

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2017

DAVID NEJEDLÝ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Křivkový a plošný integrál

Bakalářská práce

David Nejedlý

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D. Brno 2017

Bibliografický záznam

Autor:	David Nejedlý Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Křivkový a plošný integrál
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17
Počet stran:	ix + 50
Klíčová slova:	křivka, orientace, křivkový integrál, Greenova věta, plocha, plošný integrál, Gauss-Ostogradského věta, Stokesova věta

Bibliographic Entry

Author: David Nejedlý
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Line and surface integral

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Financial and Insurance Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

Academic Year: 2016/17

Number of Pages: ix + 50

Keywords: curve, orientation, line integral, Green's theorem, surface, Gauss-Ostrogradsky theorem, Stokes' theorem

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme křivkovému a plošnému integrálu. Nejprve se zabýváme teorií křivek, kterou využijeme pro zavedení křivkového integrálu I. a II. druhu. V další části práce si uvedeme, co rozumíme pod pojmem plocha v prostoru a následně se zaměříme na plošný integrál I. a II. druhu. Zkoumáme také různé aplikace křivkového a plošného integrálu, které se využívají v geometrii a fyzice. Práce obsahuje několik důležitých integrálních vět – Greenovu, Gauss-Ostrogradského a Stokesovu. Součástí kapitoly jsou i řešené a neřešené příklady, které jsou určeny k samostatnému vypracování.

Abstract

In this thesis we study line and surface integrals. At the beginning we focus on the theory of curves which we afterwards use to construct and describe the line integral of the first and the second type. In the next part of this thesis we recall the meaning of the surface in the space and then we focus on the surface integral of the first and the second type. Moreover, we present some applications of the line and the surface integral which are used in geometry and physics. This thesis contains several important integral theorems – Green's, Gauss-Ostrogradsky, and Stokes'. Some solved and unsolved examples which are meant for individual working out are included as well.



MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

Ústav: Ústav matematiky a statistiky
Student: David Nejedlý
Program: Matematika
Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PŘ MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Křivkový a plošný integrál

Název práce anglicky: Line and surface integral

Oficiální zadání:

Náplní práce je popis teorie a využití křivkového a plošného integrálu. Práce by měla být doplněna příklady s podrobným popisem jejich řešení a základními aplikacemi popsaných nástrojů.

Literatura:

BUCK, R. Creighton. *Advanced calculus*. 3d ed. Long Grove: Waveland Press, 2003. x, 622. ISBN 1577663020.

BUDAK, Boris Michajlovič a Sergej Vasil'jevič FOMIN. *Kratnyje integraly i rjady*. Moskva: Nauka [Moskva], 1965. 607 s.


Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D.


Datum zadání práce: 11. 5. 2016

V Brně dne: 3. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

14.11.2016 
David Nejedlý
student


Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
vedoucí práce

v.z. 
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce doc. Mgr. Petrovi Hasilovi, Ph.D. za jeho cenné rady, připomínky a čas strávený vedením této bakalářské práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 25. května 2017

.....
David Nejedlý

Obsah

Úvod	ix
Kapitola 1. Křivky	1
1.1 Křivky v \mathbb{R}^m	1
1.2 Orientace křivky	3
1.3 Délka křivky	4
Kapitola 2. Křivkové integrály I. druhu	6
2.1 Definice	6
2.2 Vlastnosti	8
2.3 Aplikace křivkového integrálu I. druhu	11
2.4 Příklady	14
Kapitola 3. Křivkový integrál II. druhu	16
3.1 Definice	16
3.2 Vlastnosti	17
3.3 Vztah mezi křivkovými integrály I. a II. druhu	20
3.4 Greenova věta	20
3.5 Příklady	24
Kapitola 4. Plochy	26
4.1 Plochy v \mathbb{R}^3	26
4.2 Obsah plochy	28
Kapitola 5. Plošné integrály I. druhu	30
5.1 Definice	30
5.2 Vlastnosti	31
5.3 Aplikace plošného integrálu I. druhu	34
5.4 Příklady	36
Kapitola 6. Plošný integrál II. druhu	38
6.1 Definice	38
6.2 Gauss-Ostrogradského věta	41
6.3 Stokesova věta	44
6.4 Příklady	47

Závěr	49
Seznam použité literatury	50

Úvod

Tato bakalářská práce se zaměřuje na křivkové a plošné integrály. Zahrnuje nejenom teoretické informace, ale také řešené a neřešené příklady. V první polovině této práce se věnujeme křivkovému a v druhé plošnému integrálu.

První část práce, věnující se křivkovému integrálu, se zabývá teorií křivek. Tato úvodní kapitola obsahuje důležité definice a vlastnosti křivek, které jsou nezbytné pro zavedení křivkového integrálu. Následující kapitola pojednává o křivkovém integrálu I. druhu. Mimo jiné si zde ukážeme některé aplikace, které lze využít v geometrii nebo fyzice. Třetí a poslední kapitola, vztahující se ke křivkovému integrálu, zkoumá křivkový integrál II. druhu. Uvedeme také Greenovu větu, která popisuje vztah mezi dvojným a křivkovým integrálem II. druhu.

Druhá část práce, zaměřující se na plošný integrál, začíná kapitolou, která vysvětluje pojem plocha a uvádí její základní vlastnosti a druhy. Následující kapitola zahrnuje teorii plošného integrálu I. druhu. Obsahuje také některé fyzikální charakteristiky, které můžeme pomocí plošného integrálu I. druhu vypočítat. Závěrečná kapitola se zaměřuje na plošný integrál II. druhu. Velká část této kapitoly se věnuje dvěma integrálními větám. První z nich se nazývá Gauss-Ostrogradského a druhá Stokesova.

Kapitola 1

Křivky

V této úvodní kapitole si vysvětlíme a definujeme, co rozumíme pod pojmem křivka. Uvedeme si některé její základní vlastnosti, které budeme dále využívat u křivkových integrálů I. a II. druhu. K nastudování této úvodní kapitoly jsem použil [1], [4], [7] a [11].

1.1 Křivky v \mathbb{R}^m

Nejdříve si uvedeme tři definice, které využijeme při přesném definování křivky.

Definice 1.1.1. Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , kde $m, n \in \mathbb{N}$, nazýváme vektorovou funkcí z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorovou funkcí, pak je každému

$$t = (t_1, \dots, t_n) \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$$

přiřazena právě jedna hodnota

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)) \in H(f) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

kde $D(f)$ je definiční obor funkce f a $H(f)$ obor hodnot funkce f . Funkce f_1, \dots, f_m nazýváme složkami vektorové funkce f .

Definice 1.1.2. Uvažujme uzavřený interval $\langle a, b \rangle$. Dělením intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme množinu $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ bodů z $\langle a, b \rangle$, které splňují podmínku

$$a = t_0 < \dots < t_n = b.$$

Intervaly $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ nazýváme dělicí intervaly dělení D .

Definice 1.1.3. Nechť $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, jejíž definiční obor je interval $I \subseteq \mathbb{R}$, a nechť $A \subseteq I$ je množina. Řekneme, že $r(t)$ je prostá neboli jednojednoznačná na množině A , jestliže pro dvě různá čísla $t_1, t_2 \in I$ platí $r(t_1) \neq r(t_2)$.

Definice 1.1.4. Nechť $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce jedné reálné proměnné t , která splňuje následující vlastnosti:

1. její definiční obor je libovolný interval I ,

2. je spojitá na I ,

3. existuje dělení intervalu I takové, že $r(t)$ je na množině $I \setminus \{t_k\}_k^n$ jednoznačná.

Pak množina

$$K = \{r(t), t \in I\} \subset \mathbb{R}^m$$

se nazývá křivka.

Vektorovou funkci $r(t)$ nazýváme parametrizací křivky K a rovnici

$$K : r = r(t), \quad t \in I,$$

budeme nazývat vektorovou rovnici křivky K , kterou můžeme následně vyjádřit pomocí parametrických rovnic jako

$$K : x_1 = x_1(t), \dots, x_m = x_m(t), \quad t \in I.$$

Nyní si uvedeme některé základní typy rovinných křivek a jejich nejpoužívanější parametrické rovnice.

1. Funkce

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= f(t), \quad t \in \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

2. Úsečka daná body

$$A = [x_1, y_1], B = [x_2, y_2]$$

má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

3. Kružnice se středem $S = [x_0, y_0]$ a poloměrem r daná rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos(t), \\ y &= y_0 + r \sin(t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

4. Elipsa se středem $S = [x_0, y_0]$, hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b daná rovnicí

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cos(t), \\ y &= y_0 + b \sin(t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

5. Hyperbola se středem $S = [x_0, y_0]$, hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b daná rovnicí

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

má parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cosh(t), \\ y &= y_0 + b \sinh(t), \quad t \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Definice 1.1.5. Křivka $K : r = r(t), t \in I$, se nazývá:

1. jednoduchá, je-li $r(t)$ prostá na celém intervalu I ,
2. oblouk, je-li interval I ohraničený a uzavřený, tj. $I = \langle a, b \rangle$,
3. uzavřený oblouk neboli uzavřená křivka, je-li K obloukem a $r(a) = r(b)$,
4. Jordanova křivka neboli jednoduchá uzavřená křivka, je-li K uzavřený oblouk a $r(t)$ je prostá na $\langle a, b \rangle$.

Definice 1.1.6. Nechť existuje prostá funkce $t = \varphi(s)$, která zobrazuje interval I_2 na interval I_1 , je spojitá a má spojitou a nenulovou derivaci, taková, že platí

$$r_1(\varphi(s)) = r_2(s).$$

Pak řekneme, že křivky $r_1(t), t \in I_1$, a $r_2(s), s \in I_2$, jsou ekvivalentní. Funkci φ nazýváme transformace parametru.

Definice 1.1.7. Řekneme, že jednoduchá křivka $K : r(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)), t \in \langle a, b \rangle$, se nazývá hladká, jestliže platí:

1. derivace funkcí $x_1(t), \dots, x_m(t)$ jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$,
2. aspoň jedna z derivací $x'_1(t), \dots, x'_m(t)$ je nenulová pro každé $t \in \langle a, b \rangle$,
tj. $x_1'^2(t) + \dots + x_m'^2(t) \neq 0, \forall t \in \langle a, b \rangle$.

Definice 1.1.8. Řekneme, že jednoduchá křivka $K : r(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)), t \in \langle a, b \rangle$, se nazývá po částech hladká, jestliže vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

1.2 Orientace křivky

U výpočtů a definice křivkových integrálů II. druhu budeme potřebovat znát orientaci křivky.

Definice 1.2.1. Nechť K je po částech hladká křivka v rovině a nechť je definováno úplné uspořádání bodů na této křivce. Pak tomuto uspořádání říkáme orientace křivky.

