Jak přemýšlejí děti při řešení matematických úloh?

Hynek Cígler

Abstrakt

Jaké kognitivní funkce děti používají při řešení matematických úloh? Jak souvisí schopnost řešit matematické problémy se schopností řešit problémy logické, sémantické, vizuální a jiné? Jaké strategie volí úspěšní a neúspěšní řešitelé? Tyto otázky lze zodpovědět z různých perspektiv. V tomto příspěvku se pokusím nastínit několik možných pohledů na povahu pozorovaného matematického výkonu a na to, proč jsou někteří lidé při řešení matematických úloh úspěšnější než jiný. Popíšu pohled na matematické schopnosti z hlediska teorie inteligence, z neuropsychologického hlediska, a rovněž i z pohledu jiných faktorů, kam lze zařadit motivaci, styl práce, osobnostní charakteristiky či metakognitivní dovednosti. Většinu argumentů formuluji na základě teoretických východisek, využiji však i poznatky z vlastního výzkumu. Konkrétně jde o koncept „kognitivních prerekvizit“ a dále pak o studium stylu řešení matematických problémů souvisejícího s interní motivací dítěte, konkrétně „tendencí alespoň se pokusit vyřešit obtížné úlohy“ v kontrastu k tendenci je „přeskočit“. Ukážu, jak tato tendence souvisí se schopností vyřešit úlohy úspěšně, a jak ji ovlivňuje osoba učitele.

1 Úvod

Na povahu a podobu matematických schopností a dovedností lze nahlížet optikou mnoha různých oborů a přístupů. Je evidentní, že jinak bude matematické schopnosti vnímat teoretický matematik, který se zaměřuje na výzkum v některém z matematických oborů, jinak učitel, jehož cílem je předat svým žákům základní znalosti. Jiné aspekty budou připadat důležité psychologovi či speciálnímu pedagogovi z hlediska specifických vzdělávacích potřeb a jinou perspektivu bude zaujímat kognitivní vědec či neurovědec, který zkoumá neurofyziologické koreláty matematických funkcí. Pohled filozofa či epistemologa pak bude ještě zcela odlišný.

V tomto příspěvku se pochopitelně nevěnujeme povaze matematiky jako takové. Jako psychologa mě zajímá především to, jaké psychické funkce jsou zodpovědné za řešení matematických problémů různého druhu, i tak se ale pohledy na problematiku diametrálně liší. Přitom nejde jen o hypotetický problém – různá pojetí matematického myšlení implikují jiný způsob uvažování například o příčinách školního neúspěchu a jeho případné nápravě, o povaze mimořádného (matematického) nadání či o tom, jakou roli hraje matematika v běžném životě. Psychologové Sternberg a Ben-Zeev [1] ve své knize *The Nature of Mathematical Thinking* rozdělili přístupy psychologického studia matematického myšlení do několika základních oblastí, které se zaměřují na interindividuální rozdíly a vztah matematických schopností k jiným intelektovým funkcím, postupy kognitivního zpracování informace, ovlivnění matematického myšlení kulturou a jazykem, vzděláním a pedagogickým přístupem, a v neposlední řadě kniha překládá i ryze matematický pohled.

2 Zařazení matematických schopností mezi jiné intelektové schopnosti

Matematické schopnosti nelze zkoumat odděleně od jiných složek intelektu – v opačném případě totiž snadno dojdeme k mylným závěrům. Co vlastně o matematickém výkonu víme? Za prvé je stabilní v čase. Míra matematického výkonu samozřejmě v čase kolísá, ale ne tolik, jako například emoce či pozornost. To stejné platí nejen pro aktuální výkon, ale i pro schopnost se matematice učit. Zároveň jde o komplexní jev zahrnující mnoho dílčích složek, ve kterých pozorujeme značné interindividuálními rozdíly. Budoucí dobré matematické usuzování navíc lze relativně snadno predikovat již v raném věku [2]–[4].

