

Jak přemýšlejí děti při řešení matematických úloh?

Hynek Cígler | cigler@fss.muni.cz | Katedra psychologie, FSS MU

Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol
12.–14. listopadu 2020 | Srní (z Brna)

Obsah přednášky

1. Postavení matematických schopností mezi jinými intelektovými schopnostmi.
2. Kognitivní prerekvizity jako možná příčina matematického neúspěchu.
3. Nekognitivní příčiny matematického neúspěchu.
4. Vlastní studie: Souvislosti stylu práce a matematického usuzování.

Zařazení matematického usuzování mezi jiné intelektové schopnosti

1. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Matematické usuzování

Matematické usuzování.

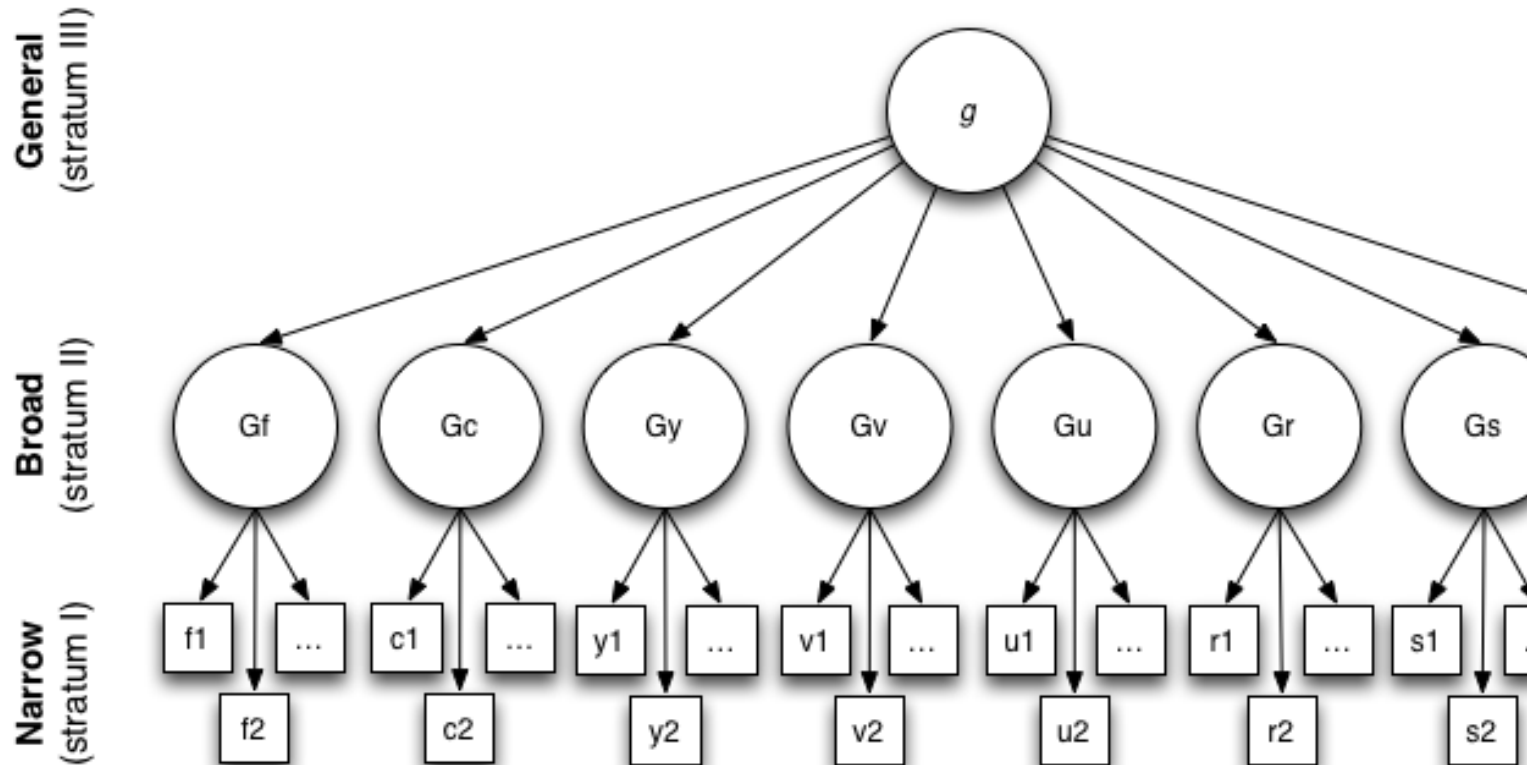
- Relativně stabilní psychická charakteristika.
- Samotný výkon vs. schopnost se matematice učit.

Míra matematických dovedností v dětství predikuje životní úspěchy.

- Velikost příjmu, zaměstnatelnost, kariéerní postup.
- Životní spokojenost.
- Akademické úspěchy.

Je však prediktorem skutečně matematické usuzování?

Cattellova-Hornova-Carollova teorie inteligence (CHC)



Základní široké faktory

- Fluid reasoning (*Gf*)
- Comprehension-Knowledge (*Gc*)
- **Quantitative knowledge (*Gq*)**
- Reading & Writing Ability (*Grw*)
- **Short-Term Memory (*Gsm*)**
- Long-Term Storage and Retrieval (*Glr*)
- Visual Processing (*Gv*)
- Auditory Processing (*Ga*)
- **Processing Speed (*Gs*)**
- Decision/Reaction Time/Speed (*Gt*)

Rozšíření

- Domain-specific knowledge (*Gkn*)
- Psychomotor ability (*Gp*)

Senzorické zpracování:

- Tactile (*Gh*), Kinesthetic (*Gk*), Olfactory (*Go*).

TAB. 1: SEZNAM ŠIROKÝCH A ÚZKÝCH FAKTORŮ DLE CHC TEORIE, KTERÉ LZE OZNAČIT JAKO MATEMATICKÉ

široká schopnost (stratum II)	úzká schopnost (stratum I)	popis, komentář
Fluidní inteligence (<i>Gf</i>)	Kvantitativní usuzování (<i>RQ</i>)	Schopnost induktivních a deduktivních operací s objekty, zahrnující matematické vztahy či vlastnosti.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	–	Hluboké a rozsáhlé vědomosti spojené s matematikou.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	Matematické vědomosti (<i>KM</i>)	Šířka obecných znalostí matematiky.
Kvantitativní vědomosti (<i>Gq</i>)	Matematický výkon ^a (<i>A3</i>)	Měřený matematický výkon.
Rychlost zpracování (<i>Gs</i>)	Číselná zručnost ^b (<i>N</i>)	Schopnost rychlé a přesné manipulace s čísly, a to od jednoduššího počítání a rozpoznávání čísel a množství až po pokročilé sčítání, odčítání, násobení a dělení.