Poznámka. Jestliže je křivka jednoduchá, tak orientace je dána uspořádáním libovolné dvojice bodů. Pokud je křivka uzavřená, tak orientace je dána uspořádáním trojice bodů.

Nechť $r(t)$, $t \in I$, je parametrizace křivky K , kde parametr t vyjadřuje čas. Pak tato parametrizace popisuje pohyb bodu po této křivce. Jestliže t_1 a t_2 jsou dva časové okamžiky z intervalu I takové, že $t_1 < t_2$, pak se nejdříve pohybující bod dostane do bodu $P(t_1)$ a následně do bodu $P(t_2)$. U tohoto pohybu je bod $P(t_1)$ před bodem $P(t_2)$, což značíme $P(t_1) \prec P(t_2)$.

Definice 1.2.2. Jestliže pro libovolná $t_1 < t_2$ je bod $P(t_1)$ před bodem $P(t_2)$ (tj. $P(t_1) \prec P(t_2)$), pak řekneme, že křivka je souhlasně orientovaná se svým parametrickým vyjádřením. Pokud pro libovolná $t_1 < t_2$ platí, že bod $P(t_1)$ je za bodem $P(t_2)$ (tj. $P(t_1) \succ P(t_2)$), pak řekneme, že křivka je orientovaná nesouhlasně se svým parametrickým vyjádřením.

Poznámka. Jordanova křivka je kladně orientovaná, když je orientovaná proti směru hodinových ručiček, v opačném případě hovoříme o záporně orientované Jordanově křivce.

1.3 Délka křivky

Nechť K je libovolná křivka daná parametrizací

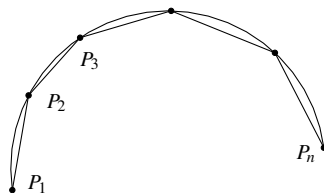
$$K : r = r(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Uvažujme libovolné dělení $D = \{t_0, \dots, t_n\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ s hodnotami $a = t_0 < \dots < t_n = b$, které rozdělí interval na n dílků. Dělicí body přeneseme na křivku a označíme je $P_j = r(t_j)$. Úsečky spojující body P_0 a P_1, \dots, P_{n-1} a P_n tvoří lomenou čáru C (obr. 1.1), jejíž délku definujeme jako

$$L(C) = |P_0 - P_1| + \dots + |P_{n-1} - P_n| = \sum_{i=1}^n |P_{i-1} - P_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Délku křivky K pak definujeme jako

$$L(K) = \sup_D \{L(C)\}.$$



Obrázek 1.1: Aproximace křivky

Poznámka. Jestliže délka lomené čáry C je nekonečná, tedy $L(C) = \infty$, pak křivka K nemá konečnou délku. Jestliže $L(C) < \infty$, pak křivka K má konečnou délku.

Věta 1.3.1. *Nechť K je oblouk daný parametrickými rovnicemi $x = x_1(t), \dots, x = x_m(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Nechť $x_1(t), \dots, x_m(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak oblouk K má konečnou délku a platí*

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_m'^2(t)} \, dt \quad (1.1)$$

Důkaz. Důkaz naleznete v [11]. □

Příklad 1.1. Určete délku křivky K , která je zadaná parametrickými rovnicemi

$$x(t) = 5(t - \sin(t)), \quad y = 5(1 - \cos(t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení. Nejdříve určíme derivace parametrických rovnic a poté dosadíme do vztahu (1.1).

$$\begin{aligned} x'(t) &= 5 - 5\cos(t), \\ y'(t) &= 5\sin(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(K) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(5 - 5\cos(t))^2 + (5\sin(t))^2} \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25 - 50\cos(t) + 25\cos^2(t) + 25\sin^2(t)} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{25 - 50\cos(t) + 25} \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25(1 - 2\cos(t) + 1)} \, dt = 5 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} \, dt = 5\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} \, dt. \end{aligned}$$

Integrál rozšíříme výrazem $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ a využijeme vztah $\sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.

$$L(K) = 10 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} \, dt = 10 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \, dt = 20 \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 40.$$

Vypočítali jsme délku křivky K , která se rovná 40.

Kapitola 2

Křivkové integrály I. druhu

V této druhé kapitole se seznámíme s křivkovými integrály I. druhu. Uvedeme si jejich definici, základní vlastnosti a názorně si také ukážeme jejich výpočet na jednotlivých příkladech. Na závěr této kapitoly si představíme některé geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu I. druhu. Hlavními zdroji pro tuto část jsou [2], [4], [7] a [12].

2.1 Definice

Nechť K je hladká nebo po částech hladká křivka v \mathbb{R}^2 a funkce $f(M)$ je definovaná na křivce K . Dále uvažujme libovolné dělení křivky K s dělicími body $A = A_0 < \dots < A_n = B$, kde A je počáteční bod a B koncový bod křivky K . Toto dělení rozdělí křivku na n úseků, přičemž délku i -té části $A_{i-1}A_i$ označíme Δs_i . V každém úseku $A_{i-1}A_i$ zvolíme libovolný bod, který označíme M_i a vypočítáme v něm funkční hodnotu $f(M_i)$. Utvoříme tzv. integrální součet

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i.$$

Pokud integrační součet má limitu pro nulovou posloupnost dělení křivky K , která nezávisí na výběru bodů M_i , pak můžeme definovat křivkový integrál I. druhu.

Definice 2.1.1. Existuje-li konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i,$$

která nezávisí na způsobu dělení křivky K , ani na výběru bodů M_i na obloucích $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \dots, n$, pak tuto limitu označíme

$$\int_K f(M) ds$$

a nazveme ji křivkovým integrálem I. druhu neboli křivkovým integrálem ze skalární funkce.

Body na křivce $K \subset \mathbb{R}^2$ můžeme vyjádřit pomocí jejich souřadnic $[x, y]$, v tomto případě můžeme integrál $\int_K f(M) ds$ napsat jako

$$\int_K f(x, y) ds.$$

Křivkový integrál I. druhu můžeme snadno převést na Riemannův integrál, jehož proměnná bude t . Předpokládejme, že křivka K je dána parametrickými rovnicemi

$$K : x = x(t), y = y(t), \quad t \in I = \langle a, b \rangle,$$

kde funkce $x(t)$ a $y(t)$ jsou spojité a jejich derivace $x'(t)$ a $y'(t)$ jsou po částech spojité a ohraničené a $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$. Délku oblouku křivky K určíme ze vztahu

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (2.1)$$

Funkci $f(x, y)$ vyjádříme v proměnné t , tedy $f(x, y) = f(x(t), y(t))$. Pak dostáváme integrál

$$\int_K f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

jehož mezemi budou krajní body intervalu I .

Věta 2.1.1. *Nechť K je hladká křivka s parametrickým vyjádřením*

$$K : x = x(t), y = y(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a funkce $f(x, y)$ je definovaná na křivce K . Pak dostáváme rovnost

$$\int_K f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (2.2)$$

jestliže existuje určitý integrál na pravé straně.

V případě, že křivka K je dána předpisem

$$y = g(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

dostaneme z (2.2) vztah

$$\int_K f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)} dx.$$

Křivkový integrál I. druhu můžeme definovat i v \mathbb{R}^m . Uvažujeme-li hladkou křivku K s parametrickým vyjádřením

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_m = x_m(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a funkci $f(x_1, \dots, x_m)$ definovanou na křivce K . Pak dostaneme vztah

$$\int_K f(x_1, \dots, x_m) ds = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_m(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_m'^2(t)} dt$$

Podmínky existence a základní vlastnosti křivkového integrálu I. druhu v \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^2 jsou analogické.

2.2 Vlastnosti

Základní vlastnosti křivkového integrálu I. druhu jsou téměř shodné s vlastnostmi určitého integrálu. Pojďme si je uvést.

1. Homogenita vzhledem k integrandu

Nechť existuje integrál $\int_K f(x, y) ds$ a nechť c je konstanta, $c \in \mathbb{R}$. Pak integrál $\int_K cf(x, y) ds$ existuje a platí

$$\int_K cf(x, y) ds = c \int_K f(x, y) ds.$$

2. Aditivita vzhledem k integrandu

Nechť existují integrály $\int_K f(x, y) ds$ a $\int_K g(x, y) ds$. Pak existuje integrál $\int_K [f(x, y) + g(x, y)] ds$ a platí

$$\int_K [f(x, y) + g(x, y)] ds = \int_K f(x, y) ds + \int_K g(x, y) ds.$$

3. Aditivita vzhledem k integračnímu oboru

Nechť existuje integrál $\int_K f(x, y) ds$ a oblouk K je spojením oblouků K_1 a K_2 . Pak integrály $\int_{K_1} f(x, y) ds$ a $\int_{K_2} f(x, y) ds$ existují a platí

$$\int_K f(x, y) ds = \int_{K_1} f(x, y) ds + \int_{K_2} f(x, y) ds.$$

4. Monotónnost

Jestliže $f(x, y)$ je nezáporná integrovatelná funkce, pak dostáváme vztah

$$\int_K f(x, y) ds \geq 0.$$

5. Nechť $f(x, y)$ je integrovatelná na oblouku K a $|f(x, y)|$ je také integrovatelná. Pak platí nerovnost

$$\left| \int_K f(x, y) ds \right| \leq \int_K |f(x, y)| ds.$$

6. Nechť $f(x, y)$ je spojitá na oblouku K . Pak existuje bod M ležící na oblouku K takový, že platí

$$\int_K f(x, y) ds = f(M)L,$$

kde L je délka oblouku K .