V současnosti nejsilnější teorií inteligence je tzv. Cattell-Horn-Carrollova teorie [5]–[7], která rozdíly v lidských schopnostech vysvětluje latentními rysy uspořádanými ve třech hierarchických vrstvách. Zcela „nahoře“ je tzv. obecná inteligence (*g*, general factor“), pod níž leží zhruba deset širokých schopností, a na nejnižší úrovni velké množství schopností úzkých. Teorie samozřejmě obsahuje i faktory, které můžeme označit za ryze matematické: kvantitativní usuzování (*RQ*, tedy schopnost logicky vyřešit matematický problém), kvantitativní vědomosti (*Gq*, prostá znalost postupů a výkon v testech) a číselná zručnost (*N*, tedy schopnost správně a rychle provést numerické výpočty). Zajímavé však je, že tyto tři faktory jsou v teoretickém modelu relativně nezávislé. Zatímco *Gq* je samostatnou širokou schopností, *RQ* a *N* jsou úzkými schopnostmi zařazené do odlišných širokých schopností. Například dobrá aritmetická dovednost (*N*) nezaručí, že ji člověk bude umět aplikovat na problémy běžného dne (*RQ*). Obdobně pak dobré předpoklady v podobě matematického usuzování (*RQ*) neznamenají, že se student dobře učí a dovede je přetavit ve skutečné znalosti (*Gq*).

Zatímco výše uvedené schopnosti jsou poměrně nezávislé, některé z nich poměrně těsně souvisejí se zdánlivě nesourodými dovednostmi. Například matematické usuzování je zcela zásadní součástí tzv. fluidní inteligence, a to společně se schopnostmi jako je logická práce s pojmy, hledání analogií a podobně [8]. Intuitivní oddělení logického usuzování založeného „na jazyku“ a na „matematice“ tak nemá oporu ve výzkumu. Fakt, že někteří lidé i přes nespornou schopnost logického myšlení selhávají v matematice, může být proto většinou způsobeno neintelektovými faktory: motivací, osobnostními preferencemi, výukou, stereotypy a podobně.[1]

Znalost výše uvedené struktury je užitečná z několika důvodů. Jedním z nich je správné chápání různých kauzálních mechanismů ovlivňujících náš život. Víme například, že vyšší míra matematických dovedností souvisí s velikostí příjmu, zaměstnatelností, kariérním postupem nebo životní spokojeností. Rané matematické dovednosti predikují pozdější akademický i životní úspěch [4], [9]–[12]. Jde zde však „jen“ o matematiku? Mnoho podobných studií nekontroluje jiné složky intelektu a z nových výzkumů se zdá, že společnou a skutečnou příčinou dobrého matematického výkonu a pozdějších úspěchů je ve výše uvedených případech zřejmě obecná inteligence (*g*), nikoli matematické znalosti jako takové [13].

3 Matematické prerekvizity

Zatím jsme se zaměřili na to, jak se lidé ve výkonu liší. Co však mají společné? Existují nějaké aspekty matematického myšlení nezávislé na kultuře, jazyku, vzdělání? Zatímco vyšší aritmetice a numerickým výpočtům se člověk musí učit, jiné aspekty jsou vrozené či získané přirozeným zráním organismu. Lidé již od třetího trimestru těhotenství dovedou diskriminovat velmi malá množství (cca tři objekty) [14]–[16]. Stojí za tím tzv. systém sledování objektu (OTS, object tracking system), někdy známý jako subitizing. V dospělosti snadno poznáme čtyři objekty bez nutnosti je vědomě počítat, v případě vyšších počtů (pět, šest) si ale musíme už pomáhat různými heuristikami a v případě ještě většího počtu záleží na uspořádání objektů; při náhodném rozmístění se neobejdeme bez záměrného spočítání celkového počtu. Zajímavé však je, že OTS je „pouze“ kardinální (diferenciace množství), nikoli ordinální (tedy seřazení prvků dle velikosti) [17], [18]. Navíc prakticky nesouvisí s jinými matematickými schopnostmi.

[1] Na tomto místě navíc možná někomu chybí geometrie a některé jiné matematické obory. Má samozřejmě pravdu a vynechávám je zde záměrně. V případě geometrie například situaci komplikuje fakt, že vizuálně-prostorové dovednosti jsou jinou a na výše zmíněných opět relativně nezávislou složkou inteligence. V tomto textu se proto zaměřujeme výhradně na matematiku jako na práci s magnitudami a množstvím.

