MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2019 Lucie Červená

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Analýza ekonomických časových řad

Bakalářská práce

Lucie Červená

Vedoucí práce: doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D. **Brno 2019**

Bibliografický záznam

Autor:	Lucie Červená Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Analýza ekonomických časových řad
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D.
Akademický rok:	2018/2019
Počet stran:	$viii + 45$
Klíčová slova:	analýza funkcionálních dat, B-splajnová báze, Fourierova báze, vyhlazování, regularizace, zobecněná krosvalidace, vyhlazovací parametr, phase-plane plot, nezaměstnanost

Bibliographic Entry

Author:	Lucie Červená Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Economic series analysis
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insurance Mathematics
Supervisor:	doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D.
Academic Year:	2018/2019
Number of Pages:	$viii + 45$
Keywords:	functional data analysis, B-spline basis, Fourier basis, smoothing, regularization, generalized crossvalidation, smoothing parameter, phase-plane plot, unemployment

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou funkcionálních dat, která umožňuje nepracovat se zadanými daty jako s diskrétními hodnotami, ale jako s funkcemi. Při vhodném vyjádření dat nám tato skutečnost umožní získat také derivace aproximované funkce. Cílem práce je aplikovat analýzu funkcionálních dat na vybraná data a ta následně analyzovat pomocí phase-plane plotů. Tento postup je aplikován na míru nezaměstnanosti v České republice od roku 1993 do začátku roku 2019. Data jsou převedena do funkcionální podoby pomocí B-splajnové báze a vyhlazena metodou regularizace. Vyhlazovací parametr λ je zvolen pomocí metody zobecněné krosvalidace. Následně jsou vytvořeny phase-plane ploty, ve kterých jsou pozorovány každoroční sezónní trendy společně s výkyvy, které jsou spojené s fází hospodářského cyklu.

Abstract

This bachelor thesis deals with functional data analysis that enables us to consider data not as a vector of observations in discrete time but as functions. This feature provides more information about examined dataset, especially its derivatives. The main aim of this thesis is to apply functional analysis on the selected dataset and to analyze this transformed dataset using phase-plane plots. Functional data analysis was applied to the unemployment rate in the Czech Republic from the beginning of 1993 to the beginning of 2019. Application of functional data analysis on real data is accomplished in several steps. Data are transformed into the functional form using B-spline basis and then smoothed using a roughness penalty. The smoothing parameter λ is obtained by generalized cross-validation method. After that phase-plane plots are created and are used to discover every year's seasonal trends and also fluctuations connected with business cycle phases.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2018/2019

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Lucie Červená

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Analýza ekonomických časových řad

Název práce anglicky: Economic series analysis

Oficiální zadání:
Analýza funkcionálních dat je v současnosti velmi populárním nástrojem ve statistice. Díky tomuto přístupu lze zkoumat nejen samotné časové řady, ale také jiné jejich vlastnosti, např. derivace. Cílem práce je analyzovat časové řady vybraných ekonomických indexů pomocí tzv. fázových diagramů a interpretovat výsledky. Analýza bude provedena v jazyce R.

Literatura:
RAMSAY, J. O. a B. W. SILVERMAN. *Applied functional data analysis : methods and case studies*. New York: Springer, 2002. x, 190. ISBN 0387954147.

RAMSAY, J. O. a B. W. SILVERMAN. *Functional data analysis*. New York: Springer-Verlag, 1997. xiv, 310. ISBN 0387949569.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D.

Datum zadání práce: 8. 6. 2018

V Brně dne: 31. 10. 2018

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Lucie Červená **studentka**	doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu mé práce doc. Mgr. Janu Koláčkovi Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce a cenné rady, připomínky a čas strávený při konzultacích.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 10. května 2019 . . . . . .

Lucie Červená

Obsah

Přehled použitého značení ..... **viii**

Úvod **1**

Kapitola 1. Funkcionální náhodná veličina a výběr **2**
1.1 Funkcionální náhodná veličina 2
1.2 Funkcionální náhodný výběr 3

Kapitola 2. Bázové vyjádření funkcí **4**
2.1 Báze 4
2.2 Polynomiální báze 5
2.3 Fourierova báze 6
2.4 B-splajnová báze 7

Kapitola 3. Vyhlazování **11**
3.1 Bázové vyjádření funkce 11
3.2 Vyhlazování metodou lineární regrese 12
3.3 Vyhlazování metodou regularizace 12
3.3.1 Zobecněná krosvalidace 13
3.3.2 Ukázky vyhlazování 14

Kapitola 4. Phase-plane plot **18**

Kapitola 5. Analýza ekonomické časové řady **21**
5.1 Výběr časové řady 21
5.1.1 Vývoj nezaměstnanosti od Sametové revoluce po současnost 23
5.2 Transformace dat do funkcionální podoby 26
5.3 Analýza funkce pomocí phase-plane plotů 30
5.3.1 Politika ČNB a měnová krize v roce 1997 33
5.3.2 Vstup ČR do EU v roce 2004 36
5.3.3 Hospodářská krize 38
5.3.4 Současnost 39

Závěr **43**

Seznam použité literatury **44**

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu je přiložen přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathcal{X}$	funkcionální náhodná veličina
$\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$	funkcionální náhodný výběr
$\chi_1, \ldots, \chi_n$	realizace funkcionálního náhodného výběru
$\mathbb{E}$	funkcionální prostor
$D^k(x)$	derivace k-tého řádu funkce $x(t)$ podle t
SSE	reziduální suma čtverců
$PEN_k(x)$	penalizační funkce k-tého řádu
$PENSSE$	penalizovaná suma čtverců
λ	vyhlazovací parametr
GCV	zobecněná krosvalidace
U	míra nezaměstnanosti
Z	míra zaměstnanosti

Úvod

Analýza funkcionálních dat je odvětví moderní statistiky, kde data nereprezentují pouze jednotlivé body, ale celé funkce. To umožňuje získat nové informace o analyzovaném datovém souboru. Tato bakalářská práce se zabývá aplikací analýzy funkcionálních dat v ekonomii. Cílem je analýza ekonomické časové řady, konkrétně míry nezaměstnanosti v letech 1993 – 2018.

Postupně jsou definovány základní pojmy jako funkcionální náhodná veličina a funkcionální náhodný výběr. Dále je popsán způsob transformace diskrétních dat do funkcionální podoby. Nejprve se práce zabývá vyjádřením funkce pomocí více typů bází, větší pozornost je věnovaná B-splajnům. Následující kapitola se věnuje vyhlazování funkce, konkrétně metodou lineární regrese a metodou regularizace. Pro zvolení vyhlazovacího parametru λ v metodě regularizace je popsána metoda zobecněné krosvalidace. V závěru první části je uveden způsob tvorby phase-plane plotů a princip jejich interpretace.

Druhá část práce je zaměřena na aplikaci analýzy na ekonomické řady. Pro snazší interpretaci výsledků je míra nezaměstnanosti nahrazena mírou zaměstnanosti. Zprvu je popsán analyzovaný index a jeho vývoj od vzniku České republiky. Poté, na základě vybudované teorie, jsou hodnoty míry zaměstnanosti převedeny do funkcionální podoby pomocí B-splajnových bází, získaná funkce je vyhlazena metodou regularizace a zobecněné krosvalidace. Díky využití B-splajnů při aproximaci funkce je možné získat její derivace, což je dále využito při tvorbě phase-plane plotů. Na závěr jsou phase-plane ploty pro jednotlivé roky analyzovány a je popsáno základní schéma cyklů v průběhu let, ale také výkyvy, které nastávají hlavně v období hospodářských krizí.

Kapitola 1

Funkcionální náhodná veličina a výběr

S rozvojem počítačových technologií a schopností uchovávat stále větší objem dat, se zvyšuje výskyt situací, ve kterých jsou při sběru dat získávány křivky (např. v medicíně, biometrii nebo v ekonometrii). Přesto stále převažují případy, kdy jsou data zaznamenána v diskrétní podobě. Jestliže chceme provádět tyto body analyzovat jako funkcionální data, je nutné provést transformaci tak, aby na ně bylo možné pohlížet jako na hladkou funkci. Hladkou funkcí rozumíme funkci, která je spojitá a má spojitou alespoň první derivaci. Transformace bodů do funkcionální podoby umožní analyzovat nejen získanou funkci, ale také její derivace, čímž získáme o souboru dat další informace. V této kapitole jsou definovány základní pojmy analýzy funkcionálních dat, a to funkcionální náhodná veličina a funkcionální náhodný výběr. Obě definice vychází z [1].

1.1 Funkcionální náhodná veličina

V moderní statistice se setkáváme se situacemi, kde sbíraná data nereprezentují pouze jednotlivé body, ale celé křivky. Uvažme situaci, kdy náhodná veličina může být pozorována několikrát v časovém intervalu $(t_{min}, t_{max}) = T$. Taková pozorování je možné zapsat jako $\{X(t_j)\}_{j=1,\dots,J}$. Jsou-li časy měření blízko u sebe, je možné na pozorování nahlížet jako na spojitou funkci času $\mathcal{X} = \{X(t), t \in T\}$.

Definice 1. *Náhodná veličina $\mathcal{X}$ se nazývá funkcionální, jestliže nabývá hodnot z nekonečně dimenzionálního (funkcionálního) prostoru. Realizace χ funkcionální náhodné veličiny $\mathcal{X}$ se nazývá pozorování (funkcionální data).*

Jako $\mathcal{X}$ (resp. χ) je tedy uvažována náhodná křivka (resp. její pozorování) a implicitně uvažujeme $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(t), t \in T\}$ (resp. $\chi = \{\chi(t), t \in T\}$). Situace, kdy funkcionální náhodná veličina je křivka, je spojena s jednodimenzionálním podprostorem $T \subset \mathbb{R}$. Pojem funkcionální náhodná veličina ale nezahrnuje jen funkce, může označovat například i povrch (v tomto případě platí, že T je dvoudimenzionální podprostor $T \subset \mathbb{R}^2$) nebo jakýkoliv jiný nekonečně dimenzionální matematický objekt. Funkcionální prostor značíme $\mathbb{E}$.

1.2 Funkcionální náhodný výběr

Definice 2. *Funkcionální náhodný výběr $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ je n nezávislých funkcionálních náhodných veličin, které mají stejné rozdělení. Realizaci náhodného výběru $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ značíme $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Číslo n vyjadřuje rozsah tohoto náhodného výběru.*

Jestliže jsou data dostatečně hustá, je možné přejít k numerické aproximaci nebo k vyhlazovacím metodám. Jsou-li data řídká, je nutné využít sofistikovanější metody vyhlazování, touto situací se ale zabývat nebudeme.

Kapitola 2

Bázové vyjádření funkcí

Při analýze funkcionálních dat je nutné nahradit jednotlivá pozorování daty, jež reprezentují celé funkce. Prvním krokem analýzy je tedy transformace diskrétně zadaných dat do funkcionální podoby.

Na diskrétní hodnoty, které jsou získány při pozorování, je nahlíženo jako na funkční hodnoty hledané funkce. Tato funkce je aproximována po částech na subintervalech pomocí množiny lineárně nezávislých funkcí, které se nazývají báze. Vybírat můžeme z více typů bází, přičemž každá je vhodná pro aproximaci jiného typu dat. V této kapitole jsou zmíněny základní vlastnosti vybraných bází, více prostoru je věnováno B-splajnům, které se využívají v následné analýze.

2.1 Báze

Uvažujme n diskrétních pozorování (t_j, y_j), kde y_j je naměřená hodnota v čase t_j. Cílem je transformovat tyto páry do funkcionální podoby tak, aby bylo možné získat nejen hodnotu funkce v zadaných bodech t_j, ale i v libovolně zvolených bodech intervalu $[t_1, t_n]$. Počet bázových funkcí, které jsou využity k reprezentaci dat, má vliv na „vyhlazenost“ funkce. Následující definice vychází z [2].

Definice 3. *Báze je množina lineárně nezávislých funkcí $\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_m(t) \in \mathbb{E}$ taková, že libovolnou funkci $x(t) \in \mathbb{E}$ je možné vyjádřit pomocí funkcí $\beta_j(t)$, kde $j = 1, \ldots, m$. Jestliže libovolná funkce $x(t)$ lze vyjádřit jako:*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \beta_j(t),$$

potom vektor koeficientů $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ určuje hledanou funkci.

Volba vhodné báze je klíčovým krokem ke správné aproximaci funkce. Volba závisí na povaze dat a také na následné analýze získané funkce – báze, která dobře reprezentuje samotnou funkci, nemusí dobře reprezentovat zároveň i její derivace.

2.2 Polynomiální báze

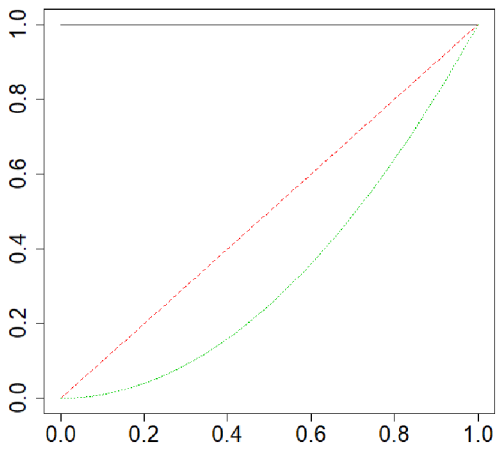
Polynomiální báze je tvořena bázovými funkcemi tvaru:

$$t^i \quad \text{pro } i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

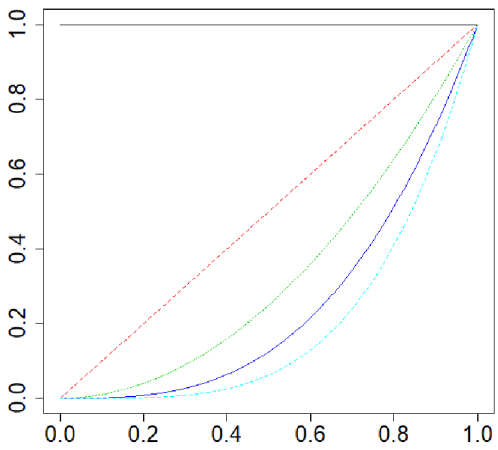
kde m je počet bázových funkcí. Je tedy tvořena polynomy tvaru 1, t, t^2,..., t^{m-1}. Je zřejmé, že takto definované funkce jsou lineárně nezávislé – není možné vyjádřit jednu funkci jako lineární kombinaci ostatních funkcí.

Jako příklad uveďme bázové vyjádření polynomu $x(t) = 15t^3 - 6t + \sqrt{33}$, který můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových funkcí 1, t, t^2 a t^3 s vektorem koeficientů $\xi = (\sqrt{33}, -6, 0, 15)^T$.

Pro ukázku je uvedena polynomiální báze na intervalu $[0,1]$, přičemž každý graf se liší počtem bázových funkcí. V prvním grafu 2.1 je zvolen počet bázových funkcí $m = 3$, v grafu 2.2 je počet bázových funkcí $m = 5$. Je zřejmé, že čím vyšší bude počet bázových funkcí m, tím více bude aproximovaná funkce kopírovat diskrétní hodnoty.



Obr. 2.1: Polynomiální báze se 3 bázovými funkcemi



Obr. 2.2: Polynomiální báze s 5 bázovými funkcemi

Výhodou této báze je fakt, že se skládá z polynomů, a nevyžaduje proto vysokou početní náročnost. Polynomiální báze dle [7] dobře aproximuje data kolem středu intervalu, na krajích intervalu již poskytuje horší výsledky, a proto není dostačující pro aproximaci více variabilních dat. V těchto případech se využívá převážně B-splajnová a Fourierova báze, které jsou popsány v následujících částech 2.3 a 2.4.

2.3 Fourierova báze

Fourierova báze je množina lineárně nezávislých funkcí, které jsou periodické, proto je využívána převážně k reprezentaci periodických dat. Definice vychází z [5] a [3].

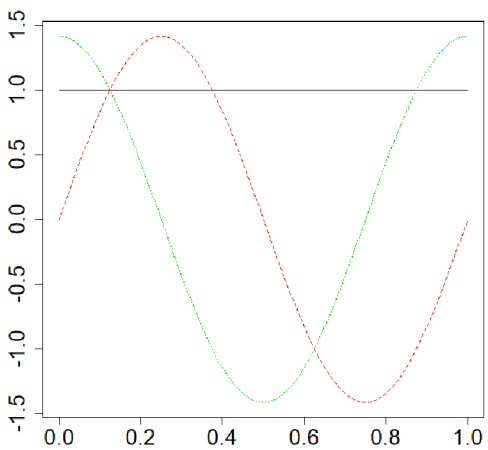
Definice 4. *Fourierova báze je posloupnost funkcí tvaru:*

$$\beta_1(t) = 1 \quad \beta_{2r}(t) = \sin(r\omega t) \quad \beta_{2r+1}(t) = cos(r\omega t) \quad pro\ r = 1, \ldots, p.$$

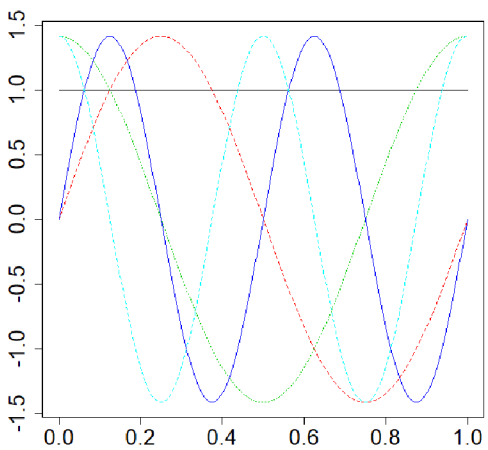
Parametr ω je volen podle vztahu: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kde T označuje periodu funkce. Jako perioda T je často volena délka intervalu $[a,b]$. Počet bázových funkcí bývá lichý, protože funkce *sinus* a *cosinus* se přidávají po párech. Celkový počet bázových funkcí je tedy zpravidla $K = 1 + 2p$. V programu R je Fourierova báze definována tak, aby bázové funkce tvořily ortonormální bázi:

$$\beta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \beta_{2r}(t) = \frac{\sin(r\omega t)}{\sqrt{\frac{T}{2}}} \quad \beta_{2r+1}(t) = \frac{cos(r\omega t)}{\sqrt{\frac{T}{2}}} \quad pro\ r = 1, \ldots, p.$$

Pro ukázku je uvedena Fourierova báze na intervalu $[0,1]$, jako perioda je zvolena délka intervalu $T = 1$. Grafy se opět liší zvoleným počtem bázových funkcí. V grafu 2.3 je zvoleno $p = 1$, tedy celkový počet bázových funkcí je 3. V grafu 2.4 je zvoleno $p = 2$, celkem 5 bázových funkcí.



Obr. 2.3: Fourierova báze se 3 bázovými funkcemi



Obr. 2.4: Fourierova báze s 5 bázovými funkcemi

Fourierova báze je často využívána k reprezentaci dat z toho důvodu, že není příliš početně náročná a zároveň lze snadno získat její derivace. K jejímu definování je postačující znát počet bázových funkcí K, periodu T a interval, na kterém je aproximace prováděna.

2.4 B-splajnová báze

B-splajnová báze je vhodná pro reprezentaci neperiodických dat. Každý B-splajn m-tého řádu je po částech polynomiální funkce, která je spojitá až do derivace řádu $(m-2)$. Tato báze je využívaná zejména z toho důvodu, že se skládá z polynomů, které se dají dobře derivovat, což umožňuje získat o datech další informace. Existuje více druhů splajnů, tato práce se věnuje pouze B-splajnům. Definice vychází z [4].