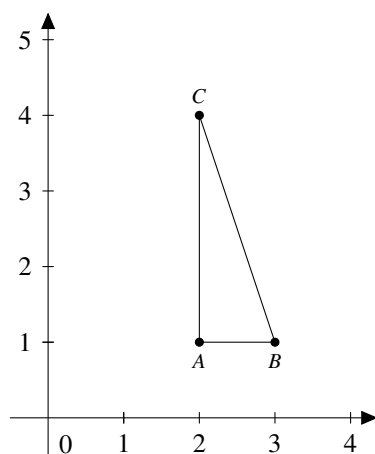
7. Nechť K je oblouk a $-K$ je oblouk s opačnou orientací než K . Dále nechť existuje integrál $\int_K f(x, y) ds$, pak existuje integrál $\int_{-K} f(x, y) ds$ a platí

$$\int_K f(x, y) ds = \int_{-K} f(x, y) ds.$$

Příklad 2.1. Vypočítejte křivkový integrál

$$I = \int_K (x^2 + 2y) ds,$$

kde křivka K je trojúhelník ABC s vrcholy $A = [2, 1]$, $B = [3, 1]$, $C = [2, 4]$ vyobrazený na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Trojúhelník ABC

Řešení. Nejprve parametrizujeme křivku K , která se skládá ze tří křivek K_1 , K_2 a K_3 (stran trojúhelníku). Obdržíme

$$\begin{aligned} K_1 : x_1(t) &= 2 + (3 - 2)t = 2 + t, \\ y_1(t) &= 1 + (1 - 1)t = 1, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 : x_2(t) &= 3 + (3 - 2)t = 3 - t, \\ y_2(t) &= 1 + (4 - 1)t = 1 + 3t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 : x_3(t) &= 2 + (2 - 2)t = 2, \\ y_3(t) &= 4 + (1 - 4)t = 4 - 3t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Poté určíme derivace parametrických rovnic a diferenciál ds ze vztahu (2.1), tedy

$$\begin{aligned} K_1 : x_1'(t) &= 1, & ds &= \sqrt{1 + 0} dt = dt, \\ y_1'(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 : x_2'(t) &= -1, & ds &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} dt = \sqrt{10} dt, \\ y_2'(t) &= 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 : x_3'(t) &= 0, & ds &= \sqrt{(-3)^2 + 0} dt = 3 dt, \\ y_3'(t) &= -3. \end{aligned}$$

Výsledný integrál vypočteme využitím aditivity vzhledem k integračnímu oboru jako

$$\int_K (x^2 + 2y) ds = \int_{K_1} (x^2 + 2y) ds + \int_{K_2} (x^2 + 2y) ds + \int_{K_3} (x^2 + 2y) ds.$$

Dílčí integrály jsou

$$\begin{aligned}\int_{K_1} (x^2 + 2y) \, ds &= \int_0^1 ((2+t)^2 + 2) \, dt = \int_0^1 (t^2 + 4t + 6) \, dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 6t \right]_0^1 = \frac{25}{3}, \\ \int_{K_2} (x^2 + 2y) \, ds &= \int_0^1 ((3-t)^2 + 2(1+3t)) \sqrt{10} \, dt = \sqrt{10} \int_0^1 (9 - 6t + t^2 + 2 + 6t) \, dt = \\ &= \sqrt{10} \int_0^1 (t^2 + 11) \, dt = \sqrt{10} \left[\frac{t^3}{3} + 11t \right]_0^1 = \sqrt{10} \frac{34}{3}, \\ \int_{K_3} (x^2 + 2y) \, ds &= \int_0^1 (2^2 + 2(4-3t)) 3 \, dt = 3 \int_0^1 (4 + 8 - 6t) \, dt = 3 \int_0^1 (-6t + 12) \, dt = \\ &= 3[-3t^2 + 12t]_0^1 = 27.\end{aligned}$$

Hledaný integrál se tedy rovná

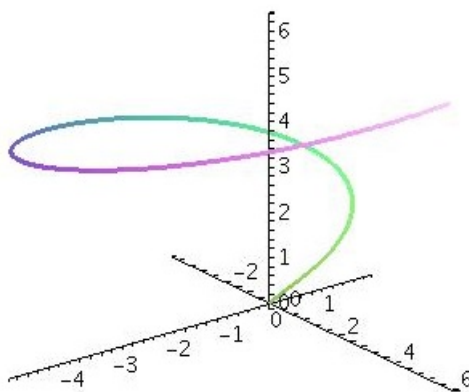
$$\int_K (x^2 + 2y) \, ds = \frac{25}{3} + \sqrt{10} \frac{34}{3} + 27 = \frac{106}{3} + \sqrt{10} \frac{34}{3}.$$

Příklad 2.2. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_K (2\sqrt{x^2 + y^2} + z) \, ds,$$

kde křivka K je závit šroubovice (obr. 2.2) s parametrickým vyjádřením

$$x(t) = t \cos(t), y(t) = t \sin(t), z(t) = t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obrázek 2.2: Šroubovice

Řešení. Nejdříve určíme derivace parametrických rovnic a diferenciál ds .

$$\begin{aligned}x'(t) &= \cos(t) - t \sin(t), \\ y'(t) &= \sin(t) + t \cos(t), \\ z'(t) &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 + 1^2} = \\ &= \sqrt{(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 1} = \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat samotný integrál jako

$$\begin{aligned} \int_K (2\sqrt{x^2 + y^2} + z) ds &= \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{(t \cos(t))^2 + (t \sin(t))^2} + t \right) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} + t \right) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 3t \sqrt{2 + t^2} dt = \left. \begin{array}{l} u = 2 + t^2 \\ du = 2t dt \\ 0 \rightarrow 2 \\ 2\pi \rightarrow 2 + 4\pi^2 \end{array} \right| = 3 \int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u} \frac{t}{2t} du = \\ &= \frac{3}{2} \int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u} du = \frac{3}{2} \left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_2^{2+4\pi^2} = \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_2^{2+4\pi^2} = \\ &= (2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

2.3 Aplikace křivkového integrálu I. druhu

Křivkový integrál I. druhu můžeme využít při výpočtech v geometrických a fyzikálních aplikacích.

1. Délka křivky

Je-li K po částech hladká křivka, pak pro její délku $L(K)$ platí

$$L(K) = \int_K ds.$$

2. Hmotnost křivky

Má-li křivka $K \subset \mathbb{R}^2$ konstantní hustotu ρ , pak se její hmotnost rovná součinu její délky a hustoty. Jestliže hustota ρ není konstantní, tedy $\rho = \rho(x, y)$, ale je závislá na poloze bodu na křivce, potom hmotnost křivky vypočítáme pomocí vzorce

$$m = \int_K \rho(x, y) ds.$$

3. Statické momenty křivky

Statický moment bodu k přímce v \mathbb{R}^2 nebo k rovině v \mathbb{R}^3 je roven součinu jeho hmotnosti m a vzdálenosti od této přímky nebo roviny.

(a) Pro statický moment křivky $K \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k přímce p platí

$$S_p = \int_K d([x, y], p) \rho(x, y) ds,$$

kde $d([x, y], p)$ je vzdálenost bodu $[x, y]$ od přímky p a $\rho(x, y)$ je hustota křivky K v bodě $[x, y]$.

(b) Pro případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y platí

$$S_x = \int_K \rho(x, y) y \, ds,$$

$$S_y = \int_K \rho(x, y) x \, ds.$$

(c) Pro statický moment křivky $K \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině v platí

$$S_v = \int_K d([x, y, z], v) \rho(x, y, z) \, ds,$$

kde $d([x, y, z], v)$ je vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od roviny v a $\rho(x, y, z)$ hustota křivky K v bodě $[x, y, z]$.

(d) Pro případ vzhledem k souřadným rovinám xy , xz a yz platí

$$S_{xy} = \int_K \rho(x, y, z) z \, ds,$$

$$S_{xz} = \int_K \rho(x, y, z) y \, ds,$$

$$S_{yz} = \int_K \rho(x, y, z) x \, ds.$$

4. Těžiště

Pro určení těžiště křivky se využívají její statické momenty a hmotnost. Těžiště křivky v rovině lze určit jako

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right].$$

Těžiště křivky v prostoru pak jako

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right].$$

5. Momenty setrvačnosti křivky

Pro moment setrvačnosti křivky $K \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k přímce p platí

$$I_p = \int_K d^2([x, y], p) \rho(x, y) \, ds,$$

kde $d([x, y], p)$ je vzdálenost bodu $[x, y]$ od přímky p a $\rho(x, y)$ je hustota křivky K v bodě $[x, y]$.

Chceme-li určit momenty setrvačnosti k osám x , y a ose otáčení o , tak platí

$$I_x = \int_K y^2 \rho(x, y) \, ds,$$

$$I_y = \int_K x^2 \rho(x, y) \, ds,$$

$$I_o = \int_K d^2([x, y], o) \rho(x, y) \, ds,$$

kde $d([x, y], o)$ je vzdálenost bodu $[x, y]$ od osy otáčení o .

Analogicky pro křivku $K \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k přímce $p \subset \mathbb{R}^3$ platí

$$I_p = \int_K d^2([x, y, z], p) \rho(x, y, z) ds.$$

Pro případ vzhledem k osám x, y a z platí

$$I_x = \int_K (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

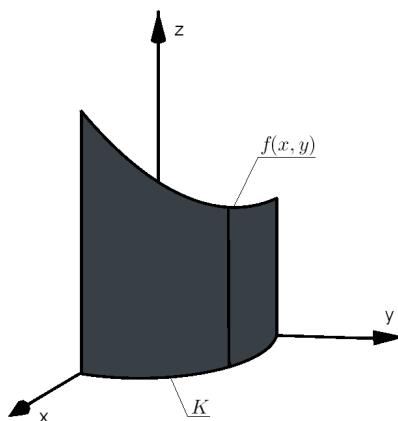
$$I_y = \int_K (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_z = \int_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds.$$

6. Obsah pláště válcové plochy

Pro válcovou plochu (obr. 2.3), jejíž základna je tvořena řídicí křivkou K v rovině $z = 0$ a plocha přímkami rovnoběžnými s osou z a shora omezenou plochou $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$, platí, že její obsah je dán vztahem

$$P = \int_K f(x, y) ds.$$



Obrázek 2.3: Válcová plocha

Příklad 2.3. Pro křivku K danou parametrickým vyjádřením

$$x(t) = 1, y(t) = t, z(t) = t^2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4y^2}$ určete

1. její hmotnost,

2. statické momenty vzhledem k rovinám xy , xz a yz ,
3. těžiště.

Řešení. Nejprve určíme derivace parametrických rovnic

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0, \\y'(t) &= 1, \\z'(t) &= 2t,\end{aligned}$$

poté diferenciál ds

$$ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

1. Hmotnost křivky K , po dosazení do vzorce pro výpočet hmotnosti, vypočítáme jako

$$m = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \left[t + \frac{4t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

2. Dosazením do vzorců, pro výpočet statických momentů vzhledem k rovinám xy , xz a yz , dostaneme

$$\begin{aligned}S_{xy} &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 (t^2 + 4t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{4t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{17}{15}, \\S_{xz} &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 (t + 4t^3) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{4t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}, \\S_{yz} &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \left[t + \frac{4t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

3. Souřadnice těžiště křivky K určíme jako podíl jejich statických momentů a její hmotnosti, tedy

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = 1, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{3}} = \frac{9}{28}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\frac{17}{15}}{\frac{7}{3}} = \frac{17}{35}.$$

Těžiště křivky K leží v bodě $T = \left[1, \frac{9}{28}, \frac{17}{35} \right]$.