Z tohoto hlediska je mnohem zajímavější aproximální numerický systém (ANS) zodpovědný za přibližné odlišení většího množství objektů, a to nezávisle na modalitě (je jedno, zda jde o sluchový, zrakový či hmatový vjem). ANS je velmi základní psychickou funkcí; některé teorie hovoří o tom, že jde zčásti o funkci center zodpovědných za zpracování vizuálního signálu, a navíc ji sdílíme s většinou jiných živočišných druhů [19]–[23]. Přesto má dopady na naše matematické schopnosti. Ačkoliv se v průměru ANS řídí Weber-Fechnerovým zákonem (tedy nezáleží až tolik na absolutním počtu prvků, ale spíše poměru velikostí, které chceme odlišit), a výkon většiny lidí se pohybuje v přibližně stejném pásmu, existují ve schopnosti diskriminace určité individuální rozdíly a někteří lidé podávají citelně horší výkon. Zdá se, že rozdíly ve fungování takto primitivní neurologické funkce souvisejí se schopností provádět aritmetické výpočty, a někteří autoři deficit v ANS považují za jednu z možných příčin dyskalkulie [24]–[26]. Zdánlivě racionální a logická schopnost realizovat numerické výpočty je tedy možná z části řízena podobnými procesy, které jsou jinak zodpovědné například za odlišení jednoduchých tvarů, a kterými disponují i vrány či všichni savci [23].

Na základě uvedených teoretických poznatků a částečně i mého výzkumu [27] se lze domnívat, že snadnost a dostupnost různých základních psychických funkcí pro manipulaci s kvantitami, mezi něž patří mimo ANS i pracovní paměť, princip relace a ordinality, pozornost a podobně [28]–[30] podmiňuje i matematické usuzování. Lidé s obtížemi v těchto základních funkcích musí jejich nedostatek kompenzovat logickou úvahu a nadměrným soustředěním, a proto již nemají k dispozici dostatek kapacity pro vlastní řešení matematického problému.

Dále se zdá, že zatímco úroveň těchto kognitivních prerekvizit je u dětí úspěšných v matematice víceméně stejná (a záleží tak spíše na kvalitě úsudku jako takového), u dětí s nižším výkonem se liší a způsobuje různé, heterogenní druhy neúspěchu [27]. Příčinou zdánlivě nelogického usuzování tak nemusí být jen nízké intelektové schopnosti, ale i omezený rozsah pracovní paměti, nízká úroveň ANS, slabá schopnost koncentrace pozornosti a další. Je navíc potřeba si uvědomit, že i přes shodné či podobné symptomy nemusí být konkrétní příčina neúspěchu daného člověka patrná, a podobné symptomy mohou mít příčinou zcela rozdílnou.

4 Vliv stylu práce

Za neúspěchem v matematice a nízkým pozorovaným výkonem nicméně nemusí stát jen nedostatečné schopnosti, které jsem zmínil výše. Ukazuje se například, že síla genderových stereotypů ohledně předpokladů mužů a žen v technických a vědeckých oborech napříč zeměmi poměrně dobře popisuje skutečné rozdíly studentů a studentek [31]. Navíc tyto genderové stereotypy jsou v mnoha zemích (včetně České republiky) značně silnější než skutečné rozdíly, které jsou malé a v řadě zemí naopak dívky podávají lepší výkon než chlapci; navíc se v posledních dekádách tyto rozdíly snižují [32]–[34]. Lze se oprávněně domnívat, že skutečnou příčinou (nebo jednou z příčin) případných rozdílů je odlišný přístup vyučujících k žákům a žákyním. Výkon v matematice navíc silně snižuje i předchozí neúspěch, stejně jako nízké „matematické sebevědomí“. To platí i naopak, předchozí úspěch silně zvyšuje zájem o matematiku [35], [36]. Vzhledem k tomu, že matematické znalosti jsou silně hierarchické – a na rozdíl např. od dějepisu si je nelze osvojovat příliš „na přeskáčku“ –, dílčí neúspěch v raném věku může mít zásadní dopady na budoucí matematické dovednosti.