Definice 5. *Nechť je dána funkce f, která je definovaná na intervalu $[a,b]$ a množina bodů t_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, které nazýváme uzly; $a = t_1 < \cdots < t_n = b$. Funkci $S \in C^{m-2}[a,b]$ nazýváme interpolačním splajnem řádu m, pokud splňuje následující podmínky:*

- *S je polynom stupně $m-1$ na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$ pro každé $j = 1,2,\dots,n-1$;*
- *$S(t_j) = f(t_j)$ pro $j = 1,2,\dots,n$;*
- *$S^i_j(t_{j+1}) = S^i_{j+1}(t_{j+1})$ pro $i = 0,1,\dots,m-2$ a pro $j = 1,2,\dots,n-2$.*

První krok při konstrukci B-splajnů spočívá v rozdělení intervalu, na kterém provádíme pozorování, na subintervaly pomocí uzlů. Každý B-splajn m-tého řádu prochází všemi body $y_j = f(t_j)$, kde $j = 1,2,\dots n$. Zároveň jsou dva po sobě jdoucí splajny spojité v bodě t_{j+1} pro $j = 1,2,\dots,n-2$ až do derivace řádu $(m-2)$. Spojitost derivací může být ovlivněna přidáním dalších uzlů do stejného dělícího bodu, tato situace je popsána dále v této části. Následujicí definice uvádí vztah pro výpočet B-splajnu prvního řádu a vychází z [6].

Definice 6. *Nechť množina uzlů je neklesající posloupnost $\tau := (t_j)$, potom definujeme B-splajn 1. řádu jako:*

$$B_{j1}(t) := X_j(t) := \begin{cases} 1, & \textit{pokud } t_j \le t < t_{j+1}. \\ 0, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

Přičemž dle [5] musí platit:

$$\sum_{j=1}^{n} B_{j_1}(t) = 1, \quad \textit{pro všechna } t.$$

Splajny vyšších řádů k potom definujeme rekurzivně:

$$B_{jk} := \omega_{jk} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1},$$

kde

$$\omega_{jk}(t) := \begin{cases} \frac{t-t_j}{t_{j+k-1}-t_j}, & \textit{pokud } t_j \ne t_{j+k-1}. \\ 0, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

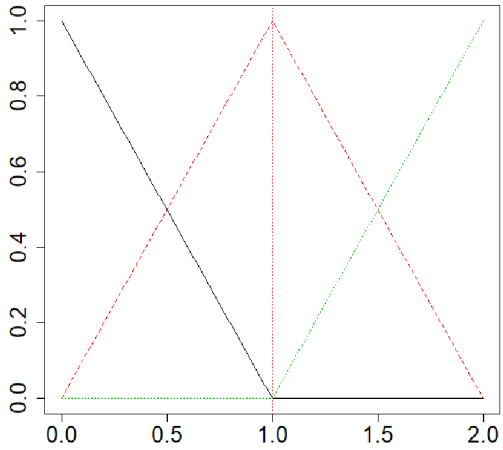
Navíc z definice plyne, že pokud $t_j = t_{j+1}$, potom $B_{j1} = X_j = 0$. Tedy v případě, že jsou v jednom dělícím bodu dva uzly, je hodnota B-splajnu 1. řádu nulová.

B-splajn druhého řádu vypadá dle rekurzivního vztahu následovně:

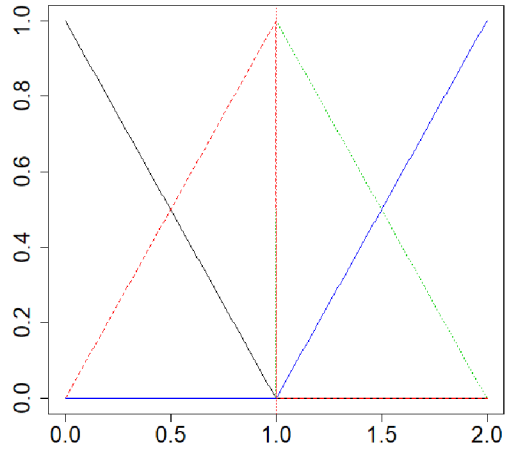
$$B_{j2} = \omega_{j2} X_j + (1 - \omega_{j+1,2} X_{j+1}).$$

Skládá se ze dvou lineárních částí – polynomů stupně 1, které společně tvoří po částech lineární funkci na intervalu $[t_j, t_{j+2})$. Takový B-splajn nazýváme *lineárním B-splajnem*. Jestliže $t_j = t_{j+1}$ (tedy $X_j = 0$) a zároveň platí, že $t_{j+1} < t_{j+2}$, potom lineární B-splajn B_{j2} není hladký v dvojitém uzlu $t_j = t_{j+1}$.

Pro ukázku uveďme B-splajn 2. řádu na ekvidistantní posloupnosti uzlů $t = (0,1,2)^T$ a B-splajn 2. řádu s dvojitým uzlem v bodě 1 a $t = (0,1,1,2)^T$.



Obr. 2.5: B-splajn 2. řádu s uzly v bodech $t = (0,1,2)^T$



Obr. 2.6: B-splajn 2. řádu s uzly v bodech $t = (0,1,1,2)^T$

K definici B-splajnové báze je nutné znát interval $[a,b]$, na kterém funkci aproximujeme, dále řád nebo stupeň splajnu a posloupnost uzlů. Zároveň musí platit:

$$\text{počet bázových funkcí} = \text{řád splajnu} + \text{počet vnitřních uzlů}. \tag{2.1}$$

Pro vztah mezi řádem a stupněm splajnu platí:

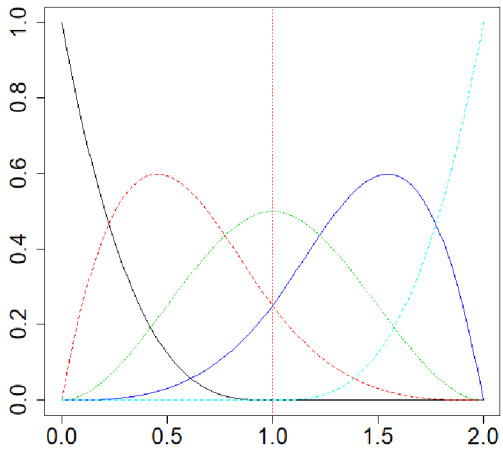
$$\text{stupeň splajnu} = \text{řád splajnu} - 1.$$

Dle vztahu 2.1 jsou v grafu 2.5 celkem $2+1=3$ bázové funkce a v grafu 2.6 je celkem $2+2=4$ bázové funkce.

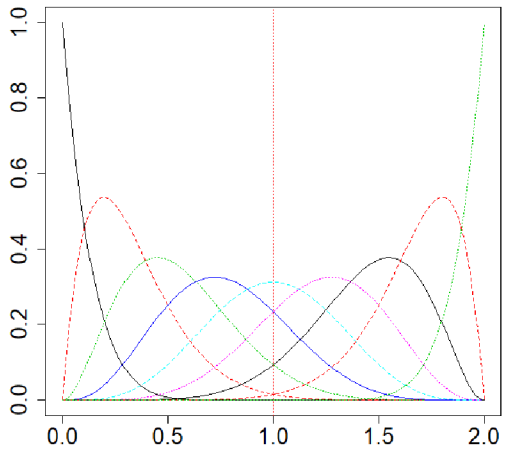
Nejčastěji používaný je *kubický B-splajn*, tedy splajn řádu 4. V každém uzlu jsou funkční hodnoty sousedních polynomů totožné, stejně jako funkční hodnoty prvních a druhých derivací. Tyto hodnoty se budou lišit až od třetí derivace.

Obecně pro B-splajn řádu m (stupeň $m-1$) platí, že funkční hodnoty sousedních polynomů v uzlech jsou totožné až do derivace řádu $(m-2)$. Jinými slovy je aproximovaná funkce spojitá do derivace řádu $(m-2)$ včetně.

V následujícím grafu uveďme kubický B-splajn a B-splajn 8. řádu.

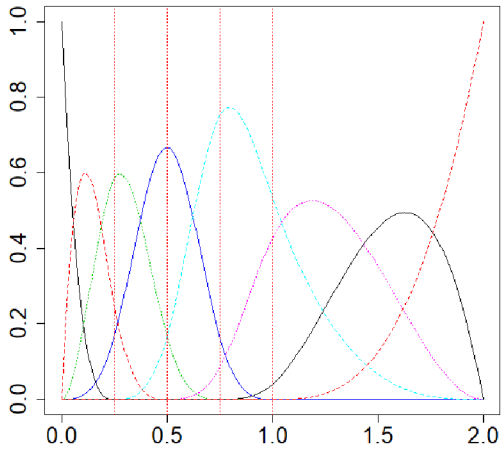


Obr. 2.7: B-splajn 4. řádu s uzly v bodech $t = (0,1,2)^T$

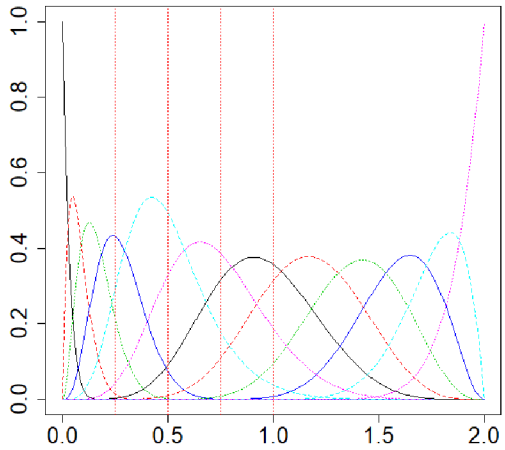


Obr. 2.8: B-splajn 8. řádu s uzly v bodech $t = (0,1,2)^T$

Je-li požadována vyšší přesnost aproximace nebo je-li funkce v některé části více variabilní, je vhodné zvolit hustší síť uzlů. V následujících grafech jsou opět zobrazeny B-splajny 4. a 8. řádu na intervalu $[0,2]$. Uzly v tomto případě již nejsou rovnoměrně rozděleny.



Obr. 2.9: B-splajn 4. řádu s uzly v bodech $t = (0;0,25;0,5;0,75;1;2)^T$



Obr. 2.10: B-splajn 8. řádu s uzly v bodech $t = (0;0,25;0,5;0,75;1;2)^T$

Jak je uvedeno v [5], ve většině případů jsou vnitřní uzly jednoduché, tedy platí $t_j \neq t_{j+1}$. Pro krajní body intervalu tato podmínka neplatí, v obou těchto bodech je počet uzlů totožný s řádem splajnu. Z toho vyplývá, že mimo definovaný interval má funkce nulovou hodnotu.

Pro lepší představu využijeme následující příklad. Mějme funkci, kterou chceme aproximovat kubickým B-splajnem na intervalu $[0,2]$. Na tomto intervalu zvolíme jeden vnitřní uzel a to v bodě 1. Řád B-splajnu je 4 a máme posloupnost uzlů: $(0,0,0,0,1,2,2,2,2)^T$. Takto definovaný B-splajn je spojitý až do druhé derivace. Jestliže požadujeme, aby první derivace v bodě 1 nebyla spojitá, přidáme do posloupnosti uzlů další dva vnitřní uzly v bodě 1. Výsledná posloupnost uzlů vypadá následovně: $(0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,2)^T$. Spojitost funkce je zachována, ale funkce již není hladká.

Kapitola 3

Vyhlazování

V této kapitole jsou uvedeny základy vyhlazování funkcí. Popsáno je zde vyhlazování pomocí lineární regrese, blíže se zaměříme na metodu regularizace, která je využita v praktické části. Zavedení pojmů vychází z [7], [5] a [3].

3.1 Bázové vyjádření funkce

Jak je uvedeno v předchozí kapitole 2, chceme vyjádřit funkci $x(t)$ jako lineární kombinaci koeficientů a lineárně nezávislých funkcí, které se nazývají báze, tedy:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \beta_j(t).$$

Přičemž platí, že hodnota funkce v čase t_j, tj. $x(t_j)$, se rovná hodnotě získané při pozorování y_j, tedy $y_j = x(t_j)$.

Po výběru vhodného typu báze je nutné dopočítat vektor koeficientů $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Protože vycházíme z n diskrétních pozorování (t_j, y_j), dostáváme soustavu n lineárních rovnic s m neznámými, kde $\xi_1, \ldots, \xi_m$ jsou hledané koeficienty:

$$\begin{aligned}
y_1 = x(t_1) &= \xi_1\beta_1(t_1) + \xi_2\beta_2(t_1) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_1) \\
y_2 = x(t_2) &= \xi_1\beta_1(t_2) + \xi_2\beta_2(t_2) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_2) \\
&\vdots \\
y_n = x(t_n) &= \xi_1\beta_1(t_n) + \xi_2\beta_2(t_n) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_n).
\end{aligned}$$

Maticový zápis této soustavy vypadá následovně: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$, kde matice $\boldsymbol{B}$ má rozměry $n \times m$. Jestliže je matice $\boldsymbol{B}$ regulární, soustava rovnic má pouze jedno řešení. V tomto případě vektor koeficientů $\boldsymbol{\xi}$ spočítáme podle vztahu $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}$. Ve většině případů matice $\boldsymbol{B}$ není regulární, tedy neexistuje právě jedno řešení soustavy. Zvolíme tedy jinou metodu, pomocí které spočítáme hledaný vektor koeficientů. Tato metoda se nazývá vyhlazování.

Na závěr pro jednodušší zápis zaveďme značení pro k-tou derivaci funkce $x(t)$ podle t jako $D^k(x)$. Toto značení budeme dále používat místo běžného $\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$ pro $k \geq 0$. Jako $D^0(x)$ rozumíme samotnou funkci $x(t)$.

3.2 Vyhlazování metodou lineární regrese

Nejjednodušší způsob vyhlazování je vyhlazování metodou lineární regrese. V této metodě je cílem minimalizovat reziduální chybu čtverců, tedy vzdálenost mezi naměřenými hodnotami y_j a bázovým vyjádřením funkce. Zaveďme tedy následující lineární model:

$$\begin{aligned} y_1 &= x(t_1) = \xi_1\beta_1(t_1) + \xi_2\beta_2(t_1) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_1) + \varepsilon_1 \\ y_2 &= x(t_2) = \xi_1\beta_1(t_2) + \xi_2\beta_2(t_2) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_2) + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x(t_n) = \xi_1\beta_1(t_n) + \xi_2\beta_2(t_n) + \cdots + \xi_m\beta_m(t_n) + \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

který maticově vyjádříme jako $\mathbf{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ je vektor bázových funkcí a $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)^T$ je vektor chyb. Předpokládáme, že chyby ε_j jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným pravděpodobnostním rozdělením, mají střední hodnotu v 0 a mají stejné rozptyly σ^2, to znamená $\varepsilon_j \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Chceme minimalizovat *reziduální sumu čtverců* (*angl. sum of squared errors*), tedy výraz:

$$SSE = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 = ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}||^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}).$$

Dostáváme odhad $\tilde{\xi} = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}$.

Nevýhodou této metody je to, že není možné ovlivňovat úroveň vyhlazenosti funkce $x(t)$. Vyhlazenost je možné korigovat pouze volbou počtu bázových funkcí.

3.3 Vyhlazování metodou regularizace

Jak je uvedeno v [7] a [5], je vyhlazování metodou regularizace efektivním postupem při aproximaci nejen periodických dat, ale i dat, která obsahují výrazné výkyvy. Tento přístup je vhodný také v situaci, kdy chceme dále analyzovat derivace aproximované funkce. *Metoda regularizace* nebo také *metoda penalizační funkce* spočívá v podobném principu jako metoda lineární regrese, navíc ale umožňuje lepší korigování vyhlazenosti aproximované funkce.

Druhou mocninu druhé derivace libovolné funkce $x(t)$, tj. $[D^2x(t)]^2$, nazveme křivostí funkce (*angl. curvature*). Je zřejmé, že libovolná lineární funkce má nulovou křivost a také nulovou druhou derivaci ve všech bodech $t \in [t_1, t_n]$. Stejně jako v [7] definujeme *penalizační funkci*, která vyjadřuje přirozenou míru „křivosti“ funkce, jako:

$$PEN_2(x) = \int [D^2x(s)]^2 ds.$$

Jestliže chceme analyzovat i derivace funkce, je vhodné zavést penalizační funkce vyšších řádů. Chceme-li analyzovat druhou derivaci funkce, požadujeme, aby byla hladká,

penalizujeme tedy její křivost, a proto definujeme penalizační funkci následovně:

$$PEN_4(x) = \int [D^4 x(s)]^2 ds.$$

Chceme-li analyzovat vyšší řády derivací, definujeme zobecněnou penalizační funkci, která umožňuje užití derivace až do řádu k, jako:

$$PEN_k(x) = \int [D^k x(s)]^2 ds.$$

Při vyhlazování vycházíme z lineárního modelu 3.1 definovaného v předchozí sekci 3.2, do modelu je navíc zahrnuta penalizační funkce. *Penalizovanou sumu čtverců* definujeme jako:

$$PENSSE_\lambda(x|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B\xi})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B\xi}) + \lambda PEN_2(x).$$

Parametr $\lambda \in [0, \infty)$ se nazývá *vyhlazovací parametr* a jeho využitím je možné ovlivňovat míru vyhlazenosti aproximované funkce. Cílem je opět nalézt vektor koeficientů $\boldsymbol{\xi}$, který minimalizuje penalizovanou sumu čtverců. Jestliže parametr λ zvětšujeme, bude kladen větší důraz na minimalizaci $PEN_2(x)$, což znamená, že penalizujeme křivost a aproximovaná funkce bude více vyhlazená na úkor přesnosti. Jestliže $\lambda \to 0$, snižuje se vliv $PEN_2(x)$ na $PENSSE$. Metoda minimalizuje první část $PENSSE$ a funkce aproximuje data nejpřesněji, jak je to možné a může obsahovat i chyby měření. V tomto případě se metoda přibližuje výše popsané interpolaci.

3.3.1 Zobecněná krosvalidace

Existuje více metod, jak zvolit hodnotu vyhlazovacího parametru λ tak, aby byla funkce dostatečně vyhlazená a zároveň byla aproximace dostatečně přesná. Popíšeme blíže jednu z nich, a to *zobecněnou krosvalidaci* (*angl. generalized cross-validation*), která se často používá při aproximaci funkce pomocí splajnů.

Tato metoda minimalizuje výraz GCV (generalized cross-validation) vzhledem k λ, kde výraz $GCV(\lambda)$ definujeme jako:

$$GCV(\lambda) = \frac{nPENSSE}{[tr(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{H})]^2},$$

kde $\boldsymbol{I}_n$ je jednotková matice o rozměrech $n \times n$, H je projekční matice penalizovaného lineárního modelu:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} + \lambda\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}^T,$$

kde $\boldsymbol{R}$ je matice definovaná jako:

$$\boldsymbol{R} = \int D^m(\boldsymbol{B}(s))D^m(\boldsymbol{B}^T(s))ds.$$

Nalezení výsledku pomocí takto definované metody není příliš rychlé, protože máme k dispozici široký rozsah hodnot λ. Je možné využít kritérií definovaných v [7], které určují minimální a maximální hodnotu parametru λ.