2.4 Příklady

1. Vypočítejte křivkové integrály I. druhu podél křivky K

(a) $\int_K (xy - 3y) ds$, kde K je úsečka AB , $A = [1, 1]$, $B = [4, 5]$,

(b) $\int_K (x^2 + y^2) ds$, kde K je kružnice $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$,

- (c) $\int_K \frac{x^2}{5} ds$, kde K je oblouk AB křivky $y = \ln(x)$, $A = [3, \ln(3)]$, $B = [1, 0]$,
- (d) $\int_K (2y^3 - x^2) ds$, kde K je obvod obdélníku určený křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$,
- (e) $\int_K \frac{4x + y^2}{5} ds$, kde K je křivka určená parametrickým vyjádřením $x(t) = \cos(t) + t \sin(t)$, $y(t) = \sin(t) - t \cos(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- (f) $\int_K \sqrt{y} ds$, kde K je křivka určená parametrickým vyjádřením $x(t) = 2(t - \sin(t))$, $y(t) = 2(1 - \cos(t))$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$,
- (g) $\int_K \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, kde K je křivka určená parametrickým vyjádřením $x(t) = 3 \cos(t)$, $y(t) = 3 \sin(t)$, $z(t) = 2t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$,
- (h) $\int_K (x + y - 2yz) ds$, kde K je křivka určená parametrickým vyjádřením $x(t) = 1 + t$, $y(t) = 3t$, $z(t) = 2 - t$, $t \in \langle 1, 2 \rangle$.

2. Pro asteroidu danou parametrickým vyjádřením

$$x(t) = 5 \cos^3(t), y(t) = 5 \sin^3(t), \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

a s hustotou $\rho(x, y) = 1$ určete

- (a) její délku,
- (b) statické momenty vzhledem k osám x a y ,
- (c) těžiště,
- (d) momenty setrvačnosti vzhledem k osám x a y .

Výsledky

1. (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $\frac{\pi a^3}{2}$; (c) $\frac{2\sqrt{2}}{15}(5\sqrt{5} - 1)$; (d) $\frac{346}{3}$; (e) $\frac{\pi^2}{10}(4\pi^2 - 23)$; (f) $2(\pi - 2)$; (g) $\frac{4\pi^3\sqrt{22}}{27}$; (h) $3\sqrt{11}$
2. (a) $\frac{15}{2}$; (b) $15, 15$; (c) $[2, 2]$; (d) $\frac{375}{8}, \frac{375}{8}$

Kapitola 3

Křivkový integrál II. druhu

V následující kapitole si představíme křivkové integrály II. druhu. Stejným způsobem jako u křivkových integrálů I. druhu si uvedeme jejich definici, vlastnosti a princip jejich výpočtů. Také si ukážeme jejich vztah s dvojným integrálem. V této kapitole jsem čerpal z [2], [4], [5], [7], [11] a [12].

3.1 Definice

Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je hladká křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B . Uvažujme hmotný bod M pohybující se na křivce K , který působením vektoru síly $F(M)$ vykonává práci. Libovolným dělením křivky K dělicími body $A = M_0 < \dots < M_n = B$ rozdělíme křivku na n částí. Na každém oblouku $M_{i-1}M_i$ si zvolíme libovolný bod $N_i = [\xi_i, \eta_i]$ a délku oblouku nahradíme délkou úsečky $M_{i-1}M_i$, kterou označíme Δr_i . Pak vykonanou práci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n F(N_i) \Delta r_i.$$

Jestliže $F = (P, Q)$ a $[x_i, y_i]$ jsou souřadnice bodu M_i , můžeme práci vyjádřit jako

$$\sum_{i=1}^n (P(N_i) \Delta x_i + Q(N_i) \Delta y_i),$$

kde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Definice 3.1.1. Nechť K je hladká křivka, $F = (P, Q)$ a zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorová funkce definovaná na křivce K . Dále nechť D je libovolné dělení křivky K s dělicími body M_0, \dots, M_n a N_i je výběr reprezentantů pro $i = 1, \dots, n$. Pak číslo

$$\sum_{i=1}^n F(N_i) \Delta r_i$$

nazýváme integrálním součtem funkce F .

Jestliže existuje konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(N_i) \Delta r_i,$$

která nezávisí na způsobu dělení křivky K ani na výběru reprezentantů N_i . Pak tuto limitu značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(N_i) \Delta r_i = \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

a nazveme ji křivkovým integrálem II. druhu neboli křivkovým integrálem z vektorové funkce.

Věta 3.1.1. *Nechť K je hladká křivka určena parametrickými rovnicemi*

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

a nechť $F = (P, Q)$ je vektorová funkce definovaná na křivce K . Pak dostáváme vztah

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt, \quad (3.1)$$

kde kladné znaménko platí pro křivku K orientovanou souhlasně s danou parametrizací a záporné znaménko, jestliže křivka K je orientovaná nesouhlasně. Tento vztah platí, jestliže existuje integrál stojící na pravé straně, pak totíž existuje integrál na levé straně.

V případě, že křivka K je dána rovnicí

$$y = g(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

pak ze vztahu (3.1) dostaneme, že pro křivkový integrál II. druhu platí

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \int_a^b [P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x)] dx.$$

3.2 Vlastnosti

Vlastnosti křivkového integrálu II. druhu jsou téměř analogické jako u jednoduchého integrálu či křivkového integrálu I. druhu. Pouze v případě nesouhlasné orientace dochází ke změně znaménka.

1. Aditivita vzhledem integrandu

Nechť existují integrály $\int_K P(x, y) dx$ a $\int_K Q(x, y) dy$. Pak existuje integrál $\int_K [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$ a platí

$$\int_K [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \int_K P(x, y) dx + \int_K Q(x, y) dy.$$

2. Homogenita vzhledem k integrandu

Nechť existuje integrál $\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Pak existuje integrál $\int_K c[P(x,y) dx + Q(x,y) dy]$ a platí

$$\int_K c[P(x,y) dx + Q(x,y) dy] = c \int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

3. Aditivita vzhledem k integračnímu oboru

Nechť existuje integrál $\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ a oblouk K je spojením oblouků K_1 a K_2 . Pak integrály stojící v následující rovnosti na pravé straně existují a platí

$$\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{K_1} P(x,y) dx + Q(x,y) dy + \int_{K_2} P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

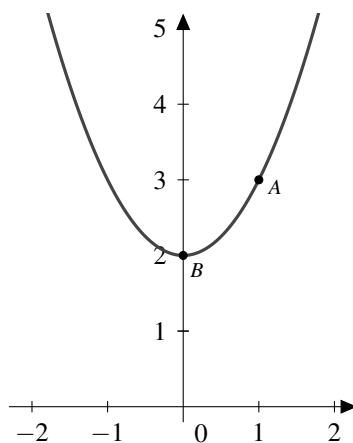
4. Nechť K je orientovaná křivka a $-K$ je křivka s opačnou orientací. Nechť existuje $\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy$, pak existuje také integrál $\int_{-K} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ a platí

$$\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy = - \int_{-K} P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

Příklad 3.1. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu

$$\int_K x^2 y dx + (x^2 - y) dy,$$

kde K je parabola $y = x^2 + 2$ s počátečním bodem $A = [1, 3]$ a koncovým bodem $B = [0, 2]$.

Obrázek 3.1: Parabola $y = x^2 + 2$

Řešení. Nejprve křivku K (obr. 3.1) vyjádříme pomocí parametrických rovnic

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= t^2 + 2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Můžeme vidět, že křivka K je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací. Dále vypočítáme diferenciály funkcí

$$\begin{aligned} dx &= dt, \\ dy &= 2t dt. \end{aligned}$$

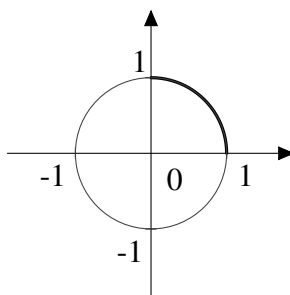
Nakonec dosadíme parametrické vyjádření do integrálu a integrujeme.

$$\begin{aligned} \int_K x^2 y dx + (x^2 - y) dy &= - \int_0^1 t^2(t^2 + 2) dt + (t^2 - (t^2 + 2))2t dt = \\ &= - \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t) dt = - \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - 2t^2 \right]_0^1 = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

Příklad 3.2. Vypočítejte křivkový integrál II. druhu

$$\int_K (x^2 + y^2) dx + \frac{y+x}{x} dy,$$

kde K je čtvrtkružnice v prvním kvadrantu daná rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ (obr. 3.2), která je orientovaná proti směru hodinových ručiček.



Obrázek 3.2: Čtvrtkružnice

Řešení. Nejprve provedeme parametrizaci křivky K

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t), \\ y(t) &= \sin(t), \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Orientace křivky K je souhlasná s danou parametrizací. Poté určíme diferenciály funkcí

$$\begin{aligned} dx &= -\sin(t) dt, \\ dy &= \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Na závěr dosadíme parametrické rovnice do zadání a vypočítáme zadaný integrál.

$$\begin{aligned} \int_K (x^2 + y^2) dx + \frac{y+x}{x} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) (-\sin(t)) dt + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) + \cos(t)}{\cos(t)} \cos(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) + \sin(t) + \cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

3.3 Vztah mezi křivkovými integrály I. a II.druhu

Křivkový integrál II. druhu můžeme snadno převést na křivkový integrál I. druhu. Vztah mezi křivkovými integrály je popsán v následující větě.

Věta 3.3.1. *Nechť K je hladká křivka a funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité na křivce K . Pak platí vztah*

$$\int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \pm \int_K [P(x,y) \cos(\alpha) + Q(x,y) \sin(\alpha)] ds,$$

kde $\alpha = \alpha(M)$ je úhel mezi tečnou ke křivce K v bodě $M = [x,y]$ a kladnou částí osy x . Kladné znaménko volíme pro souhlasně orientovanou křivku K s danou parametrizací, v opačném případě volíme znaménko záporné.

Důkaz. Uvažujme hladkou křivku K souhlasně orientovanou s parametrickým vyjádřením

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \int_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy &= \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \\ &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt + \\ &+ \int_a^b \left[Q(x(t), y(t)) \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= \int_K [P(x,y) \cos(\alpha) + Q(x,y) \sin(\alpha)] ds, \end{aligned}$$

což je vztah z tvrzení věty. □

3.4 Greenova věta

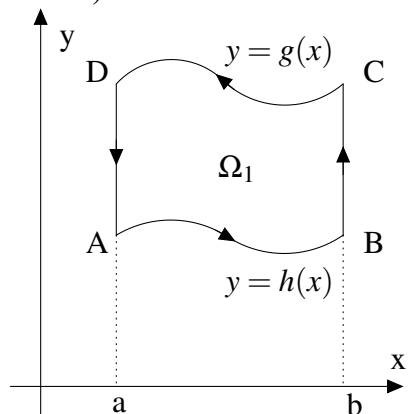
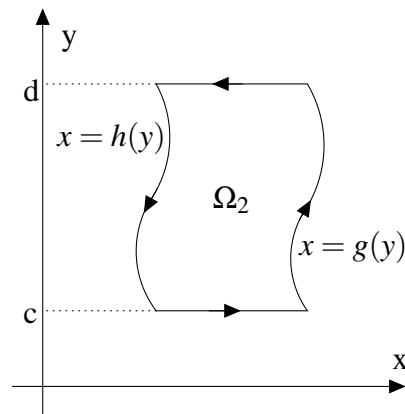
Vztah mezi křivkovým integrálem II. druhu a dvojným integrálem vyjadřuje Greenova věta.