Závěrem [2] tohoto příspěvku proto uvedu příklad nekognitivních příčin neúspěchu v matematice. V našem dřívějším pilotním výzkumu [37] jsem se s kolegy zaměřil na rozdíl ve výkonu v matematickém testu na základě matematické schopnosti a stylu práce. Styl práce byl definovaný jako tendence alespoň se pokusit správně vyřešit úlohy v testu i bez znalosti správného řešení, nebo úlohu rovnou přeskočit. U obou dvou složek jsme pak navíc sledovali,

[2] Výsledky analýz popsaných v této kapitole vycházejí z dřívější nepublikované přednášky Adama Ťápala a Hynka Cíglera [37].

do jaké míry za rozdíly mezi žáky stojí učitel (či demografické prostředí dané školy a podobně), a do jaké individuální charakteristiky daných žáků.

Tendence vzdávat řešení a testovou otázku přeskočit má své výhody a nevýhody. Výhodou je přeskočení příliš obtížných úloh, které by řešitel stejně nezvládl zodpovědět správně. Nevýhodou je pak samozřejmě to, že přeskočením úlohy se žák vzdává byť sebemenší šance na úspěšné vyřešení, čímž snižuje svůj pozorovaný výkon v celém testu.

2.1 Výzkumný vzorek a metoda

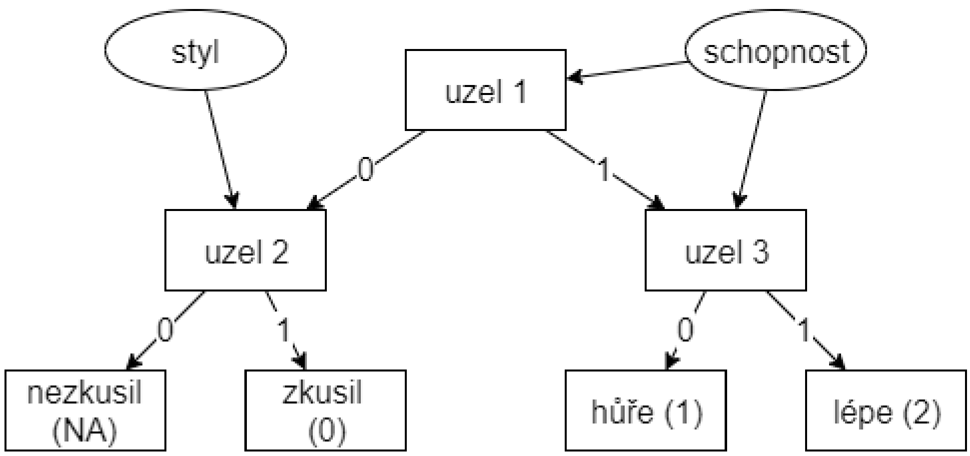
Náš vzorek tvořilo 797 dětí, žáků 3.–5. tříd základních škol, kteří tvořili standardizační soubor testu použité metody. Děti pocházely celkem ze 44 tříd ze 13 škol; podrobnosti vzorku jsou dostupné jinde[38]. Děti v rámci stejné třídy byly vyučovány vždy tím stejným učitelem.

Pro účely výzkumu jsme použili Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu, TIM$^{3–5}$[39], určený pro screening matematického nadání na základních školách[3]. K dispozici jsou dvě paralelní formy, poskytující skóre na stejné škále. Každá se skládá se z asi 25 položek s otevřenou odpovědí, vypracování zabere dětem 45 minut. Test se vyznačuje celkově dobrými psychometrickými parametry[38]. Položky jsou hodnoceny jedním nebo dvěma body (zpravidla na principu dílčího selhání v postupu či výpočtu). Chybné odpovědi jsou odlišeny podle toho, zda se žák alespoň pokusil odpovídat, nebo úlohu úplně přeskočil (čehož jsme využili v tomto výzkumu).

2.2 Teorie odpovědi na položku a Raschův model

Pro účely tohoto výzkumu jsme použili psychometrický model označovaný jako IRTree[40]; jde o slovo složené ze zkratky IRT (Item Response Theory) a slova tree. Základním předpokladem teorie odpovědi na položku je existence určitých „latentních rysů“, které kauzálně způsobují pozorované chování osob. Jinými slovy teorie předpokládá, že správné či chybné vyřešení položky v testu je způsobeno jedním či více latentními rysy daného člověka, latentními charakteristikami dané položky (obtížnost, souvislost s daným rysem) a určité míry náhody. Chování je proto označováno jako manifestní proměnná, protože je manifestací právě těchto latentních proměnných.