Po provedení postupných úprav uvedených v [3] a s využitím vztahu $x(t) = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\beta}(t)$ dostáváme maticové vyjádření penalizační funkce:

$$PEN_k(x) = \int [D^k x(s)]^2 ds$$

jako:

$$PEN_k(x) = \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\xi}^T.$$

Pomocí tohoto vztahu je možné přepsat penalizovanou sumu čtverců následovně:

$$PENSSE_\lambda(x|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}) + \lambda \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\xi}^T.$$

Odhad koeficientů $\boldsymbol{\xi}$ získáme pomocí metody lineární regrese. Zderivujeme tedy výraz $PENSSE_\lambda(x|\boldsymbol{y})$ podle $\boldsymbol{\xi}$, jak je uvedeno v [3] a položíme roven nule. Vyjádřením $\boldsymbol{\xi}$ dostáváme odhad bázových koeficientů:

$$\tilde{\xi} = (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} + \lambda \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{y}.$$

Výpočtem druhé derivace výrazu ověříme, zda je získaná matice pozitivně definitní. V takovém případě je nalezený stacionární bod minimem funkce.

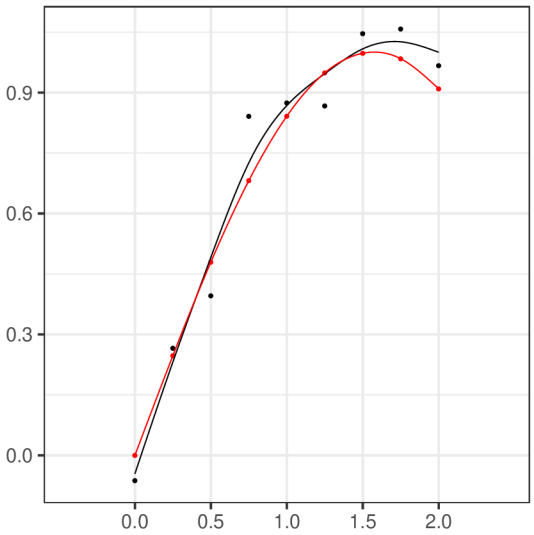
Jestliže jsou dále analyzovány i derivace aproximované funkce, nebývá volba $PEN_2(x)$ podle [7] dostatečná. Chceme-li se zabývat k-tou derivací funkce, je vhodné zvolit alespoň $PEN_{k+2}(x)$, čímž dojde k vyhlazení k-té derivace.

3.3.2 Ukázky vyhlazování

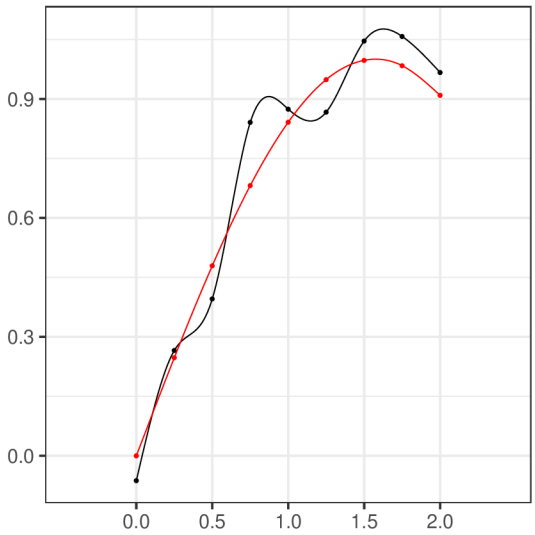
V této části jsou uvedeny ukázky vyhlazování dat při využití B-splajnových bází, metody regularizace a při různých volbách vyhlazovacího parametru λ. Uvažujeme 9 pozorování v bodech $t = (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2)$ s funkčními hodnotami $y = (-0,0627; 0,2658; 0,3959; 0,8412; 0,8744; 0,8669; 1,0462; 1,0578; 0,9669)$. Funkční hodnoty jsou získané podobně jako v [3], tedy $y_j = x(t_j) + \varepsilon_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, 9$, kde $\varepsilon_j \overset{iid}{\sim} N(0; 0,1^2)$ a funkce $x(t) = \sin(t)$. Pro aproximaci funkce jsou uzly zvoleny ekvidistantně v každém z bodů měření – celkem 9 uzlů. V následujících grafech 3.1 a 3.2 je zobrazena vyhlazená funkce, pro jejíž aproximaci byly využity B-splajny řádu 4, tedy počet bázových funkcí je dle vztahu v 2.1 na straně 8 roven $4 + 7 = 11$. Funkce $\sin(t)$ je spolu s přesnými funkčními hodnotami v grafu zobrazena černou barvou.

V grafu 3.2, při volbě parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-15}$, aproximovaná funkce přesněji kopíruje diskrétní hodnoty než v grafu 3.1 při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$. Původní funkci $\sin(t)$ ale lépe aproximuje volba $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$, protože v druhém případě jsou v aproximované funkci zachyceny i chyby měření. Ne vždy je žádoucí volit parametr λ tak, aby výsledná funkce přesně kopírovala získaná data, protože ta mohou obsahovat chyby měření. Tedy skutečnost, že aproximovaná funkce je blíže zadaným bodům nutně neznamená, že je aproximace přesnější. Při převádění dat do funkcionální podoby ale není původní funkce téměř nikdy známá, a proto je třeba volit hodnotu vyhlazovacího parametru dle nějakého kritéria,

v praktické části této práce je parametr λ volen metodou zobecněné krosvalidace, jejíž ukázka je uvedena i v této části na straně 17.

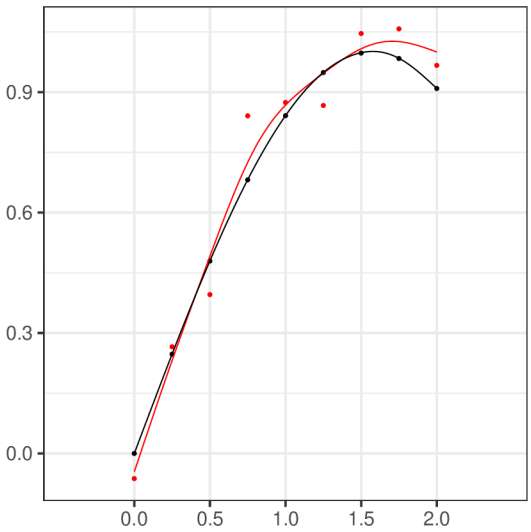


Obr. 3.1: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ a B-splajnu řádu 4

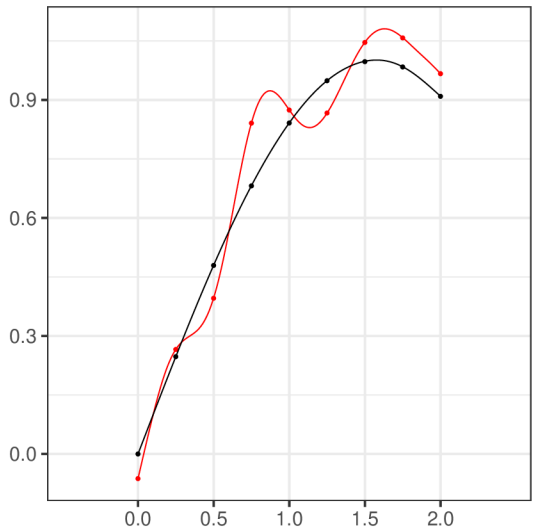


Obr. 3.2: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-15}$ a B-splajnu řádu 4

V grafech 3.3 a 3.4 jsou znázorněny vyhlazené funkce aproximované opět pomocí B-splajnů v tomto případě řádu 8. Počet bázových funkcí je tedy $8 + 7 = 15$. Uzly jsou ekvidistantní v každém z bodů měření a hodnota vyhlazovacího parametru je zvolena stejně jako v předchozím případě.



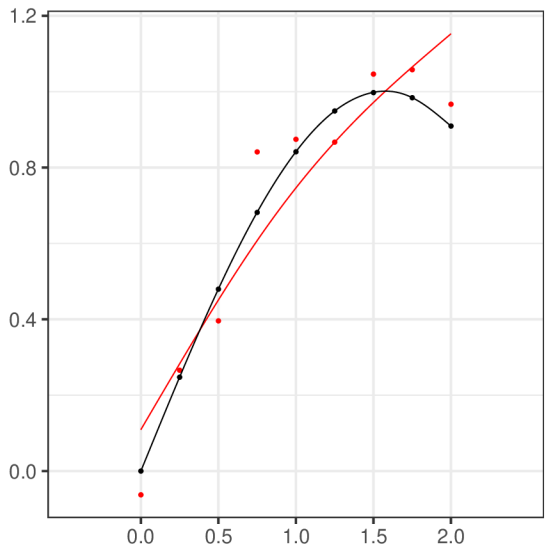
Obr. 3.3: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ a B-splajnu řádu 8



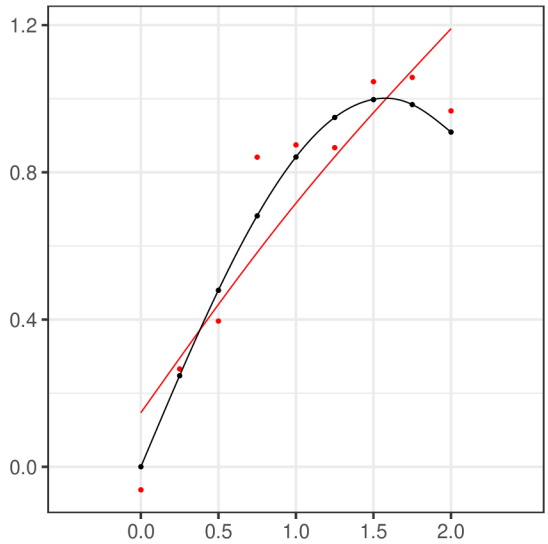
Obr. 3.4: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-15}$ a B-splajnu řádu 8

Z grafů lze pozorovat, že zvýšení řádu B-splajnu zvyšuje vyhlazenost funkce. V grafu 3.4 je funkce *podhlazená* (*z angl. undersmoothed*) – málo vyhlazená. Přesně kopíruje body měření, odhadnutá funkce obsahuje chyby měření a více se odchyluje od původní funkce $\sin(t)$.

Při volbě parametru λ blíže k 1 je aproximovaná funkce *přehlazená* (*z angl. oversmoothed*) – je příliš penalizována křivost funkce a aproximovaná funkce se přibližuje lineární funkci. Tato situace je zobrazena v následujících grafech 3.5 a 3.6.



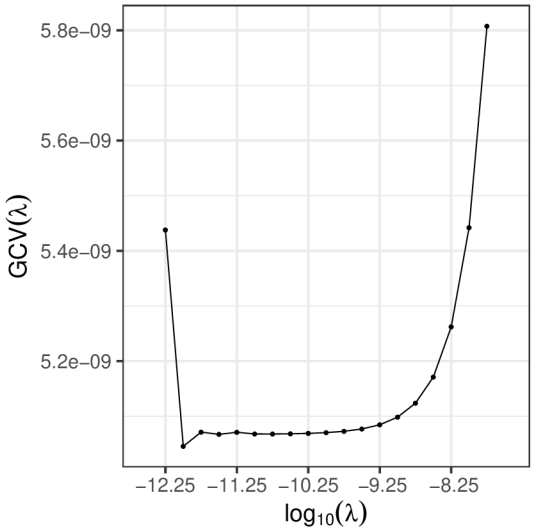
Obr. 3.5: Vyhlazování při volbě $\lambda = 0,5$ a B-splajnu řádu 8



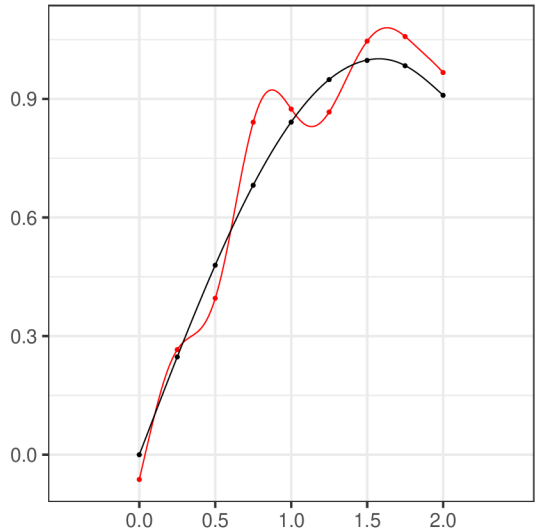
Obr. 3.6: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1.5$ a B-splajnu řádu 8

Volba vyhlazovacího parametru silně ovlivňuje výslednou funkci. Při rozhodování o jeho hodnotě není vhodné volit parametr příliš blízko 0, protože takto aproximovaná funkce je *podhlazená*, přesně kopíruje body měření, které nemusí odpovídat skutečným hodnotám. Naopak již při volbě λ blízko 1 výsledná funkce téměř nereflektuje výchozí funkci, tedy ani tato volba není vhodná, funkce je v tomto případě *přehlazená*. Ke stanovení hodnoty λ je vhodné využít metodu zobecněné krosvalidace. V následujícím grafu 3.7 je znázorněna funkce $GCV(\lambda)$ pro funkci aproximovanou B-splajny řádu 8. Na ose x jsou hodnoty $log_{10}\lambda$ pro zjednodušení výpočtu.

Dle [5] není nutné volit λ v přesném minimu funkce, které je v bodě $t = -12$. Často bývá vhodnější zvolit parametr v okolí minima s ohledem na povahu dat než v přesném minimu funkce. Vybraná hodnota by se měla pohybovat v okolí minima, v bodě, kde funkční hodnoty ještě příliš nestoupají. V tomto případě podle grafu 3.7 uvažujme interval $\log_{10}\lambda = [-12; -8,25]$. V druhém grafu 3.8 je zobrazena vyhlazená funkce aproximovaná opět B-splajny řádu 8, s volbou parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-9}$, který náleží do vyhovujícího intervalu.



Obr. 3.7: Funkce $GCV(\lambda)$ pro B-splajny řádu 8



Obr. 3.8: Vyhlazování při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-9}$ a B-splajnů řádu 8

Kapitola 4

Phase-plane plot

Po převedení dat do funkcionální podoby můžeme přejít k další části, kterou je analýza získané funkce. Jednou z možností je analýza pomocí *phase-plane plotů*. Využití B-splajnové báze při aproximaci funkce nám umožňuje dále zkoumat nejen funkci samotnou, ale navíc i její derivace. Díky této vlastnosti je možné phase-plane ploty vytvořit.

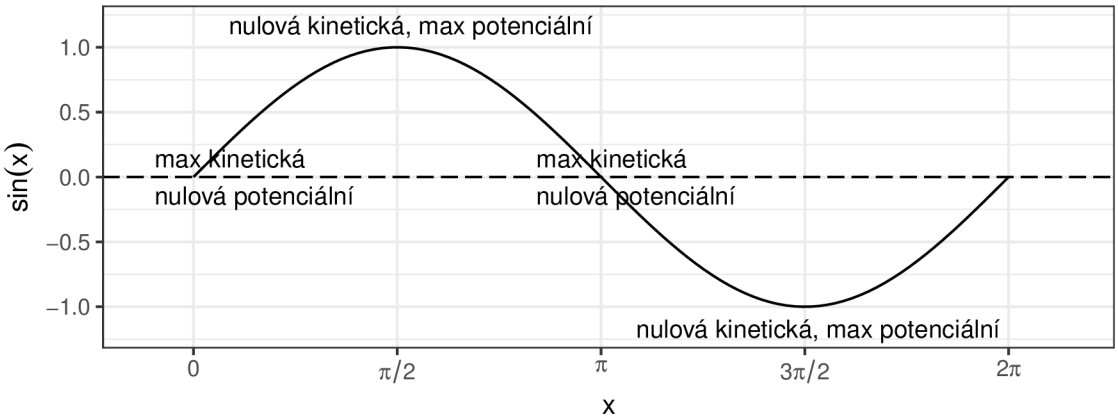
Při analýze dat je mnohdy zajímavější pozorovat míru změny, než samotnou hodnotu. Jestliže nás zajímá míra změny spíše než hodnota, je vhodné sledovat, co ovlivňuje rychlost, tedy první derivaci, a také zrychlení, tedy druhou derivaci funkce. Phase-plane plot vyjadřuje vztah mezi těmito derivacemi. Znázorňuje zrychlení (2. derivace) proti míře změny (1. derivace). Stejně jako v [2] později demonstrujeme využití phase-plane plotu na funkci $f(x) = \sin(x)$.

Z fyzikálního pohledu jsou procesy v přírodě i v běžném životě spojeny s přeměnou energie, kterou dělíme na *potenciální* a *kinetickou*. V průběhu procesu je možné zvyšovat potenciální energii na úkor kinetické a naopak. Kinetická energie odpovídá druhé mocnině z rychlosti (*angl. velocity*) a potenciální energie odpovídá zrychlení (*angl. acceleration*). Proto v bodě, ve kterém je absolutní hodnota první derivace maximální, dochází k maximalizaci rychlosti a také kinetické energie. V bodě, kde je maximální absolutní hodnota druhé derivace, je maximalizováno také zrychlení a potenciální energie. Jinými slovy je kinetická energie maximalizována, pokud je zrychlení nulové. Potenciální energie je maximalizována, jestliže je míra změny nulová. Vzhledem k tomu, že potenciální energie odpovídá zrychlení (druhé derivaci), může nabývat kladných i záporných hodnot. Kinetická energie odpovídá druhé mocnině z rychlosti (první derivaci), nikdy tedy nenabývá záporných hodnot, protože hodnota druhé mocniny je vždy kladná.

Phase-plane plot znázorňuje přeměnu kinetické a potenciální energie. Na horizontální ose je zobrazena rychlost, která reprezentuje míru změny, proto ji budeme dále označovat i jako rychlost změny. Na vertikální ose je zobrazeno zrychlení. které reprezentuje vstup nebo výstup zdrojů, které změnu způsobily. V grafu 4.1 je zobrazena funkce $\sin(x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$ spolu s body, ve kterých nabývá potenciální a kinetická energie nejvyšší a nejnižší absolutní hodnoty. Z grafu je zřejmé, že v bodech $x = \frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$ je potenciální energie maximální a kinetická nulová. V bodech $x = 0, \pi$ a 2π je maximální kinetická

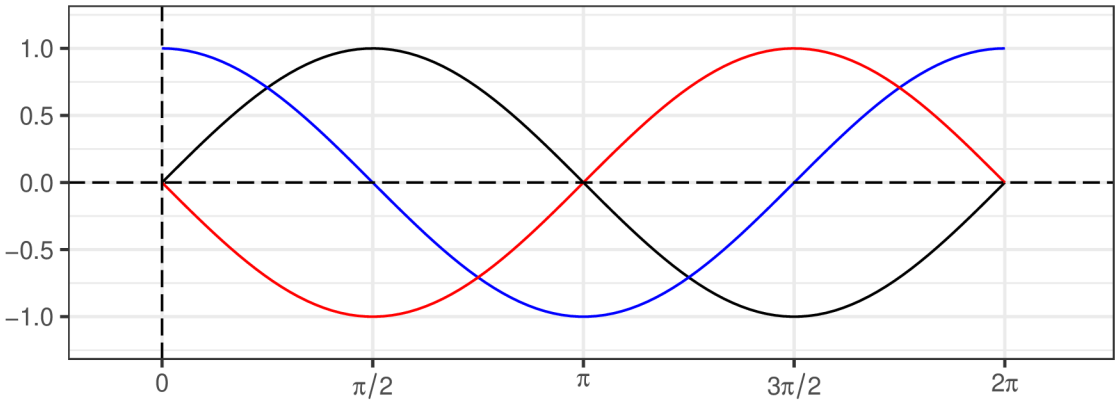
energie a nulová potenciální. Potenciální energie je maximalizována v extrémech funkce. Tyto body jsou ve phase-plane plotu viditelné jako extrémy na ose y. V bodech, ve kterých je hodnota funkce nulová, je nejvyšší kinetická a nulová potenciální energie, tyto body jsou ve phase-plane plotu viditelné jako extrémy na ose x.

