Numeral	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

Vliv pravidelnosti číslného systému

3–5leté děti

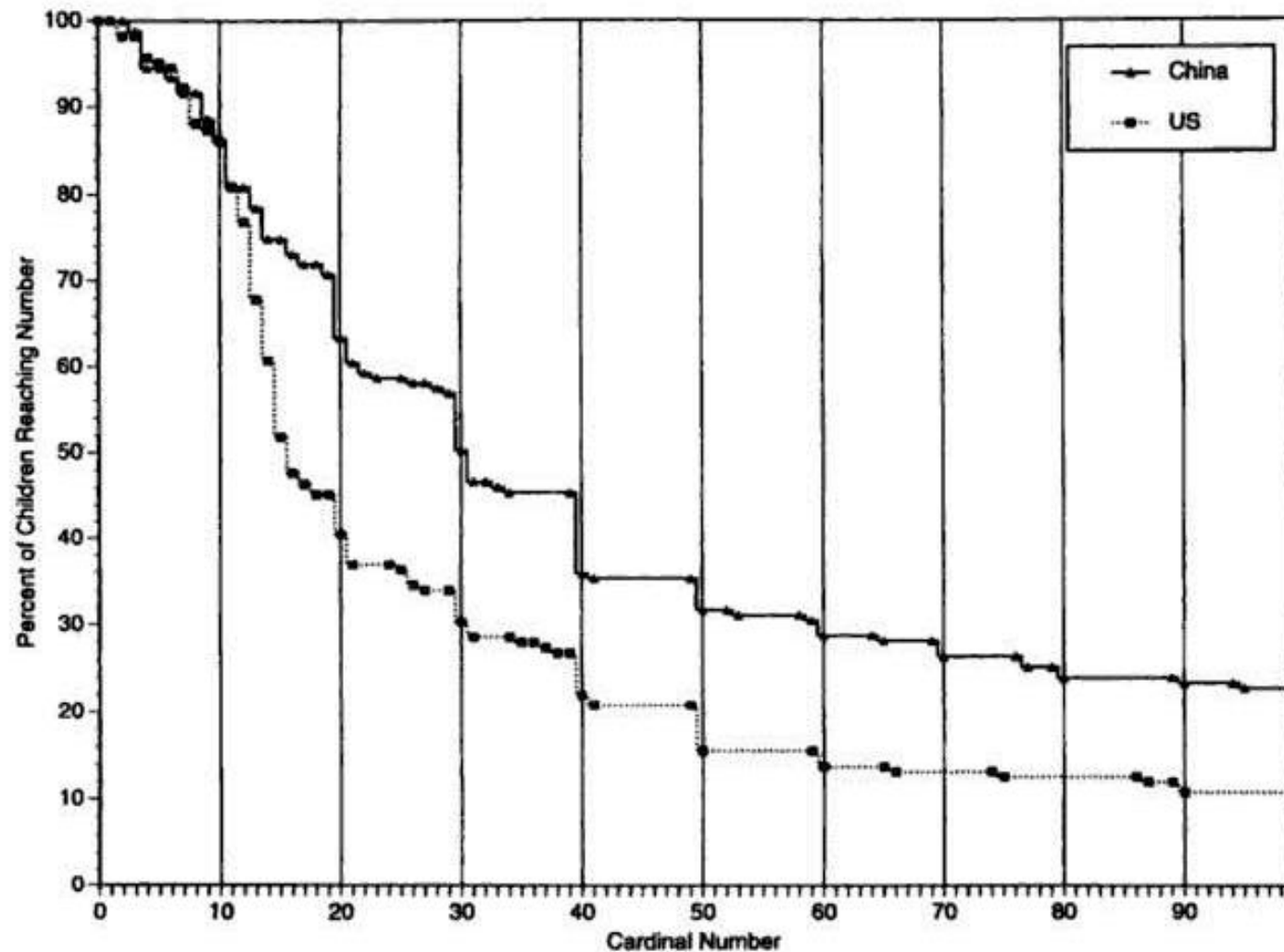


FIG. 4.4. Percentage of a group of 3–5-year-old children reaching each number in abstract counting, by country. The difficulty U.S. children have in mastering the teens portion of English number names is shown by their substantial dropoff during this region.

Vliv pravidelnosti číslného systému

neuronová síť

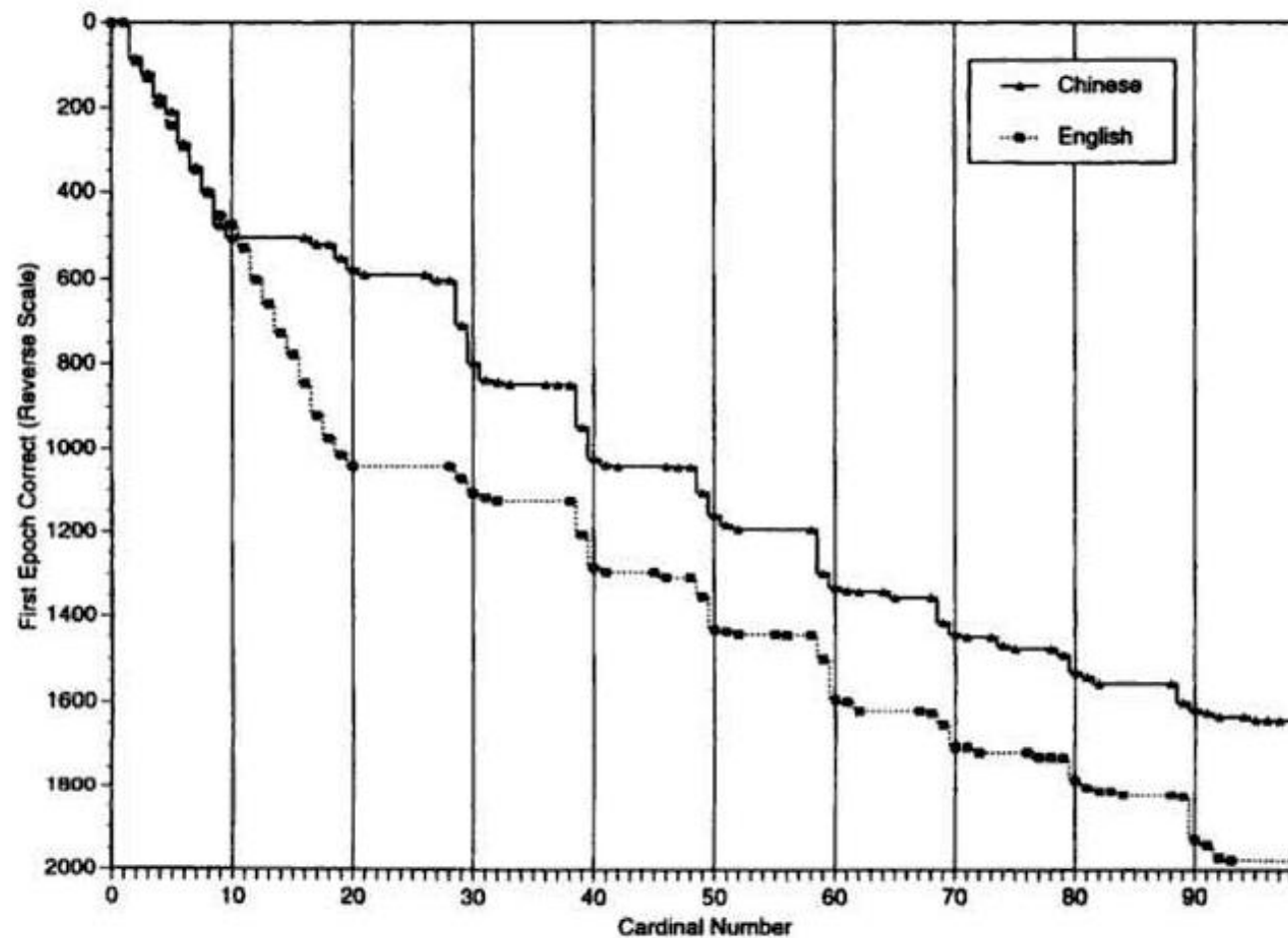


FIG. 4.5. Performance of a morphology-based neural-network model trained to count in Chinese and English. First epoch to produce a number is shown; to facilitate comparison with the previous figure, this is plotted on a reverse axis. The model reproduces the most prominent phenomena shown in children's behavior: (a) similar performance before 10, a larger dropoff for English in the teens, and a scalloped profile of difficulty at decade boundaries for both languages in the range from 20-99.

Transfer číslicového systému

□ **Near miss:** ± 2 od správné odpovědi.

● **Expansion:** Chybný počet číslic.

▲ **Reverse:** jednotky druhého sčítance přičteny k desítkám prvního.