Věta 3.4.1 (Greenova). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená ohraničená množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka K a $\overline{\Omega}$ je uzávěr množiny Ω . Dále nechť vektorová funkce $f = (P, Q)$ je definovaná na $\overline{\Omega}$ a $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ jsou zde spojité. Pak platí*

$$\oint_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.2)$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme ve třech krocích.

1. Nejdříve uvažujme oblast ve tvaru křivočarého obdélníku, jejíž hranici můžeme vyjádřit jako graf spojitých funkcí $h(x)$, $g(x)$ a úsečkami rovnoběžnými s osou y (obr. 3.3) a jako graf spojitých funkcí $h(y)$, $g(y)$ a úsečkami rovnoběžnými s osou x (obr. 3.4).


 Obrázek 3.3: Oblast Ω_1

 Obrázek 3.4: Oblast Ω_2

Množinu Ω_1 pak můžeme popsat pomocí funkcí $h(x)$ a $g(x)$

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge h(x) \leq y \leq g(x)\},$$

a množinu Ω_2 pomocí funkcí $h(y)$ a $g(y)$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \wedge h(y) \leq x \leq g(y)\}.$$

Hranici množiny Ω_1 označíme K . Nejprve dokážeme rovnost

$$-\iint_{\Omega_1} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_K P(x, y) dx.$$

Dvojný integrál na levé straně upravíme pomocí tvaru množiny Ω_1 jako

$$\begin{aligned} -\iint_{\Omega_1} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= -\int_a^b \left[P(x, g(x)) - P(x, h(x)) \right] dx = \\ &= \int_a^b P(x, h(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx. \end{aligned}$$

Poslední dva integrály můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, h(x)) dx &= \int_{AB} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, g(x)) dx &= \int_{DC} P(x, y) dx = -\int_{CD} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Nyní přidáme na pravou stranu dva integrály

$$\begin{aligned} \int_{BC} P(x, y) dx &= \left. \begin{matrix} x = b \\ dx = 0 \end{matrix} \right| = 0, \\ \int_{DA} P(x, y) dx &= \left. \begin{matrix} x = a \\ dx = 0 \end{matrix} \right| = 0, \end{aligned}$$

příčemž oba se rovnají nule. Pak můžeme psát

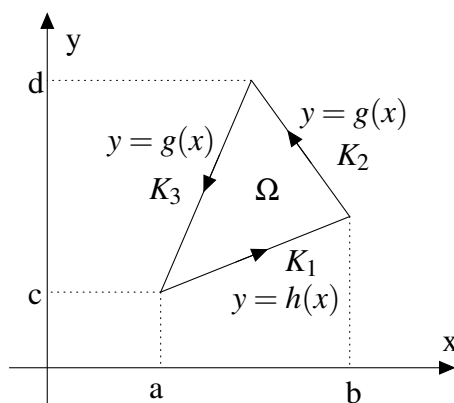
$$\begin{aligned}
 - \iint_{\Omega_1} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy &= \int_{AB} P(x,y) dx + \int_{BC} P(x,y) dx + \int_{CD} P(x,y) dx + \\
 &+ \int_{DA} P(x,y) dx = \int_{ABCD} P(x,y) dx = \oint_K P(x,y) dx.
 \end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme dokázat rovnost

$$\iint_{\Omega_2} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy = \oint_K Q(x,y) dy,$$

kde $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \wedge h(y) \leq x \leq g(y)\}$.

2. Nyní nechť Ω je trojúhelník a $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ je jeho hranice (obr. 3.5). Předpokládejme, že žádná ze stran trojúhelníka není rovnoběžná s některou ze souřadných os. Nechť K_1 je graf lineární funkce $y = h(x)$ a $K_2 \cup K_3$ je graf funkce $y = g(x)$.



Obrázek 3.5: Popis hranice oblasti Ω

Pak platí

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \\
 &= - \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] dx = \\
 &= \int_a^b P(x, h(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx,
 \end{aligned}$$

kde první integrál se rovná $\int_{K_1} P(x,y) dx$ a druhý $\int_{K_2 \cup K_3} P(x,y) dx$.

Celkem tedy máme

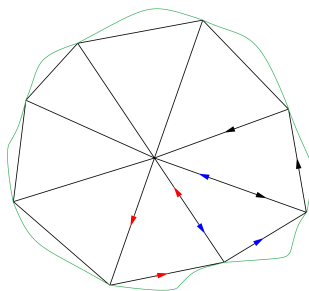
$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx dy = \oint_K P(x,y) dx.$$

Podobně můžeme ukázat

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx dy = \oint_K Q(x,y) dy.$$

Sečtením obou rovnic dostaneme dokazovaný Greenův vzorec.

3. Je-li K obecná křivka vyhovující předpokladům věty, pak vnitřek křivky můžeme vyplnit mnohoúhelníkem (obr. 3.6). Ten můžeme rozdělit na konečný počet trojúhelníků, kde pro každý z nich podle předchozí části důkazu platí Greenova věta. Jdeme-li s počtem vrcholů mnohoúhelníku k nekonečnu, tak mnohoúhelník lépe vykryvá vnitřek křivky. Potom integrál přes mnohoúhelník se blíží k integrálu přes křivku K , protože integrály přes společné hranice sousedních trojúhelníků se vzájemně odečtou, neboť jsou ve výsledku započítány vždy dvakrát a to pokaždé s opačnou orientací.



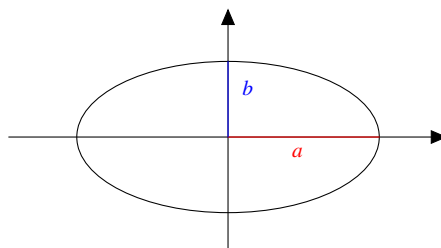
Obrázek 3.6: Aproximace křivky mnohoúhelníkem

□

Příklad 3.3. Užitím Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\oint_K (x + y^2) dx + (x + y) dy,$$

kde K je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ (obr. 3.7).

Obrázek 3.7: Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Řešení. Nejdříve vypočítáme parciální derivace $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1.$$

Dosadíme-li do vztahu 3.2, dostaneme

$$\oint_K (x + y^2) dx + (x + y) dy = \iint_{\Omega} (1 - 2y) dx dy.$$

Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic

$$\begin{aligned}x &= a\rho \cos(\varphi), \\y &= b\rho \sin(\varphi), \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,\end{aligned}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (1 - 2y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2b\rho \sin(\varphi)) ab\rho \, d\rho \, d\varphi = \\&= ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho - 2b\rho^2 \sin(\varphi)) \, d\rho \, d\varphi = \\&= ab \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - 2b\frac{\rho^3}{3} \sin(\varphi) \right]_0^1 d\varphi = ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}b \sin(\varphi) \right) d\varphi = \\&= ab \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{2}{3}b \cos(\varphi) \right]_0^{2\pi} = ab\pi.\end{aligned}$$

Jednou z využívaných aplikací Greenovy věty je obsah rovinné oblasti.

Věta 3.4.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená a uzavřená množina splňující předpoklady Greenovy věty. Potom pro obsah rovinné oblasti platí*

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_K x \, dy - y \, dx.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý a plyne přímo z Greenovy věty.

Položíme-li

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x,$$

dostaneme z Greenovy věty požadovanou rovnost

$$\frac{1}{2} \oint_K x \, dy - y \, dx = \iint_{\Omega} dx \, dy = \mu(\Omega).$$

□

3.5 Příklady

1. Vypočítejte křivkové integrály II. druhu po dané křivce K

- (a) $\int_K (x + 2y + 1) \, dx + (2x + y - 1) \, dy$, kde K je kladně orientovaná křivka s parametrickým vyjádřením $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- (b) $\int_K x^2 y^2 \, dx + (e^x + e^y) \, dy$, kde K je kladně orientovaný obvod trojúhelníku s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 3]$, $C = [0, 3]$,
- (c) $\int_K \sqrt{x} \, dx + (2xy + 1) \, dy$, kde K je kladně orientovaná křivka s parametrickým vyjádřením $x = t^4 + t^2$, $y = t^3 + t$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$,

- (d) $\int_K xy \, dx + yx \, dy + (x + y - z) \, dz$, kde K je úsečka AB , $A = [2, 1, 2]$, $B = [3, 2, 4]$,
- (e) $\int_K \frac{x}{y} \, dx + (x^2 + y^2) \, dy + e^z \, dz$, kde K je kladně orientovaná křivka s parametrickým vyjádřením $x = 2t^3$, $y = t^2$, $z = 3 - t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$,
- (f) $\int_K y \, dx + yz^2 \, dy + (x^2 - y) \, dy$, kde K je kladně orientovaná křivka s parametrickým vyjádřením $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = 2t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

2. Pomocí Greenovy věty vypočtete

- (a) $\oint_K (y^2 - 3xy) \, dx + (xy + y + x) \, dy$, kde K je kladně orientovaná kružnice $(x - 1)^2 + y^2 = 1$,
- (b) $\oint_K (y - x)^2 \, dx + (2x^3 - x^2y^2 + y) \, dy$, kde K je kladně orientovaný obvod čtverce $ABCD$, $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [3, 3]$, $D = [0, 3]$,
- (c) $\oint_K (x^3y - 2xy) \, dx + (x^2y^3 + 5y^2) \, dy$, kde K je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$,
- (d) $\oint_K \left(\frac{x^3}{2} + 2xy - \frac{y^3}{3} \right) \, dx + \left(\frac{y^3}{2} + x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \, dy$, kde K je kladně orientovaná hranice množiny $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Výsledky:

1. (a) $2\pi(\pi + 1)$; (b) $3e - \frac{36}{5}$; (c) 4; (d) $\frac{21}{2}$; (e) $-e^3 + e^2 + \frac{13}{30}$; (f) $\pi(1 - 4\pi)$
2. (a) 4π ; (b) 81; (c) $\frac{23}{60}$; (d) $\frac{5}{3}\pi$.