Doposud byly zmiňovány pouze absolutní hodnoty, jestliže se budeme zabývat znaménky extrémních hodnot, zjistíme, že jedná-li se o lokální minimum druhé derivace (*dále ozn.* $-$), je vysoký potenciál ke změně, konkrétně k poklesu, a hodnoty začnou klesat. V bodech, ve kterých druhá derivace nabývá lokálního maxima (*dále ozn.* $+$), je potenciál ke změně také vysoký, v tomto případě ale bude následovat růst hodnot. Obdobné tvrzení platí i pro znaménka extrémů první derivace.



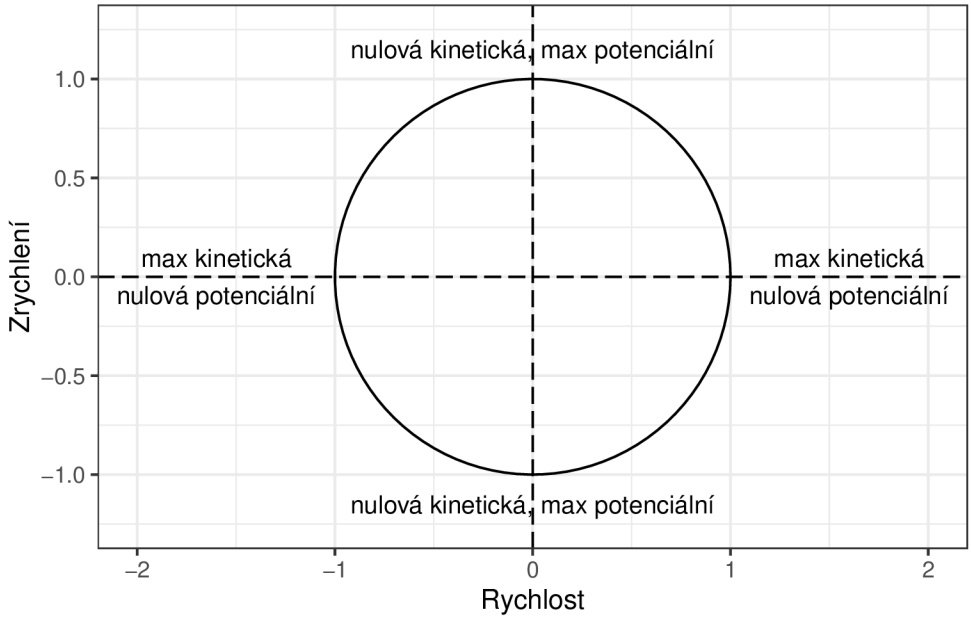
Obr. 4.1: Funkce $\sin(x)$

Pro lepší představu vykreslování phase-plane plotu je zobrazena v grafu 4.2 funkce $\sin(x)$ (černě) společně s její 1. (modře) a 2. (červeně) derivací opět na intervalu $[0, 2\pi]$.



Obr. 4.2: Funkce $\sin(x)$ a její první a druhá derivace

V následujícím grafu 4.3 jsou derivace vykreslené proti sobě, čímž dostáváme phase-plane plot. Pro lepší orientaci v grafu jsou přidané stejné popisky jako při vykreslení funkce $\sin(x)$ v grafu 4.1. V extrémních bodech phase-plane plotu na ose y, je potenciál ke změně nejvyšší a nastane změna od dosavadního trendu. V místě, kde phase-plane plot dosahuje extrémů na ose x, je potenciál ke změně minimální a nedochází tak k žádným výkyvům.



Obr. 4.3: Phase-plane plot funkce $\sin(x)$

Jestliže získaná data pochází z reálných procesů, nebude výsledek tak harmonický jako v případě funkce $\sin(x)$. Phase-plane plot nebude jedna přesná kružnice. Často vzniká z pozorování v rámci jednoho roku více cyklů různých rozměrů, které mohou mít střed posunutý od počátku. Při analýze dat pomocí phase-plane plotů nás dle [7] tedy zajímá:

- Počet a tvar vzniklých cyklů.
- Poloměr cyklů - čím větší, tím větší je objem přeměňované energie.
- Vertikální poloha středu - jestliže se nachází střed nad nulou, rychlost změny celkově vzrostla, nachází-li se pod nulou, rychlost změny klesla.
- Horizontální poloha středu - jestliže se nachází střed vpravo od nuly, míra změny je kladná, nachází-li se nalevo, míra změny je záporná.
- Změny cyklů oproti předchozím letům.

V procesech se střídají situace, kdy je vysoká kinetická energie se situacemi, kdy je vysoká potenciální energie. Jestliže je potenciální energie vysoká, je míra změny indexu nízká.

Kapitola 5

Analýza ekonomické časové řady

V této kapitole je pomocí vybudované teorie v předchozí části analyzována ekonomická časová řada. Zaměříme se konkrétně na nezaměstnanost v České republice od jejího vzniku, tedy od ledna 1993. Z dob komunismu bohužel nemáme, vzhledem k „plné zaměstnanosti“, o nezaměstnanosti relevantní údaje. Roky 1989 – 1992 v analýze nezahrneme z toho důvodu, že data obsahují i údaje o slovenském území, což by mohlo vést ke zkreslení výsledků. Vycházíme tedy z 313 hodnot měřených měsíčně od začátku roku 1993 do ledna roku 2019. Leden 2019 je uvažován proto, aby data obsahovala kompletní údaje o všech letech, nestačí tak pouze hodnota z prosince 2018. Data jsou získána z webového portálu Českého statistického úřadu v [8].

Nejprve jsou zvolená diskrétní data převedena do funkcionální podoby pomocí bází. Protože se dále zabýváme i derivacemi této funkce, zvolíme B-splajnovou bázi, poté funkci vyhladíme metodou regularizace a vyhlazovací parametr λ zvolíme s využitím zobecněné krosvalidace. Nakonec data analyzujeme pomocí phase-plane plotů.

5.1 Výběr časové řady

Tato část se zabývá analýzou míry nezaměstnanosti v České republice. Dle [9] v zemi, která velkou část důchodu uspoří a investuje roste zásoba kapitálu a HDP rychleji, než v zemi, kde se investuje méně. Růst HDP je spjat s růstem životní úrovně a s tou je spojena i míra nezaměstnanosti. Lidé, kteří jsou ochotni pracovat, ale nemají práci, nepřispívají k produkci zboží a služeb a tím ani k růstu HDP. Míra nezaměstnanosti je tedy důležitý makroekonomický ukazatel, který je významný pro růst ekonomiky a životní úrovně obyvatel. Nezaměstnanost má dopady nejen na celou ekonomiku, ale také na psychiku jedince.

Nachází-li se ekonomika v období krize, dochází ve většině případů k poklesu poptávky po pracovní síle, kvůli snížené ekonomické aktivitě. Dle [10] je historicky potvrzen vztah mezi snížením hospodářského růstu, snížením výroby a růstem míry nezaměstnanosti.

Data, ze kterých vycházíme, jsou sbírána měsíčně. *Míru nezaměstnanosti* definujeme jako:

$$U = \frac{\textit{počet nezaměstnaných}}{\textit{počet ekonomicky aktivních obyvatel}},$$

kde ekonomicky aktivní obyvatelstvo tvoří podle [11] všechny osoby, které uvedly na Sčítacím listu osob, že patří mezi zaměstnané osoby, zaměstnavatele, samostatně činné, pracující důchodce, pracující studenty a učně, ženy na mateřské dovolené, osoby v základní, náhradní nebo civilní vojenské službě, ve vazbě a výkonu trestu nebo osoby nezaměstnané.

Pro snazší interpretaci výsledků pozorování je uvažována míra zaměstnanosti, kterou pro naše účely definujeme jako:

$$Z = 1 - U,$$

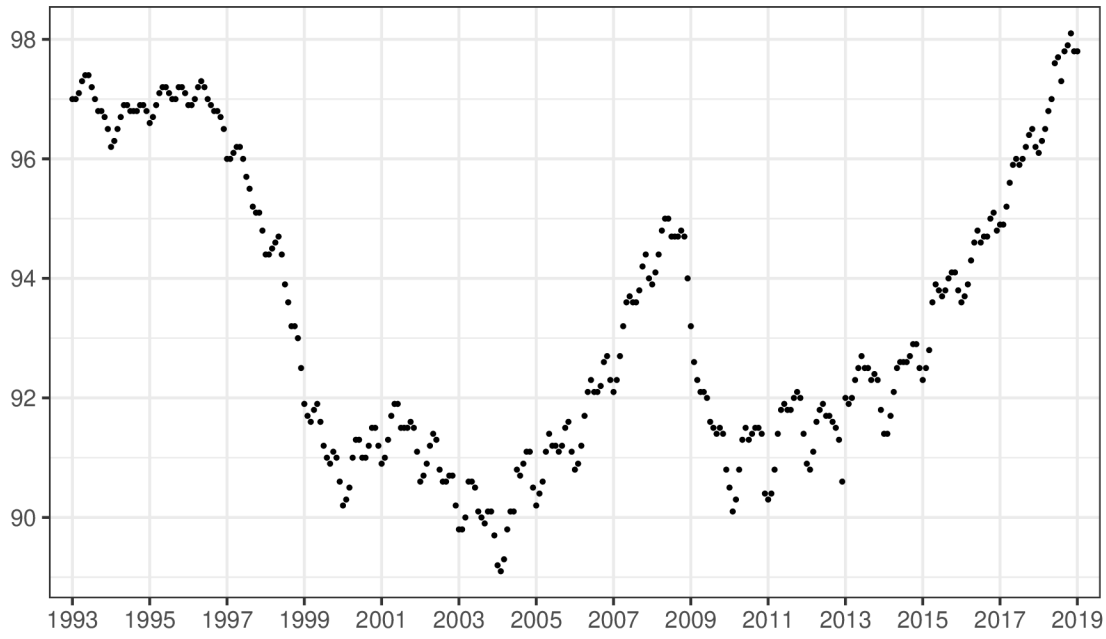
tedy

$$Z = \frac{\textit{počet zaměstnaných}}{\textit{počet ekonomicky aktivních obyvatel}}.$$

Je třeba zmínit, že takto definovaná míra zaměstnanosti se neshoduje s klasickou definicí, která vychází ze vztahu:

$$Z = \frac{\textit{počet ekonomicky aktivních obyvatel}}{\textit{počet všech obyvatel ve věku 15-64 let}}.$$

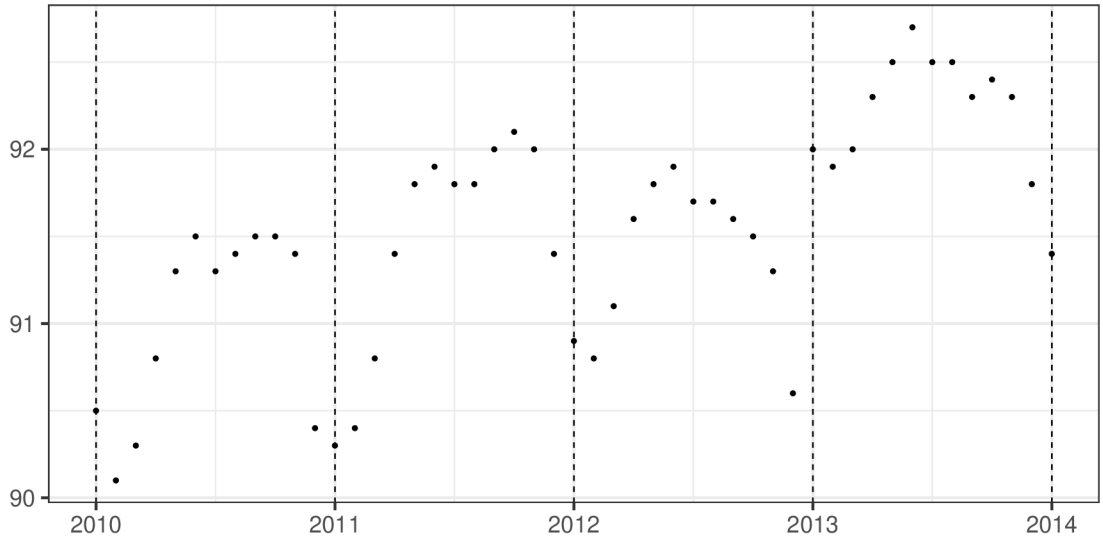
První vztah vyjadřuje, jaké procento z ekonomicky aktivních obyvatel tvoří zaměstnaní lidé, zatímco klasická definice vyjadřuje, jaké procento všech obyvatel od 15 do 64 let je ekonomicky aktivní. Tato čísla budou zřejmě rozdílná. Míru zaměstnanosti uvažujeme z toho důvodu, že se pohybuje spolu s hospodářským cyklem – při hospodářském růstu zpravidla roste i míra zaměstnanosti a naopak při recesi klesá i míra zaměstnanosti. Míra nezaměstnanosti se pohybuje naopak. Pro představu je vykreslena míra zaměstnanosti do grafu 5.1.



Obr. 5.1: Míra zaměstnanosti od roku 1993 do ledna 2019

Z grafu 5.1 lze vyčíst, že míra zaměstnanosti nikdy nedosáhne 100% a tedy nezaměstnanost nikdy není nulová, pohybuje se kolem své přirozené míry. Nenulová nezaměstnanost je dle [9] nevyhnutelná (i v prosperující ekonomice se nachází lidé bez práce) z důvodu existence zákona o minimální mzdě a odborů, dále kvůli zavedení efektivnostních mezd a také kvůli změně zaměstnání například z důvodu stěhování. Nenulová nezaměstnanost zároveň vede k vyšší efektivitě na trhu práce.

Mimo změny způsobené vlivem průběhu hospodářského cyklu, můžeme každý rok pozorovat určitý sezónní vliv, který přiblížíme na následujícím grafu 5.2, kde je vykreslena míra zaměstnanosti za rok 2010 – 2013.



Obr. 5.2: Míra zaměstnanosti v letech 2010–2013

Každoročně je možné v zimních měsících pozorovat výrazný nárůst nezaměstnanosti, což je spojeno s útlumem sezónních prací. Na přelomu února a března začíná nezaměstnanost opět klesat, hlavně z důvodu nástupu sezónních prací v zemědělství, stavebnictví a službách. V červenci pozorujeme také mírný vzrůst nezaměstnanosti. V říjnu dochází opět k růstu nezaměstnanosti z důvodu ukončení sezónních prací. Mimo tyto sezónní vlivy lze pozorovat výraznější změny, které jsou spojeny s fází hospodářského cyklu.

5.1.1 Vývoj nezaměstnanosti od Sametové revoluce po současnost

Dle [12] český trh práce od Sametové revoluce prošel několika změnami, které vyplynuly z přechodu z centrálního plánování na tržní ekonomiku, tento proces se nazývá transformace. Důležitou změnou bylo dle [12] omezení role státu. Transformace měla dopad také na trh práce – bylo zde více nerovnováh, které byly v tržní ekonomice neudržitelné, zejména plná zaměstnanost a orientace na těžký průmysl na úkor sektoru služeb. Následný rozvoj málo rozvinutého sektoru služeb, který je náročný na pracovní sílu, sloužil dle [13] na počátku transformace jako zdroj poptávky po pracovní síle, která se uvolnila v ostatních odvětvích. Uměle udržovaná plná zaměstnanost měla dle [14] za následek nízkou

produktivitu práce, špatnou kvalitu a tím i nízkou konkurenceschopnost na zahraničních trzích. Pro transformující se ekonomiky byl dle [12] typický pokles HDP, ekonomické aktivity i průmyslové produkce a v důsledku otevření trhů docházelo k růstu inflace a míry nezaměstnanosti. Například v roce 1991 kleslo HDP Československa dle [12] o desetinu, průmyslová produkce o čtvrtinu a inflace rapidně vzrostla (meziročně o 56,6 %). Díky restriktivní fiskální politice nebyl nárůst tak prudký jako v ostatních postkomunistických státech, tato politika je popsána v části 5.3.1. Nezaměstnanost se ale pohybovala nad očekávání nízko až do druhé poloviny 90. let, což bylo dle [13] způsobeno lepší výchozí situací v ČR než v ostatních postkomunistických státech a to zejména: lepší kvalifikační strukturou obyvatelstva, mzdovou umírněností a bohatou průmyslovou tradicí. Vyšší vzdělání pozitivně ovlivňuje schopnost nalézt zaměstnání a přizpůsobit se změnám způsobených restrukturalizací.

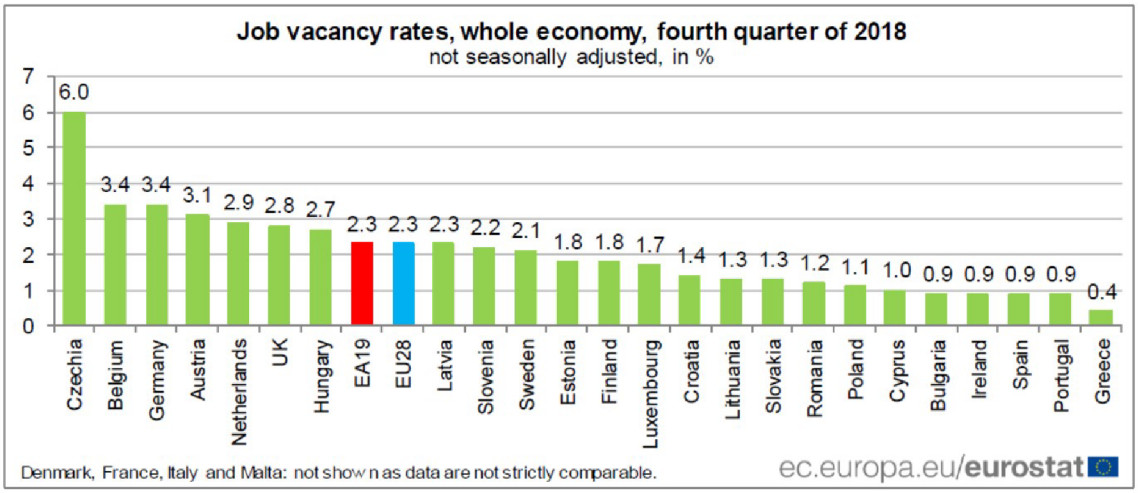
V druhé polovině 90. let je možné pozorovat výrazný růst nezaměstnanosti, který se pojí s ekonomickou krizí. Ta byla podle [15] způsobena nedostatečnou konkurenceschopností českých výrobků na nově otevřených trzích, také s další restrukturalizací a krizí v bankovním sektoru. V důsledku zpomalení hospodářského růstu a s růstem produktivity práce, začala nabídka pracovních sil převyšovat poptávku, což se projevilo plošným růstem nezaměstnanosti [13]. Přetrvávajícími problémy české ekonomiky byly přezaměstnanost a existence podniků, které nebyly dlouhodobě konkurenceschopné. Likvidace neefektivních podniků je sice pro ekonomiku prospěšná, na trhu práce ale působí problémy. Při nízkém hospodářském růstu totiž nevznikají nová pracovní místa, která by pracovníky absorbovala. Dalším problémem byl nedostatek investičních pobídek a nedostatečná podpora malého a středního podnikání [13].

