Rozvoj geometrické představivosti na základní škole
The development of geometric imagination at the middle school

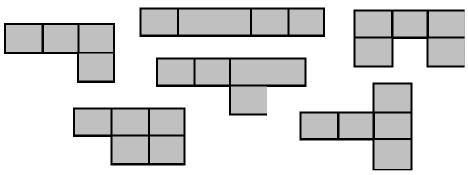
Jaroslav Beránek

Mezi důležité aspekty reformy školské vzdělávací soustavy v ČR je důraz na samostatnost jednotlivých škol, vyjádřený tvorbou jejich vlastních školních vzdělávacích programů. Je proto samozřejmé, že na tuto skutečnost musí být připravováni i budoucí učitelé všech stupňů škol, včetně studentů doktorských studijních programů s pedagogickým zaměřením. V tomto příspěvku se zaměříme na vzdělávací oblast „Matematika a její aplikace“. Uvedeme několik úloh a problémů, které mohou rozvíjet myšlení žáků v matematice. Všechny úlohy jsou tématicky orientovány na geometrii, a to zejména na představivost. Některé jsou velmi jednoduché, jiné vyžadují od řešitelů značnou dávku píle a trpělivosti. Úkolem příspěvku není samozřejmě podat podrobný metodický rozbor jednotlivých úloh. Mnohde je uvedeno jen řešení se stručným komentářem. Některé z těchto úloh mohou poskytnout i náměty pro další teoretické úvahy. Poznamenejme ještě, že prvních třináct úloh je převzato z [9], včetně obrázků, poslední úloha pak ze [2].

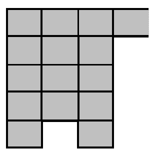
Úloha 1*:* ([9], 45. r. Z4-I-1) Tři cihly ukládáme ne sebe různým způsobem. Jaké různé výšky mohou mít tyto stavby? Rozměry jedné cihly jsou: délka 20 cm, šířka 15 cm, výška 7 cm.

Řešení: Jde o zajímavou úlohu, která rozvíjí prostorovou představivost. Žáci mohou využít i manipulativní činnosti, např. pomocí krabiček od zápalek. Pro žáky může být rovněž velmi překvapivé, kolik možností existuje. Výšky staveb mohou být (všechny údaje v centimetrech): 21, 25, 29, 33, 34, 38, 42, 47, 51, 60. Teoretickou podstatou úlohy jsou kombinace třetí třídy s opakováním ze tří čísel 20, 15 a 7.

Úloha 2: ([9], 45. r. Z4-I-5) Honzík vystřihnul šest dílů, které vidíte na obrázku 1. Pomocí kterých dílů mohl složit výsledný útvar na obrázku 2? Nakreslete dvě různá řešení.



obr. 1



obr. 2

Řešení: Počty čtverečků ve vystřižených dílcích jsou 4, 5, 5, 5, 5, 5. Protože výsledný útvar obsahuje 15 čtverečků, nelze nikdy použít ke skládání dílek o čtyřech čtverečcích. Ze zbylých pěti dílků jsou vždy použity tři. Očíslujeme-li vystřižené dílky čísly 1 až 6 („zleva doprava a shora dolů“, tj. $\begin{matrix} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} \\ \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{6} \end{matrix}$, pak jedno řešení je z dílků 3, 4 a 5, druhé pak z dílků 3, 4 a 6. I zde je procvičována představivost s možným využitím manipulativní činnosti.

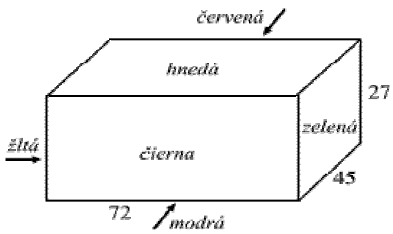
Úloha 3: ([9], 46. r. Z4-I-4) Na vnějších rozích hřiště tvaru čtverce byly umístěné lampy umělého osvětlení. Navrhněte způsob, jak můžeme dvojnásobně zvětšit plochu hřiště (tvar čtverce se má zachovat), aby sloupy zůstaly stát mimo nové hřiště.