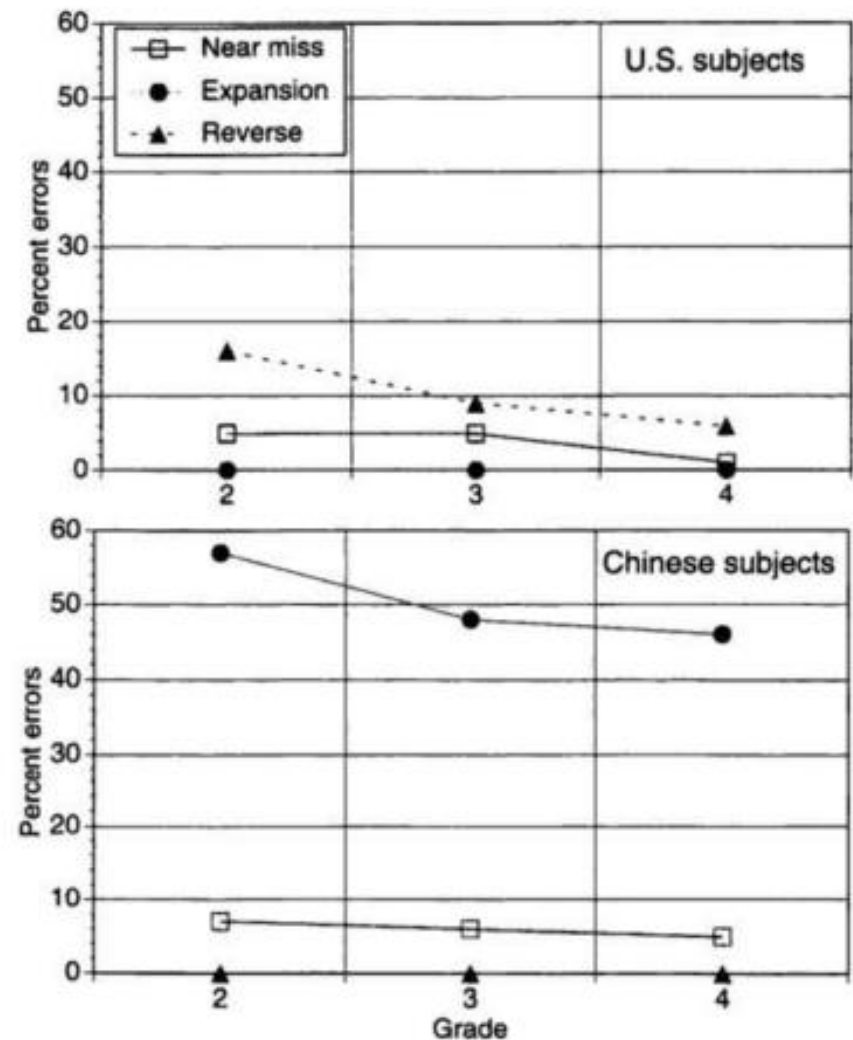


FIG. 4.9. Errors on the word/character format addition task. Errors were coded into (a) Near misses (within ± 2 on both digits of answer, and correct number of digits); (b) Expansions (in which the answer contained the wrong number of digits); and (c) Reverses (in which the units portion of one addend was added to the tens portion of the other). Error profiles differed substantially across countries and reflected the nature of the orthography used.

dospělí

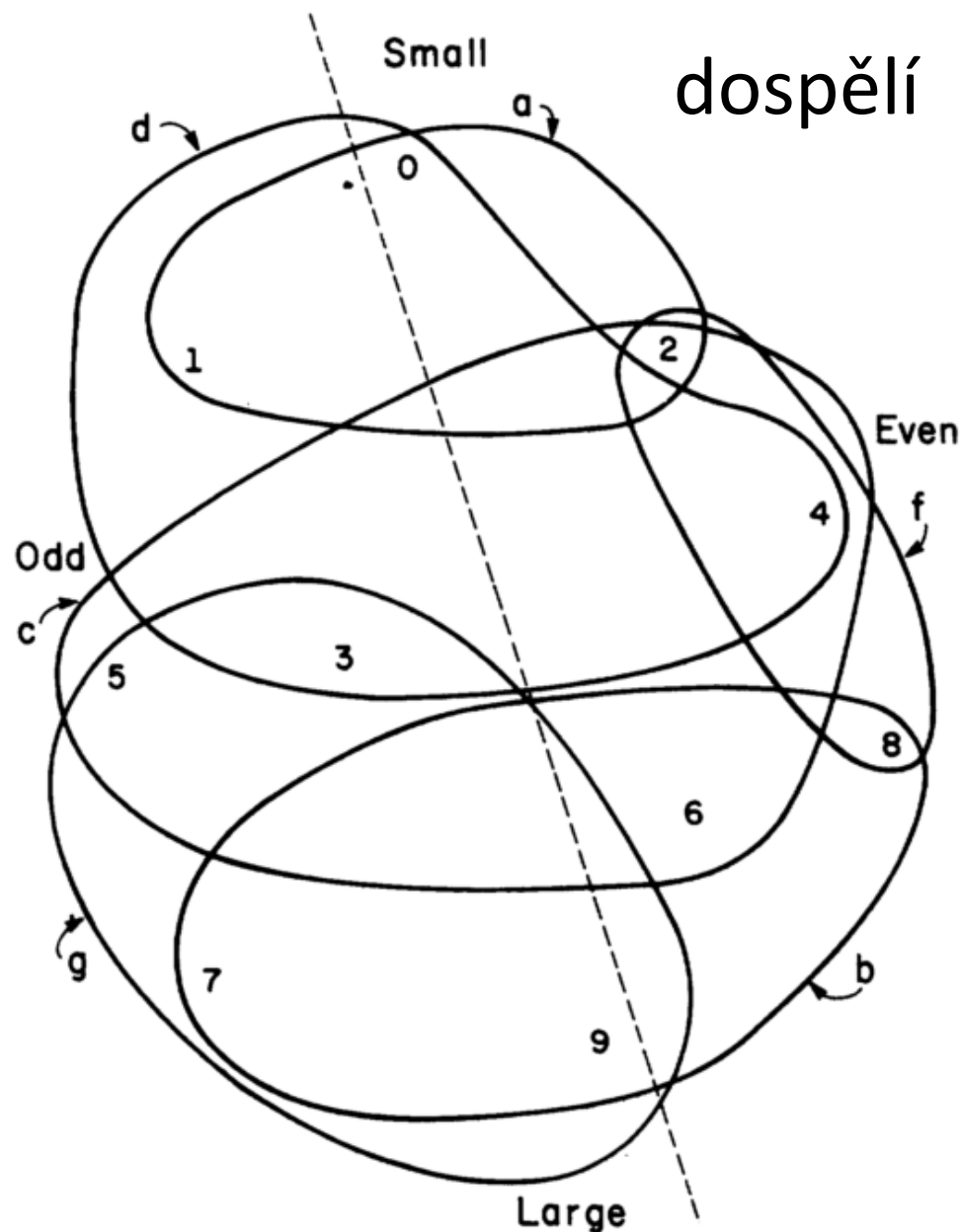


TABLE 3

INDCLUS SOLUTION FOR NUMBER-SIMILARITY JUDGMENTS: WEIGHTS FOR DIFFERENT SUBSETS BY AGE GROUP

Subset	Kinder- garten	Third Grade	Sixth Grade	Adult	Elements of Subset	Interpretation
<i>a</i>585 (1)	.609 (1)	.451 (1)	.391 (2)	0,1,2	Small numbers
<i>b</i>477 (2)	.479 (2)	.374 (2)	.315 (3)	6,7,8,9	Large numbers
<i>c</i>343 (3)	.380 (3)	.303 (4)	.184 (5)	2,3,4,5,6	Middle numbers
<i>d</i>298 (4)	.319 (4)	.187 (6)	.163 (6)	0,1,3,4	Small numbers, excluding 2
<i>e</i>267 (5)	.288 (5)	.155 (7)	.070 (7)	4,5,6,7	Moderately large numbers
<i>f</i>135 (6)	.017 (7)	.337 (3)	.493 (1)	2,4,8	Powers of 2
<i>g</i>020 (7)	.064 (6)	.228 (5)	.283 (4)	3,5,7,9	Odd numbers, excluding 1
Additive constant234	.210	.242	.269
Variance accounted for (VAF) (%)	80.4	82.2	82.0	64.0	...	78.0 (Total VAF)

NOTE.—Rank of weight is given in parentheses.

Pořadí vývoje stejné u amerických i čínských dětí.