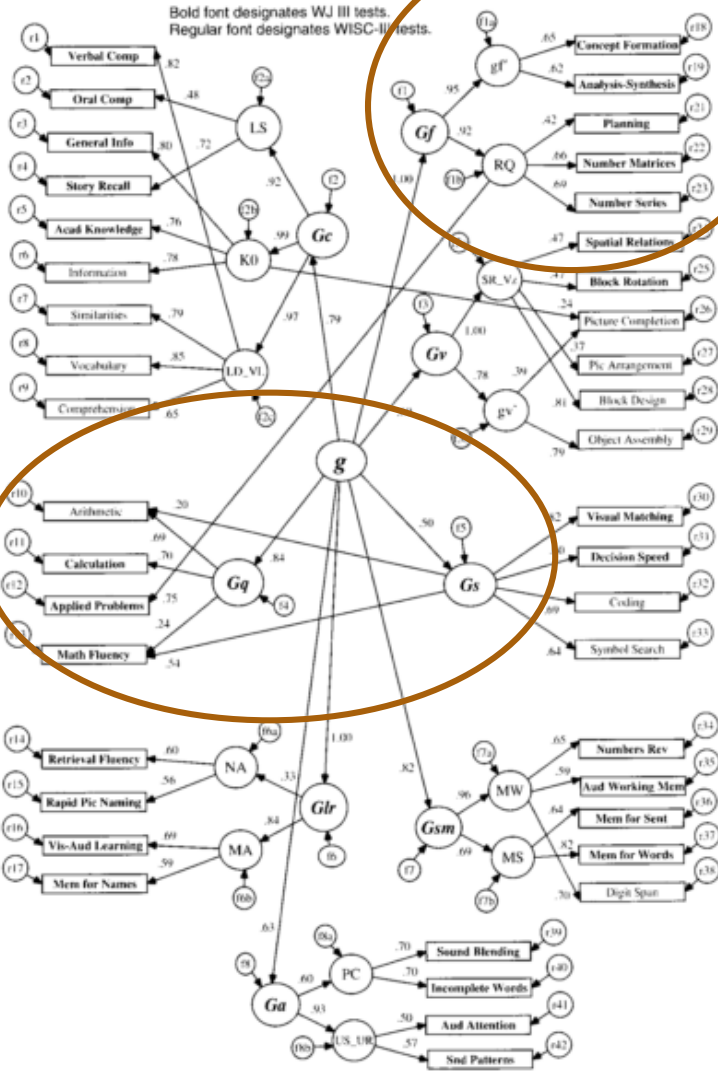
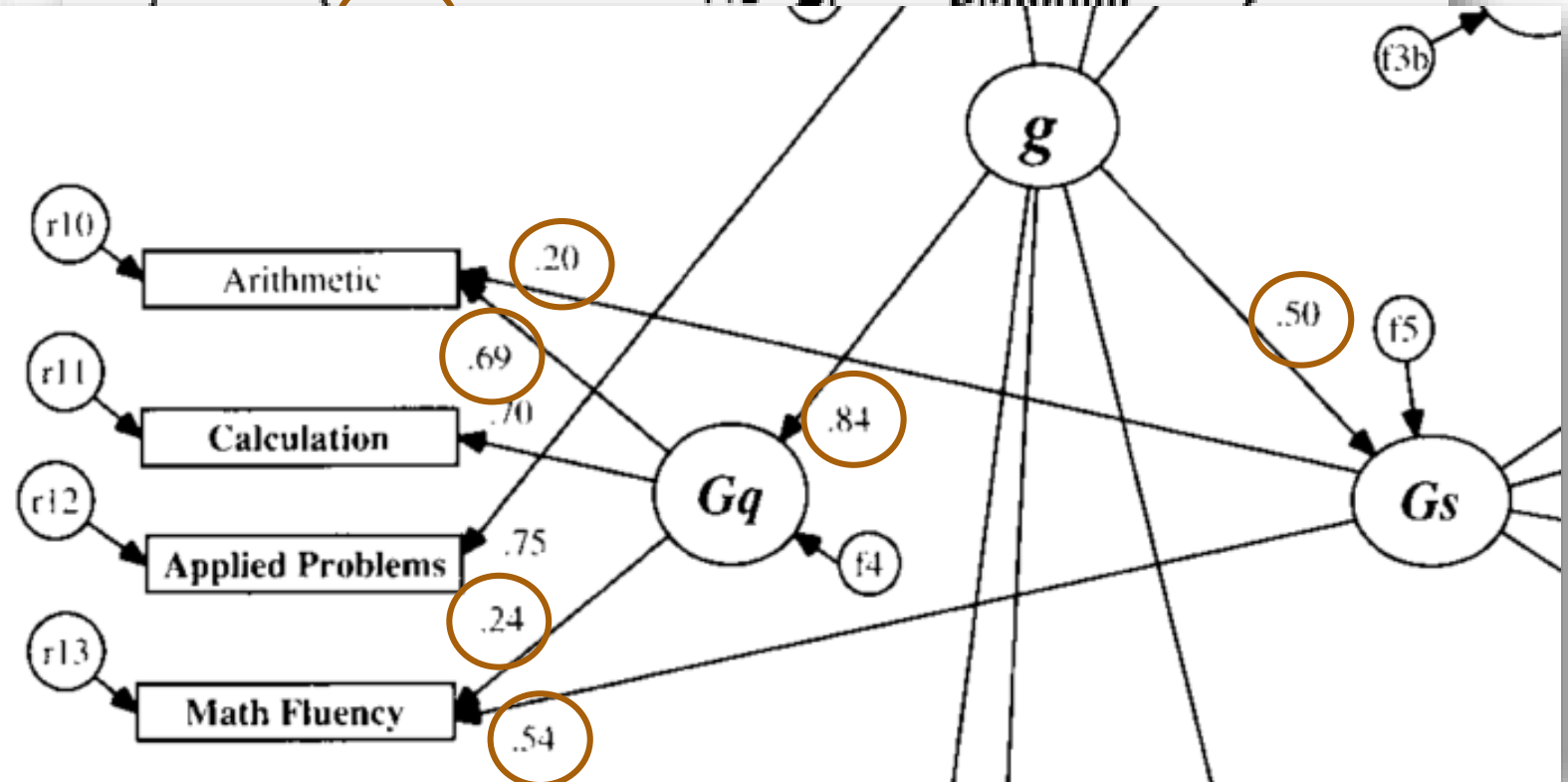
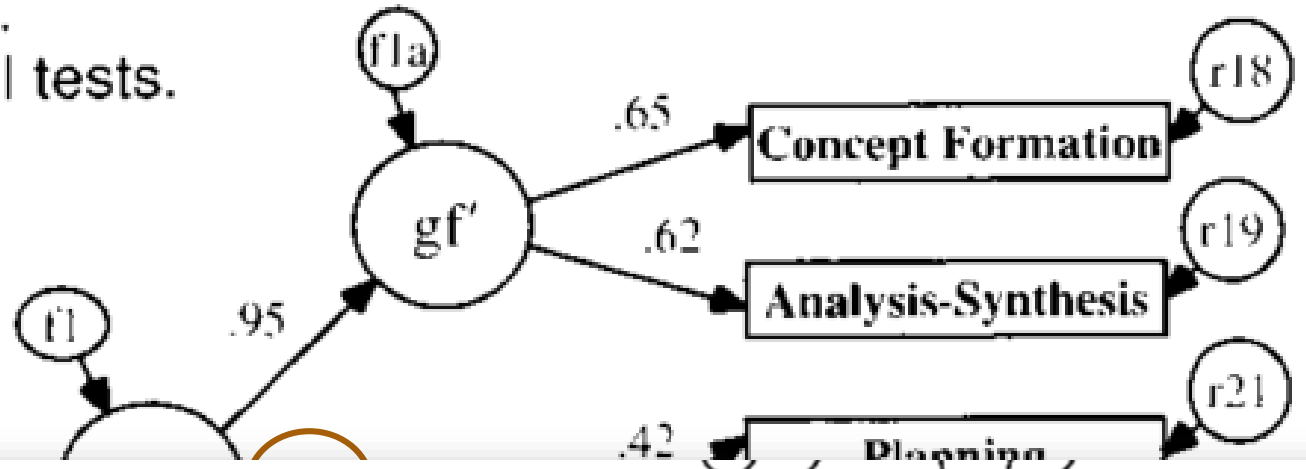
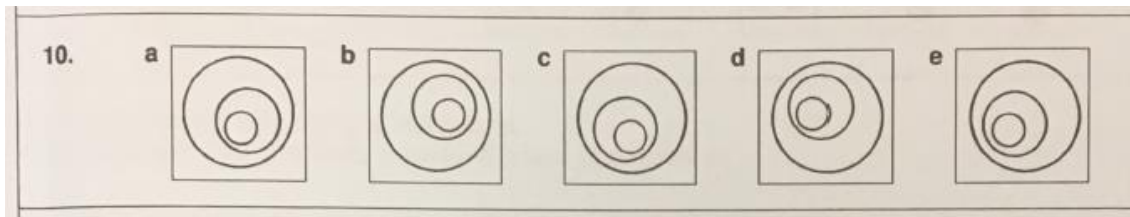
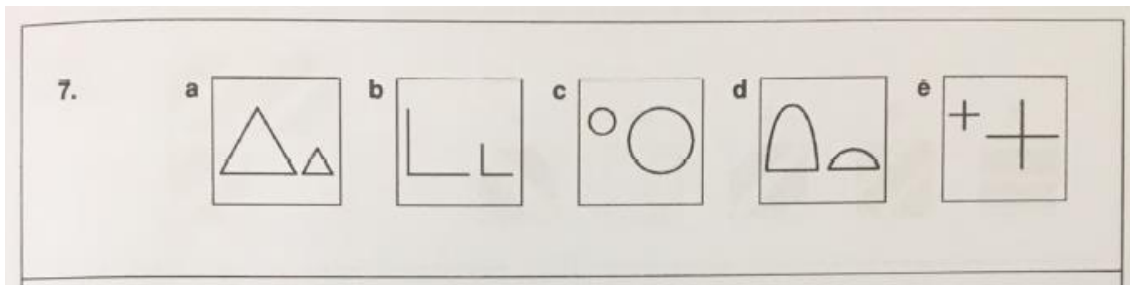
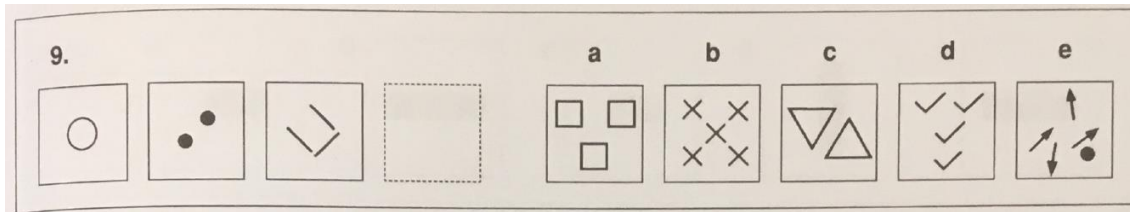