Námi použitou reprezentaci modelu ilustruje obrázek 1. Každá testová položka (kódovaná NA, 0, 1, 2) byla rozdělena do tří samostatných binárních položek (uzlů). První uzel reprezentoval, zda respondent odpověděl alespoň zčásti správně (1, 2), nebo chybně (NA, 0). Pokud odpověděl chybně, uzel 3 nebyl pozorován (obsahoval chybějící hodnotu), a uzel 2 poskytoval informaci o tom, zda se respondent pokusil položku řešit (0) či nikoli (NA). Naopak při správné odpovědi na první uzel nebyl pozorován uzel 2, zatímco uzel 3 obsahoval míru správnosti řešení (1 nebo 2 body).



[3] Pro více informací viz http://www.testy-schopnosti.cz/test-tim-matematicky.

Obr. 1: IRTree model. Obdélníky: manifestní proměnné (v závorce skór). Ovály: latentní rysy.

Data byla převedena do tzv. dlouhého formátu (každá interakce respondenta s uzlem na samotném řádku) a pozorované odpovědi byly modelovány pomocí generalizovaného smíšeného modelu (GLMM); šlo vlastně o explanační jednoparametrový či Raschův model v rámci IRT Parametry modelu byly odhadnutý metodou maximální věrohodnosti (ML)[4] v R balíčku lme4. Správnost odpovědi (1 vs. 0) tak byla modelována pomocí logaritmické funkce

$$\ln \frac{P(x_i=1)}{1-P(x_i=1)} = \theta - b_i \tag{1}$$

kde $P(x_i = 1)$ je pravděpodobnost správné odpovědi (1) na testovou položku i, θ je úroveň latentního rysu a b_i je obtížnost položky i. Pravděpodobnost chybné odpovědi je potom

$$P(x_i = 0) = 1 - P(x_i = 1) \tag{2}$$

Model byl hierarchický, a proto jsme latentní rys θ rozparcelovali na dílčí složky:

$$\theta = a_1(\theta_1 + g) + a_2(\theta_2 + g) \tag{3}$$
$$\theta_1 = \theta_{1p} + \theta_{1c} + \theta_{1s} \tag{4}$$
$$\theta_2 = \theta_{2p} + \theta_{2c} + \theta_{2s} \tag{5}$$

kde skórovací funkce $a_1 = 1$ v případě uzlu 2 (jinak $a_1 = 0$) a $a_2 = 1$ v případě uzlů 1 a 3 (jinak $a_2 = 0$). Dále pak θ_{1p}, θ_{2p} je úroveň latentního rysu osoby p v matematických schopnostech (1) nebo ve stylu práce (2), a totéž analogicky pro průměrnou úroveň tříd (c) a škol (s). Konečně pak faktor g, nabývající hodnot 0, 1 a 2, označoval průměrný rozdíl ve schopnostech třeťáků, čtvrťáků a páťáků v daném rysu. Pro více podrobností o IRTree modelech viz jiné zdroje [41], [42].

2.4 Výsledky

Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 1 v podobě směrodatných odchylek náhodných proměnných (v závorce pak jejich rozptyly). V případě úsudku i stylu práce je patrné, že největší vliv na výsledek mají charakteristiky daného žáka, až pak školy (v případě úsudku) či učitele (u stylu práce). Na první pohled se sice zdá, že učitel má 0,055/0,142 = 39% vliv na matematický úsudek ve srovnání se stylem práce; jinými slovy se zdá, že učitel více ovlivňuje tendenci žáka „zkoušet řešení“ než jeho reálné dovednosti. Chceme však podotknout, že podíl těchto poměrů se statisticky významně neliší od 1, parametrický bootstrapový test (n = 1000): p = 0,159, $_{95\%}CI$ = [0; 1,319].

[4] Pokud nejsou obtížnosti známé, lze pomocí různých estimátorů odhadnout jak parametry osob, tak položek. V případě Raschova modelu se nejčastěji používá joint-maximum likelihood estimator (JMLE).