I po roce 1999, kdy opět došlo k růstu HDP, se nezaměstnanost držela na vyšší úrovni, než by se při hospodářském růstu čekalo. Touto skutečností se zabývá [16], kde je analyzována také poptávka a nabídka pracovních sil. Je uvedeno, že v 90. letech nastoupily do práce silné ročníky a po roce 2000 došlo k poklesu osob nastupujících do zaměstnání. Naopak počet osob odcházejících do důchodu po roce 2000 vzrostl. Na nabídku má vliv také posun odchodu do důchodu a dobrovolná neaktivita žen. Poptávka po pracovní síle v době krize klesla a od roku 1999 stagnovala na nízké úrovni, přestože se HDP zvyšovalo. Nabídka stagnovala z důvodu zvýšení produktivity práce, tudíž společnosti neměly důvod zvyšovat nabídku pracovních míst. Zlom přišel až v roce 2004. Vývoj nabídky a poptávky měl vliv na nezaměstnanost. Jak je uvedeno v [16], na konci 90. let nabídka stále rostla, ale poptávka prudce klesla a nezaměstnanost dosáhla svého maxima. Vlivem klesající nabídky a stagnující poptávky po roce 2000 se nezaměstnanost postupně snižovala.

V roce 2004 se, díky důsledkům vstupu ČR do EU a změnám v nabídce pracovních sil a poptávce po nich, míra nezaměstnanosti snižovala. S přílivem zahraničních investic se vytvořila nová pracovní místa. Jednotný trh zajišťoval, po uplynutí ochranné lhůty, stejné pracovní podmínky občanům EU jako obyvatelům daného státu. Od roku 2004 tak míra nezaměstnanosti konečně začala klesat.Více podrobností je popsáno v části 5.3.2.

Následně v roce 2008 můžeme sledovat výrazný pokles zaměstnanosti, který je spojen s nástupem hospodářské krize. V roce 2008 dle [12] již ekonomika vykazovala znaky přehřátí a na trhu práce nebyl dostatek pracovních sil. Krachem americké investiční banky Lehman Brothers v roce 2008 začala globální hospodářská krize. Problémy se vyskytovaly dle [17] už od roku 2007, kdy narůstaly problémy se splácením rizikových hypoték. Tato toxická aktiva se dostala jako cenné papíry do mnoha bilancí bank po celém světě a nebylo možné dohledat v jakém rozsahu a kde jsou tato aktiva rozmístěna, což vedlo k nedůvěře, která ochromila mezibankovní obchody. Finanční krize se rozšířila do reálné ekonomiky USA a dále se šířila po celém světě, klesala poptávka po zboží a službách a docházelo k nárůstu míry nezaměstnanosti. Na českém trhu práce byly po většinu roku 2008 dle [17] patrné meziroční poklesy zaměstnanců ve stavebnictví, obchodu a veřejné správě. Během roku 2009 už míra nezaměstnanosti rostla téměř ve všech odvětvích. Zaměstnavatelé propouštěli dle [18] nejprve agenturní zaměstnance, brigádníky, cizince, zaměstnance v důchodovém věku, později docházelo k propouštění kmenových zaměstnanců. Průběh krize ovlivnil priority vlády, některé její záměry byly pozastaveny a nové přijaty. Národní ekonomická rada vlády vypracovala protikrizová opatření, která měla zejména udržet hladinu zaměstnanosti. Došlo například ke snížení pojistného na sociální zabezpečení a snížení příspěvku na státní politiku zaměstnanosti, což mělo snížit náklady zaměstnavatelům i zaměstnancům.

V posledních letech zažíváme opačný problém, a to velice nízkou míru nezaměstnanosti. Zaměstnavatelé těžko shání zaměstnance a jsou nuceni zvyšovat mzdy. Deficit na straně nabídky na trhu práce již nepokryjí ani zaměstnanci z ciziny. V grafu 5.3 je zobrazena míra volných pracovních míst v členských zemích EU za poslední čtvrtletí roku 2018. Tato míra vyjadřuje poměr volných pracovních míst ku celkovému počtu pracovních míst na trhu práce.



Obr. 5.3: Míra neobsazených pracovních míst za poslední čtvrtletí roku 2018 (Zdroj: [19])

Je zřejmé, že míra neobsazenosti pracovních míst je v ČR nejvyšší ze všech členských zemí EU. Dle [19] míra volných pracovních míst v oblasti služeb dosahuje dokonce 8,5 %. Na jedno volné pracovní místo připadá aktuálně zhruba 0,7 uchazeče, nabídka pracovních míst

tedy převyšuje poptávku po nich. Zaměstnavatelé mají dle [20] stále zájem o dělníky, řidiče či skladníky. V evidenci úřadu práce jsou především uchazeči o zaměstnání se základním nebo nedokončeným vzděláním, s výučním listem či se středním vzděláním s maturitou. Uchazeči nad 50 let tvoří 37 % všech uchazečů o zaměstnání.

V EU platí dle [21] od roku 2010 strategie Evropa 2020, která nahradila Lisabonskou strategii. Popisuje hlavní hospodářskou reformní agendu Evropské unie, která je platná do roku 2020. Jejím cílem je mimo jiné dosažení udržitelného růstu, který bude podporovat sociální a územní začleňování. Členské státy tuto strategii začleňují do své politiky. Jedním z cílů, který se zabývá zaměstnaností (dle klasické definice) je úsilí o dosažení 75% zaměstnanosti žen i mužů ve věku 20 až 64 let. K dosažení cíle by se měla zvýšit zaměstnanost mladých i starších pracovníků a pracovníků s nízkou kvalifikací, společně se začleněním legálních migrantů do pracovního procesu. Česká republika stanovila roku 2010 dle této strategie národní cíle následovně:

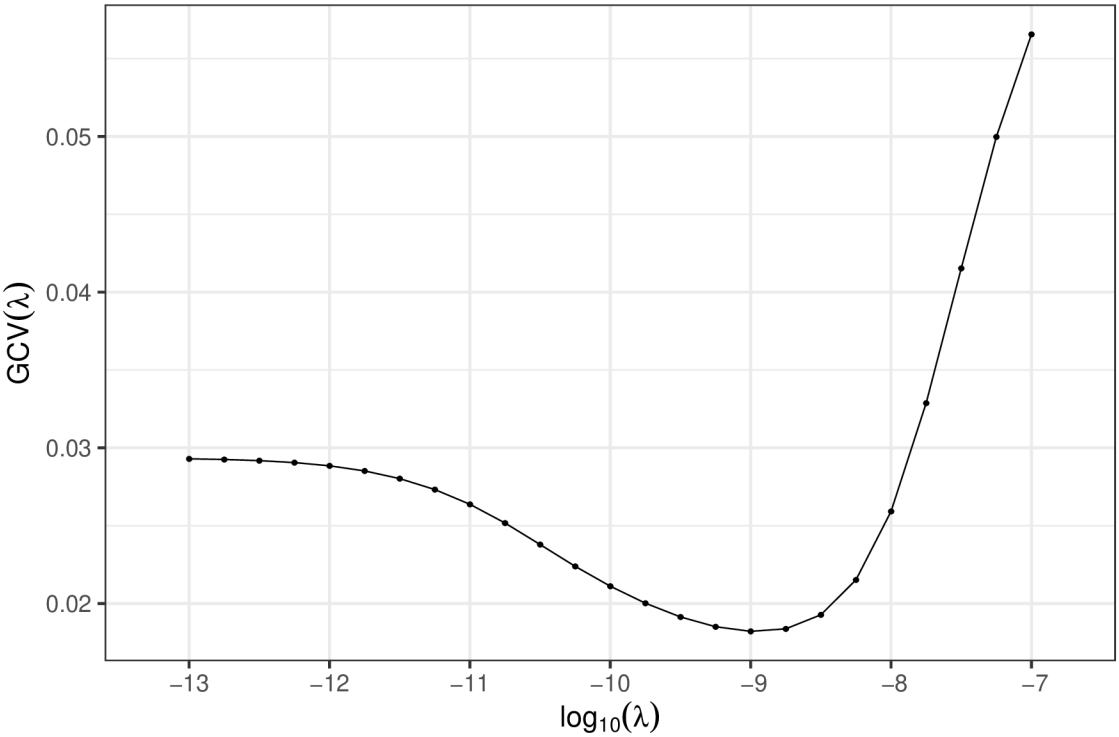
- zvýšení celkové míry zaměstnanosti na 75 %,
- zvýšení míry zaměstnanosti žen na 65 %,
- zvýšení míry zaměstnanosti starších pracovníků na 55 %,
- snížení míry nezaměstnanosti mladých osob (15 – 24 let) o třetinu oproti roku 2010,
- snížení administrativní zátěže podnikatelů oproti roku 2005 o 30 %,
- zvýšení produktivity práce oproti roku 2010 o 20 %.

5.2 Transformace dat do funkcionální podoby

Při převádění dat do funkcionální podoby je nutné nejprve provést bázové vyjádření funkce, která je následně vyhlazena. Protože jsou data poté analyzována pomocí phase-plane plotů, je nutné znát první a druhou derivaci aproximované funkce. Pro aproximaci funkce využijeme B-splajnů 8. řádu, které zajistí, že funkce bude hladká až do 6. derivace. U míry zaměstnanosti sice dochází k určitému každoročnímu trendu, který je popsán v sekci 5.1 na straně 23. Přesto tuto časovou řadu nepovažujeme za periodickou, protože reflektuje zároveň i změny fází hospodářského cyklu a dochází v ní k výrazným výkyvům v průběhu let. Z toho důvodu je zvolena B-splajnová báze místo báze Fourierovy. Uzly jsou zvoleny v každém z bodů měření, tedy dostáváme 313 ekvidistantních uzlů. Data obsahují 313 hodnot, dle vztahu 2.1 na straně 8, je počet bázových funkcí roven součtu řádu splajnu s počtem vnitřních uzlů, tj. počet bázových funkcí $= 8 + 311 = 319$.

Při vyhlazování funkce je využita metoda regularizace s penalizační funkcí $PEN_4(x)$, protože chceme mít vyhlazenou nejen odhadnutou funkci, ale i její první a druhou derivaci. Penalizační funkcí $PEN_4(x)$ tak penalizujeme křivost funkce až do její druhé derivace. K zjištění hodnoty vyhlazovacího parametru λ využijeme metodu zobecněné krosvalidace.

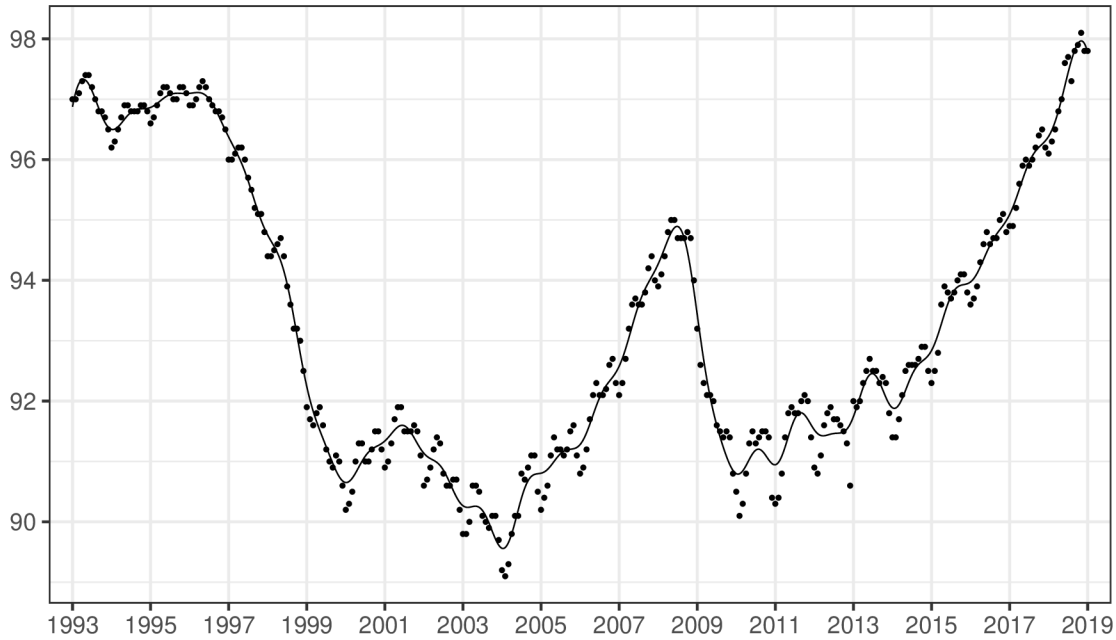
V následujícím grafu 5.4 je zobrazena funkce $GCV(\lambda)$ vyhodnocená v 25 rovnoměrně rozložených bodech na intervalu $[-13,-7]$. Funkce je vyhodnocena v bodech $log(\lambda)$, aby byl zmenšen rozsah intervalu a tím byla snížena početní náročnost metody.



Obr. 5.4: Funkce $GCV(\lambda)$

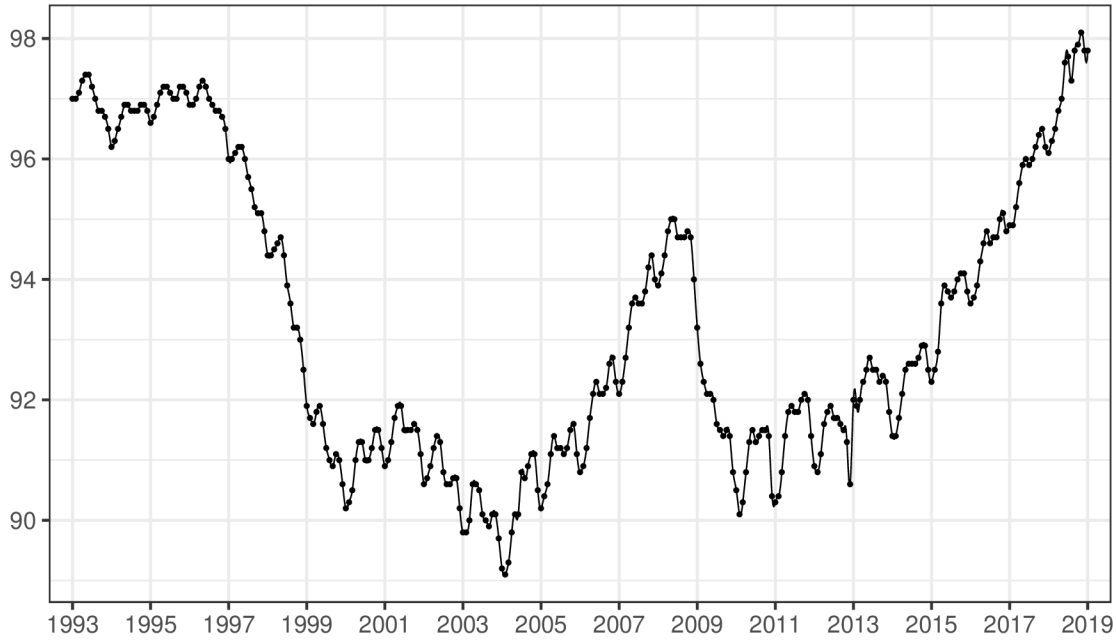
Z grafu 5.4 je zřejmé, že minimum funkce nastává přibližně v bodě $log_{10}(\lambda) = -9$, kde funkce nabývá hodnoty $0,01821596$. Hodnota $\lambda = 10^{-9}$ tedy minimalizuje funkci $GCV(\lambda)$. Podle [5] není nutné volit hodnotu vyhlazovacího parametru λ přesně ve vypočítaném minimu, jehož výpočet může být časově náročný. Jestliže funkce nabývá v okolí minima zhruba srovnatelných hodnot, je možné zvolit hodnotu λ z tohoto okolí. Často bývá vhodnější zvolit hodnotu λ v okolí minima a tím přizpůsobit přesnost aproximace povaze dat, než volit automaticky vypočítané minimum.

Při vyhlazování funkce zvolíme hodnotu vyhlazovacího parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$. Při takto zvolené hodnotě bude aproximovaná funkce méně vyhlazená, než při volbě $\lambda = 1 \cdot 10^{-9}$, což je v tomto případě žádané, protože chceme sledovat sezónní výkyvy a ne pouze hrubý trend růstu nebo poklesu zaměstnanosti. Vhodnost výběru λ můžeme porovnat v následujících grafech, kde je zobrazena vyhlazená funkce společně s diskrétními hodnotami zaměstnanosti. V prvním grafu 5.5 je vykreslena funkce po vyhlazení při volbě hodnoty $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$. Funkce je přehlazená (*angl. oversmoothed*) a zachycuje pouze výrazné změny hodnot. Tím přicházíme o sezónní výkyvy a další drobné nepravidelnosti, kterými se budeme zabývat při analýze phase-plane plotů.



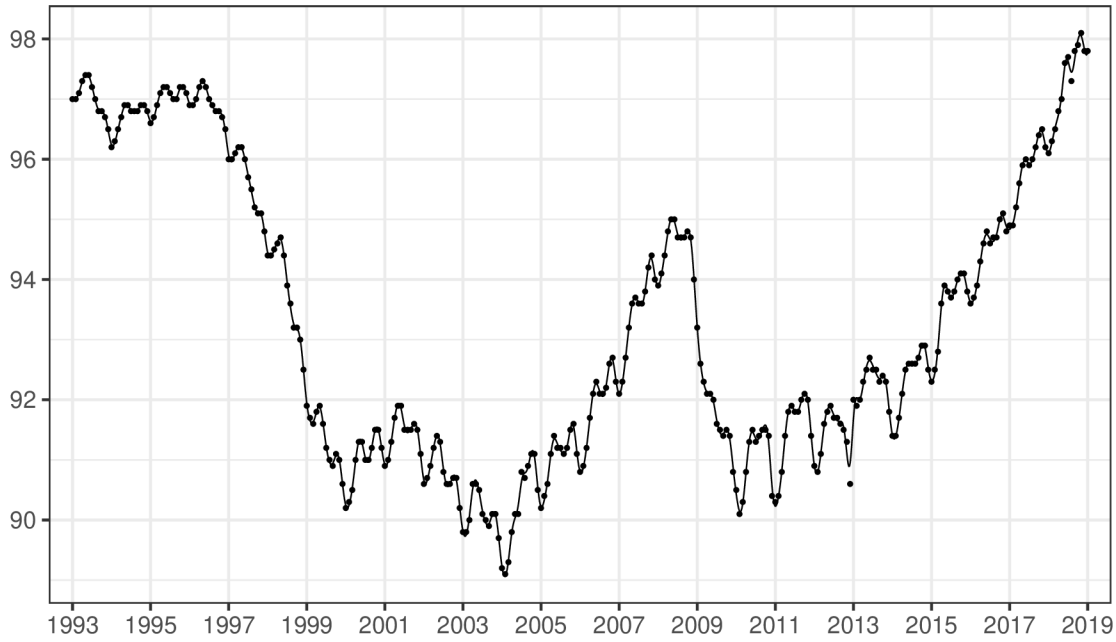
Obr. 5.5: Míra zaměstnanosti vyhlazená volbou parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$

Při volbě hodnoty λ příliš blízko 0, například $1 \cdot 10^{-15}$, hovoříme o tom, že je funkce podhlazená (*angl. undersmoothed*), což znamená, že je vyhlazená málo. Přesně kopíruje zadané diskrétní hodnoty, které mohou obsahovat chyby měření. Tato situace je znázorněna v následujícím grafu 5.6.