FIGURE 2. Narrow+Broad+ g Model

S. III tests.



g vs. *Gq/RQ*: CFT vs. TIM



[CFT 20-R](#) (Cattellův test fluidní inteligence)

B5. Čísla jsou zapsána za sebou podle určitého pravidla. Doplň čísla

18 17 15 12 8 _____

B8. Můžeš použít jen číslice 2, 5 a 8. Kolik dvojciferných čísel můžeš pomocí těchto číslic napsat? Zapiš je všechna.

B18. Do 3. B chodí 12 chlapců a 12 děvčat. Do keramiky chodí z této třídy 15 dětí, do souboru chodí z této třídy také 15 dětí. Každé dítě chodí aspoň do jednoho kroužku. Kolik dětí ze 3. B navštěvuje oba kroužky zároveň?

[TIM³⁻⁵](#) (Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice)

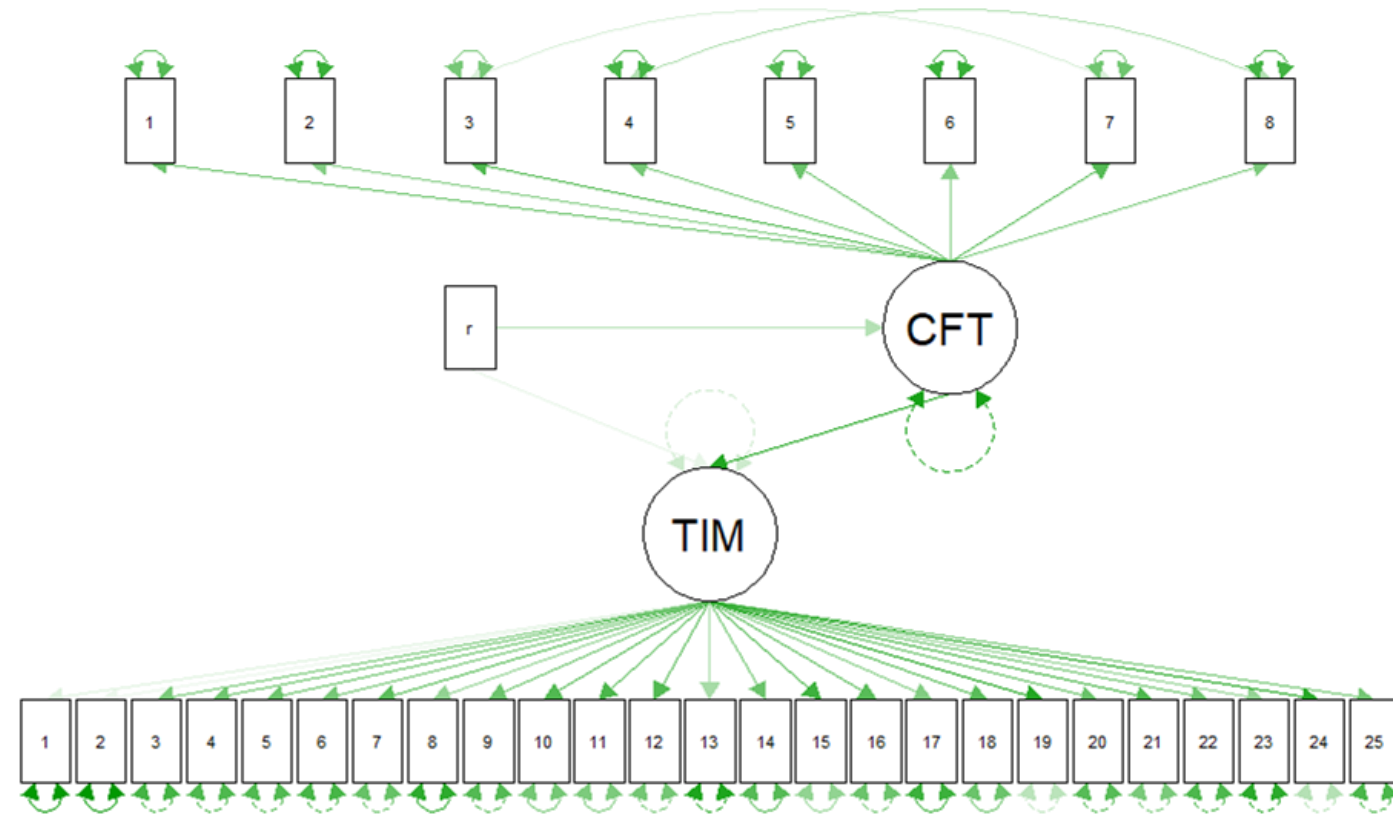
g vs. *Gq/RQ*: CFT vs. TIM

$N = 401$.