Tab. 1: Vliv úsudku a stylu práce na výkon a průměrné výsledky dítěte, třídy a školy. Uvedeny jsou směrodatné odchylky, v závorce rozptyly. *r* – korelace náhodných efektů na každé úrovni.

	Úsudek SD (VAR)	Styl práce SD (VAR)	*r*
dítě	1,05 (1,10)	1,25 (1,57)	0,25
učitel	0,25 (0,06)	0,47 (0,22)	0,47
škola	0,84 (0,70)	0,35 (0,12)	0,09
podíl učitel/dítě	0,055	0,142	

Doporučuji si ještě povšimnout relativně slabých korelací úsudku a stylu práce; zdá se, že oba latentní rysy jsou na úrovni dítěte relativně nezávislé a na úrovni školy již nesouvisejí prakticky vůbec. Naopak, na úrovni učitele je korelace středně silná – zdá se tedy, že učitelé, kteří učí šikovnější žáky, je rovněž i více podporují v tom, aby řešili i ty otázky, o kterých se domnívají, že přesahují jejich síly.

2.5 Diskuze

Výše představené výsledky jsou samozřejmě pouze preliminární a nesplňují požadavky na standardní výzkumnou studii; v tuto chvíli stále připravujeme publikaci v odborném časopise. Cílem je však ilustrovat fakt, že pozorovaný výkon žáka v testu (při zkoušení apod.) není „způsoben“ jen jeho znalostmi a dovednostmi. Na výkon mají vliv i jeho osobnostní charakteristiky, které však bez dalších informací není od vlastního výkonu možné odlišit. Pokud bychom nedisponovali informací o tom, zda byly testové položky přeskočeny či jen zodpovězeny nesprávně, nezaujatý hodnotitel by neměl žádné vodítko pro jejich odlišení na individuální úrovni, a mohl by tak podhodnotit skutečné žákovy schopnosti.

To je přitom zcela zásadní. V běžném případě jsou obě odpovědi (tedy přeskočení otázky i její chybné zodpovězení) interpretovány tak, že žák nezná řešení, a úloha je skórována za nula bodů. Přitom příčinou selhání nemusí být nutně jen neznalost, ale právě odpověďový styl. Pokud žák položku přeskočí, nemůže své znalosti projevit. Přitom tendence k přeskočení odpovědi jen slabě souvisí se skutečnou mírou matematických dovedností daného žáka. Protože nás v testu zpravidla zajímají matematické schopnosti, nikoliv tendence žáka položku úplně přeskočit, příčina nulového hodnocení na dané testové položce je tedy zcela zásadní.

Zároveň má učitel značný vliv nejen na rozdíly žáků mezi třídami, ale i na styl jejich práce; dokonce se na základě předběžných výsledků zdá, že vliv na styl práce může být dokonce větší než na samotné znalosti. V takovém případě jsou při hodnocení matematických shcopností znevýhodněni ti žáci, které jejich učitel nenabádá k řešení i zdánlivě beznadějných úloh. V případě srovnání znalostí napříč třídami či školami (například ve srovnávacích testech, jednotné přijímací zkoušce, přijímacích zkouškách na vysoké školy či státní maturitě) tak může být test do jisté míry neférový, protože se na výkonu studentů neprojeví pouze jejich znalosti, ale i charakteristiky jejich učitele nesouvisející přímo s matematickými znalostmi.

Zobecnitelnost a platnost těchto závěrů samozřejmě omezuje fakt, že rozdíly mezi třídami nemusejí být způsobené výhradně učitelem, ale např. i demografickými charakteristikami a jinými předpoklady. Ty jsme alespoň částečně kontrolovali na úrovni škol.

Každý učitel asi ví, že cílem vzdělání není jen předání znalostí, ale i stylu práce, různých osobnostních charakteristik, postojů, hodnot. Méně evidentní je však fakt, že při jakémkoli hodnocení není snadné tyto informace odlišit, a že se mohou navzájem ovlivňovat v pozorovaném výkonu.

Literatura

[1] R. J. Sternberg and T. Ben-Zeev, *The Nature of Mathematical Thinking*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1996.

[2] A. Starr, M. E. Libertus, and E. M. Brannon, "Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 110, no. 45, pp. 18116–18120, Nov. 2013.