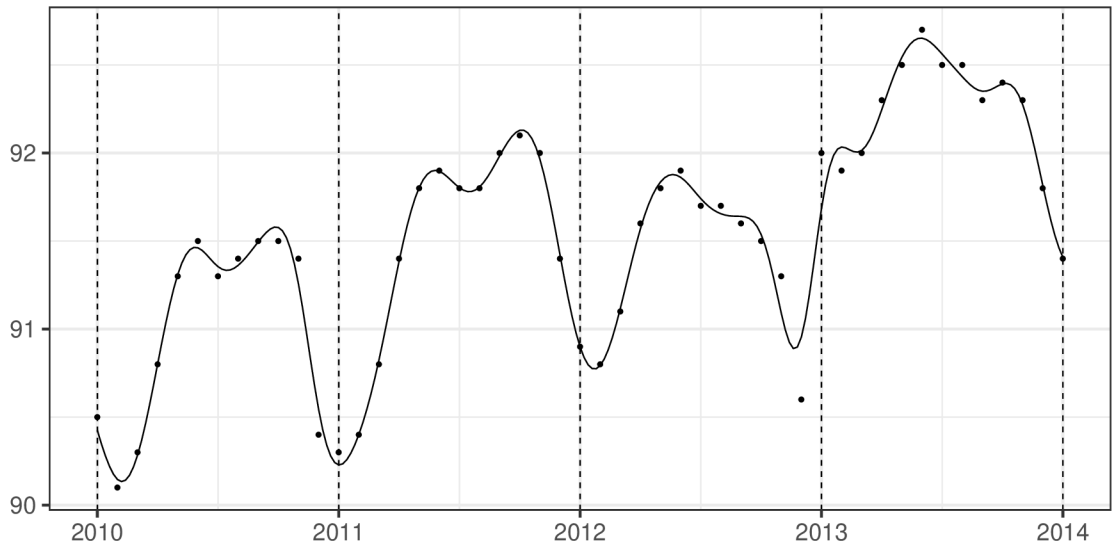
Obr. 5.6: Míra zaměstnanosti vyhlazená volbou parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-15}$

Jako kompromis mezi přehlazeností a podhlazeností funkce zvolíme $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$, jak je vidět na následujícím grafu 5.7. V tomto případě jsou stále znatelné i menší výkyvy v rámci roku, zároveň ale funkce zcela nekopíruje zadané body.



Obr. 5.7: Míra zaměstnanosti vyhlazená volbou parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$

Na následujícím grafu 5.8 je zobrazena vyhlazená funkce parametrem $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$ pro data sbíraná od roku 2010 do ledna roku 2014 společně s diskrétními daty. Při bližším pohledu je možné lépe identifikovat sezónní vlivy popsané v části 5.1 na straně 23. Zároveň je více patrné, jak získaná funkce aproximuje výchozí diskrétní hodnoty.



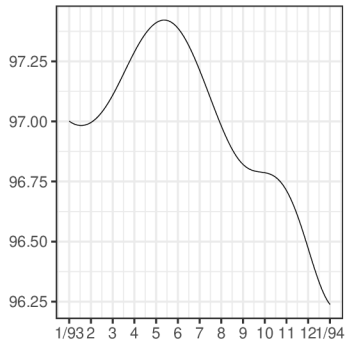
Obr. 5.8: Míra zaměstnanosti v letech 2010 – 2013 s volbou parametru $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$

5.3 Analýza funkce pomocí phase-plane plotů

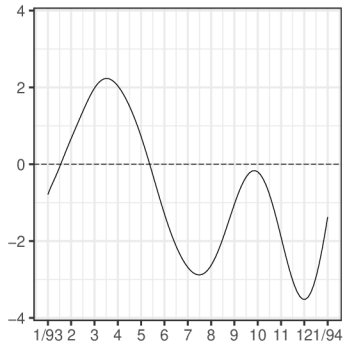
V tuto chvíli jsou data převedena do funkcionální podoby, je možné tedy přejít k jejich analýze. Postupně jsou vykreslené phase-plane ploty pro vybrané roky, které znázorňují přeměnu energie v ekonomice. V grafech jsou sledovány každoroční tendence spolu s výkyvy, které jsou spojeny s fázemi hospodářského cyklu.

V ekonomii potenciální energie odpovídá podle [2] dostupnému kapitálu, lidským zdrojům a surovinám. Kinetická energie odpovídá výrobnímu procesu. Absolutní hodnota potenciální energie (druhé derivace) je vysoká, jestliže je přebytek nebo naopak nedostatek volného kapitálu (zájemců o práci). V tuto chvíli je nulová kinetická energie a výrobní proces stagnuje. Jedná-li se o přebytek nebo nedostatek lze určit ze znaménka potenciální energie nebo druhé derivace funkce. Je-li extrémní hodnota druhé derivace záporná, dojde k poklesu míry zaměstnanosti, je-li extrémní hodnota kladná, míra zaměstnanosti vzroste. Dosahuje-li hodnota kinetické energie vysokých hodnot, výrobní proces je v plném proudu a rozvíjí se anebo naopak zažívá pokles. O rozvoji či poklesu rozhodne znaménko první derivace nikoliv znaménko kinetické energie, protože ta odpovídá druhé mocnině rychlosti, a proto je vždy kladná.

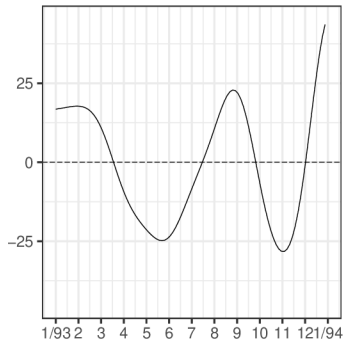
Při tvorbě phase-plane plotů je nutné znát první a druhou derivaci funkce. V následujících grafech, je zobrazena funkce pro zaměstnanost v roce 1993 v 5.9, dále pak 1. derivace v 5.10 a 2. derivace v 5.11 této funkce.



Obr. 5.9: Míra zaměstnanosti v roce 1993

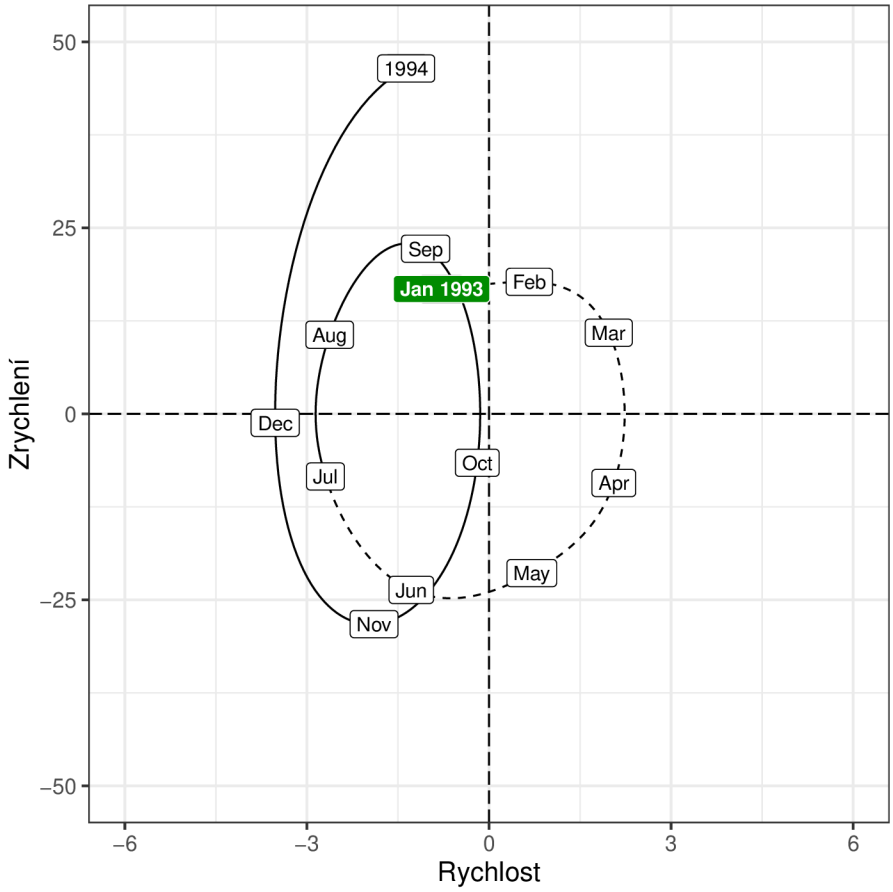


Obr. 5.10: První derivace funkce



Obr. 5.11: Druhá derivace funkce

Nyní je možné přejít k vykreslení samotného phase-plane plotu. Rok 1993 je považován ve vývoji ekonomiky za poměrně stabilní, a proto ho využijeme k analýze sezónních vlivů na nezaměstnanost v průběhu roku. Phase-plane plot čteme od začátku roku (zelená značka) ve směru hodinových ručiček. Měřítka, ve kterých jsou v průběhu celé následující části vykreslovány phase-plane ploty, jsou zmenšována i zvětšována, vždy je však zachována stejná proporcionalita.

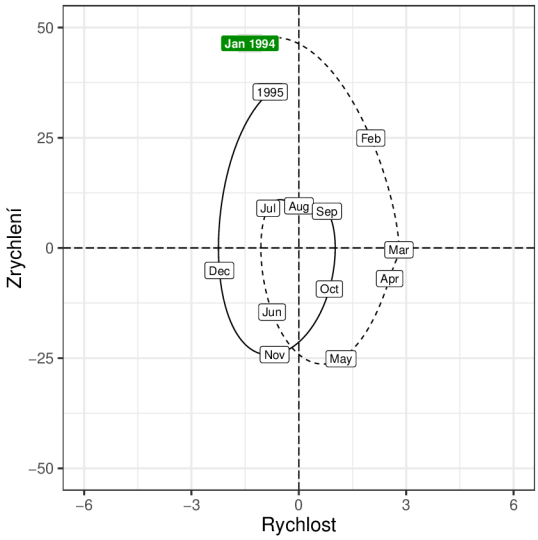


Obr. 5.12: Phase-plane plot pro rok 1993

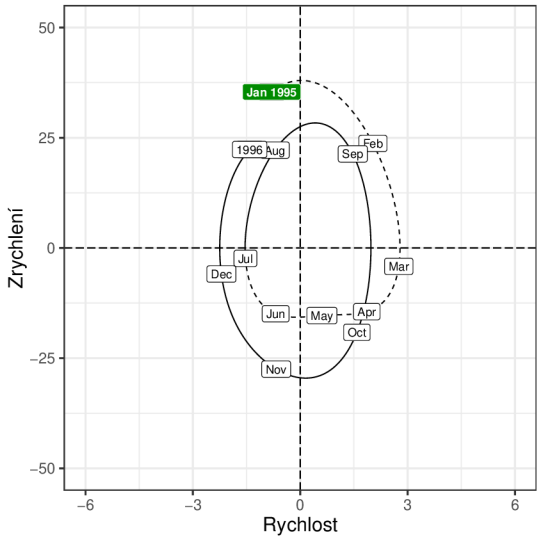
První polovina roku je značena přerušovanou čarou, druhá polovina plnou čarou, začátky měsíců jsou značeny anglickými zkratkami a začátek roku je značen zelenou barvou. V grafu 5.12 jsou viditelné 2 cykly; první se středem zhruba v počátku a druhý se středem posunutým doleva.

V lednu a únoru je zaměstnanost nízká, je k dispozici velké množství volného kapitálu (ekonomicky aktivních osob, které jsou ochotné pracovat). Potenciální energie je vysoká a díky tomu dojde v polovině února k růstu zaměstnanosti. V březnu prochází bodem, kdy je potenciální energie nulová a kinetická energie vysoká, ekonomika tedy prosperuje a díky nulové potenciální energii se nepředpokládá žádná změna nastaveného trendu. V tuto chvíli začíná klesat potenciální energie do záporných hodnot a také klesat energie kinetická. V květnu dosáhne zaměstnanost za rok 1993 svého maxima, potenciální energie nabývá naopak lokálního minima, k dispozici je tedy málo lidských zdrojů, což se projeví následným poklesem zaměstnanosti až do začátku září, kdy začíná další cyklus. V červenci se opět dostáváme do bodu nulové potenciální energie a vysoké hodnoty kinetické energie (záporné rychlosti), ekonomika zpomaluje, což je možné vysvětlit nástupem letních prázdnin a dovolených. Zaměstnanost od začátku září do začátku listopadu mírně klesá, v tuto chvíli je opět extrémní potenciální energie (záporná, nejnižší za tento rok) a zaměstnanost začíná prudce klesat a pokles zaměstnanosti se nezastaví až do konce roku.

I v dalších letech je možné pozorovat podobný trend jako ve výše popsaném roce 1993. V každém z grafů 5.13 a 5.14 jsou 2 cykly. V roce 1994 má „vnitřní“ cyklus menší rozsah než v roce 1993 nebo 1995, rozsahy jsou ale stále srovnatelné, objem přeměněné energie je tedy podobný jako roku 1993.



Obr. 5.13: Phase-plane plot pro rok 1994



Obr. 5.14: Phase-plane plot pro rok 1995

Všechny phase-plane ploty začínají i končí v druhém kvadrantu, což značí velké množství volného lidského kapitálu, proto je potenciál k růstu je vysoký. Hodnota kinetické energie je vysoká okolo března, dále na začátku letních prázdnin, na začátku školního roku a naposledy na konci roku. Jestliže se zaměříme na znaménka, kterých v těchto bodech nabývá první derivace, ekonomika nejvíce prosperuje v období kolem března, kdy se nezaměstnanost po zimě snižuje a také v průběhu září, po skončení letních prázdnin. Naopak nejhůře je na tom ekonomika z hlediska zaměstnanosti na začátku zimy, kdy dochází k úbytku sezónních prací a nezaměstnanost roste a také na začátku prázdnin. Jestliže na graf nahlížíme z hlediska potenciální energie, ta nabývá vysokých kladných hodnot na začátku roku a ke konci letních prázdnin. V tomto období je vysoký potenciál ke „kladné“ změně, neboť je k dispozici vysoké množství volného lidského kapitálu. Vysokých záporných hodnot je dosaženo opět dvakrát a to v průběhu května a října, v těchto místech je vysoký potenciál k „záporné“ změně, protože je k dispozici málo volného lidského kapitálu, což se projeví následným prudkým poklesem zaměstnanosti.

Pro snazší orientaci je uvedena následující tabulka. Připomeňme, že maximální hodnoty kinetické energie značí nulovou potenciální energii a naopak.

	Maximální kinetická energie	**Maximální potenciální energie**
+	březen polovina září	leden přelom srpen – září
−	červenec začátek prosince	květen listopad

Rozdíl lze pozorovat v druhém cyklu, který začíná na konci letních prázdnin. V roce 1993 je jeho střed posunutý doleva, zatímco v letech 1994 a 1995 je střed cyklu zhruba v počátku. V letech 1994 a 1995 se liší velikost druhého cyklu. V grafu 5.13 je cyklus a tím i objem přeměněné energie menší, v grafu 5.14 se velikost druhého cyklu přibližuje prvnímu cyklu, který začíná na začátku roku.

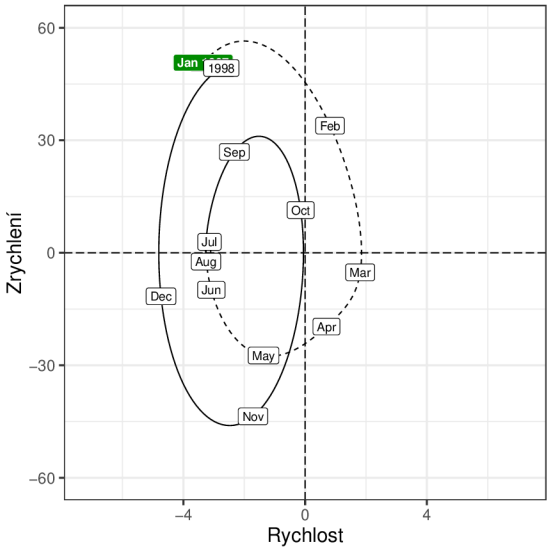
Situace v roce 1996 je obdobná jako v předchozích letech. V následujících částech se věnujeme událostem, které byly pro ekonomiku šokové, tedy zejména hospodářské krize a vstup ČR do EU.

5.3.1 Politika ČNB a měnová krize v roce 1997

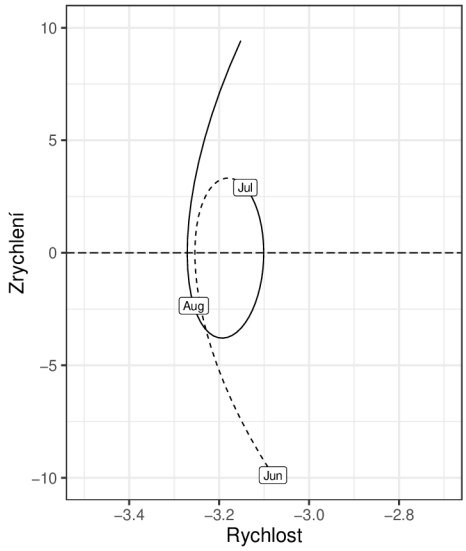
V této části je popsán vývoj míry nezaměstnanosti na našem území, analogicky tyto skutečnosti platí i pro míru zaměstnanosti. Dle [22] se v České republice od roku 1993 zvyšoval objem peněžní zásoby, což vedlo k hospodářskému růstu v následujících třech letech. V průběhu růstu, v roce 1995, ČNB povolila volný obchod s českou měnou na mezinárodních trzích, přestože zanechala fixní měnový kurz s fluktuačním pásmem pouze 5 %. To vedlo k velkému přílivu krátkodobého kapitálu do České republiky, protože úrokové sazby byly na našem území vyšší než v zahraničí a riziko bylo minimální. Peněžní zásoba tedy kvůli zahraničnímu kapitálu stále rostla, což zvýšilo agregátní poptávku a tím i ceny. V reakci na tyto změny na začátku roku 1996 ČNB rozšířila fluktuační pásmo na 15 % s cílem snížit nadměrný růst peněžní zásoby. V červenci zvýšila povinné minimální rezervy a úrokové sazby, což skutečně vedlo ke zpomalení růstu peněžní zásoby. Na začátku roku 1997 přišla do ČR recese, vláda zareagovala snížením vládních výdajů a očekávala, že toto opatření podpoří ČNB uvolněním měnové politiky. Tato kombinace by snížila příliv zahraničního kapitálu a oslabila českou korunu, čímž by se snížil schodek obchodní bilance. Schodek obchodní bilance byl vysoký kvůli vysokému dovozu který byl způsoben nárůstem cen. ČNB ovšem zachovala svou strategii, což podle [22] prohloubilo jak recesi, tak i schodek obchodní bilance. Propad české ekonomiky spolu s měnovou krizí v jihovýchodní Asii vedl k odlivu zahraničního kapitálu z České republiky. ČNB se nedařilo udržet korunu ve fluktuačním pásmu a v květnu došlo ke spekulativnímu útoku na korunu, na což zareagovala ČNB uvolněním měnového kurzu a zavedla floating. Uvolněním kurzu musela ČNB zvolit novou strategii měnové politiky, tou se stalo inflační cílování. Pro rok 1998 byl stanoven inflační cíl 5,5 – 6 %, který nebyl naplněn, inflace klesla na pouhá 1,7 %. Strategie inflačního cílování se ukázala jako nevhodná, jestliže ekonomika prochází transformací a je-li jejím cílem ne udržení, ale změna inflace, jak tomu bylo v tomto případě. Nízká poptávka po českém zboží a vysoké úrokové sazby způsobily neschopnost podniků splácet dříve bonitní úvěry a hrozily bankroty společností. Tato měnová politika přispěla k velkému propadu české ekonomiky v roce 1998. Autoři v [22] uvádí, že tyto kroky nebyly jediným zdrojem hospodářské krize v letech 1997 – 1999, ke které by došlo kvůli předchozímu přehřátí ekonomiky. Měnová politika ČNB však tuto recesi jistě prohloubila.