Pozorované: $r = 0,643$

SEM: $\beta = 0,867$

- Odpovídá $\lambda = 0,92$, viz dříve.
 - (Phelps a kol., 2005)
- (po kontrole věku)
 - $\beta_{TIM} = 0,090$
 - $\beta_{CFT} = 0,293$
- Analýza: WLSMV estimátor
 - multigroup mixed-item SEM
 - $\chi^2(1077) = 1159,9$, $p = 0,040$, $TLI = 0,974$,
 $RMSEA = 0,020$ s $CI_{90\%} = [0,005; 0,028]$



TAB. 2: VZTAH KOGNITIVNÍCH SCHOPNOSTÍ (DLE CHC TEORIE) A MATEMATICKÉHO VÝKONU PODLE VĚKU

Clustery WJ III COG a ACH		věk														
		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Porozumění-vědomosti (<i>Gc</i>)	<i>MCS</i>					■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	<i>MR</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Dlouhodobá paměť (<i>Glr</i>)	<i>MCS</i>			■												
	<i>MR</i>	■														
Vizuálně-prostorové schopnosti (<i>Gv</i>)	<i>MCS</i>															
	<i>MR</i>															
Zvukové zpracování (<i>Ga</i>)	<i>MCS</i>	■	■													
	<i>MR</i>															
Fluidní inteligence (<i>Gf</i>)	<i>MCS</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	<i>MR</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Rychlost zpracování (<i>Gs</i>)	<i>MCS</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	<i>MR</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Krátkodobá paměť (<i>Gsm</i>)	<i>MCS</i>		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	<i>MR</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Pracovní paměť (<i>MW</i>)	<i>MCS</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	<i>MR</i>	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

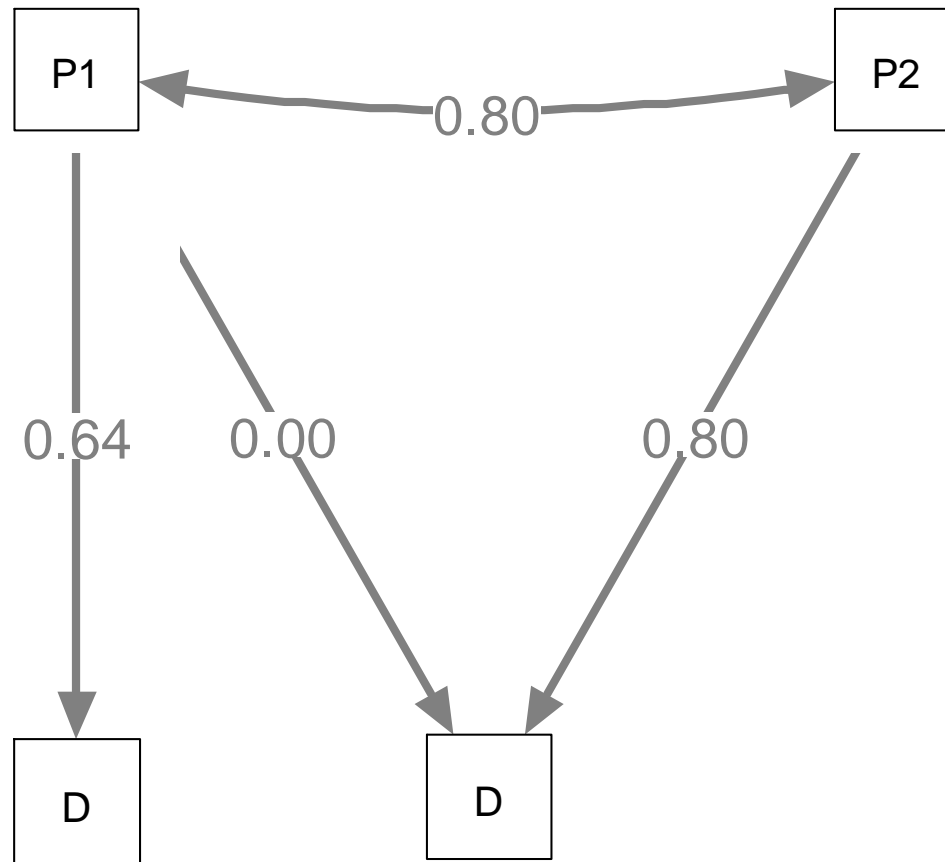
Pozn.: Bez výplně – žádný nebo nevýznamný vztah (standardizovaný koeficient v mnohonásobné regresi menší než 0,1). Světlé šrafování – slabý signifikantní vztah (regresní koeficient 0,1–0,3). Tmavé šrafování – silný signifikantní vztah (regresní koeficient vyšší než 0,3). Převzato z Floyd a kol. (2003).

MCS – „math calculation skills“; *MR* – „math reasoning“.

Vztah složek intelektu s pozorovaným matematickým výkonem se v různém věku liší.

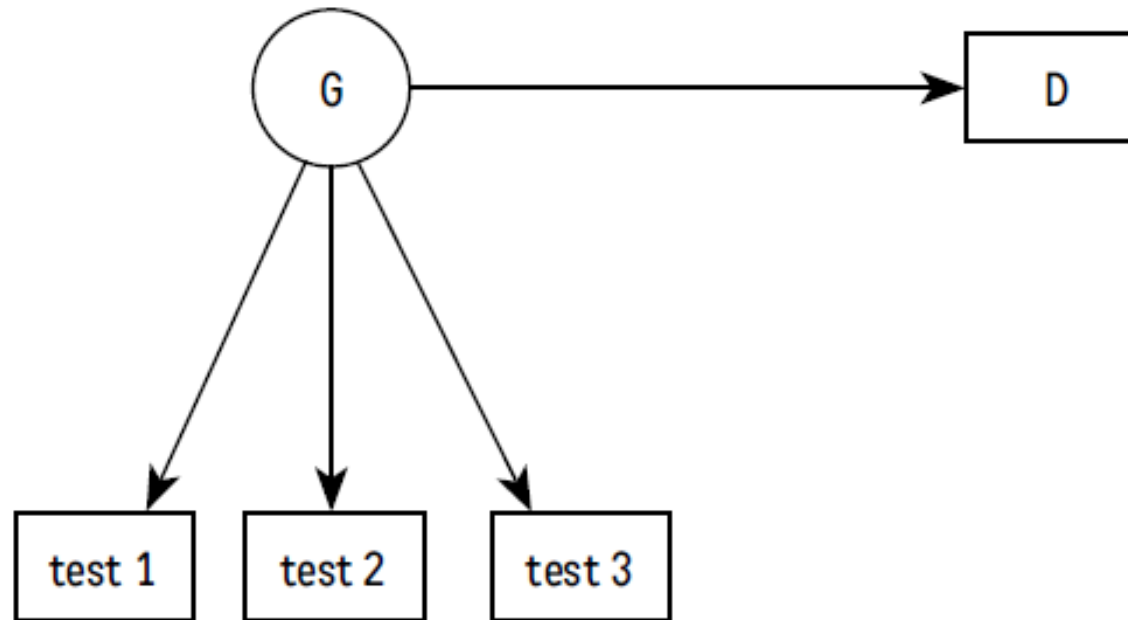
Proč je kontext důležitý?