[3] M. E. Libertus, L. Feigenson, and J. Halberda, "Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability," *Dev. Sci.*, vol. 14, no. 6, pp. 1292–300, Nov. 2011.

[4] R. S. Siegler *et al.*, "Early Predictors of High School Mathematics Achievement," *Psychol. Sci.*, vol. 23, no. 7, pp. 691–697, 2012.

[5] T. Z. Keith and M. R. Reynolds, "Cattell-Horn-Carroll abilities and cognitive tests: What we've learned from 20 years of research," *Psychol. Sch.*, vol. 74, no. 4, p. n/a-n/a, Jun. 2010.

[6] W. J. Schneider and K. S. McGrew, "The Cattell-Horn-Carroll model of intelligence," in *Contemporary intellectual assessment: Theories, tests, and issues*, New York: Guilford, 2012, pp. 99–144.

[7] D. P. Flanagan and S. G. Dixon, "The Cattell-Horn-Carroll Theory of Cognitive Abilities," in *Encyclopedia of Special Education*, Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2014, pp. 136–181.

[8] L. Phelps, K. S. McGrew, S. N. Knopik, and L. Ford, "The General (g), Broad, and Narrow CHC Stratum Characteristics of the WJ III and WISC-III Tests: A Confirmatory Cross-Battery Investigation.," *Sch. Psychol. Q.*, vol. 20, no. 1, pp. 66–88, 2005.

[9] F. L. Rivera-Batiz, "Quantitative Literacy and the Likelihood of Employment among Young Adults in the United States," *J. Hum. Resour.*, vol. 27, no. 2, pp. 313–328, 1992.

[10] M. Paglin and A. M. Rufolo, "Heterogeneous Human Capital, Occupational Choice, and Male-Female Earnings Differences," *J. Labor Econ.*, vol. 8, no. 1, Part 1, pp. 123–144, 1990.

[11] H. Rose and J. R. Betts, "The Effect of High School Courses on Earnings," *Rev. Econ. Stat.*, vol. 86, no. 2, pp. 497–513, May 2004.

[12] S. Parsons and J. Bynner, "Does Numeracy Matter More ?," *Natl. Res. Dev. Cent. Adult Lit. Numer.*, pp. 1–37, 2005.

[13] S. J. Ceci and W. M. Williams, "Schooling, intelligence, and income," *Am. Psychol.*, vol. 52, no. 10, pp. 1051–1058, 1997.

[14] F. Xu and E. S. Spelke, "Large number discrimination in 6-month-old infants," *Cognition*, vol. 74, no. 1, pp. B1–B11, Jan. 2000.

[15] F. Schleger *et al.*, "Magnetoencephalographic Signatures of Numerosity Discrimination in Fetuses and Neonates," *Dev. Neuropsychol.*, vol. 39, no. 4, pp. 316–329, May 2014.

[16] S. E. Antell and D. P. Keating, "Perception of numerical invariance in neonates.," *Child Dev.*, vol. 54, no. 3, pp. 695–701, Jun. 1983.

[17] E. M. Brannon and G. A. Van de Walle, "The development of ordinal numerical

competence in young children.," *Cogn. Psychol.*, vol. 43, no. 1, pp. 53–81, 2001.

[18] M. Picozzi, M. D. de Hevia, L. Girelli, and V. Macchi Cassia, "Seven-month-olds detect ordinal numerical relationships within temporal sequences," *J. Exp. Child Psychol.*, vol. 107, no. 3, pp. 359–367, 2010.

[19] P. Gordon, "Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia," *Science (80-.).*, vol. 306, no. 5695, pp. 496–499, Oct. 2004.

[20] B. Butterworth, R. Reeve, F. Reynolds, and D. Lloyd, "Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 105, no. 35, pp. 13179–13184, Sep. 2008.

[21] R. Gelman and B. Butterworth, "Number and language: how are they related?," *Trends Cogn. Sci.*, vol. 9, no. 1, pp. 6–10, Jan. 2005.

[22] L. Feigenson, S. Dehaene, and E. S. Spelke, "Core systems of number," *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 8, no. 7. pp. 307–314, 2004.