V následujících grafech 5.15 a 5.16 je zobrazen phase-plane plot pro rok 1997. Na začátku roku přišla do ČR recese a zaměstnanost začala klesat, v květnu došlo ke spekulativnímu

útoku na českou korunu. Na první pohled jsou ve phase-plane plotu opět dva cykly, kde druhý cyklus je, stejně jako v roce 1993, posunutý doleva, což je způsobeno poklesem míry zaměstnanosti. Při detailním pohledu (viz druhý graf 5.16) je vidět třetí cyklus v období letních prázdnin. Objem přeměněné energie oproti předchozím rokům mírně vzrostl.

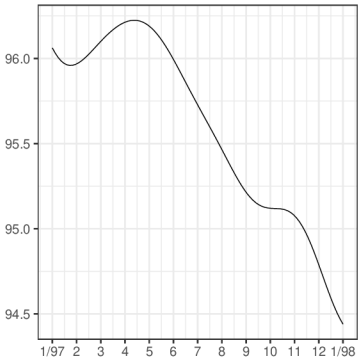


Obr. 5.15: Phase-plane plot pro rok 1997

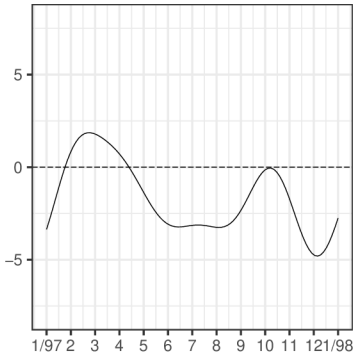


Obr. 5.16: Detail phase-plane plotu

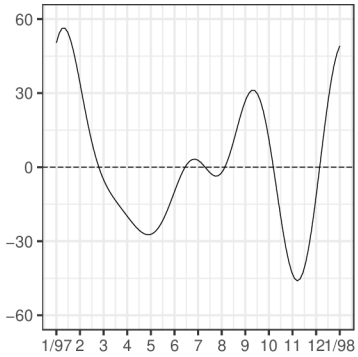
Nejmenší cyklus v období letních prázdnin vznikl díky rozkolísání hodnot první a druhé derivace. Od června do července hodnota první derivace mírně rostla a do srpna klesla na původní hodnotu. Od konce června do konce srpna hodnota druhé derivace klesala, poté opět rostla. Tyto změny byly způsobeny tím, že o prázdninách zaměstnanost klesala téměř stejným tempem, což se projevilo „konstantností“ první derivace a fluktuací druhé derivace. V následujících grafech je zobrazena funkce v grafu 5.17 a její první derivace v 5.18 a druhá derivace v 5.19 pro toto období.



Obr. 5.17: Zaměstnanost v roce 1997

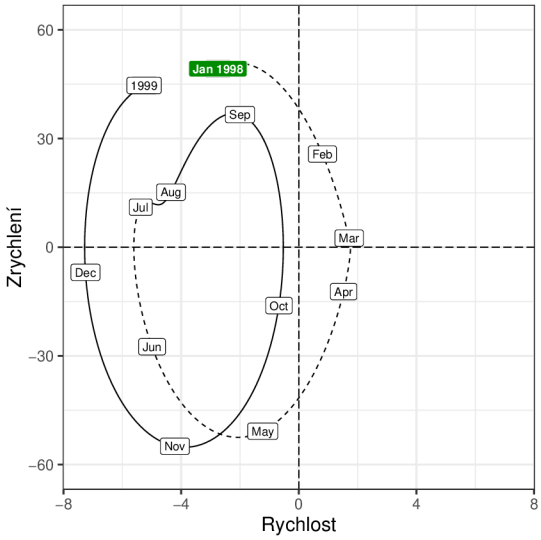


Obr. 5.18: První derivace funkce r. 1997

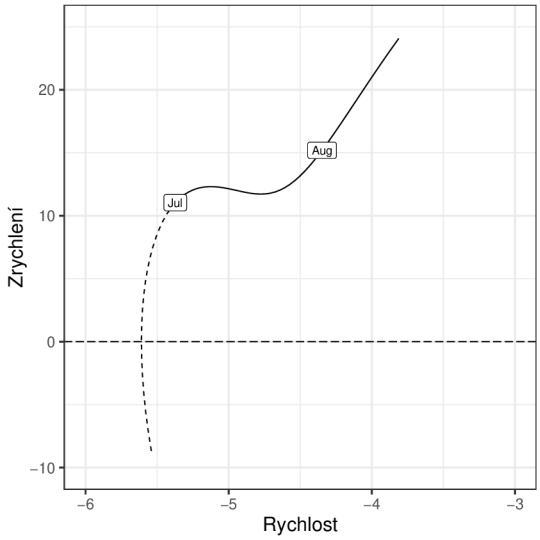


Obr. 5.19: Druhá derivace funkce r. 1997

V následujícím grafu 5.20 je zobrazena situace pro rok 1998. V roce 1998 se nachází česká ekonomika v recesi a od května do ledna 1999 klesne zaměstnanost o více než 4 procentní body. Ve phase-plane plotu jsou výraznější odlišnosti od předchozích let. Oba cykly jsou posunuté doleva, což značí zápornou míru změny zaměstnanosti. Objem energie oproti předchozímu roku mírně klesl, ale zvýšil se oproti ostatním předchozím letům.

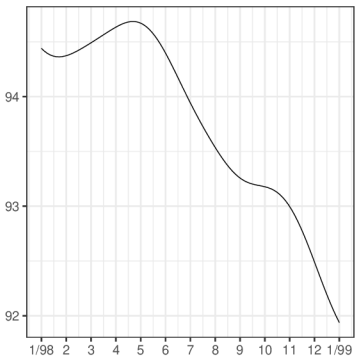


Obr. 5.20: Phase-plane plot pro rok 1998

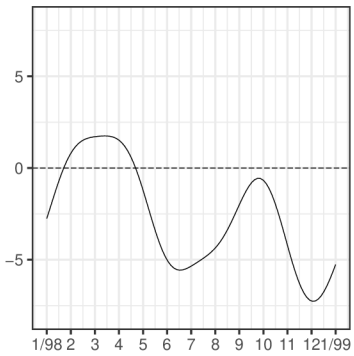


Obr. 5.21: Detail phase-plane plotu

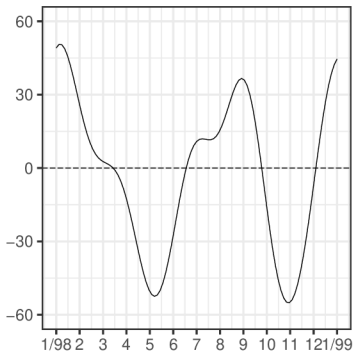
Stejně jako v předchozím roce dochází v období letních prázdnin ke změně (viz. graf 5.21), v tomto případě ale nevzniká nový cyklus. Na rozdíl od předchozího roku totiž zaměstnanost neklesá v období prázdnin stejným tempem, ale v srpnu se její pokles zpomalí, což způsobí rozdíl v první i druhé derivaci. Tato situace je zobrazena v následujících grafech 5.22, 5.23 a 5.24.



Obr. 5.22: Míra zaměstnanosti v roce 1998



Obr. 5.23: První derivace funkce r. 1998



Obr. 5.24: Druhá derivace funkce r. 1998

5.3.2 Vstup ČR do EU v roce 2004

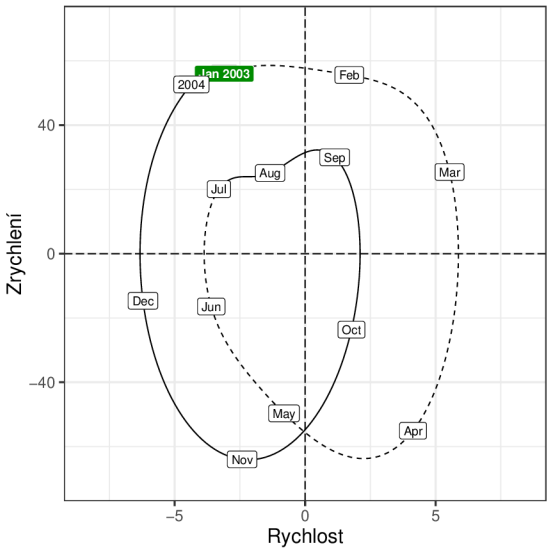
Poskomunistické státy měly dle [12] díky možnosti budoucího vstupu do EU motivaci pokračovat v reformách, vstup do EU měl dále zvýšit hospodářskou úroveň těchto států. Přihlášku do EU podala ČR již v roce 1996 a o rok později zveřejnila Evropská komise posudky o připravenosti kandidátských zemí, ČR byla jedna z lépe připravených a také ekonomicky vyspělejších zemí z vybraných kandidátů. Česká republika tak začala implementovat zásady Evropské politiky zaměstnanosti [12]. V roce 2000 se konal v Lisabonu summit, který určil cíle EU na dalších 10 let, a to mimo jiné vybudovat konkurenceschopnou a dynamickou ekonomiku založenou na vědomostech, zvýšit zaměstnanost (dle klasické definice) a počet pracovních míst. I tyto zásady byly postupně implementovány.

Česká republika se stala vstupem do Evropské unie 1. května 2004 členem společného prostoru 25 evropských zemí. To dle [23] znamená odstranění překážek při pohybu zboží, osob, kapitálu a služeb, tedy využití jednotného vnitřního trhu. Volný pohyb osob zaručuje občanům EU stejné pracovní podmínky jako pro domácí pracovníky na celém území EU. Tento pohyb byl dle [12] zpočátku omezen přechodnými obdobími, která měla chránit původní členské státy. Této možnosti využilo 12 členských států včetně Rakouska a Německa. Dalším důležitým faktorem vývoje se staly přímé zahraniční investice, které dokázaly do podkapitalizovaných podniků přivést kapitál. Jako jejich negativum je často uváděno vytlačování domácího kapitálu. Od tohoto období nelze dle [24] reagovat pouze na vývoj na domácím trhu práce, ale také na vývoj v členských státech.

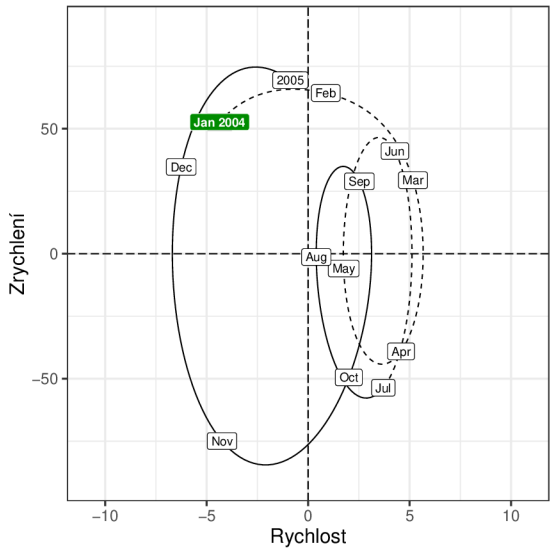
Od vstupu ČR do EU začal mít výraznější vliv na nabídku pracovní síly počet zaměstnaných cizinců na našem území. Zatímco před vstupem do EU pracovalo v ČR dle [16] kolem 100 tisíc cizinců, po roce 2004 toto číslo začalo rapidně růst. V roce 2005 na našem území evidoval Úřad práce ČR už přes 150 tisíc zaměstnaných cizinců a v roce 2007 dokonce kolem 245 tisíc pracujících cizinců. V grafech 5.25 a 5.26 jsou zobrazeny phase-plane ploty pro rok 2003 a 2004.

V grafu 5.25 je zobrazen phase-plane plot pro rok 2003. Graf se podobá předchozím letům, tedy začíná i končí v druhém kvadrantu, obsahuje dva cykly se středem zhruba v počátku, zároveň i minima a maxima kinetické a potenciální energie nastávají zhruba ve stejný čas. Mírně se snížil objem přeměněné energie a v době letních prázdnin je možné sledovat situaci, která byla viditelná již v roce 1998 v grafech 5.20 a 5.21. Rok 2003 tedy můžeme považovat, co se týče vývoje nezaměstnanosti za standardní.

V roce 2004, který je vykreslen v grafu 5.26, jsou viditelné výrazné změny od předchozích let. Phase-plane plot opět začíná a končí v druhém kvadrantu, objem přeměněné energie se oproti předchozímu roku zvýšil. Phase-plane plot se skládá ze dvou menších cyklů posunutých doprava, poslední, větší cyklus má střed opět zhruba v počátku. Posunutí menších cyklů doprava značí růst zaměstnanosti, který začal v únoru a různým tempem pokračoval až do října, jak je vidět v grafu 5.27.

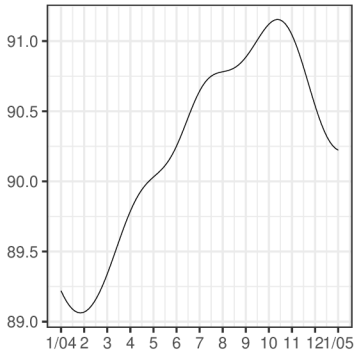


Obr. 5.25: Phase-plane plot pro rok 2003

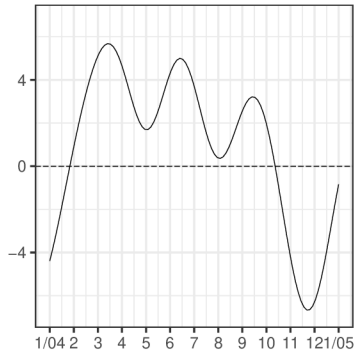


Obr. 5.26: Phase-plane plot pro rok 2004

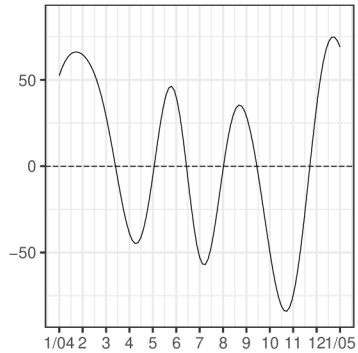
V grafech 5.28 a 5.29 jsou zobrazeny postupně první a druhá derivace funkce. Z grafu 5.27 je zřejmé, že v polovině dubna a července se růst zaměstnanosti zpomalil, což způsobilo výkyv v derivacích. Tím vznikly dva menší cykly, které jsou posunuty doprava díky tomu, že míra změny – první derivace – je kladná. V říjnu nastává, stejně jako každý rok, pokles zaměstnanosti, který pokračuje až do dalšího roku, takto vznikl poslední cyklus.



Obr. 5.27: Míra zaměstnanosti v roce 2004



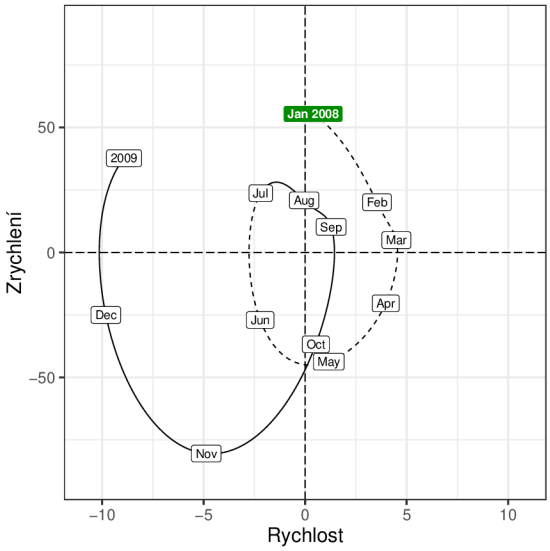
Obr. 5.28: První derivace funkce r. 2004



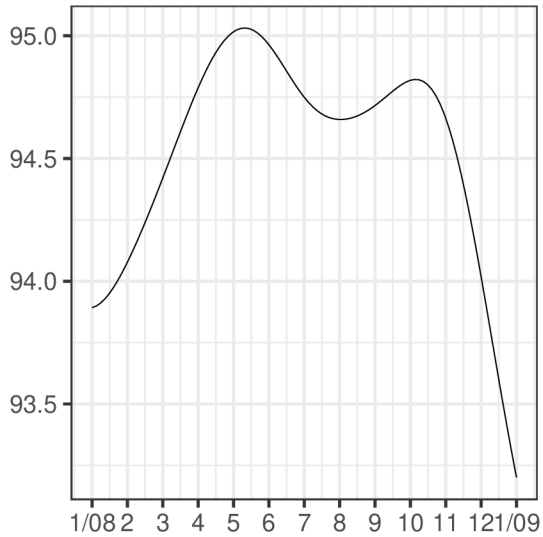
Obr. 5.29: Druhá derivace funkce r. 2004

5.3.3 Hospodářská krize

Tato část se zabývá počátkem hospodářské krize, tedy roky 2008 a 2009, protože z hlediska míry zaměstnanosti byl v těchto letech zaznamenán největší propad. Phase-plane ploty pro oba roky jsou vykresleny v grafu 5.30 a 5.32.



Obr. 5.30: Phase-plane plot pro rok 2008

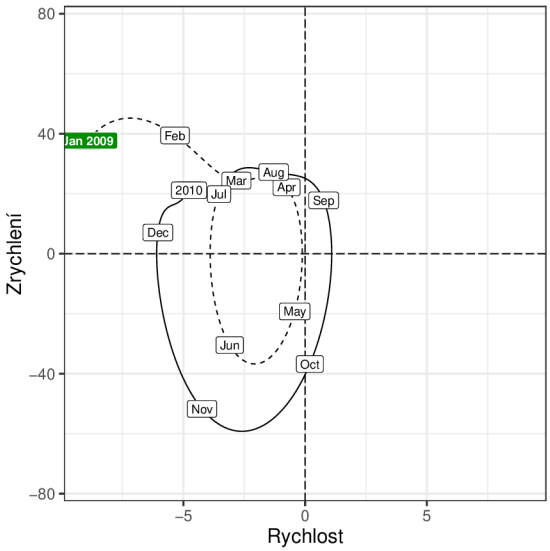


Obr. 5.31: Míra zaměstnanosti v roce 2008

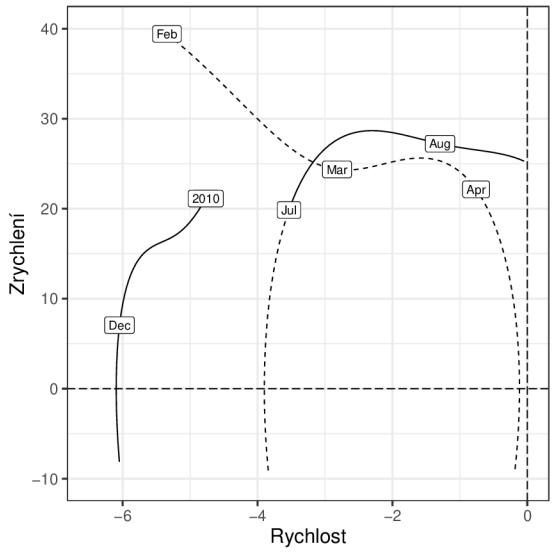
Rok 2008 se již od pohledu liší od všech předchozích let. Phase-plane plot poprvé začíná na hranici prvního a druhého kvadrantu, končí v druhém kvadrantu. Objem přeměněné energie se od předchozích let výrazně neliší. V grafu jsou viditelné dva cykly, první se středem v počátku, v tomto případě ještě nenastává výrazná změna od dosavadního trendu, v říjnu ale nastal velký propad míry zaměstnanosti, což se projevilo druhým cyklem, který je posunutý doleva a dolů. Od října do konce roku míra zaměstnanosti strmě klesala, celkem zhruba o 1,5 procentního bodu.