- Malé-velké → liché-sudé

(Miller & Gelman, 1983)

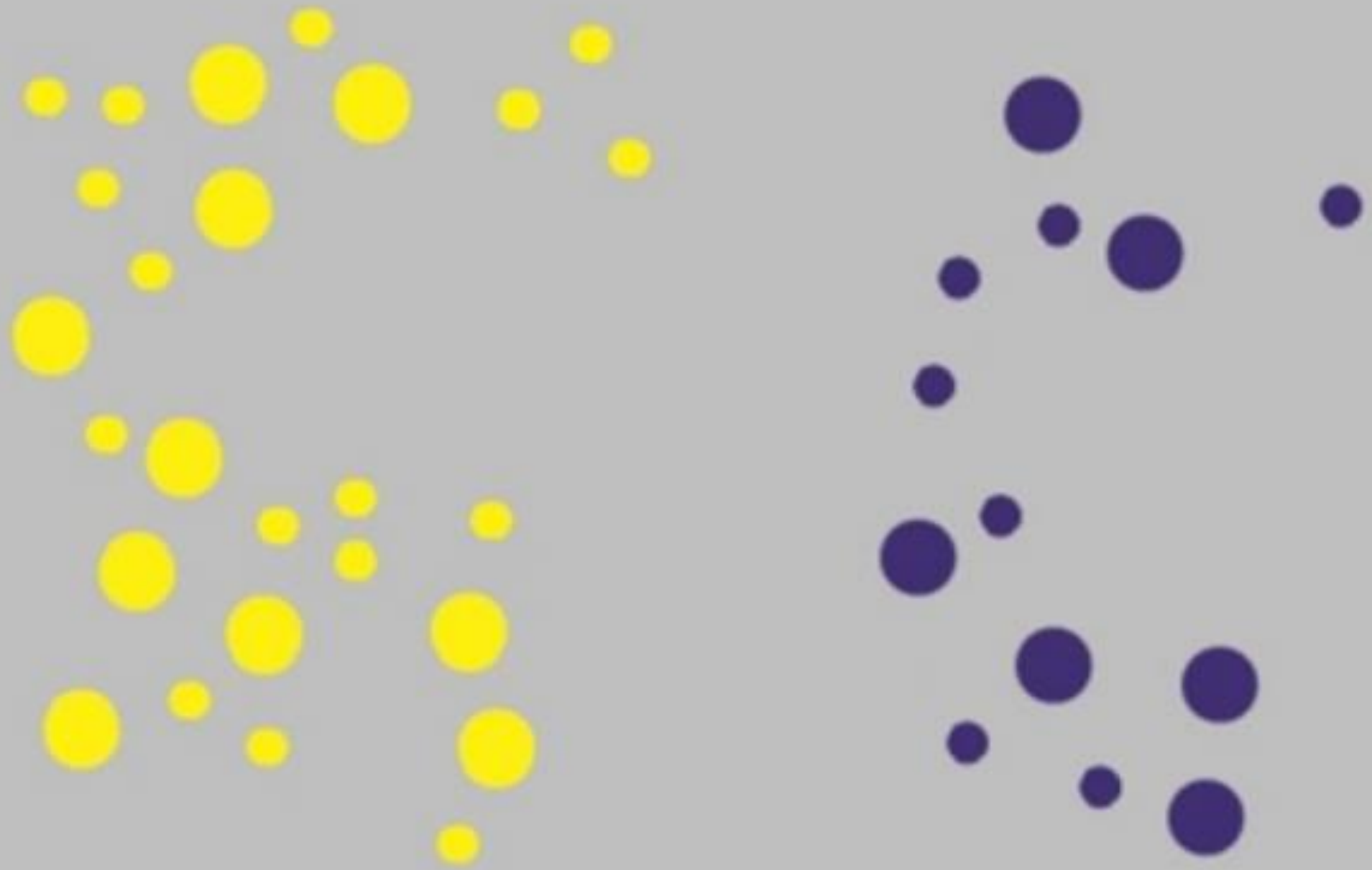
Nyní se objeví zaměřovací kříž.
Upřete na něj zrak.

Následně se objeví dvě množiny
objektů.

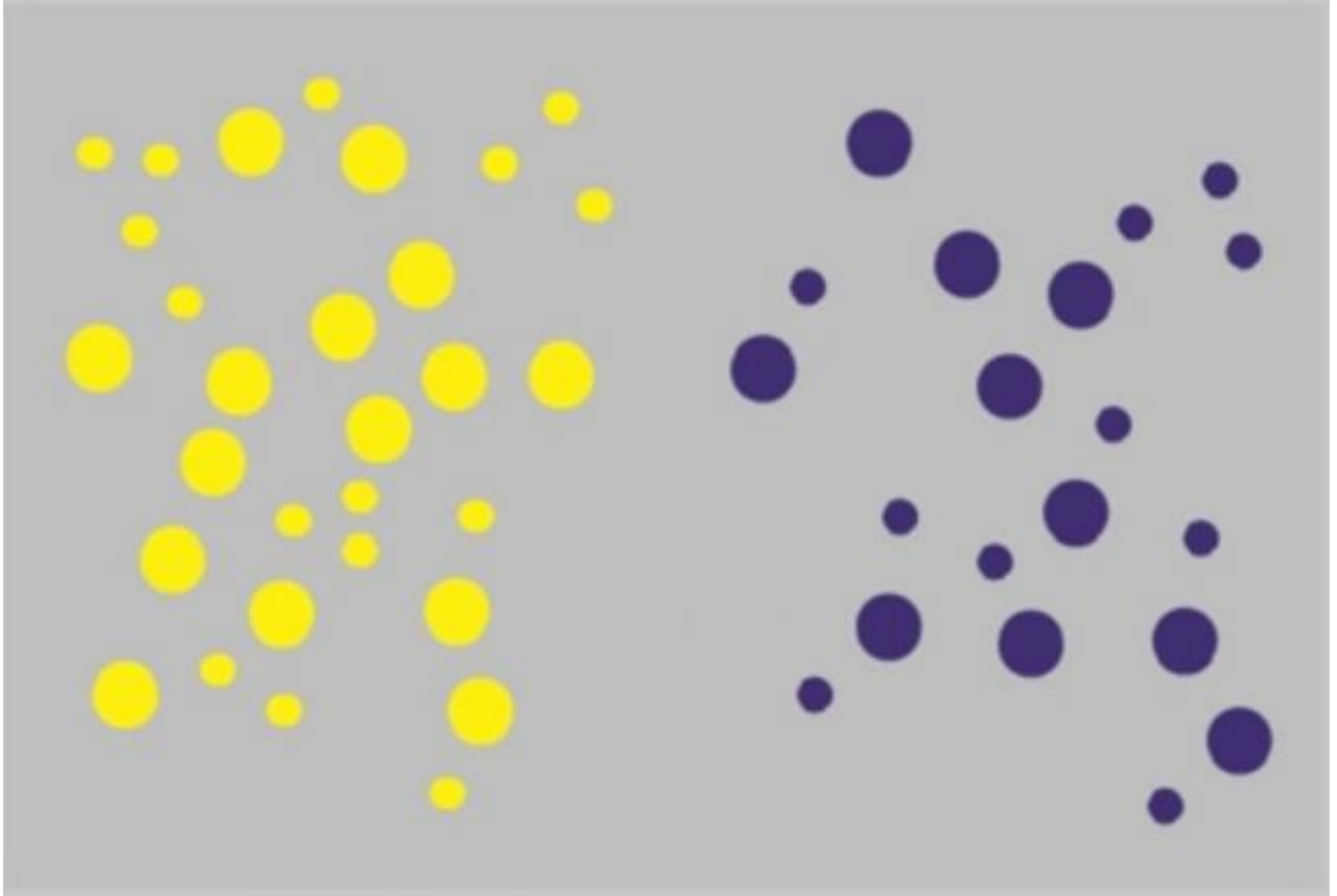
Na které straně je více?