Kapitola 4

Plochy

V této kapitole zavedeme pojem plocha a uvedeme některé její vlastnosti, které využijeme pro zavedení plošných integrálů I. a II. druhu. K nastudování této kapitoly jsem použil [1], [7], [11] a [12].

4.1 Plochy v \mathbb{R}^3

Nejprve uvedeme samotnou definici plochy v prostoru, pomocí které si vysvětlíme, co pod tímto pojmem budeme rozumět.

Definice 4.1.1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina, která je omezená jednoduchou uzavřenou křivkou K . Dále nechť $r : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení, které je definováno vektorovou funkcí

$$r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \quad [u, v] \in M.$$

Potom množina

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in M\}$$

se nazývá plocha v \mathbb{R}^3 a funkce $r(u, v)$ je parametrizace plochy S . Množina

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), [u, v] \in K\}$$

se pak nazývá okraj plochy S .

Definice 4.1.2. Plocha S s parametrickým vyjádřením $r(u, v)$, $[u, v] \in M$, se nazývá:

1. jednoduchá, jestliže $r(u, v)$ je prosté zobrazení na množině M ,
2. Jordanova neboli jednoduchá uzavřená plocha, jestliže existuje vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení kulové plochy na plochu S .

Jako příklady jednoduché uzavřené plochy můžeme uvést kulovou plochu, povrch krychle, povrch válce nebo povrch elipsoidu.

Definice 4.1.3. Nechť M je libovolná souvislá množina v \mathbb{R}^2 . Systém množin $M_i \subseteq M$, $i = 1, \dots, n$, budeme nazývat dělením množiny M , jestliže

1. sjednocení všech množin z M_i je M , tj. $M = \bigcup_i^n M_i$,
2. společnými body dvou libovolných množin systému mohou být pouze jejich hraniční body.

Definice 4.1.4. Nechť S je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{R}^3 , M_i je dělení množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a zobrazení $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ je jednojednoznačné. Potom množina $D = \{S_i = F(M_i), i = 1, \dots, n\}$ se nazývá dělení plochy S .

Definice 4.1.5. Nechť $D = \{S_1, \dots, S_n\}$ je dělení plochy S a $v = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$ je norma dělení, kde d_i je průměr plochy S_i , $i = 1, \dots, n$. Pokud pro posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ plochy S platí $\lim_{n \rightarrow \infty} v = 0$, pak se tato posloupnost dělení nazývá normální.

Definice 4.1.6. Řekneme, že plocha $S : r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$, $[u, v] \in M$, se nazývá hladká, jestliže platí

1. funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ a $\chi(u, v)$ mají spojité parciální derivace na M ,
2. pro $\forall [u, v] \in M$

$$h \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} = 2,$$

tj. vektory

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (\varphi_u(u, v), \psi_u(u, v), \chi_u(u, v)), \\ r_v(u, v) &= (\varphi_v(u, v), \psi_v(u, v), \chi_v(u, v)) \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislé pro $\forall [u, v] \in M$.

Definice 4.1.7. Řekneme, že plocha $S : r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$, $[u, v] \in M$, se nazývá po částech hladká, jestliže vznikla spojením konečné mnoha hladkých ploch.

Nechť S je hladká plocha s parametrickým vyjádřením

$$S : r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \quad [u, v] \in M.$$

Potom normálový vektor plochy S v bodě $[u, v] \in M$ se rovná

$$\vec{n}(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v).$$

Označíme-li

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B(u, v) = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}, \quad (4.1)$$

pak normálový vektor k S můžeme napsat ve tvaru

$$\vec{n}(u, v) = (A(u, v), B(u, v), C(u, v)).$$

V případě, že hladká plocha S je zadaná v explicitním tvaru

$$z = f(x, y),$$

normálový vektor plochy S je

$$\vec{n}(x, y) = (-f_x, -f_y, 1).$$

Poznámka. Plochu S můžeme orientovat dvěma způsoby, tzn. vybrat jednu ze dvou stran této plochy a definovat normálový vektor v každém jejím bodě, který směřuje na zvolenou stranu plochy.

Nechť S je hladká plocha určená parametrickými rovnicemi

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \quad [u, v] \in M.$$

Jestliže normálový vektor $\vec{n}(u, v)$ má stejný směr jako normálový vektor určený orientací, pak tato parametrizace je souhlasná. Pokud $\vec{n}(u, v)$ má opačný směr než normálový vektor určený orientací, pak tato parametrizace je nesouhlasná.

4.2 Obsah plochy

Nechť S je hladká plocha zadaná v explicitním tvaru

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, z = f(x, y)\}.$$

Dělením plochy S rozdělíme plochu na n kousků. Na každém kousku $S_i, i = 1, \dots, n$, zvolíme libovolný bod A_i a v něm sestrojíme tečnou rovinu

$$\tau_i : z - f(x_i, y_i) = f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

Poté kousek S_i kolmo promítneme do tečné roviny τ_i a dostaneme množinu $M_i \subseteq \mathbb{R}^2$, která leží v τ_i . Její obsah označíme $m(M_i)$. Dále si označíme d_i jako průměr plochy S_i a zavedeme si normu dělení $v = \max_{1 \leq i \leq n}(d_i)$, která vyjadřuje na jak velké kousky jsme plochu S rozdělili.

Definice 4.2.1. Řekneme, že plocha S má konečný obsah, pokud existuje

$$m(S) = \lim_{v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(M_i),$$

která nezávisí na výběru bodů A_i . Číslo $m(S)$ se pak nazývá obsah plochy S .

Věta 4.2.1. *Nechť S je hladká plocha s parametrizací $r(u, v)$, $[u, v] \in M \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť $\vec{n}(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v)$ je normálový vektor plochy S . Potom plocha S má konečný obsah a platí*

$$m(S) = \iint_M |\vec{n}(u, v)| \, du \, dv = \iint_M \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, du \, dv,$$

kde A, B a C jsou zavedeny v (4.1).

Důkaz. Důkaz naleznete v [11]. □

Pokud plocha S je grafem funkce

$$z = f(x, y), \quad [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2,$$

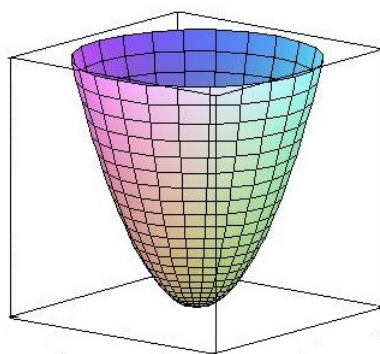
a funkce f má spojité parciální derivace f_x, f_y na ohraničené a jednoduše souvislé množině M . Pak vzorec pro obsah plochy S má tvar

$$m(S) = \iint_M |\vec{n}(x, y)| \, dx \, dy = \iint_M \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx \, dy,$$

kde $\vec{n}(x, y)$ je normálový vektor plochy S .

Příklad 4.1. Vypočítejte obsah plochy S , která je grafem funkce

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$



Obrázek 4.1: Plocha k příkladu 4.1

Řešení. Pro výpočet tohoto příkladu použijeme vzorec

$$m(S) = \iint_M \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx \, dy,$$

kde $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nejdříve si vypočítáme parciální derivace f_x a f_y .

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y,$$

$$m(S) = \iint_M \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Tento dvojný integrál vypočítáme pomocí transformace do polárních souřadnic

$$x = \rho \cos(\varphi),$$

$$y = \rho \sin(\varphi), \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Celkově tedy dostaneme

$$\begin{aligned} m(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2 \cos^2(\varphi) + 4\rho^2 \sin^2(\varphi)} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = 1 + 4\rho^2 \\ dt = 8\rho \, d\rho \\ 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 5 \end{array} \right] = 2\pi \int_1^5 \sqrt{t} \frac{1}{8} \, dt = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^5 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

Obsah parabolické plochy S (obr. 4.1) je roven $\frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1)$.

Kapitola 5

Plošné integrály I. druhu

V této kapitole se budeme zabývat plošnými integrály I. druhu. Nejprve si uvedeme jejich definici a základní vlastnosti. Následně si ukážeme způsob výpočtu na konkrétních příkladech a na závěr některé aplikace. K nastudování této kapitoly jsem použil [2], [7], [8], [10], [11] a [12].

5.1 Definice

Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ je po částech hladká plocha a nechť $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkce definovaná na ploše S . Nechť $D = \{S_1, \dots, S_n\}$ je dělení plochy S , které ji rozdělí na n částí. Obsahy jednotlivých částí S_i , $i = 1, \dots, n$, označíme ΔS_i . Dále v každé oblasti S_i zvolíme libovolný bod $A_i = [x_i, y_i, z_i]$ a vypočítáme v něm funkční hodnotu $f(x_i, y_i, z_i)$. Utvoříme tzv. integrální součet

$$T_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Pokud pro každou normální posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ plochy S a libovolný výběr bodů A_i existuje limita integrálního součtu, potom můžeme definovat plošný integrál I. druhu.

Definice 5.1.1. Existuje-li konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

která nezávisí na normální posloupnosti dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ plochy S ani na výběru bodů A_i , pak tuto limitu označíme

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS$$

a nazveme ji plošným integrálem I. druhu neboli plošným integrálem ze skalární funkce.

Výpočet plošného integrálu I. druhu spočívá v tom, že $\iint_S f(x, y, z) \, dS$ převedeme na dvojný integrál. Předpokládejme, že funkce $f(x, y, z)$ je spojitá a ohraničená na jednoduché hladké ploše S s parametrickým vyjádřením

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \quad [u, v] \in M.$$

Diferenciál plošného obsahu dS určíme ze vztahu

$$dS = |\vec{n}(u, v)| du dv = \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv,$$

kde $|\vec{n}(u, v)|$ je velikost normálového vektoru plochy S . Funkci $f(x, y, z)$ vyjádříme v proměnných u a v . Pak dostaneme rovnost

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_M f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad (5.1)$$

kde novým integračním oborem bude množina M .

Jestliže plocha S je grafem funkce $z = f(x, y)$, $[x, y] \in M \subset \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y)$ je spojitá po částech hladká funkce v M , potom dostáváme vztah

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_M f(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (5.2)$$

5.2 Vlastnosti

Vlastnosti plošného integrálů I. druhu jsou analogické s vlastnostmi křivkového integrálu I. druhu, proto si zde uvedeme jen ty nejdůležitější.