V grafu 5.32 je zobrazen phase-plane plot pro rok 2009, který je doplněn detailem phase-plane plotu v grafu 5.33.

Phase-plane plot v 5.32 není příliš podobný předchozím letům. Zaměstnanost téměř celý rok klesala a ročně klesla o více než 2,5 procentního bodu. Objem přeměněné energie oproti minulému roku klesl. Phase-plane plot se opět skládá ze dvou cyklů, které jsou posunuty doleva kvůli klesající zaměstnanosti. Oproti předchozím letům klesala zaměstnanost až do dubna, kdy se pokles zpomalil. Z toho důvodu vznikla na začátku roku část, která se jeví jako počátek cyklu. Cyklus se ale přerušil, protože po zpomalení poklesu v dubnu přišel další pokles trvající až do letních prázdnin, tímto způsobem vznikl vnitřní cyklus. Jediná část phase-plane plotu, která se nachází v kladné části osy x je od poloviny srpna do začátku října. To znamená, že pouze v tomto období byla první derivace kladná, tedy jen v těchto měsících zaměstnanost mírně vzrostla. Poté následoval další strmý pokles, kterým se vytvořil vnější cyklus.

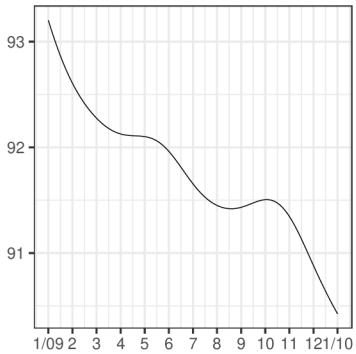


Obr. 5.32: Phase-plane plot pro rok 2009

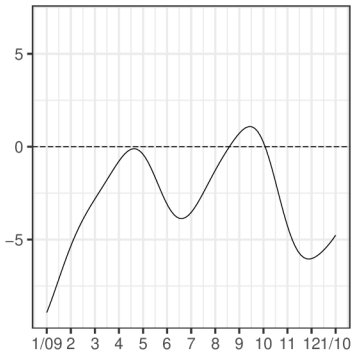


Obr. 5.33: Detail phase-plane plotu

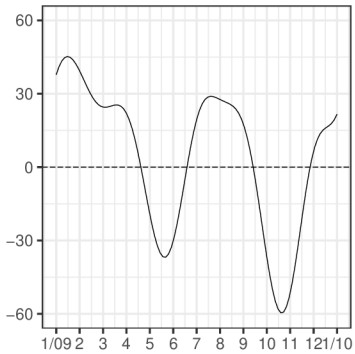
Pro snažší orientaci v chování phase-plane plotu jsou uvedeny grafy 5.34, 5.35 a 5.36.



Obr. 5.34: Míra zaměstnanosti v roce 2009



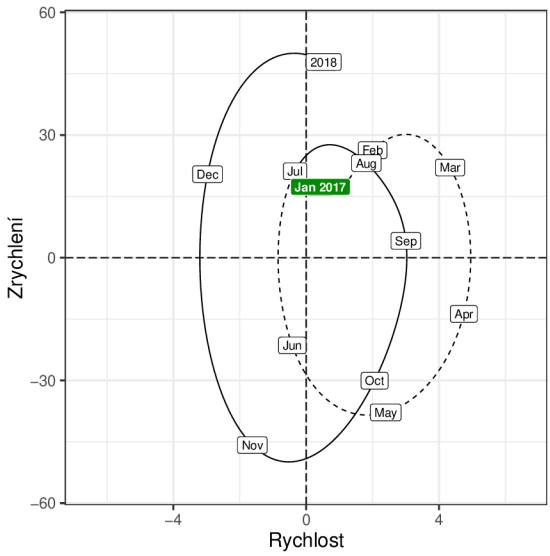
Obr. 5.35: První derivace funkce r. 2009



Obr. 5.36: Druhá derivace funkce r. 2009

5.3.4 Současnost

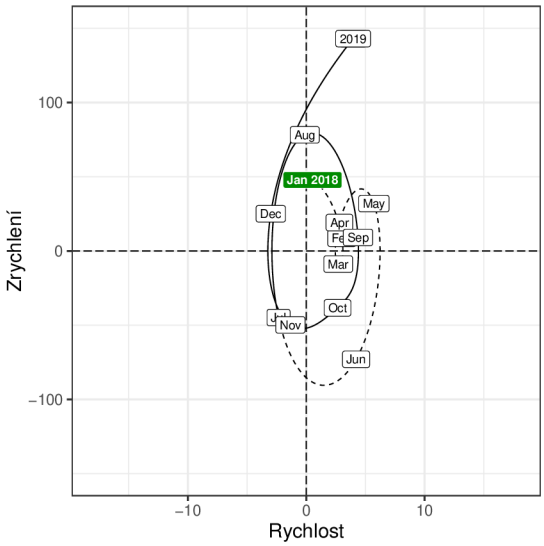
V současné době zažíváme období hospodářského růstu a velmi nízké míry nezaměstnanosti, firmy těžko shánějí zaměstnance. Často se mluví o přehřívání ekonomiky, jak tomu bylo například před hospodářskou krizí v roce 2008. Tato část je věnovaná rokům 2017 a 2018, což jsou poslední dva roky, za které máme o míře zaměstnanosti úplné informace. V grafu 5.37 je zobrazen phase-plane plot pro rok 2017.



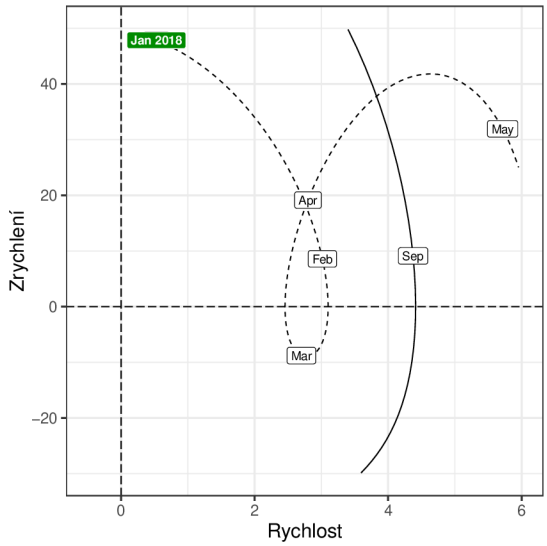
Obr. 5.37: Phase-plane plot pro rok 2017

Odlišností phase-plane plotu oproti předchozím letům je začátek i konec v 1. kvadrantu, stále ale při hranici s druhým kvadrantem. Graf 5.37 opět obsahuje dva cykly, které jsou díky neustálému růstu zaměstnanosti posunuty doprava. Objem přeměněné energie se opět zvýšil. V roce 2017 tedy nepozorujeme žádné výraznější změny od předchozích klidných let.

V grafu 5.38 je zobrazen phase-plane plot pro rok 2018 opět s detailem méně přehledných částí v grafu 5.39.



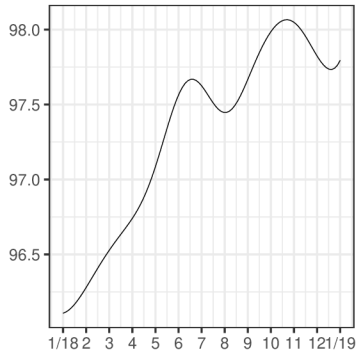
Obr. 5.38: Phase-plane plot pro rok 2018



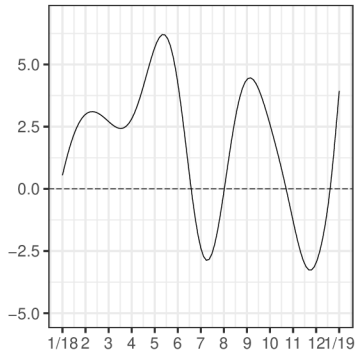
Obr. 5.39: Detail phase-plane plotu

Phase-plane plot 5.38, stejně jako předchozí rok, začíná i končí v 1. kvadrantu. Při bližším pohledu v grafu 5.39 je patrný třetí cyklus, který vznikl od začátku roku do začátku dubna. Oba větší cykly mají střed zhruba v počátku, nejmenší cyklus je posunutý doprava, opět díky růstu míry nezaměstnanosti. Od začátku roku do poloviny června míra zaměstnanosti rostla, s letními prázdninami přišel mírný propad a od srpna zaměstnanost znovu rostla až do konce října – období útlumu sezónních prací v zemědělství a stavebnictví. Poté klesala téměř do konce roku, v polovině prosince začala opět růst. Nejmenší cyklus je způsoben odlišným tempem růstu míry zaměstnanosti v první polovině roku. Od dubna se s nástupem sezónních prací tempo růstu oproti dosavadnímu trendu zvýšilo, což vytvořilo nejmenší cyklus. Objem přeměněné energie narostl v rámci celého roku, značný rozdíl je zřejmý hlavně na konci roku 2018, kdy hodnota druhé derivace přesáhla 140.

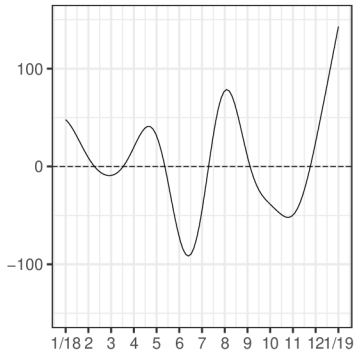
Pro lepší představu je phase-plane plot doplněn grafem 5.40, kde je zobrazen vývoj míry zaměstnanosti v roce 2018 a dále grafy 1. a 2. derivace aproximované funkce (grafy 5.41 a 5.42).



Obr. 5.40: Míra zaměstnanosti v roce 2018

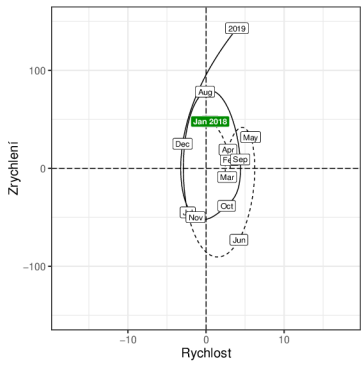


Obr. 5.41: První derivace funkce r. 2018

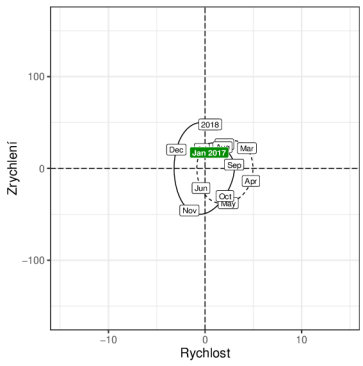


Obr. 5.42: Druhá derivace funkce r. 2018

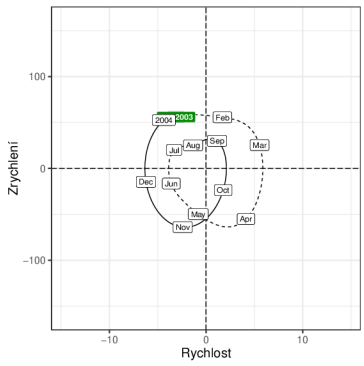
V následujících grafech 5.43, 5.44 a 5.45 jsou zobrazeny phase-plane ploty pro rok 2018, 2017 a 2003. Všechny grafy mají zvolený stejný rozsah os x a y, aby bylo možné porovnat objem přeměněné energie. Grafy 5.44 a 5.45 jsou podobné, v roce 2003 byl objem přeměněné energie mírně vyšší, než v roce 2017. Porovnáme-li ale tyto grafy s rokem 2018 je zřejmé, že jsou zde výrazné odlišnosti. Hodnota potenciální energie byla na přelomu roku 2018 a 2019 nejvyšší z pozorovaných hodnot. Vysoká hodnota druhé derivace je způsobena růstem zaměstnanosti ke konci roku. Potenciální energie je velmi vysoká a tedy na trhu je stále výrazný nedostatek pracovní síly.



Obr. 5.43: Phase-plane plot pro rok 2018



Obr. 5.44: Phase-plane plot pro rok 2017



Obr. 5.45: Phase-plane plot pro rok 2003

Závěr

Analýza funkcionálních dat je relativně novým odvětvím statistiky. Na data není pohlíženo jako na diskrétní body, ale jako na funkce, což umožňuje, při vhodném převedení dat do funkcionální podoby, získat také derivace těchto funkcí. Cílem práce byla transformace zvolených dat do funkcionální podoby a následná analýza transformovaných dat pomocí phase-plane plotů.

Pro snazší interpretaci výsledků byla místo míry nezaměstnanosti zvolena míra zaměstnanosti, kterou jsme definovali jako podíl pracujících ku ekonomicky aktivním osobám. Míra zaměstnanosti se oproti míře nezaměstnanosti pohybuje ve stejném směru jako hospodářský cyklus – při hospodářském růstu zpravidla míra zaměstnanosti roste a při recesi klesá. Při analýze dat bylo nutné dobře aproximovat nejen samotnou funkci, ale také její derivace, protože k vykreslení phase-plane plotů je třeba znát první a druhou derivaci funkce. Aby bylo možné funkce derivovat a získané derivace byly hladké, byla při bázovém vyjádření dat zvolena B-splajnová báze řádu 8. Při vyhlazování funkce byla užita metoda regularizace s penalizační funkcí $PEN_4(X)$ a pomocí metody zevšeobecněné krosvalidace byla určena hodnota vyhlazovacího parametru, konkrétně $\lambda = 1 \cdot 10^{-10}$. Z takto získaných funkcí byly vytvořeny phase-plane ploty pro jednotlivé roky, které byly postupně analyzovány. Nejdřív byl vytvořen phase-plane plot v „klidném“ období, na kterém byly popsány sezónní trendy. Tento vzor byl poté využit pro srovnání s phase-plane ploty z let, které byly pro českou ekonomiku nějakým způsobem šokové, převážně tedy období hospodářských krizí a vstup do EU.

Ukázalo se, že analýza funkcionálních dat může být účinným nástrojem pro analýzu časových řad v ekonomice. Phase-plane ploty umožňují nový pohled na ekonomické procesy. Při vhodném aplikování analýzy funkcionálních dat na míru zaměstnanosti, phase-plane ploty v ukázkových letech dobře reflektovaly nejen hodnotu míry zaměstnanosti, ale také aktuální situaci v ekonomice.

Seznam použité literatury

[1] FERRATY, Frederic a Philippe VIEU. *Nonparametric functional data analysis: theory and practice*. New York: Springer, c2006. ISBN 9780387303697.

[2] RAMSAY, J. O. a B. W. SILVERMAN. *Applied functional data analysis: methods and case studies*. 1. New York: Springer, c2002. ISBN 0387954147.

[3] ŽILKOVÁ, Alexandra. *Analýza funkcionálních dat v modelu tinnitu*. Brno, 2018. Bakalářská. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D.

[4] HOROVÁ, Ivana a Jiří ZELINKA. *Numerické metody*. 2., rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3317-7.

[5] RAMSAY, J. O., Giles HOOKER a Spencer GRAVES. *Functional data analysis with R and MATLAB*. New York: Springer, c2009. Use R!. ISBN 0387981853.

[6] DE BOOR, Carl. *B(asic)-Spline Basics*. Wisconsin: University of Wisconsin, Mathematics Research Centre, 1986.

[7] RAMSAY, J. O. a B. W. SILVERMAN. *Functional data analysis*. 2nd ed. New York: Springer, c2005. ISBN 03-874-0080-X.

[8] Časové řady základních ukazatelů statistiky práce - leden 2019. *Český statistický úřad* [online]. Praha: Český statistický úřad, 2019 [cit. 2019-01-031]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/casove-rady-zakladnich-ukazatelu-statistiky-prace

[9] MANKIW, Gregory. *Zásady ekonomie*. Praha: Grada, 1999. Profesionál. ISBN 978-80-7169-891-3.

[10] ŘEZNÍČKOVÁ, Jana. *Finanční krize a její vliv na zaměstnanost v ČR*. Praha, 2012. Diplomová. Univerzita Karlova. Vedoucí práce František Ochrana.

[11] Mezi ekonomicky aktivní osoby. *Český statistický úřad* [online]. Praha: Český statistický úřad, 2019 [cit. 2019-01-31]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/13-6222-03-2001-4__ekonomicka_aktivita_obyvatelstva

[12] POTUŽÁKOVÁ, Zuzana. *Český trh práce v evropském kontextu*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2013. ISBN 978-80-7372-946-2.

[13] ŽÁK, Milan. *Vnitřní a vnější podmínky restrukturalizace a hospodářská politika v ČR*. Praha: Oeconomica, 2001. Řada vědeckých publikací. ISBN 80-245-0257-7.

[14] KACZOR, Pavel. *Trh práce, pracovní migrace a politika zaměstnanosti ČR po roce 2011*. Praha: Oeconomica, 2013. ISBN 978-80-245-1930-2.

[15] SVOBODA, P. a J. NEZMEŠKAL. Nezaměstnanost v Česku v historickém pohledu. *Geografické rozhledy*. 2015, **24**(4), 28-29.

[16] Trh práce a nezaměstnanost - 1993-2006. In: *Český statistický úřad* [online]. Praha, 2007, 25.04.2007 [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: www.czso.cz/csu/czso/cri/trh-prace-a-nezamestnanost-1993-2006-703bsnbs4f?fbclid=IwAR14t6Af25RlGBFv-poYQ3-5vlWOOLSOhc1LWveVI0F0zTPkXHHthZHcQAw

[17] DUBSKÁ, Drahomíra. *Dopady světové finanční a hospodářské krize na ekonomiku ČR* [online]. In: . Praha: Český statistický úřad, 2010, 15.11.2010, s. 2 [cit. 2019-04-11]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/dopady-svetove-financni-a-hospodarske-krize-na-ekonomiku-ceske-republiky-n-rlar44vims

[18] DVOŘANOVÁ, Kateřina. *Dopad finanční a ekonomické krize na nezaměstnanost*. Praha, 2010. Bakalářská. Bankovní institut vysoká škola. Vedoucí práce Helena Janegová.

[19] Nejsou lidi. Česko vede s vysokým náskokem evropskou statistiku neobsazených míst. In: *Aktuálně.cz* [online]. Praha, 2019, 18.03.2019 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: https://zpravy.aktualne.cz/ekonomika/cesko-ma-s-velkym-naskokem-nejvice-neobsazenych-pracovnich-p/r bac11da0497311e9be22ac1f6b220ee8/

[20] Počet volných míst dál láme rekordy. Na úřadech práce zůstávají hlavně starší lidé. In: *Aktuálně.cz* [online]. Praha, 2019, 08.04.2019 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: https://zpravy.aktualne.cz/ekonomika/bez-prace-bylo-v-breznu-227-tisic-lidi-nezamestnanost-klesla/r 6cc9be2059ce11e98aa4ac1f6b220ee8/

[21] Strategie Evropa 2020 a ČR. In: *Vláda ČR* [online]. Praha [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: https://www.vlada.cz/cz/evropske-zalezitosti/evropske-politiky/strategie-evropa-2020/cr/eu-2020-a-cr-78696/

[22] KLAUS, Václav, Karel DYBA a Ivan KOČÁRNÍK. *Tři roky od měnové krize: sborník textů*. Praha: CEP - Centrum pro ekonomiku a politiku, 2000. [Sborník textů]. ISBN 80-902-7953-8.

[23] MARTINCOVÁ, Marta. *Nezamestnanosť ako makroekonomický problém*. 2. Bratislava: Ekonómia, 2005. ISBN 80-8078-038-2.

[24] SLÁMOVÁ, Tereza. *Trh práce v ČR po vstupu do EU*. Brno, 2006. Diplomová. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Vladimír Hyánek