1





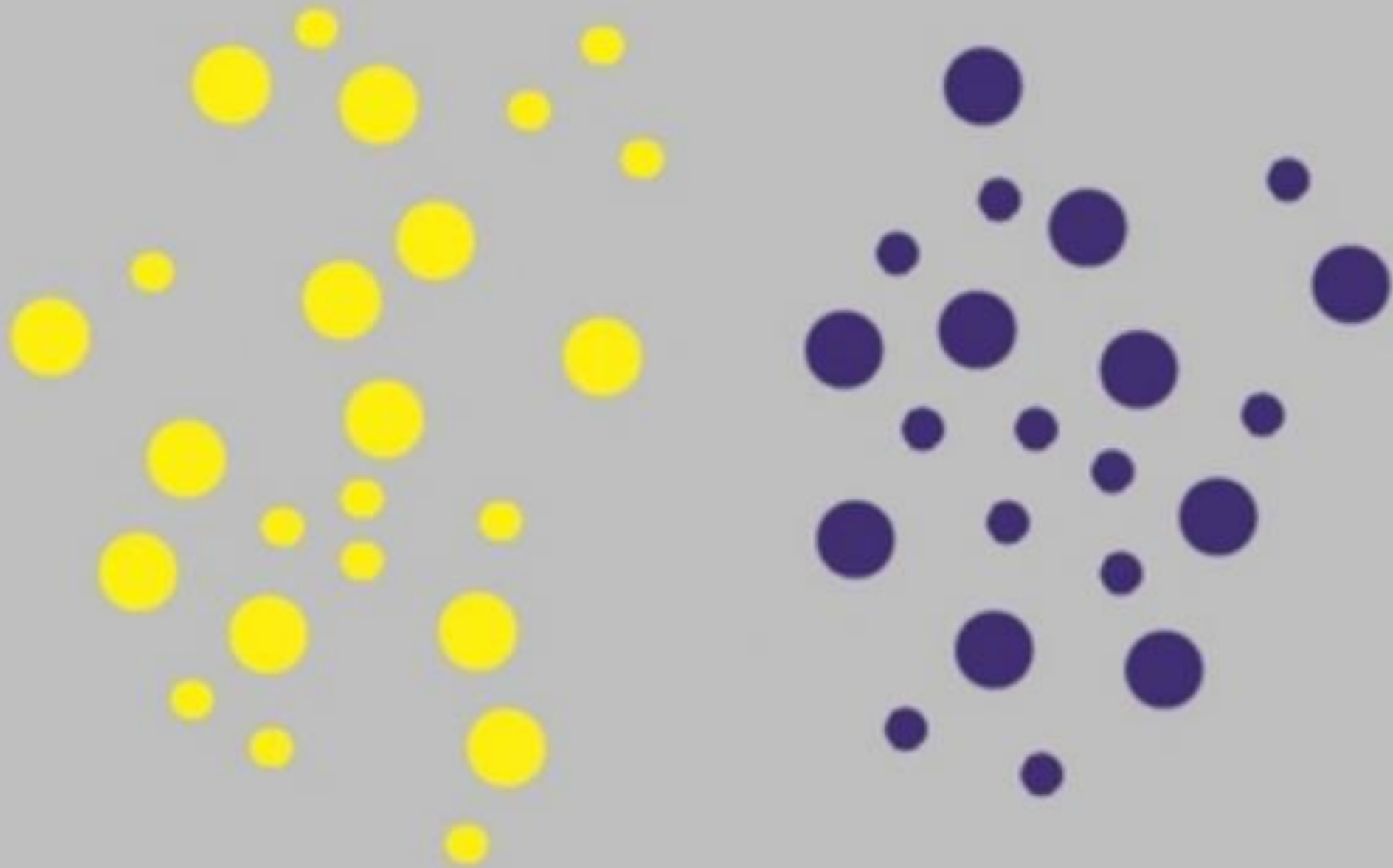










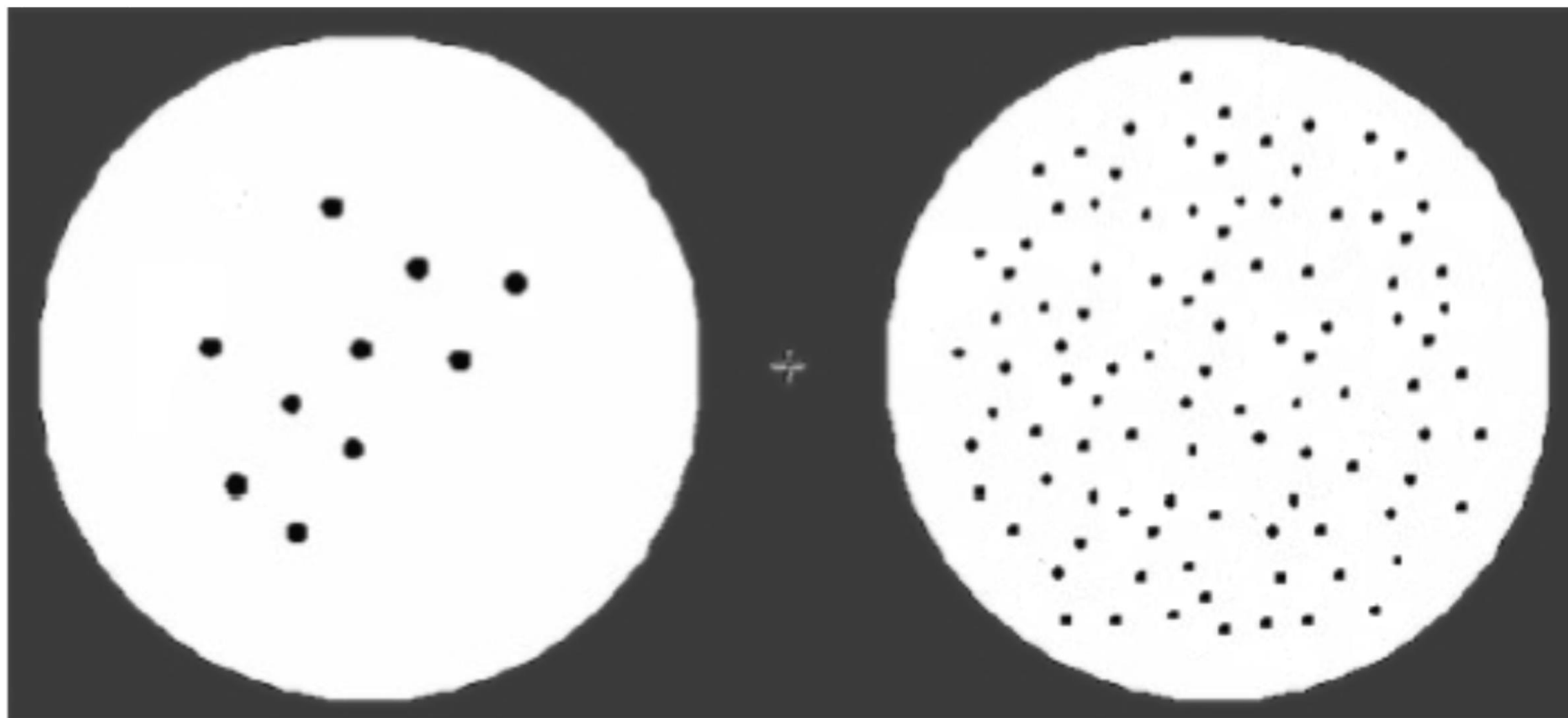


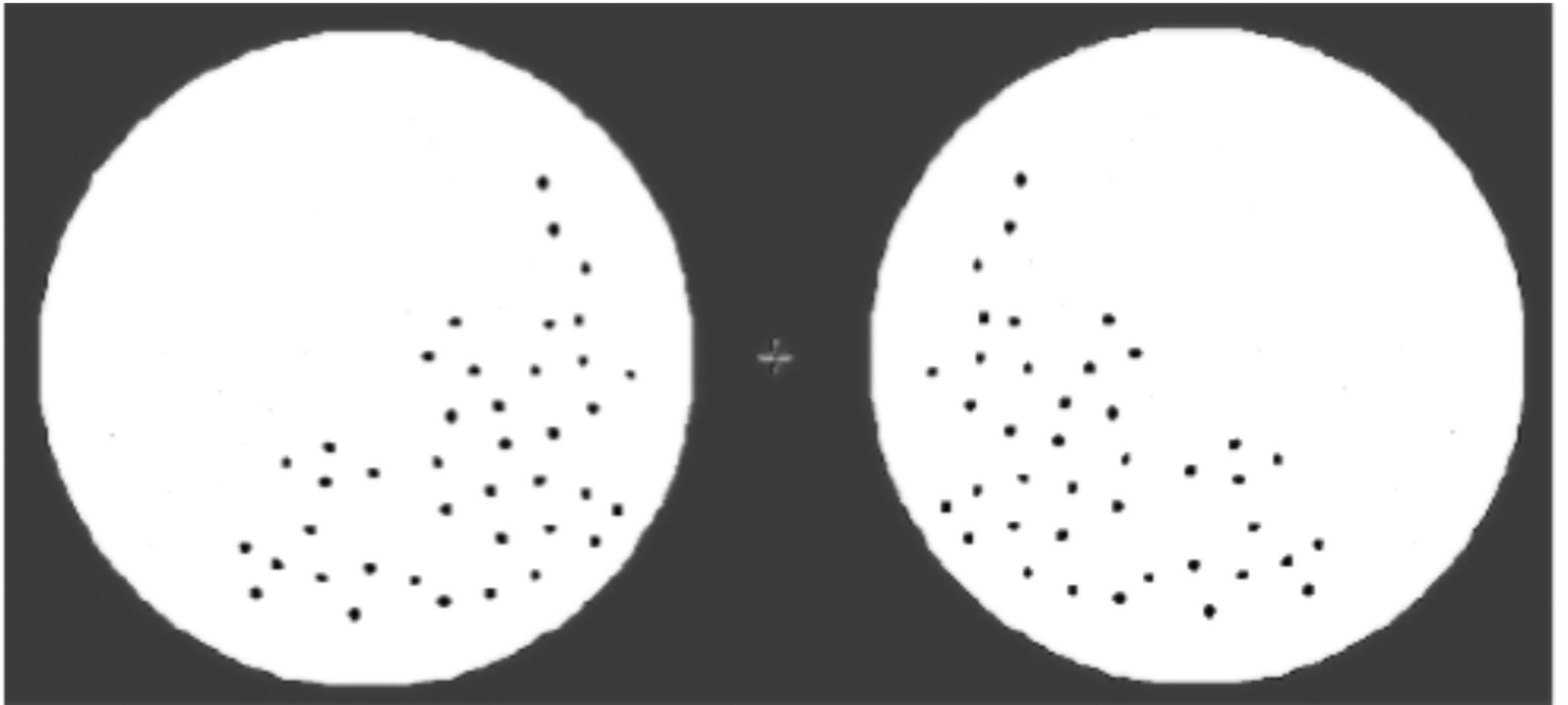
Nyní se opět objeví zaměřovací kříž.

Upřete na něj zrak.

Následně sledujte kříž na obrazci,
dokud se neobjeví nový objekt.







(Burr a Ross, 2008)

Object tracking system (OTS), subitizing

paralelní, 4 ± 0 objektů (Jevons, 1871).