LOVE – Left (Out) Variable Error



Proč je kontext důležitý?

LOVE – Left (Out) Variable Error



Shrnutí:

Kontext matematického usuzování

Matematické usuzování je prediktorem životního úspěchu, nikoli příčinou.

- Obecná inteligence.

Při výzkumu souvislostí matematického usuzování je nutné intelekt kontrolovat.

Při výuce: matematické a verbální usuzování je prakticky to samé.

Pokud je to ale pravda, proč řadě „chytrých“ lidí matematika „nejde“?

- Nemají snad „buňky na matematiku“?
- Jiné příčiny? Jaké?

Kognitivní prerekvizity

2. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Je matematika čirou abstrakcí?

Řada matematických dovedností je primární psychickou funkcí.

Object Tracking System (OTS; subitizing).

- Crossmodální přesná diskriminace velmi malého množství objektů (max. 4).
- Vyvíjí se už v prenatálním období, záměrná pozornost, minimální interindividuální dovednosti.

Approximate Number System (ANS).

- Vizuální přibližná diskriminace velkého množství objektů, diferencované oproti OTS.
- Weberův-Fechnerův zákon (obtížnost = $\log_2 N_1/N_2$, adaptabilní).
- Určité individuální rozdíly.
- Pravděpodobně primární funkce zrakových center.
- Predikuje numerické schopnosti.
- Jen slabě souvisí s pracovní pamětí.

body

Zadej jmeno Spust 1 1 2 3 4 300

Uskupení:	variabilní	fixní
Proměnlivost:	rozmístění a počtu prvků	rozmístění prvků
Ovládání:	stisk klávesy A	stisk klávesy L

Další kognitivní prerekvizity

Kromě ANS např.:

- Pracovní paměť.
- Rychlost zpracování informace.
- Princip relace a ordinality.
- Záměrná pozornost.

Blíže nespecifikované dovednosti, které sice přímo nesouvisí se schopností úsudku a kvality manipulace s abstraktními pojmy, ale snižují výkon, pokud je manipulováno s numerickým obsahem.

Zdá se, že zatímco nadprůměrní řešitelé (s dobrým matematickým úsudkem) se v kognitivních prerekvizitách neliší, podprůměrní ano (Cígler, [2018](#)).

Příčiny selhání v matematice

Nízký intelekt, slabá schopnost logického úsudku.

Nedostatečné předchozí znalosti.

- Učení se matematice je silně hierarchické. Nelze přeskaovat.

Nedostatečná motivace, self-efficacy, jiné charakteristiky.

- Životní okolnosti, způsob výuky, osobní hodnoty a zájmy...

Nedostatečné kognitivní prerekvizity.

- Kompenzace deficitu stojí úsilí a vyčerpává zdroje (např. pracovní paměť), které pak chybí při vlastním řešení.

Nekognitivní příčiny selhání

3. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Vývoj matematického usuzování, nekognitivní aspekty

Muryama a kol. ([2013](#)): longitudinální analýza dětí mezi 5.-10. třídou.

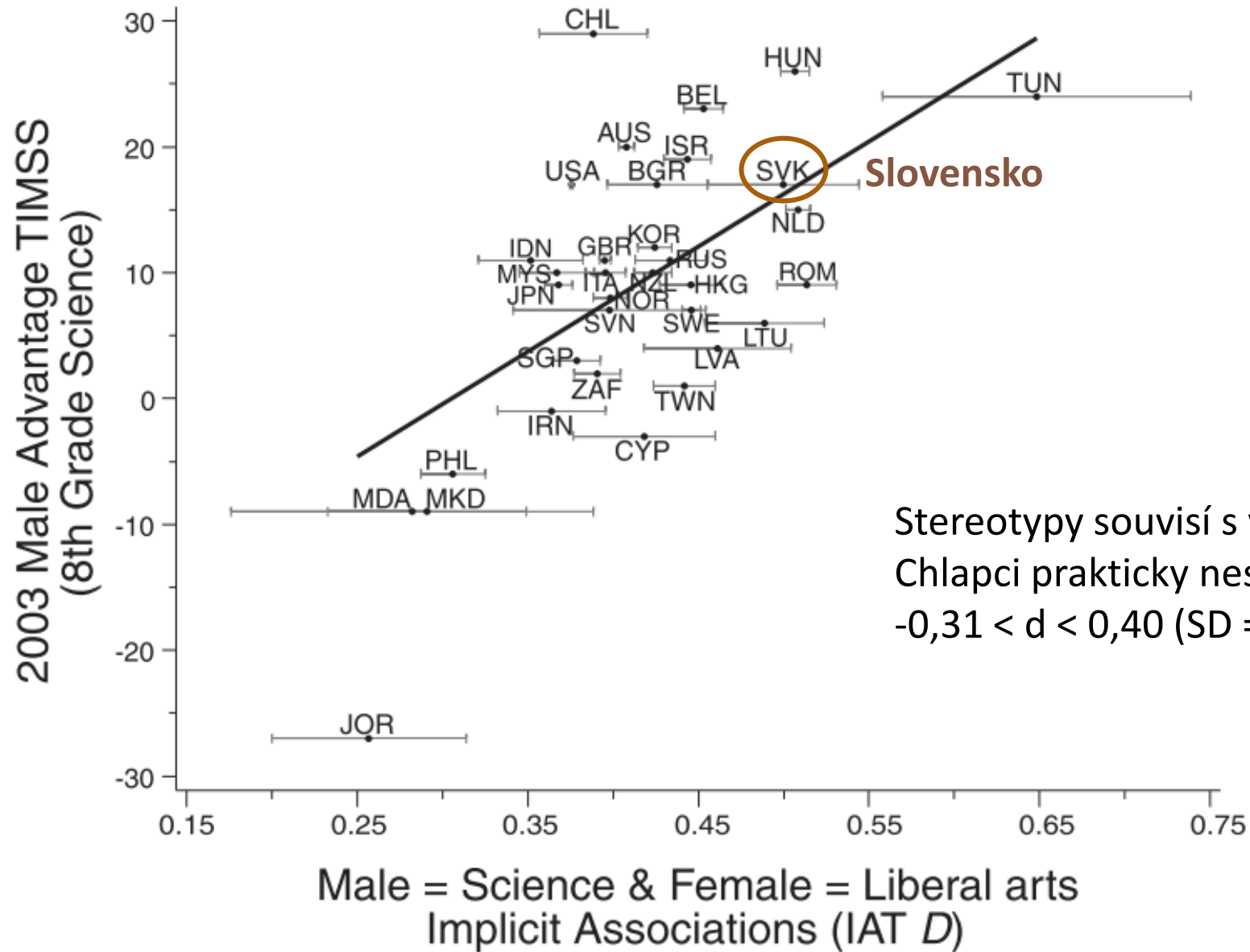
- Inteligence vysvětlila intercept vývojové křivky, nikoli sklon.
- Rychlost učení vysvětlily motivace a kognitivní strategie, nikoliv inteligence.