Řešení: Z hlediska teoretické podstaty jde o „klasický“ problém: Je-li dán čtverec o obsahu 1, v tomto čtverci spojíme středy všech jeho stran, dostaneme čtverec o polovičním obsahu, tedy 0,5. Lze se o tom přesvědčit nejen výpočtem pomocí Pythagorovy věty, ale i graficky vhledem, znázorníme-li v původním čtverci i obě úsečky spojující středy protilehlých stran. To je klíčem k této úloze. Každým vrcholem původního hřiště (umístěním lampy) vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou původního hřiště (neobsahující tento vrchol). Průsečíky všech čtyř rovnoběžek budou tvořit vrcholy (rohy) nového hřiště, kde lampy budou umístěny ve středech stran.

***Úloha 4**:* ([9], 47. r. Z4-I-6) Strýc Mrkvička ryl zahradu tvaru obdélníka. Po dvou hodinách práci přerušil a šel na oběd. Jak dlouho bude muset ještě rýt po obědě, jestliže mu zůstal neporytý záhon tvaru obdélníka s rozměry třikrát menšími než má celá zahrada?

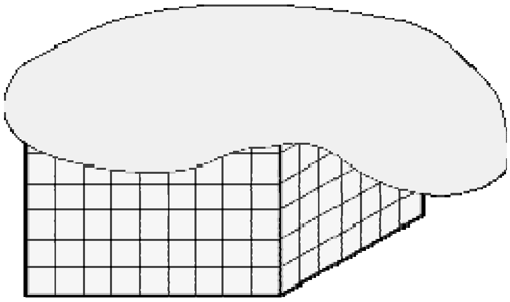
Řešení: Každou ze stran zahrady rozdělíme na tři stejně dlouhé části. Rovnoběžkami se stranami zahrady vedenými v dělících bodech ji pak rozdělíme na devět shodných obdélníků, z nichž každý má obsah roven $\frac{1}{9}$ obsahu zahrady. Podle zadání strýc Mrkvička před obědem poryl celkem 8 z těchto devíti částí zahrady. Jestliže ryl dvě hodiny, pak na porytí jedné části potřeboval 15 minut. Po obědě mu zbývá porýt již jen jeden dílek, bude muset tedy ještě rýt 15 minut.

***Úloha 5**:* ([9], 48. r. Z4-I-1) Míša měl dřevěný hranolek o rozměrech 27 mm, 45 mm, 72 mm. Každou jeho stěnu natřel jinou barvou tak, jak to vidíš na obrázku. Dřív, než barva stačila zaschnout, položil kvádr hnědou stěnou na papír, potom ho překlopil na zelenou stěnu, potom na červenou, na modrou, na žlutou a naposledy na červenou. Nakonec hranolek odložil pryč a prohlédnul si celý obrázek. Jaký obsah má zabarvená část papíru? Jaký má obvod?



Řešení: Tato úloha je poměrně náročná na prostorovou představivost a žáci zřejmě budou často využívat experimentu (např. pomocí krabičky od zápalek). První otázka je jednodušší a lze řešit i úsudkem. Stačí si uvědomit, že dvě protilehlé stěny mají týž obsah; pak snadno odvodíme, že v zabarvené části papíru bude každá ze tří různých stěn kvádru obsažena dvakrát, a tedy obsah zabarvené části je roven povrchu celého kvádru. Při hledání odpovědi na druhou z otázek se již asi bez experimentu neobejdeme. Uvedeme pouze výsledek: obvod zabarvené části papíru je roven 666 mm^2.

***Úloha 6**:* ([9], 48. r. Z4-I-3) Adam má 1638 stejně velkých modrých a bílých krychliček. Ze všech krychliček postavil kvádr, jehož část vidíte na obrázku. Přitom všechny krychličky uvnitř jsou bílé a zvenku je celý kvádr modrý. Kolik bílých a kolik modrých krychliček má Adam?