1. Homogenita vzhledem k integrandu

Nechť existuje integrál $\iint_S f(x, y, z) dS$ a nechť c je konstanta, $c \in \mathbb{R}$. Pak integrál $\iint_S cf(x, y, z) dS$ existuje a platí

$$\iint_S cf(x, y, z) dS = c \iint_S f(x, y, z) dS.$$

2. Aditivita vzhledem k integrandu

Nechť existují integrály $\iint_S f(x, y, z) dS$ a $\iint_S g(x, y, z) dS$. Pak integrál stojící v následující rovnosti na levé straně existuje a platí

$$\iint_S [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dS = \iint_S f(x, y, z) dS + \iint_S g(x, y, z) dS.$$

3. Aditivita vzhledem k integračnímu oboru

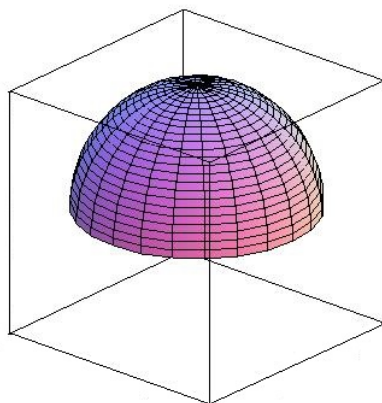
Nechť existuje integrál $\iint_S f(x, y, z) dS$ a plocha $S = S_1 \cup S_2$. Pak integrály stojící v následující rovnosti na pravé straně existují a platí

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS.$$

Příklad 5.1. Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_S x^2 z dS,$$

kde plocha S je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, $R > 0$.



Obrázek 5.1: Plocha k příkladu 5.1

Řešení. Pro parametrizaci kulové plochy (obr. 5.1) zvolíme sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= R \cos(u) \sin(v), \\y &= R \sin(u) \sin(v), \\z &= R \cos(v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Nejdříve vypočítáme velikost normálového vektoru $\vec{n}(u, v)$.

$$\begin{aligned}A(u, v) &= \begin{vmatrix} R \cos(u) \sin(v) & 0 \\ R \sin(u) \cos(v) & -R \sin(v) \end{vmatrix} = -R^2 \cos(u) \sin^2(v), \\B(u, v) &= \begin{vmatrix} 0 & -R \sin(u) \sin(v) \\ -R \sin(v) & R \cos(u) \cos(v) \end{vmatrix} = -R^2 \sin(u) \sin^2(v), \\C(u, v) &= \begin{vmatrix} -R \sin(u) \sin(v) & R \cos(u) \sin(v) \\ R \cos(u) \cos(v) & R \sin(u) \cos(v) \end{vmatrix} = \\&= -R^2 \sin^2(u) \sin(v) \cos(v) - R^2 \cos^2(u) \sin(v) \cos(v) = -R^2 \sin(v) \cos(v).\end{aligned}$$

Velikost normálového vektoru plochy S se tedy rovná

$$|\vec{n}(u, v)| = \sqrt{R^4 \cos^2(u) \sin^4(v) + R^4 \sin^2(u) \sin^4(v) + R^4 \sin^2(v) \cos^2(v)} = R^2 \sin(v).$$

Nyní po dosazení do (5.1) můžeme plošný integrál vypočítat jako

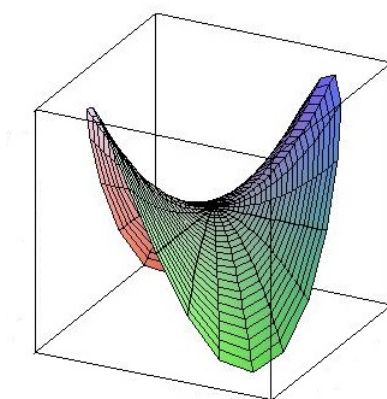
$$\begin{aligned}\iint_S x^2 z \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2(u) \sin^2(v) R \cos(v) R^2 \sin(v) \, dv \, du = \\&= R^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \sin^3(v) \cos(v) \, dv \, du = \left| \begin{array}{l} t = \sin(v) \\ dt = \cos(v) \, dv \\ 0 \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 \end{array} \right| =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= R^5 \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du \int_0^1 t^3 dt = R^5 \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{R^5}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du \\
 &= \frac{R^5}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \frac{R^5}{8} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{4}.
 \end{aligned}$$

Příklad 5.2. Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_S \frac{z^2}{x^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dS,$$

kde S je část plochy $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$ vyobrazená na obr. 5.2.



Obrázek 5.2: Plocha k příkladu 5.2

Řešení. Nejprve si vyjádříme množinu M a funkci $f(x, y)$ tak, abychom mohli určit parciální derivace f_x a f_y , tedy

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$f(x, y) = xy,$$

$$f_x(x, y) = y,$$

$$f_y(x, y) = x.$$

Nyní můžeme plošný integrál převést na dvojný podle vztahu (6.1) a vypočítat ho jako

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{z^2}{x^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dS &= \iint_M \frac{x^2 y^2}{x^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \\
 &= \iint_M y^2 (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos(\varphi), \quad \rho \in [0, 1] \\ y = \rho \sin(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin^2(\varphi) (\rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\varphi) + 1) \rho d\rho d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \sin^2(\varphi) (1 + \rho^2) d\rho d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin^2(\varphi)(\rho^3 + \rho^5) d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \\
&= \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{5}{24} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{12}.
\end{aligned}$$

5.3 Aplikace plošného integrálu I. druhu

Pomocí plošného integrálu I. druhu můžeme vypočítat některé fyzikální charakteristiky plochy S .

1. Obsah plochy

Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ po částech hladká plocha, pak pro její obsah $m(S)$ platí

$$m(S) = \iint_S dS.$$

2. Hmotnost plochy

Jestliže plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ má konstantní hustotu ρ , pak se její hmotnost rovná součinu jejího obsahu a hustoty. V případě, že hustota ρ není konstantní, ale závisí na poloze bodu na ploše, tedy $\rho = \rho(x, y, z)$, potom hmotnost plochy je dána vztahem

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

3. Statické momenty plochy

Statické momenty plochy S vzhledem k souřadným rovinám xy , xz a yz vypočítáme pomocí následujících vztahů

$$S_{xy} = \iint_S \rho(x, y, z) z dS,$$

$$S_{xz} = \iint_S \rho(x, y, z) y dS,$$

$$S_{yz} = \iint_S \rho(x, y, z) x dS,$$

kde $\rho(x, y, z)$ je hustota plochy S v bodě $[x, y, z]$.

4. Těžiště

Těžiště plochy S určíme jako

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right],$$

kde m je hmotnost a S_{xy} , S_{xz} , S_{yz} jsou statické momenty plochy S .

5. Momenty setrvačnosti plochy

Pro momenty setrvačnosti plochy S vzhledem k osám x , y , z a ose otáčení o v počátku platí

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dS,$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dS,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dS,$$

$$I_o = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dS,$$

kde $\rho(x, y, z)$ je hustota plochy S v bodě $[x, y, z]$.

Pokud chceme určit momenty setrvačnosti vzhledem k rovinám xy , xz a yz , tak platí

$$I_{xy} = \iint_S z^2 \rho(x, y, z) \, dS,$$

$$I_{xz} = \iint_S y^2 \rho(x, y, z) \, dS,$$

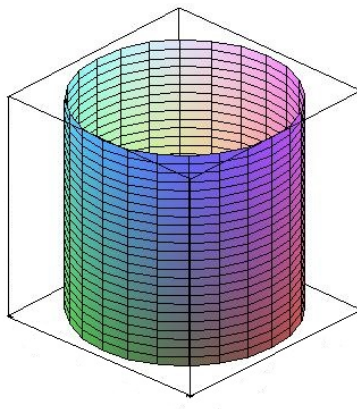
$$I_{yz} = \iint_S x^2 \rho(x, y, z) \, dS.$$

Příklad 5.3. Pro válcovou plochu S s parametrickým vyjádřením

$$x = \cos(u), \, y = \sin(u), \, z = v, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, \, v \in \langle 0, 2 \rangle,$$

s hustotou $\rho(x, y, z) = z^2$ určete

1. její hmotnost,
2. statické momenty vzhledem k rovinám xy , xz a yz ,
3. těžiště.



Obrázek 5.3: Plocha k příkladu 5.3

Řešení. Nejprve vypočítáme velikost normálového vektoru $\vec{n}(u, v)$ plochy S (obr. 5.3).

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \begin{vmatrix} \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos(u), \\ B(u, v) &= \begin{vmatrix} 0 & -\sin(u) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \sin(u), \\ C(u, v) &= \begin{vmatrix} -\sin(u) & \cos(u) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Velikost normálového vektoru válcové plochy se rovná

$$|\vec{n}(u, v)| = \sqrt{\cos^2(u) + \sin^2(u)} = 1.$$

1. Hmotnost válcové plochy, po dosazení do vzorce pro výpočet hmotnosti, vypočteme jako

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 v^2 \, dv \, du = 2\pi \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

2. Dosadíme-li do vzorců, pro výpočet statických momentů vzhledem k rovinám xy , xz a yz , dostaneme

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 v^3 \, dv \, du = 2\pi \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi, \\ S_{xz} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sin(u) v^2 \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \sin(u) \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} [-\cos(u)]_0^{2\pi} = 0, \\ S_{yz} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \cos(u) v^2 \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos(u) \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} [\sin(u)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

3. Pro určení těžiště plochy S využijeme její statické momenty a její hmotnost, tedy

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m} = 0 \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m} = 0, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{8\pi}{\frac{16\pi}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Těžiště válcové plochy S se nachází v bodě $T = [0, 0, \frac{3}{2}]$.

5.4 Příklady

1. Vypočítejte plošné integrály I. druhu přes danou plochu S

- (a) $\iint_S (x^2 + y^2 + z) \, dS$, kde S je grafem funkce $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$,
- (b) $\iint_S (x^2 y + z) \, dS$, kde S je část roviny $x + y + z = 1$ ležící v prvním oktantu,
- (c) $\iint_S \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} \, dS$, kde S je grafem funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{a}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$,

- (d) $\iint_S \frac{x+z}{3} dS$, kde S je válcová plocha $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 1$,
- (e) $\iint_S z dS$, kde plocha S je zadána pomocí parametrického vyjádření $r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$, $u \in \langle 0, 1 \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- (f) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, kde plocha S je zadána pomocí parametrického vyjádření $r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$, $u \in \langle 0, 1 \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

2. Pro kuželovou plochu

$$z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 3,$$

s hustotou $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ určete

- (a) její obsah,
 (b) její hmotnost,
 (c) statické momenty vzhledem k rovinám xy , xz a yz ,
 (d) těžiště.