[23] H. M. Ditz and A. Nieder, "Numerosity representations in crows obey the Weber–Fechner law," *Proc. R. Soc. B Biol. Sci.*, vol. 283, no. 1827, p. 20160083, Mar. 2016.

[24] G. Anobile, E. Castaldi, M. Turi, F. Tinelli, and D. C. Burr, "Numerosity but not texture-density discrimination correlates with math ability in children," *Dev. Psychol.*, vol. 52, no. 8, pp. 1206–1216, 2016.

[25] V. Izard, C. Sann, E. S. Spelke, and A. Streri, "Newborn infants perceive abstract numbers.," *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 106, no. 25, pp. 10382–5, Jun. 2009.

[26] A. Coubart, A. Streri, M. D. de Hevia, and V. Izard, "Crossmodal Discrimination of 2 vs. 4 Objects across Touch and Vision in 5-Month-Old Infants," *PLoS One*, vol. 10, no. 3, p. e0120868, Mar. 2015.

[27] H. Cígler, *Matematické schopnosti: Teoretický přehled a jejich měření*, EDIS. Brno: Masarykova univerzita, 2018.

[28] K. Landerl, A. Bevan, and B. Butterworth, "Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students," *Cognition*, vol. 93, no. 2, pp. 99–125, Sep. 2004.

[29] R. S. Shalev and V. Gross-Tsur, "Developmental dyscalculia," *Pediatr. Neurol.*, vol. 24, no. 5, pp. 337–342, May 2001.

[30] K. Landerl, A. Bevan, and B. Butterworth, "Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students," *Cognition*, vol. 93, no. 2, pp. 99–125, Sep. 2004.

[31] B. A. Nosek *et al.*, "National differences in gender-science stereotypes predict national sex differences in science and math achievement.," *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 106, no. 26, pp. 10593–7, Jun. 2009.

[32] L. Friedman, "Mathematics and the Gender Gap: A Met-Analysis of Recent Studies on Sex Differences in Mathematical Tasks," *Rev. Educ. Res.*, vol. 59, no. 2, pp. 185–213, Jan. 1989.

[33] J. S. Hyde, E. Fennema, and S. J. Lamon, "Gender Differences in Mathematics Performance - a Metaanalysis," *Psychol. Bull.*, vol. 107, no. 2, pp. 139–155, 1990.

[34] D. I. Miller and D. F. Halpern, "The new science of cognitive sex differences," *Trends Cogn. Sci.*, vol. 18, no. 1, pp. 37–45, 2014.

[35] K. Singh, M. Granville, and S. Dika, “Mathematics and Science Achievement: Effects of Motivation, Interest, and Academic Engagement,” *J. Educ. Res.*, vol. 95, no. 6, pp. 323–332, 2002.

[36] E. M. Skaalvik and H. Valås, “Relations Among Achievement, Self-Concept, and Motivation in Mathematics and Language Arts: A Longitudinal Study,” *J. Exp. Educ.*, vol. 67, no. 2, pp. 135–149, Jan. 1999.

[37] A. Ťápal and H. Cígler, “Matematický úsudek vs. Styl práce: Aplikace IRTree modelu na test TIM,” in *KORONA 2017: Konference o rozvoji nadání*, 2017.

[38] H. Cígler, M. Jabůrek, O. Straka, and Š. Portešová, *Psychometrická analýza TIM3–5 – Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu*. Brno: Masarykova univerzita, 2017.

[39] H. Cígler, M. Jabůrek, O. Straka, and Š. Portešová, *Test pro identifikaci nadaných dětí v matematice pro 3.–5. třídu*. Brno: Masarykova univerzita, 2017.

[40] P. De Boeck and I. Partchev, “IRTrees: Tree-Based Item Response Models of the GLMM Family,” *J. Stat. Softw.*, vol. 48, pp. 1–18, 2012.

[41] P. De Boeck *et al.*, “The Estimation of Item Response Models with the lmer Function from the lme4 Package in R,” *J. Stat. Softw.*, vol. 39, no. 12, pp. 1–28, May 2012.

[42] F. Rijmen, F. Tuerlinckx, P. De Boeck, and P. Kuppens, “A Nonlinear Mixed Model Framework for Item Response Theory,” *Psychol. Methods*, vol. 8, no. 2, pp. 185–205, 2003.