Řešení: Nejprve je nutné určit počet všech Adamových krychliček. Z obrázku vyčteme, že v podstavě je celkem 63 krychliček („9 × 7“). Protože všech krychliček je 1638, je výška kvádru 26 krychliček. Bílé krychličky jsou všechny vnitřní, tj. „7 × 5 × 24“, tedy po výpočtu 840 krychliček. Zbylé krychličky jsou modré, je jich tedy 798.

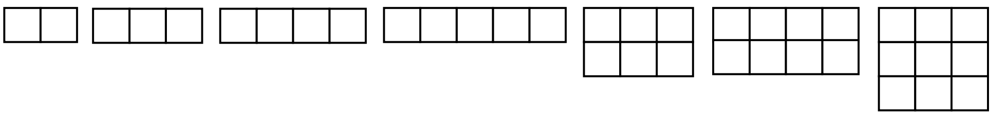
Úloha *7:* ([9], 50. r. Z4-I-5) Na papíru jsou znázorněny body A, B, C, D, X a Y tak, že platí:

- A, X, Y a D jsou vrcholy obdélníka.
- X, B, C a Y jsou vrcholy obdélníka.
- Čtyřúhelník ABCD má obsah 15 cm^2.
- Obdélník AXYD má dvakrát větší obsah než obdélník XBCY.
- Úsečka AB měří 3 cm.

Vypočítej obsah a obvod obdélníka AXYD.

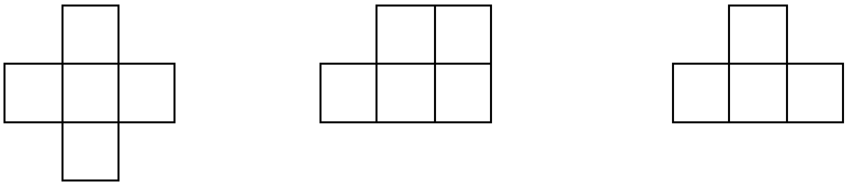
Řešení: Úloha je pro žáky ZŠ poměrně obtížná, zejména z důvodů složitého zadání obsahujícího pět údajů. Uvedeme pouze výsledek. Výsledný geometrický útvar vypadá takto: ABCD je obdélník, kde délka strany AB je 3 cm a délka strany BC je 5 cm (podle dvou podmínek zadání). Bod X leží na straně AB, přičemž délka úsečky AX je 2 cm, bod Y leží na straně CD a analogicky délka úsečky DY je 2 cm. Potom obsah obdélníka AXYD je rovna 10 cm^2 a jeho obvod je roven 14 cm.

Úloha *8:* (upravena podle úlohy z [9], 51. r. Z4-I-2) Petr vystřihnul ze čtverečkovaného papíru geometrické útvary znázorněné na obrázku. Narýsuj největší čtverec, který můžeme složit z vystřihnutých útvarů a vyznač způsob jeho složení. Útvary se nesmí překrývat, nemusíme ale při skládání použít všechny.



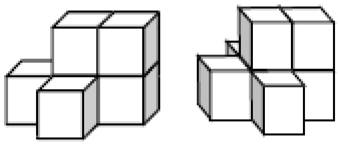
Řešení: Součet všech čtverečků ve vystřihnutých útvarech je 37. Největší čtverec by teoreticky mohl mít rozměry 6 × 6, ten ale není možné z vystřižených útvarů složit. Jeho obsah by byl 36 čtverečků, ale útvar o obsahu 1 čtvereček není k dispozici. Dalším možným čtvercem je čtverec 5 × 5, který složit lze a jeho složení ukazuje následující obrázek.

Úloha 9: ([9], 52. r. Z4-I-3) Jirka postavil z dřevěných kostek na stole stavbu a zakreslil, jak jeho stavba vypadá shora, zepředu a zleva (Obr.č. 1). Jeho bratr Ivo stavbu doplnil stejnými kostkami na nejmenší možný kvádr. Kolik dřevěných kostek měl kvádr? Kolik kostek doplnil Ivo?