3. trimestr těhotenství

(Antell a Keating, 1983; Schleger a kol., 2014)

kardinalita neimplikuje ordinalitu (Picozzi a kol., 2010)

nezávislý na senzorní modalitě (Izard, 2009)

malé interindividuální rozdíly, nesouvisí s aritmetikou

(Ceulemans a kol., 2015)

závislost na pozornosti (Burr a kol., 2010)

Aproximate number system (ANS)

ANS: přibližný vjem většího množství.

OTS a ANS jsou disociované, obtížný přechod

- (Feigenson a kol., 2004).
- Diskontinuita při diferenciaci u kojenců (Coubart a kol., 2014)
- Disociace klesá s věkem (Feigenson a Carey, 2005), dospělí si mohou „volit“ (Agrillo a kol., 2015).

Kulturně nezávislé – ale ANS jako součást vizuálního systému a paměti nepřenositelný.

- „Číslo jako kognitivní technologie.“ (Frank a kol., 2008; Everett, 2005).
- U malých dětí proto souvisí s jazykem (Brysbaert a kol., 1998).

Výchozí předpoklady

- Charakteristicky lidská schopnost symbolicky kódovat numerické informace
- Existence vrozených **nesymbolických numerických dispozic**
 - **Nezávislé na lidském jazyce** – předcházející osvojení číselného aparátu
 - **Biologická podmíněnost a univerzalita**
 - Napříč ontogenetickým vývojem – od narození (Izard et al., 2009; Antell & Keating, 1983), v posledním trimestru těhotenství (Schleger et al., 2014)
 - Napříč fylogenetickým vývojem – evoluční význam (Agrillo, Piffer, & Adriano, 2013; Taves, 1941; Kaufmann et al., 1949; Gelman & Gallistel, 1978)
 - Báze tzv. **aproximativního numerického systému (ANS)**
 - Dovednost **odhadu kvantit**



Nesymbolické numerické schopnosti

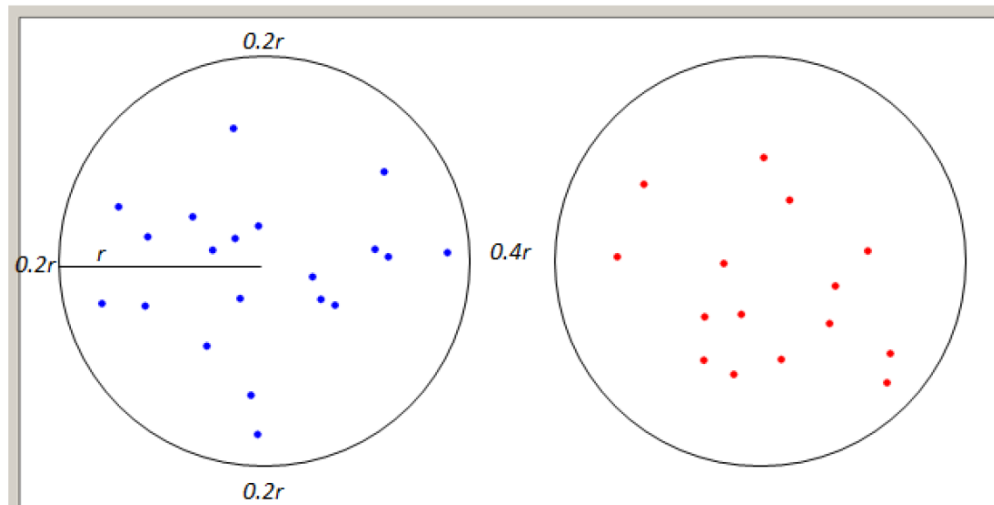
- **Tzv. numerický smysl** – ontogenetický vývoj > zpřesňování (Xu & Spelke, 2000)
- **Tzv. preverbální početní mechanismus** (Meck a Church, 1983) – předpoklad rozvíjení symbolických (formálních) matematických schopností na bázi vrozených nesymbolických početních schopností (obdobné neurální koreláty, NPS jako prediktor SPS)
- **Aproximativní numerický systém (ANS)** – přibližná mentální reprezentace počtu – rychlý a hrubý kvantitativní odhad
 - Aktivace při mohutnosti množin 4 a více prvků, při nižších počtech preference systému OTS (Cutini & Bonato, 2012)
 - Měření úlohami komparace (diskriminace) počtu – přesnost a rychlost diferenciací – informace o tzv. ostrosti ANS

ANS

- Senzitivita vůči **tzv. rozsahu numerické vzdálenosti** (Haist et al., 2015; Piazza et al., 2010)
- Funkční výhoda **rychlosti a relativní přesnosti** zpracování stimulu, v závislosti na velikosti množin
- **Neurální koreláty**
 - Specializované okruhy pro kódování množství – prefrontální a intraparietální kortexu – zejm. **intraparietální sulkus (IPS)** (Anderson & Penner-Wilger, 2013; Nieder & Miller, 2004)
 - Event. **temporálně-okcipitální kortex** (Cantlon et al., 2006; Izard et al., 2008; Nieder & Dehaene, 2009)
- **Senzorická / kognitivní báze**
 - Vizuální aparát („visual-short term memory“ – VSTM) – subitizing, adaptace, W-F zákon
 - Asociační matematická centra – preferovaná množina, ne nutně největší
 - 2 úrovně neurálního zpracování množství v závislosti na náročnosti úlohy (Piazza et al., 2010; Hyde, 2011)

Měření ANS

- **Úlohy komparace (diskriminace, diferenciacce) množství** – shluky objektů, např. teček (Holloway & Ansari, 2009)
- Správnost a rychlosti odhadu > **tzv. ostrost ANS** – relativní poměr rozdílu v množství prvků (Chesney, 2018; Price et al., 2012)
- **Weber-Fechner zákon** – nižší množství > nižší rozdíl potřebný pro správnou diskriminaci (Xu & Spelke, 2000)
- **Tzv. efekt numerické vzdálenosti (NDE, event. NRE – numerical ratio effect)**



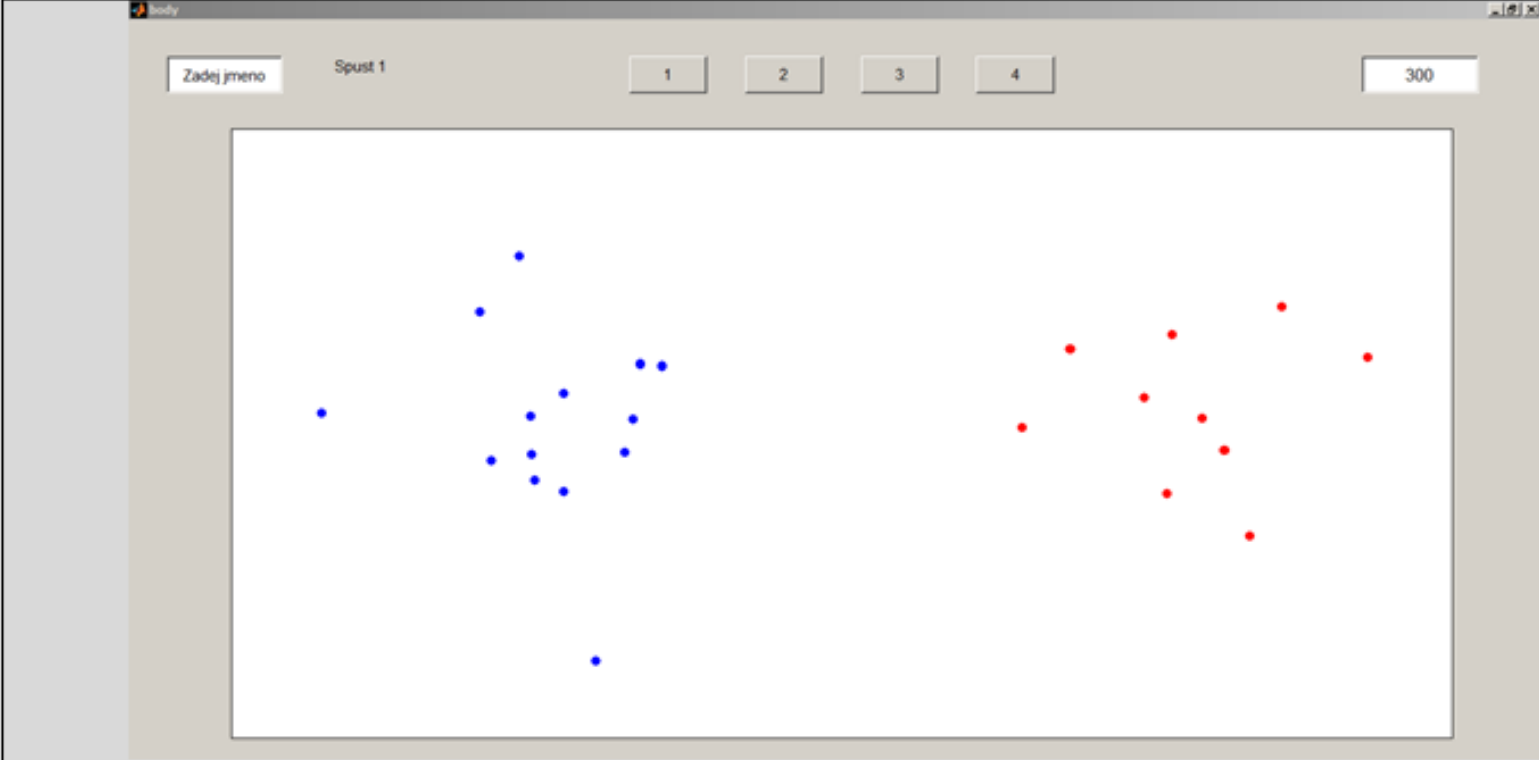
Vztah ANS a symbolických matematických schopností