Matematická úzkostnost, matematické self-efficacy (Kubešová, [2019](#))

Emoce ve výuce (moderují matematický výkon; McLeod, [1992](#)).

Předpoklady se neliší dle pohlaví či rasy, jiné důvody (Jacobs, [2005](#)).

Nosek a kol. ([2009](#)): mezinárodní studie **genderových stereotypů** (IAT) a skutečného rozdílu ve výkonu mužů a žen v testu TIMSS.



Stereotypy souvisí s výkonem, $\beta = 0,63^{***}$.
 Chlapci prakticky neskórují lépe než dívky:
 $-0,31 < d < 0,40$ (SD = 0,15).

Vývoj matematického usuzování, nekognitivní aspekty

Rozdíly mužů a žen se během za posledních 100 let snižují.

Předchozí neúspěch, nízké matematické self-efficacy, matematická úzkostnost snižují pozdější výkon.

Naopak úspěch zájem o matematiku zvyšuje.

Zájem o matematiku kauzálně souvisí s výkonem.

Přinejmenším určitá část selhání v učení se matematice má nekognitivní příčiny.

Vlastní studie: Styl práce

4. ČÁST PŘEDNÁŠKY

Styl práce

Vycházím z nepublikovaného manuskriptu (Ťápal a Cígler, in prep.).

Styl práce je v tomto případě operacionalizován jako *Tendence alespoň se pokusit řešit obtížné úlohy, u kterých neznám správné řešení.*

Výzkumná otázka 1: Jak souvisí styl práce s matematickým úsudkem?

Výzkumná otázka 2: Jak silný vliv má styl práce na pozorovaný výkon v testu?

Výzkumná otázka 3: Ovlivňuje učitel více styl práce, nebo matematický úsudek?

Metoda

Data pocházejí ze standardizační studie

Testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice pro 3.–5. třídu (TIM^{3–5}).

- 45 minut na test, cca 25 položek hodnocených 0;1, příp. 0;1;2.
- Dva druhy chybných odpovědí: **0** = „pokusil se, chybné řešení“ vs. **N** = „přeskočil“.
- Skórování prostřednictvím Raschova modelu.
- Dvě paralelní vyvážené verze.
- [Více informací o testu, psychometrický manuál.](#)

Vzorek:

- N = 797, žáci 3.–5. tříd ZŠ, do jisté míry reprezentativní vůči ČR.
- 44 tříd, 13 škol.

Statistický model

Model měření: jednoparametrový model v rámci teorie odpovědi na položku (IRT).

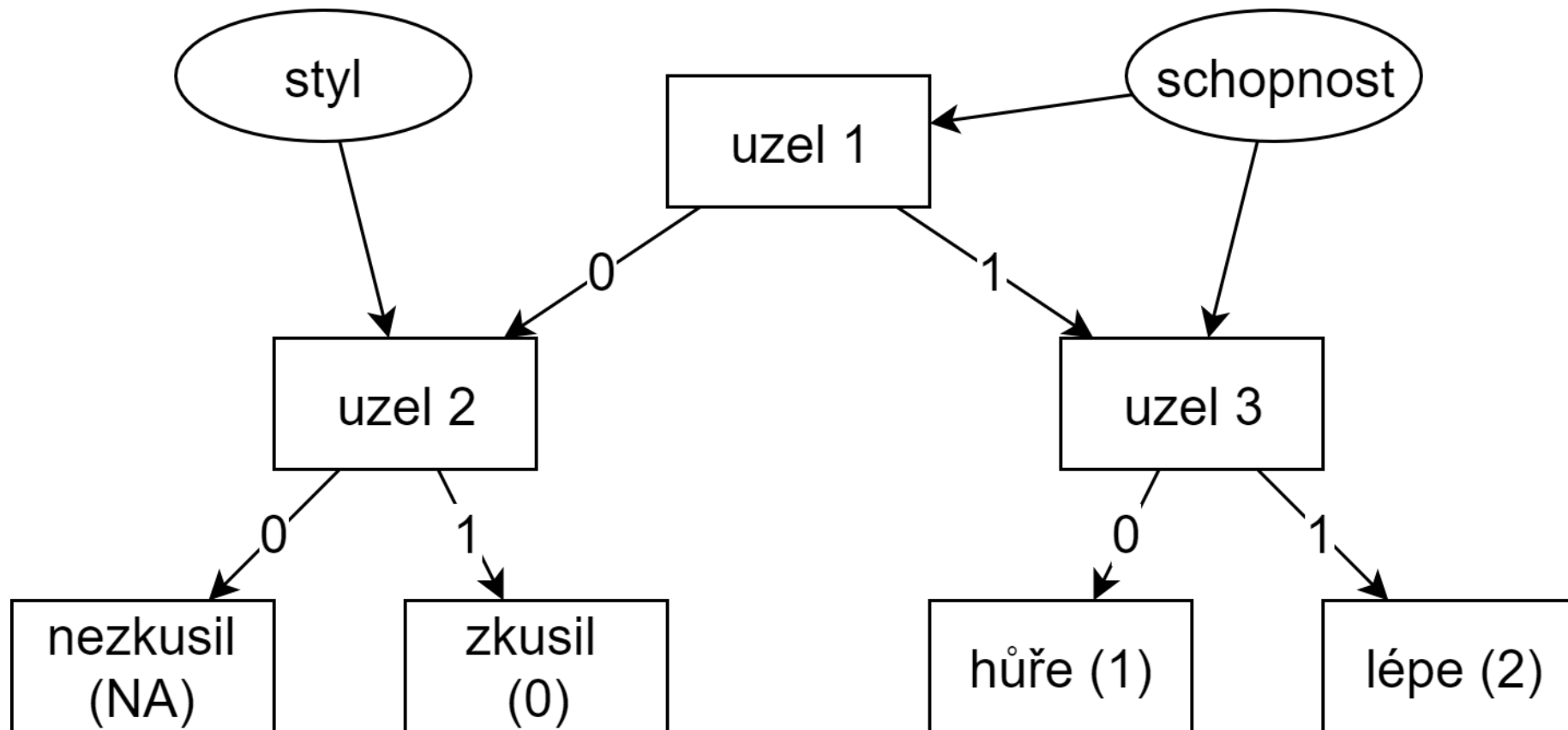
Tzv. IRTree model s Tutzovou parametrizací ordinálních položek.

- Každá položka testu je převedena na binární dummy proměnné, kterými respondent prochází.
- Jde o „uzly“ IRT stromu.
- Pokud se k danému uzlu respondent nedostane, chybějící hodnota.
- Zajišťuje lokální nezávislost položek.

Odhad jako lineární logistický testový model (LLTM) v prostředí R (balíček `lme4`).

- Generalizovaný lineární smíšený model (GLMM) s logistickou link funkcí.
- ML estimátor.

Struktura IRTree modelu



Raschův model (RM)

Nejjednodušší model v rámci teorie odpovědi na položku (IRT); tzv. 1parametrový (1PL).