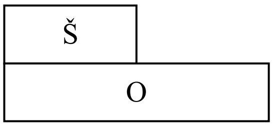


Obr. 1

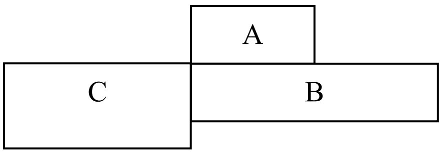
Řešení: Žák může situaci modelovat pomocí stavebnice. Těleso jsme nakreslili v pravém a levém nadhledu, aby bylo viditelné, že je složeno ze sedmi kostek. Podle obrázku měl kvádr 18 kostek a Ivo musel tedy doplnit 11 kostek.



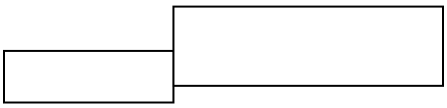
Úloha 10: ([9], 53. r. Z4-I-1) Když se dva obdélníky spřátelí, přitisknou se stranami k sobě tak, aby měly alespoň jeden vrchol společný.



Tady se přátelí obdélník Š s obdélníkem O.



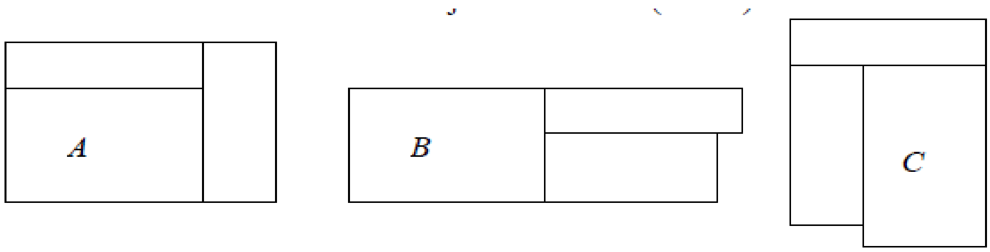
Tady se přátelí obdélník A s obdélníkem B a obdélník B s obdélníkem C, ale ne obdélník A s obdélníkem C.



Ani tyto dva obdélníky nejsou přátelé.

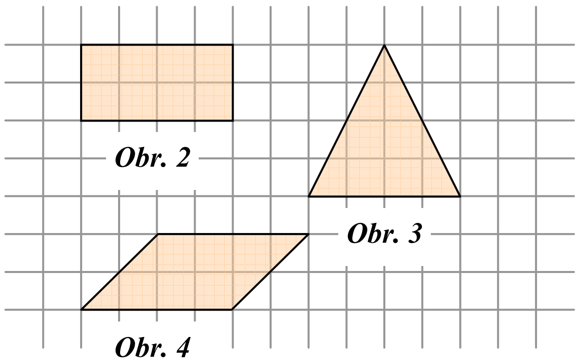
Minule se spřátelily 3 obdélníky – každý s každým. První měl rozměry 3 cm × 7 cm, druhý 5 cm × 8 cm a třetí 2 cm × 8 cm. Jaký největší obvod může mít obrazec, který spřátelením spolu vytvořily?

Řešení: Jestliže se spřátelí dva obdélníky, vytvoří buď obdélník nebo obrazec tvaru L. Je nutno spojovat jednotlivé dvojice obdélníků a zkoušet, zda se k nim dá připojit třetí obdélník. Pro spřátelení všech tří obdélníků ze zadání úlohy dostáváme tři možnosti (až na otočení a překlopení):



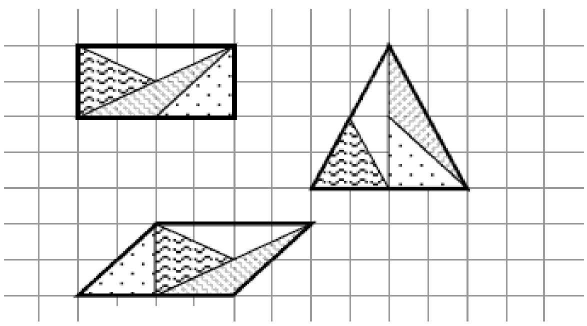
Zbývá vypočítat a porovnat obvody těchto útvarů; největší obvod (42 cm) má obrazec B.