- Presymbolické dispozice – **ANS** > pozdější vývoj matematických kompetencí – **ENS** (tzv. exaktní numerický systém) (Castronovo & Goebel, 2012)
- **ANS jako prediktor** budoucího formálního výkonu a tedy i úspěchu v matematice (Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010; Halberda et al., 2008; Purpura & Logan, 2015; Starr, Libertus, & Brannon, 2013; Soto-Calvo et al., 2015)
- Pozitivní efekt **tréninku presymbolických numerických dovedností** na výkon v aritmetických testech – příprava a podpora dětí v matematice (Park & Brannon, 2014; Brannon et al., 2016) – **techniky nácviku matematického odhadu** (Binterová & Hošpesová, 2003; Binterová et al., 2005; Samková, 2013)
- **Doklady kauzality** (Feigenson, cit. dle Olmstead & Kuhlmeier, 2015)
 - 1) individuální rozdíly ve funkci ANS již v dětství (Libertus & Brannon, 2010)
 - 2) přesnost ANS predikující pozdější matematický výkon (Mazzocco et al., 2011)
 - 3) zlepšení formálních mat. schopností trénováním ANS (Park & Brannon, 2014; Park et al., 2016)
- ANS jako báze pro porozumění školní matematiky > slábnutí vztahu – postupná nezávislost aritmetických schopností na nesymbolickém základu

Implikace ANS pro účel diagnostiky dyskalkulie

- Souvislosti nesymbolického a symbolického aspektu početních schopností → spojitost jejich deficitu
- Uplatnění dysfunkce ANS jako indikátoru dyskalkulie
- Adaptace metod početního odhadu pro účel identifikace narušení matematických schopností přispívající k časnější diagnostice dyskalkulie a nastavení vhodné reedukace
- Screening dyskalkulie
 - základní schopnosti, např.: číst čísla, chápat stálost množství, sčítat a srovnávat velikost jednomístných čísel (Mazzocco, 2005), odhadovat četnost (Geary et al., 2009), počítat pozpátku či umístit počet v rámci analogové škály (Deloche et al., 1999)
 - „The Dyscalculia Screener“ (Butterworth, 2003) – doména rozlišování množství (numerosity)
 - Předškolní období – specifické prekurzorové dovednosti (Aunio & Niemivirta, 2010; Butterworth & Laurillard, 2010)

Měřicí nástroj („Test početního odhadu“) – základní popis



Uskupení:	variabilní	fixní
Proměnlivost:	rozmístění a počtu prvků	rozmístění prvků
Ovládání:	stisk klávesy A	stisk klávesy L

Výstup: informace o položce, správnost (S) a reakční čas (T)

Měřicí nástroj („Test početního odhadu“)

– psychometrické vlastnosti

- **Položková analýza** – redukce položek z původních 120 (30-40-50) na finálních 85 (20-30-35)
- **Reliabilita** (vnitřní konzistence, korelace subtestů s celkovým testem)

(Sub)test	α_s	α_t	α_s redukovaná
2. subtest	0,69	0,95	0,74
3. subtest	0,78	0,96	0,82
4. subtest	0,74	0,97	0,83
Celkový test	0,87	0,99	0,91

(Sub)test	2. subtest	3. subtest	4. subtest	Celkový test
2. subtest	1	,698**	,445**	,762**
3. subtest	,698**	1	,661**	,911**
4. subtest	,445**	,661**	1	,878**
Celkový test	,762**	,911**	,878**	1

Výsledky – deskriptivní statistika

- Tendence k větší úspěšnosti (přesnosti a rychlosti) početního odhadu u kontrolní skupiny

správnost	skupina	N	M	SD	SE
S1	kontrolní	50	17,50	2,003	,283
	dyskalkulie	17	16,71	2,257	,547
S2	kontrolní	50	26,72	2,241	,317
	dyskalkulie	17	24,41	4,583	1,112
S3	kontrolní	50	28,40	4,121	,583
	dyskalkulie	17	24,76	6,300	1,528
S	kontrolní	50	72,62	7,102	1,004
	dyskalkulie	17	65,88	11,554	2,802

Výsledky – regresní model

- Regresní model
 - Vysvětlení 20 % rozptylu
 - Nízký vysvětlující potenciál sledovaných proměnných (uplatnění jiných faktorů)

	model 1			model 2		
	B	std. β	p	B	std. β	p
konstanta	54,13		<0,001	58,86		<0,001
věk	1,36	0,391	0,001	1,07	0,309	0,012
dyskalkulie				-4,87	-0,232	0,056
adj. R^2	0,153			0,200		
F	F(1; 65) = 11,716, p = 0,001			F(2; 64) = 8,002, p = 0,001		
adj. ΔR^2				0,047		
ΔF				F(1, 64) = 3,785, p = 0,056		

Interpretace výsledků a diskuze

- Přítomnost určitých rozdílů v početním odhadu ve prospěch kontrolní skupiny
- Objasnění necelé čtvrtiny celkového rozptylu dovednosti početního odhadu – nezanedbatelný, avšak nikoli zásadní význam sledovaných proměnných
- Důvody nevýznamnosti faktoru dyskalkulie – limity studie
 - Nižší velikost a vyšší heterogenita klinické skupiny, příp. znevýhodnění části kontrolní skupiny
 - Možná nižší konstruktová validita měření ANS (přesahující rozsah jeho kapacity) – uplatnění vyšších kognitivních funkcí
 - → projevení interindividuálních rozdílů (motivace, kognitivní procesy, příprava)
- Alternativní vysvětlení – kompenzace deficitu symbolických matematických schopností využíváním nesymbolických procesů u dětí s dyskalkulií

Budoucí výzkum

- Zaměření výzkumu
 - Vztah mezi nesymbolickými a symbolickými numerickými schopnostmi
 - Vztah mezi nesymbolickými numerickými schopnostmi a vývojovou dyskalkulií
 - Vliv tréninku nesymbolických numerických dovedností na symbolické matematické schopnosti
- Měřicí nástroj
 - elektronický IRT adaptivní test
 - diferenční úlohy, další prematematické úlohy (osy, úsečky)
- Metody analýzy
 - LLTM model
 - ...

Weber-Fechnerův zákon: odhad

Tradiční postup: adaptivní staircase, nebere v úvahu uhádnutelnost.

- Správně → obtížnější položka.
- Chybně → jednodušší položka.

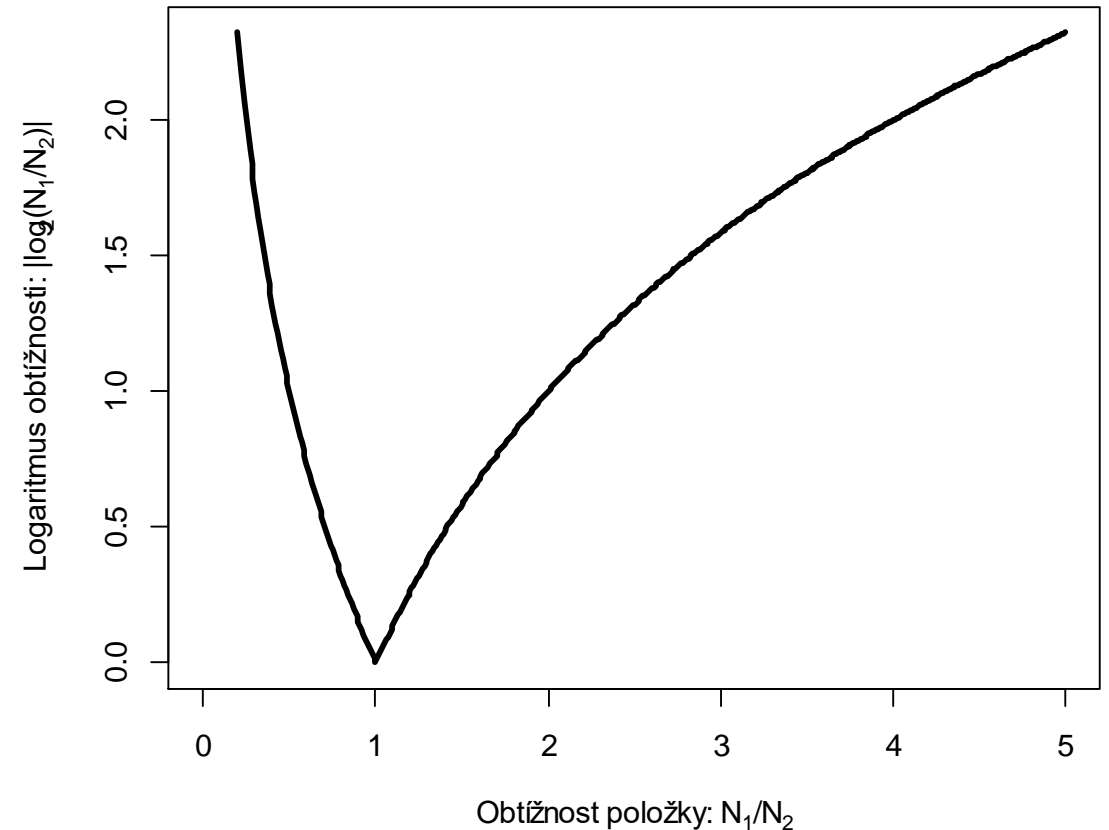
Obtížnost položky:

$$\tau_i = \left| \log_2 \frac{N_{i,1}}{N_{i,2}} \right|$$

- $N_{i,1}$, $N_{i,2}$ – počty prvků vlevo, vpravo.