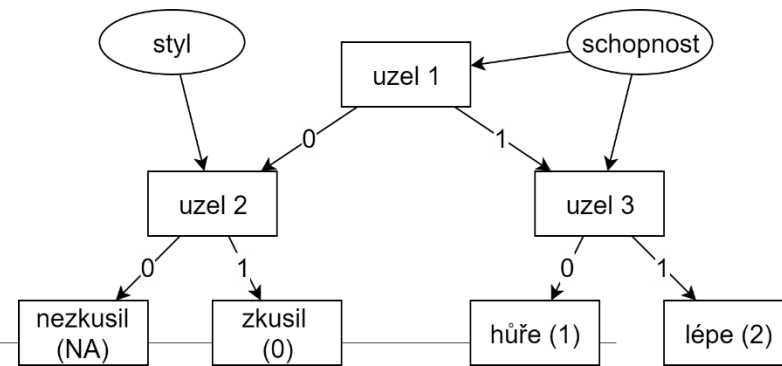
Modeluje pravděpodobnost správné odpovědi P_{ip} (za 1 bod) jako:

$$\ln \frac{P_{ip}}{1 - P_{ip}} = \theta_p - b_i$$

- kde θ_p je úroveň latentního rysu (např. matematického usuzování respondenta)
- a b_i je obtížnost položky.
- Pravděpodobnost chybné odpovědi za 0 bodů $P(x_{pi} = 0 | \theta_p, b_i) = 1 - P(x_{pi} = 1 | \theta_p, b_i)$.

Schopnost ani obtížnost přímo nepozorujeme, lze je však odhadnout z matice pozorovaných odpovědí.

IRTTree model



Úroveň latentního rysu θ_p v modelu $\ln \frac{P_{ip}}{1-P_{ip}} = \theta_p - b_i$ byla parcelovaná na dílčí složky jako:

$$\theta_p = a_1(\theta_1 + g) + a_2(\theta_2 + g)$$

$$\theta_1 = \theta_{1p} + \theta_{1c} + \theta_{1s}$$

$$\theta_2 = \theta_{2p} + \theta_{2c} + \theta_{2s}$$

- a_1, a_2 – skórovací funkce: pro uzly 1 a 3 (schopnost) $a_1 = 1, a_2 = 0$, pro uzel 2 (styl) $a_1 = 0, a_2 = 1$.
- θ_{1p} – rys matematického usuzování osoby p ; θ_{2p} – tendence osoby p „zkoušet“ řešit.
- $\theta_{1c}, \theta_{2c}, \theta_{1s}, \theta_{2s}$ – totéž pro průměrnou úroveň rysu třídy (**C**lass) a školy (**S**chool).
 - Interpretováno jako efekt učitele, resp. sociodemografických charakteristik.
- $g \in \{0,1,2\}$ – kontrola vlivu ročníku (3., 4., resp. 5.).

Obtížnosti pol. b_i modelovány jako pevné proměnné, úrovně rysu náhodný efekt.

Výsledky 1

	Úsudek SD (VAR)	Styl práce SD (VAR)	r
dítě	1,05 (1,10)	1,25 (1,57)	0,25
učitel	0,25 (0,06)	0,47 (0,22)	0,47
škola	0,84 (0,70)	0,35 (0,12)	0,09
podíl učitel/dítě	0,055	0,142	

Výsledky 2

Ve všech případech je variabilita vlivu učitele menší než variabilita schopností dětí ($p < 0,001$).

Zdá se, že učitel má 36% vliv na úsudek než na styl práce (0,055/0,142). Tento podíl však není signifikantně odlišný od nuly (bootstrapový test $p = 0,159$).

Korelace úsudku a stylu práce...

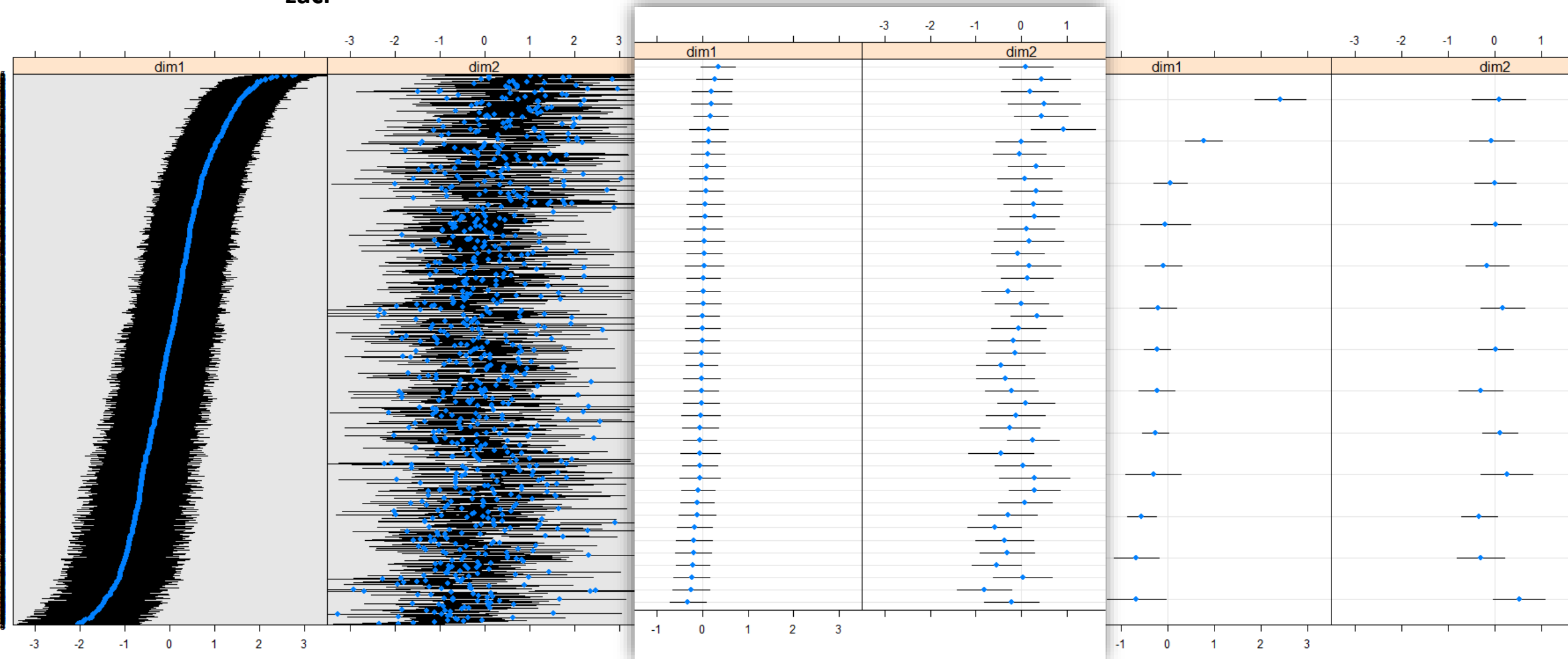
	Úsudek SD (VAR)	Styl práce SD (VAR)	r
dítě	1,05 (1,10)	1,25 (1,57)	0,25
učitel	0,25 (0,06)	0,47 (0,22)	0,47
škola	0,84 (0,70)	0,35 (0,12)	0,09
podíl učitel/dítě	0,055	0,142	

dim1 = matematický úsudek; dim2 = styl práce (vše je na stejné škále)

žáci

učitelé/třídy

školy



Diskuze

Výkon žáka není ovlivněn pouze jeho znalostmi/schopnostmi.