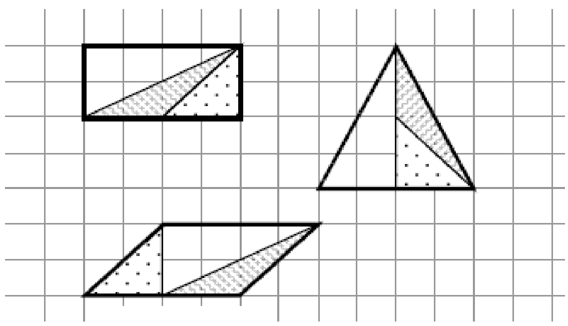
Úloha 11: ([9]**,** 53. r. Z4-I-4) Pavel rozstříhal obdélník na obrázku 2 na několik trojúhelníčků. Ze všech těchto trojúhelníčků dokáže poskládat velký trojúhelník z obrázku 3. Ze všech těchto trojúhelníčků dokáže též poskládat rovnoběžník z obrázku 4.



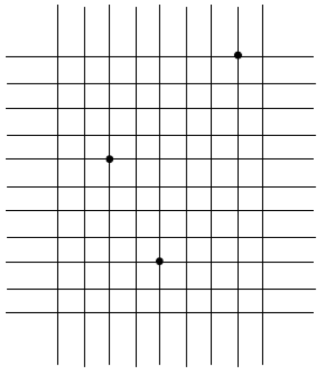
Zjisti, jak Pavel stříhal, když počet trojúhelníčků byl
a) 4,
b) 3.
Vždy nakresli čáry, po kterých mohl Pavel stříhat. Dále nakresli trojúhelník z obr. 3 složený z malých trojúhelníčků i rovnoběžník z obr. 4 složený z malých trojúhelníčků. Při skládání sa trojúhelníčky nesmí překrývat, a poskládané útvary nesmí být děravé.

Řešení: Úloha je pro žáky ZŠ velmi náročná a vyžaduje experimentování pomocí vystřižených útvarů. Jako příprava pro řešení je doporučen tzv. Tangram. Tento historický hlavolam je založený na skládání rozličných útvarů ze základních dílů vzniklých jistým rozstříháním čtverce. Řešení je znázorněno na obrázku. Úloha a) je jednodušší v tom smyslu, že skládání lze provést pouhým posouváním vystřižených trojúhelníčků po podložce. V případě b) je již nutné některé díly převrátit.





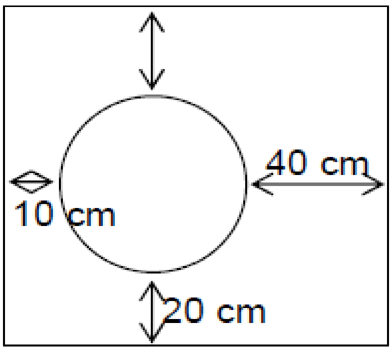
***Úloha 12**:* ([9], 57. r. Z4-I-4) Na obrázku s částí čtvercové sítě jsou vyznačeny tři body. Každé dva z těchto třech vyznačených bodů tvoří vždy dva ze čtyřech vrcholů nějakého čtverce. Čtverec *ABCD* má ze všech těchto čtverců nejmenší obvod, ale z obrázku se nám vymazala jména vyznačených bodů. Dokresli do čtvercové sítě celý čtverec *ABCD*.



Řešení: Ke každé dvojici bodů lze nakreslit tři čtverce. Dva vzniknou tak, že dané dva body leží na jedné straně, třetí tak, že leží na úhlopříčce. Úhlopříčka čtverce je vždy delší než jeho strana, proto musí být dvojice bodů na obrázku krajními body úhlopříčky. Ze třech úseček určených zadanými body snadno vybereme nejkratší. To bude úhlopříčka čtverce *ABCD*, který pak snadno zakreslíme do čtvercové sítě.