Weber-Fechnerův zlomek: poměr, kdy respondent přestává rozlišovat

- Typicky 70–85% správnost.



WF: uhádnutelnost

Pilotní studie (Šamajová, 2019): N = 81, 104 položek.

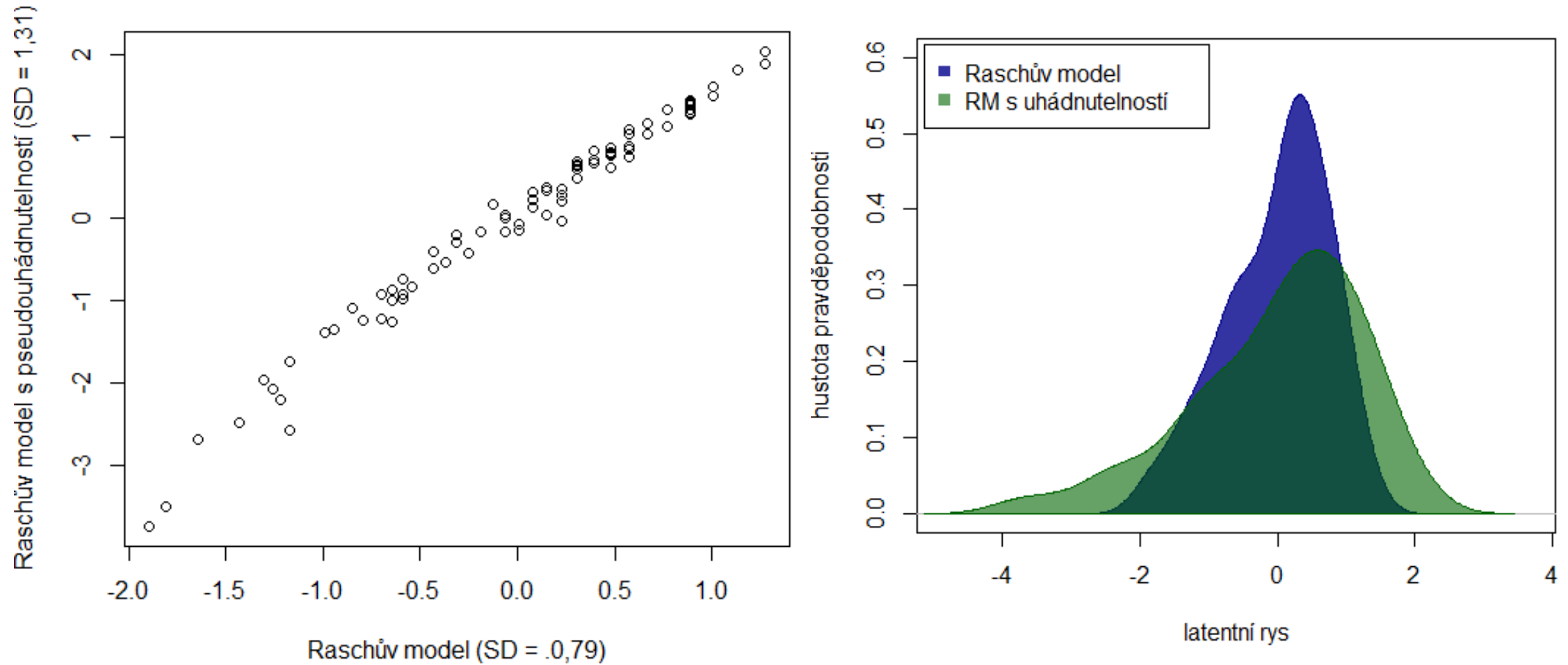
Model 0 – Raschův model:

$$P(x = 1) = \frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)}$$

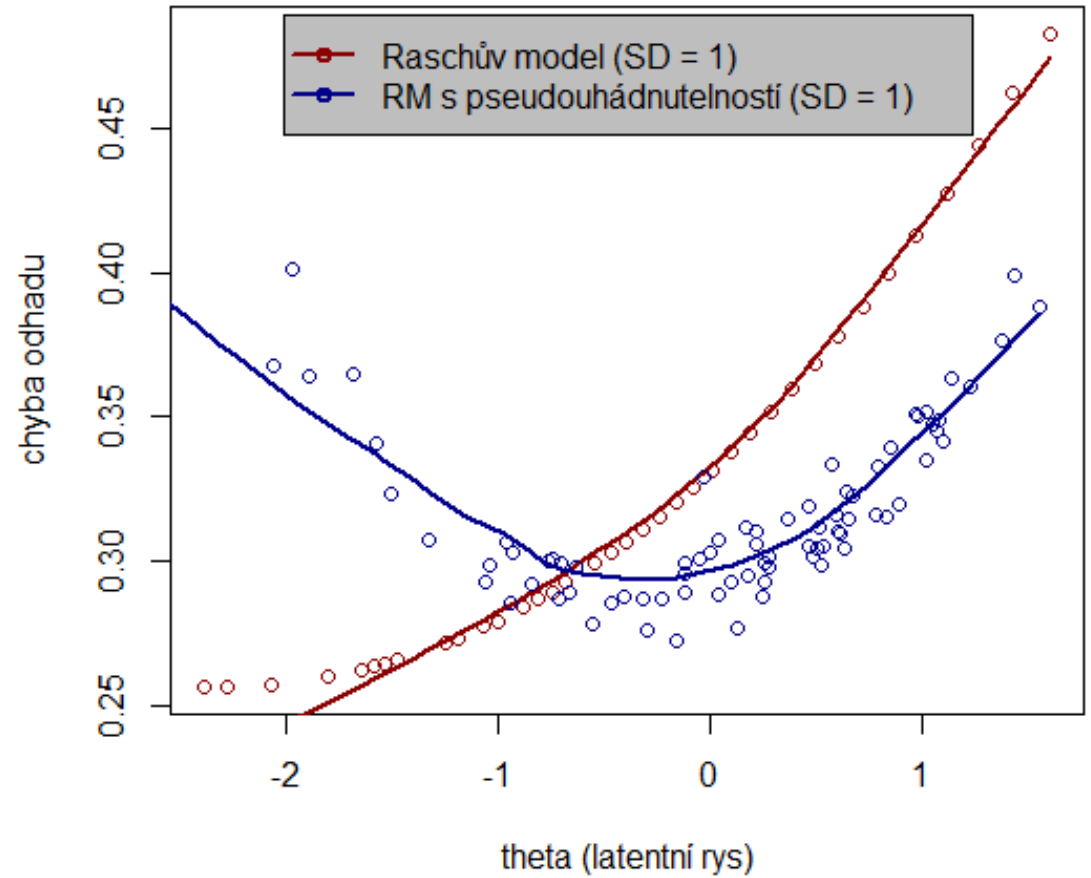
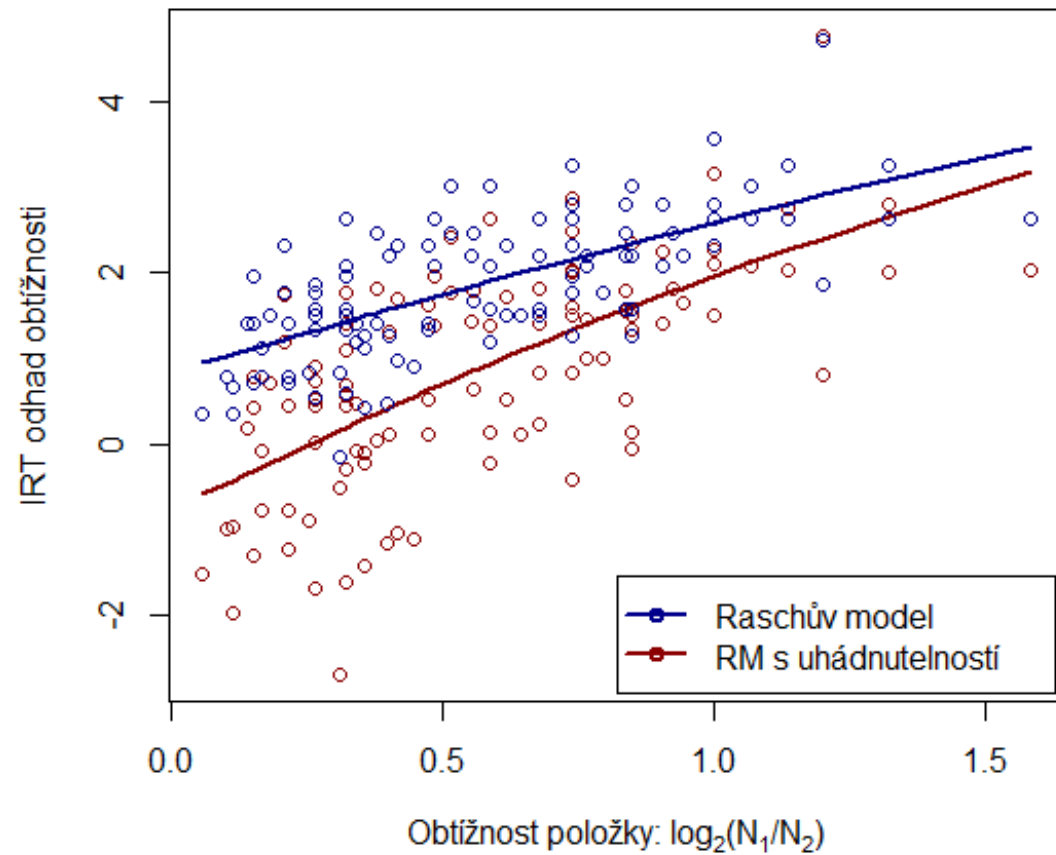
Model 1 – Raschův model se spodní asymptotou:

$$P(x = 1) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)}$$

WF: uhádnutelnost



WF: uhádnutelnost

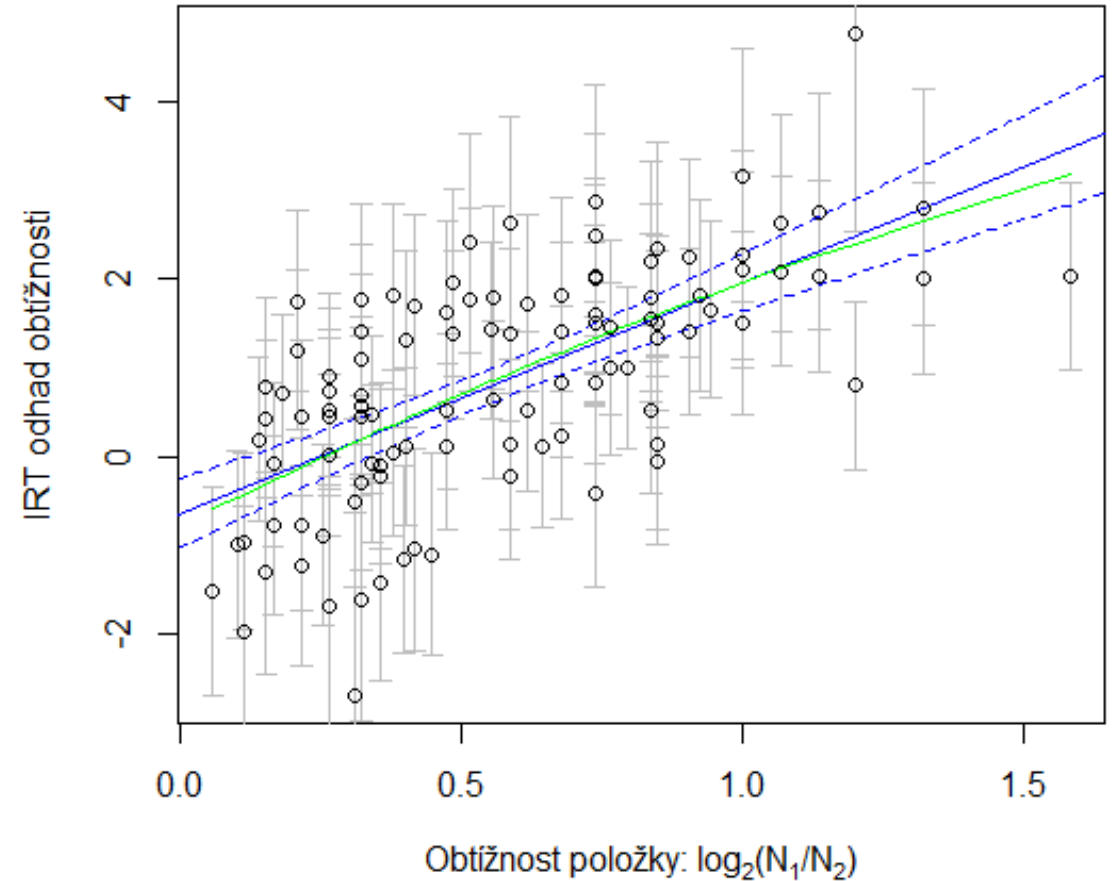


WF: uhádnutelnost

Vztah obtížnosti a IRT odhadu lineární.

- Kvadratický člen nesignifikantní.
- Bez vlivu „vyšší“/„menší“.

Silný vztah, $\beta = 0,65$, $_{adj}R^2 = 0,42$.



Weber-Fechnerův zákon

Model 2 – Explanační Raschův LLTM model:

$$P(x = 1) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp(\theta - \tau_i)}{1 + \exp(\theta - \tau_i)}$$
$$\tau_i = \left| \log_2 \frac{N_{i,1}}{N_{i,2}} \right|$$

Model 3 – M2 + náhodná obtížnost $b_i \in N(0, \sigma_b^2)$

$$P(x = 1) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp[\theta - (\tau_i + b_i)]}{1 + \exp[\theta - (\tau_i + b_i)]}$$

Weber-Fechnerův zákon

Model 4 – M2 + vliv větší/menší ($u_i \in \{0,1\}$)

$$P(x = 1) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp[\theta - (\tau_i + u_i + v\tau_i u_i)]}{1 + \exp[\theta - (\tau_i + u_i + v\tau_i u_i)]}$$

Model 5 – M2 + absolutní počet prvků n_i

$$P(x = 1) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp[\theta - (\tau_i + n_i + v\tau_i n_i)]}{1 + \exp[\theta - (\tau_i + n_i + v\tau_i n_i)]}$$

Weber-Fechnerův zákon

Zanedbání uhádnutelnosti:

- zkresluje odhad W-F zlomku
- zkresluje odhad chyby

Poměr prvků dobře predikuje obtížnost položky.

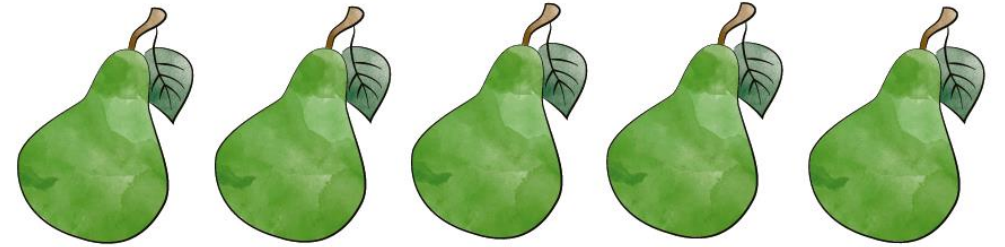
Slabý vliv počtu prvků.

Bez vlivu „nahoru“/„dolů“

- Po kontrole množství.

	AIC	BIC	saBIC	$\Delta\chi^2$	df
M0: b	7122,4	7373,8	7042,6		
M1: b + c	7096,6	7348,0	7016,9	M0: 25,7***	0
M2: $\tau + c$	7280,3	7287,5	7278,1	M1: -387,7***	-102
M3: $(\tau+b) + c$	7291,3	7300,9	7288,2	M2: -8,9**	1
M4: $(\tau+u+\tau \times u) + c$	7269,2	7281,2	7265,4	M2: 15,1***	2
M5: $(\tau+n+\tau \times n) + c$	7232,7	7244,6	7228,9	M2: 51,7***	2
M6: $(\tau+n+u)^2 + c$	7237,1	7256,3	7231,0	M5: 1,54	3

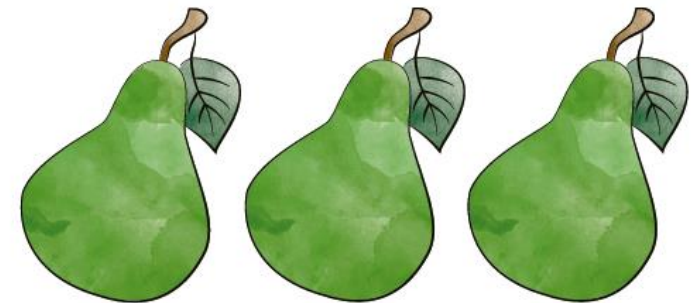
Děkujeme za pozornost!



Hynek Cígler, Vendula Šamajová

- cigler@fss.muni.cz
- samajova.vendu@seznam.cz
- Katedra psychologie
Institut pro výzkum dětí, mládeže a rodiny
- Fakulta sociálních studií,
Masarykova univerzita
- psych.fss.muni.cz
- ivdmr.fss.muni.cz

„Kolik hrušek jsme dali do košíku?“



M U N I Katedra
F S S psychologie