Bez dalších informací nelze dobře odlišit osobnostní charakteristiky od znalostí.

Běžně je za 0 bodů skórována odpověď nehledě na to, zda se žák o řešení pokusil.

- Tendence pokoušet se o řešení však středně silně souvisí s průměrným výkonem třídy.
- Učitel, který žáky nenabádá k řešení i obtížných matematických úloh, dost možná snižuje jejich šance na dobrý výsledek v testech.
- Je vhodné předávat nejen znalosti, ale i procedurální dovednosti a metakognitivní schopnosti, s pomocí kterých žák může „upravovat“ projevy svých znalostí a dovedností.

Graf 20: Vztah doby práce a relativní obtížnosti položky pro respondenta

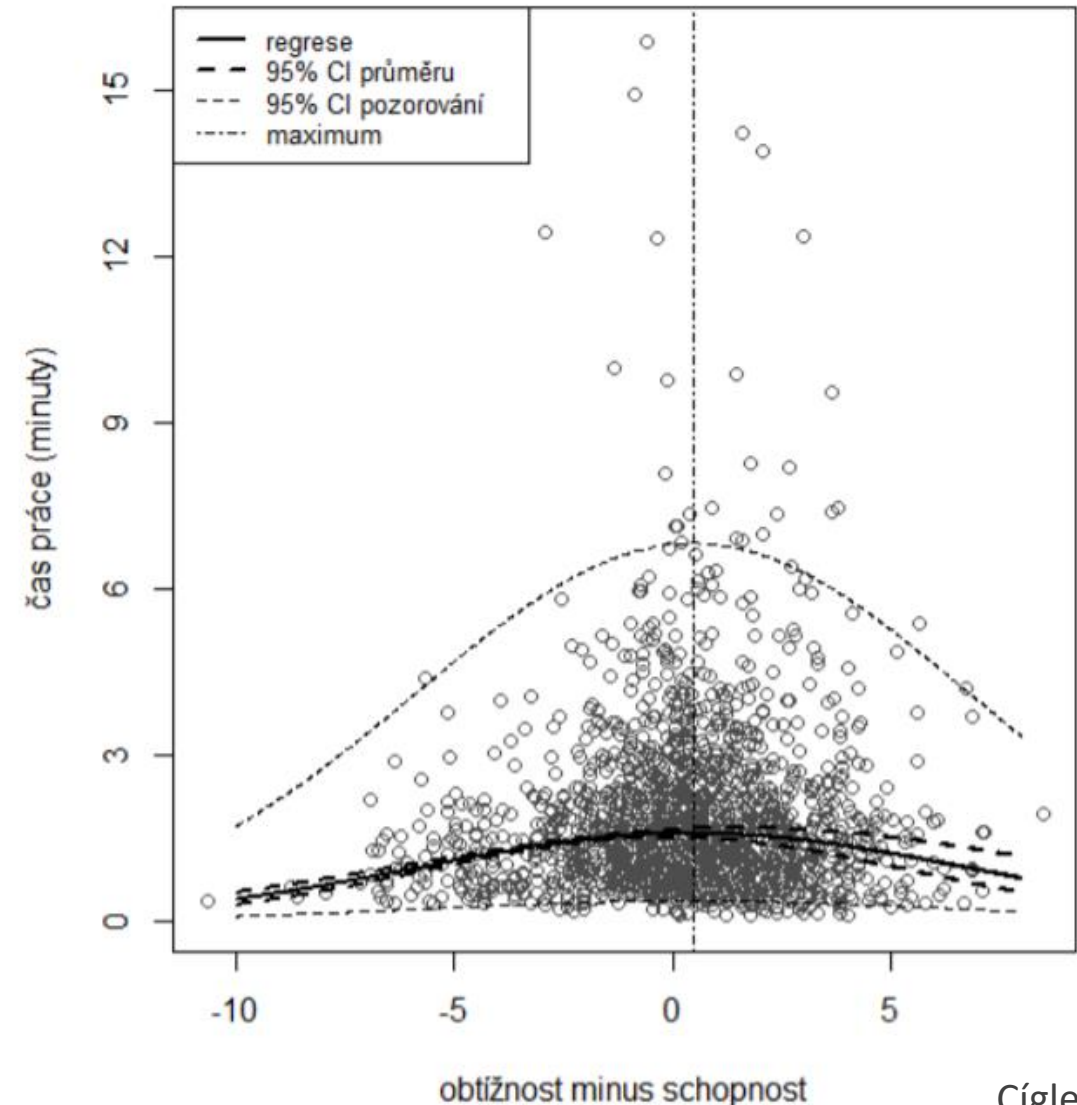
Rychlost práce

Výsledky jsou v souladu našich i cizích výzkumů, že žáci tráví nejvíce času na přiměřeně obtížných položkách.

- Příliš těžké položky přeskočí...
- ... příliš lehké ihned ví.

Co když ale žák zbytečně přeskakuje obtížné položky, čímž se zdá být méně zdatný?

Pozn.: Reálně je vztah složitější, roli hraje absolutní náročnost úlohy aj.



Děkuji za pozornost!

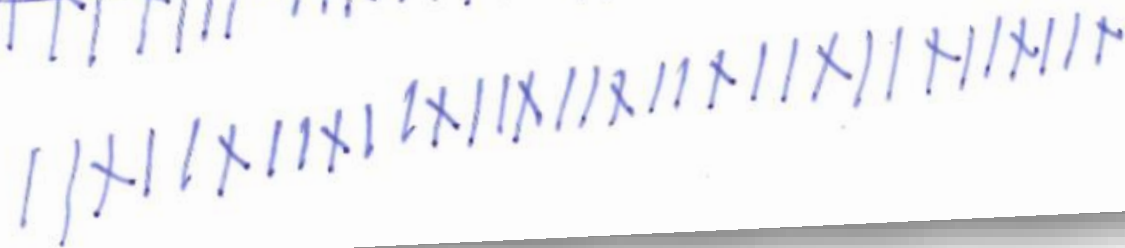
Hynek Cígler, Ph.D.

- Katedra psychologie & Institut výzkumu dětí, mládeže a rodiny
 - Fakulta sociálních studií, Masarykova univerzita
 - cigler@fss.muni.cz | psych.fss.muni.cz | ivdmr.fss.muni.cz
 - <https://www.muni.cz/lide/175803>
-
- Pro seznam literatury vizte prosím konferenční abstrakt.

B24. Rytíř se utkal s tříhlavým drakem a v boji mu chtěl useknout všechny hlavy. Jenomže vždy, když usekl drakovi jednu hlavu, narostly na jejím místě 3 nové. Rytíř byl statečný a bojoval pořád dál, po nějaké době se však přesto rozhodl boj vzdát. V té chvíli drakovi napočítal 24 hlav. Počítal správně? Vysvětli proč. *ne*



24 není liché číslo



A21. Třikrát jsme zvážili čtyři různé kočky. Podívej se na výsledky:



Spočítej, kolik váží kočka na následujícím obrázku:
Výsledek zdůvodni.