***Úloha 13**:* ([9], 58. r. Z4-I-1) Na stole se čtvercovou deskou o straně délky 1 m byla „trochu nakřivo“ umístěna kruhová dečka. Od nejbližší strany desky stolu byl její kraj vzdálený 10 cm, od sousední strany potom 20 cm a od nejvzdálenější strany 40 cm. a) Jak daleko byl okraj dečky od čtvrté strany desky stolu? b) Jaký poloměr měla dečka?

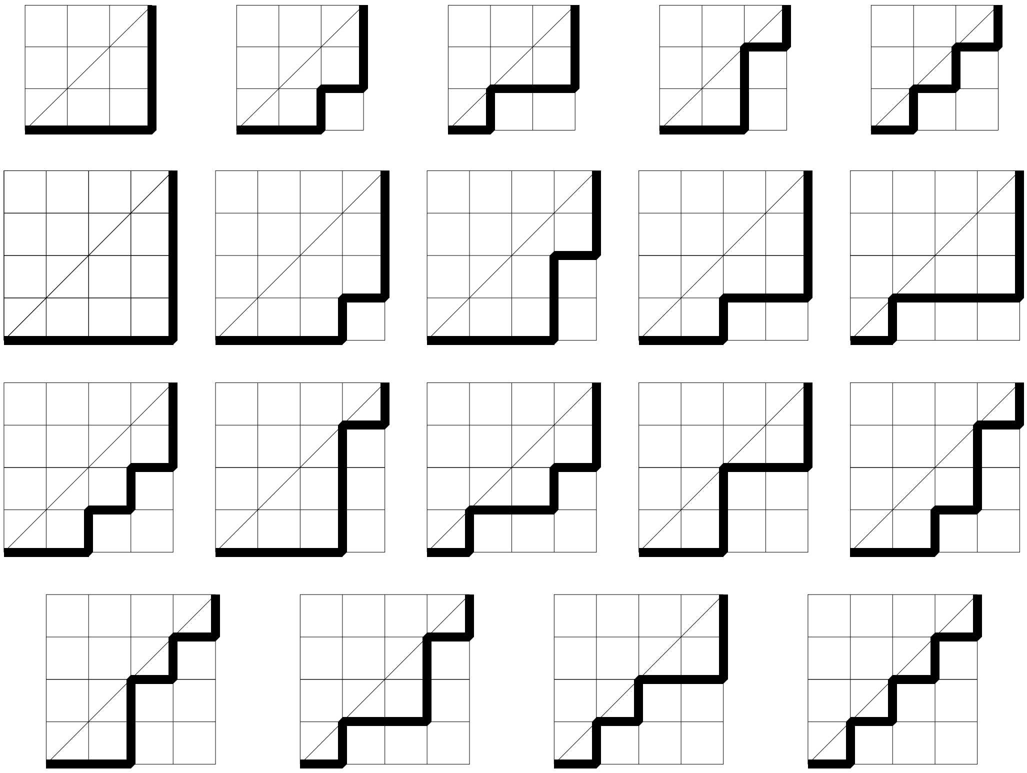
Řešení: Nejdůležitější je myšlenka „rozprostření“ dečky na stůl a uvědomění si, co je vzdálenost od okraje. Předpokládáme, že si žáci nakreslí následující obrázek:



Délka hrany stolu je 100 cm. Ve vodorovném směru máme rozměry 10 cm, 40 cm a průměr dečky. Proto průměr dečky bude 100 cm – 10 cm – 40 cm = 50 cm. Ve svislém směru máme na obrázku 20 cm, průměr dečky a neznámý rozměr. Z obrázku vyjádříme, že poslední neznámý rozměr musí byť 30 cm. Od čtvrté strany stolu je dečka vzdálená 30 cm, poloměr dečky je 25 cm.

Úloha 14: [2] Jsou dány čtvercové sítě o rozměrech 3×3 a 4×4. Kolik existuje „cest“ po těchto čtvercových sítích z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu?

Řešení: Žáci zřejmě budou postupovat experimentálně. Hledané počty cest jsou po řadě 5 a 14. Pro $n = 3$ a $n = 4$ je řešení ilustrováno následujícími obrázky (převzato ze [4]):



Pro $n = 3$ je pět cest, pro $n = 4$ je 14 možných cest.

Pro učitele nyní uvedeme i matematickou podstatu problému a jeho zobecnění na síť $n \times n$. Nejprve problém přesně matematicky zformulujeme: Zvolme počátek souřadné soustavy do levého dolního rohu sítě a předpokládejme nyní, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů: $[x, y] \to [x + 1, y]$ (tj. o jeden úsek na "východ") a $[x, y] \to [x, y + 1]$ (o jeden úsek na "sever"). Problémem je nyní určit počet takových cest z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu. Hledaný počet cest je určen tzv. Catalanovými čísly c_n (byla studována už Eulerem). Lze dokázat (podrobnosti viz [2], [4]) vztah pro výpočet c_n ve třech možných ekvivalentních tvarech:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}, \qquad c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}, \qquad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Poznamenejme, že první dva ze vztahů platí i pro $n = 0,$ zatímco třetí nikoliv. Existuje i rekurentní vztah

$$c_{n+1} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+2} \cdot c_n \quad \text{pro } n \in \boldsymbol{N},\ c_0 = 1.$$

Pro zajímavost ještě dodejme (viz [2], [4]), že Catalanova čísla c_n jsou lichá právě tehdy, když $n = 2^k - 1$. Pro všechna ostatní n jsou sudá. Catalanova čísla velmi rychle rostou; uvedeme několik prvních hodnot (včetně hodnoty c_0): 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357970, ...

Použité zdroje

1. BERÁNEK, JAROSLAV. *Práce s talentovanými žáky v matematice vede k úspěchu u talentových přijímacích zkoušek*. In Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání. první. Plzeň : Západočeská univerzita, 2007. od s. 17-19, 6 s. ISBN 978-80-7043-548-9

2. BERÁNEK, JAROSLAV. *Catalanova čísla a jejich užití.* In Sborník příspěvků ze XXVI. vědeckého kolokvia. 1. vyd. Brno : Univerzita Obrany, 2008. od s. 43-51, 8 s. ISBN 978-80-7231-511-6.

3. BERÁNEK, JAROSLAV. *Školní matematické soutěže - řešení zajímavých úloh*. In Setkání učitelů matematiky II - Matematika a hry. 1. vydání. Brno : Pedagogická fakulta MU, Brno, 2009. od s. CD-ROM, 10 s. ISBN 978-80-210-4970-3.

4. DICKAU, ROBERT M. *Catalan numbers.* In: http://mathforum.org/, Drexel University, 1996-1997, dostupné z http://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html. Citováno dne 12. 2. 2008.

5. FRANCOVÁ, MARTA - MATOUŠKOVÁ, KVĚTOSLAVA - VAŇUROVÁ, MILENA. *Elementární geometrie*. 1. vyd. Brno : PdF MU, 1999. 84 s.

6. KOUŘIM, JAROSLAV - ŠEDIVÝ, ONDREJ - KUŘINA, FRANTIŠEK. *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1985. 156 s.

7. KUŘINA, FRANTIŠEK. *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 247 s., ISBN 80-04-23753-3.

8. PŮLPÁN, ZDENĚK - KUŘINA, FRANTIŠEK - KEBZA, VLADIMÍR. *O představivosti a její úloze v matematice*. 1. vyd. Praha : Academia, 1992. 109 s. ISBN 80-200-0444-0.

9. *Matematická olympiáda v SR* [online]. 2010 [cit. 2010-07-21]. Dostupné z WWW: <http://www.gljs.sk/mo/>.

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky PdF MU
Poříčí 7, 603 00 Brno
E-mail: beranek@ped.muni.cz
Telefon: + 420 549 491 673