Výsledky

1. (a) $\frac{(17^{\frac{3}{2}}-1)\pi}{3}$; (b) $\frac{11\sqrt{3}}{60}$; (c) $3\pi a^3$; (d) π ; (e) $\frac{(5^{\frac{5}{2}}+1)\pi}{60}$; (f) $\frac{(2^{\frac{5}{2}}-2)\pi}{3}$
2. (a) $8\sqrt{2}\pi$; (b) $\frac{52\sqrt{2}\pi}{3}$; (c) $40\sqrt{2}\pi, 0, 0$ (d) $[0, 0, \frac{30}{13}]$

Kapitola 6

Plošný integrál II. druhu

V této kapitole si představíme plošné integrály II. druhu. Uvedeme si jejich definice a na příkladech si ukážeme princip jejich výpočtu. Na závěr zmíníme dvě významné integrální věty. V této kapitole jsem čerpal z [2], [3], [6], [7], [9], [11], [12] a [13].

6.1 Definice

Nechť na po částech hladké ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ je definována vektorová funkce $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Libovolným dělením $D = \{S_1, \dots, S_n\}$ rozdělíme plochu S na n částí. Obsah každé části S_i , $i = 1, \dots, n$, označíme ΔS_i . Na každém kousku S_i zvolíme libovolný bod $A_i = [x_i, y_i, z_i]$ a vypočteme v něm funkční hodnotu $F(x_i, y_i, z_i)$. Body A_i tvoří tzv. výběr reprezentantů. Dále v každém bodě A_i sestrojíme jednotkový normálový vektor \vec{n}_i , jehož orientace bude shodná s orientací S_i . Utvoříme tzv. integrální součet

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \vec{n}_i \Delta S_i.$$

Definice 6.1.1. Nechť S je po částech hladká plocha, $F = (P, Q, R)$ a zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je vektorová funkce definovaná na ploše S . Jestliže existuje konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \vec{n}_i \Delta S_i,$$

kteřá nezávisí na normální posloupnosti dělení $\{D_n\}_1^\infty$ plochy S ani na výběru reprezentantů, pak tuto limitu značíme

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

a nazveme ji plošným integrálem II. druhu neboli plošným integrálem z vektorové funkce.

Při výpočtu plošného integrálu II. druhu opět tento integrál převedeme na dvojný integrál. Předpokládejme, že S je jednoduchá hladká plocha zadaná parametricky

$$S : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \quad [u, v] \in M,$$

a vektorová funkce $F = (P, Q, R)$ je spojitá na ploše S . Pak platí

$$\begin{aligned} & \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \\ &= \pm \iint_M \left[P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) A(u, v) \right. \\ & \quad \left. + Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) B(u, v) \right. \\ & \quad \left. + R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) C(u, v) \right] du dv, \quad (6.1) \end{aligned}$$

kde kladné znaménko volíme v případě, že orientace S je souhlasná s parametrickým vyjádřením, a znaménko záporné volíme v opačném případě.

Vlastnosti plošných integrálů II. druhu jsou analogické jako u plošných integrálů I. druhu a proto je zde už nebudeme uvádět. Liší se pouze v případě nesouhlasné orientace s danou parametrizací, kdy dochází ke změně znaménka.

Příklad 6.1. Vypočítejte plošný integrál

$$I = \iint_S xz dy dz + (x + y) dx dz + z dx dy,$$

kde S je část plochy $x + y + z = 3$ v prvním oktantu orientovaná směrem vnější normály.

Řešení. Plochu S můžeme vyjádřit jako

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - x - y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Zvolíme parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= 3 - u - v, \end{aligned}$$

$$M = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 3 \wedge 0 \leq v \leq 3 - u\}.$$

Následně vypočítáme normálový vektor plochy S a určíme orientaci. Tedy

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\ B(u, v) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ C(u, v) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Normálový vektor plochy S se rovná

$$\vec{n}(u, v) = (1, 1, 1).$$

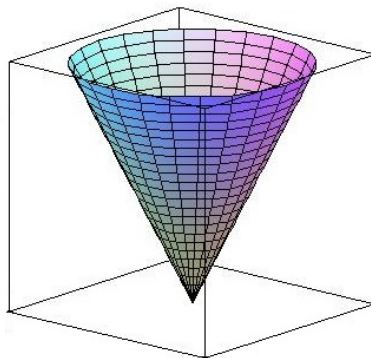
Vidíme, že parametrizace plochy S je souhlasná s její orientací. Nyní můžeme podle vztahu (6.1) provést samotný výpočet.

$$\begin{aligned}
 & \iint_S xz \, dy \, dz + (x+y) \, dx \, dz + z \, dx \, dy = \\
 &= \int_0^3 \int_0^{3-u} (u(3-u-v) + u + v + 3 - u - v) \, du \, dv = \\
 &= \int_0^3 \int_0^{3-u} (3u - u^2 - uv + 3) \, du \, dv = \int_0^3 \left[3uv - u^2v - \frac{uv^2}{2} + 3v \right]_0^{3-u} du = \\
 &= \int_0^3 \left(3u(3-u) - u^2(3-u) - \frac{u(3-u)^2}{2} + 3(3-u) \right) du = \\
 &= \int_0^3 \left(\frac{u^3}{2} - 3u^2 + \frac{3u}{2} + 9 \right) du = \left[\frac{u^4}{8} - u^3 + \frac{3u^2}{4} + 9u \right]_0^3 = \frac{135}{8}.
 \end{aligned}$$

Příklad 6.2. Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + yz^2 \, dx \, dy,$$

kde plocha S je část kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, orientovaná z kužele ven.



Obrázek 6.1: Plocha k příkladu 6.2

Řešení. Pro parametrizaci kuželové plochy (obr. 6.1) zvolíme válcové souřadnice

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos(\varphi), \\
 y &= \rho \sin(\varphi), \\
 z &= \rho,
 \end{aligned}$$

$$M = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Stejným způsobem jako v minulém příkladě určíme normálový vektor plochy S .

$$\begin{aligned}
 A(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} \sin(\varphi) & 1 \\ \rho \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = -\rho \cos(\varphi), \\
 B(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\varphi) \\ 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{vmatrix} = -\rho \sin(\varphi),
 \end{aligned}$$

$$C(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \cos(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \rho \cos^2(\varphi) + \rho \sin^2(\varphi) = \rho.$$

Normálový vektor plochy S se tedy rovná

$$\vec{n}(\rho, \varphi) = (-\rho \cos(\varphi), -\rho \sin(\varphi), \rho).$$

Nyní už stačí pouze rozhodnout, zda parametrizace plochy S je souhlasná s její orientací či nikoliv. Zvolíme si libovolný bod $[\rho, \varphi] \in M$, například $[1, \frac{\pi}{2}]$, a porovnáme směr normálového vektoru v tomto bodě s orientací plochy S .

$$\vec{n}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 1)$$

Vidíme, že orientace plochy S je nesouhlasná s daným parametrickým vyjádřením a proto před dvojný integrál budeme psát záporné znaménko. Nyní můžeme přikročit k samotnému výpočtu plošného integrálu.

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dx dz + yz^2 dx dy &= \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\rho \cos(\varphi)(-\rho \cos(\varphi)) + \rho \sin(\varphi)(-\rho \sin(\varphi)) + \rho^2 \rho \sin(\varphi) \rho \right) d\rho d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-\rho^2 \cos^2(\varphi) - \rho^2 \sin^2(\varphi) + \rho^4 \sin(\varphi)) d\rho d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-\rho^2 + \rho^4 \sin(\varphi)) d\rho d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^5}{5} \sin(\varphi) \right]_0^2 d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{8}{3} + \frac{32}{5} \sin(\varphi) \right) d\varphi = - \left[-\frac{8}{3} \varphi - \frac{32}{5} \cos(\varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

6.2 Gauss-Ostrogradského věta

Tato věta vyjadřuje vztah mezi plošným integrálem II. druhu a trojným integrálem. Dříve než si uvedeme Gauss-Ostrogradského větu, zavedeme si několik pojmů a uvedeme větu, která usnadní formulaci a důkaz věty.

Definice 6.2.1. Nechť funkce $h(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $h(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$. Pak množina

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

se nazývá normální obor vzhledem k ose z .

Poznámka. Analogicky definujeme normální obory vzhledem k osám x a y .

Definice 6.2.2. Řekneme, že množina $V \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá normální obor, jestliže lze vyjádřit jako konečné sjednocení normálních oborů vzhledem ke všem osám x , y a z .

Věta 6.2.1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je normální obor vzhledem k ose z a S je hranice množiny U orientovaná ve směru vnější normály. Dále nechť funkce R je spojitá spolu s parciální derivací R_z na množině \bar{U} , která je uzávěrem množiny U . Pak platí*

$$\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy = \iiint_U R_z(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Důkaz. Z definice 6.2.1 víme, že normální obor vzhledem k ose z můžeme vyjádřit jako

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Dále označme $S_1 = \{[x, y, h(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M\}$ dolní hranici, $S_2 = \{[x, y, g(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M\}$ horní hranici a S_3 boční hranici množiny U . Potom

$$\begin{aligned} \iiint_U R_z(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_M \left[\int_{h(x, y)}^{g(x, y)} R_z(x, y, z) \, dz \right] \, dx \, dy = \\ &= \iint_M [R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, h(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Levou stranu dokazované rovnosti můžeme vyjádřit jako

$$\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{S_1} R(x, y, z) \, dx \, dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) \, dx \, dy + \iint_{S_3} R(x, y, z) \, dx \, dy.$$

Integrály na pravé straně vyjádříme jako

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} R(x, y, z) \, dx \, dy &= - \iint_M R(x, y, h(x, y)) \, dx \, dy, \\ \iint_{S_2} R(x, y, z) \, dx \, dy &= \iint_M R(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy, \\ \iint_{S_3} R(x, y, z) \, dx \, dy &= 0. \end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \iiint_U R_z(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_{S_2} R(x, y, z) \, dx \, dy - \left(- \iint_{S_1} R(x, y, z) \, dx \, dy \right) + \\ &+ \iint_{S_3} R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Analogický způsobem můžeme formulovat věty pro normální obory vzhledem k osám x a y . Podobným způsobem jako v předchozí větě dokáže, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz &= \iiint_U P_x(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ \iint_S Q(x, y, z) \, dz \, dx &= \iiint_U Q_y(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Definice 6.2.3. Nechť vektorová funkce $F = (P, Q, R)$ je definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Divergencí vektorové funkce F v bodě $[x, y, z] \in M$ nazýváme číslo, které definujeme jako

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).$$

Věta 6.2.2 (Gauss-Ostrogradského). *Nechť V je normální obor v \mathbb{R}^3 , jehož hranice S je uzavřená plocha orientovaná ve směru vnější normály. Dále nechť vektorová funkce $F = (P, Q, R)$ je spolu se svými parciálními derivacemi P_x, Q_y, R_z spojitá na množině \bar{V} , která je uzávěrem V . Pak platí*

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \iiint_V \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_V [P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z)] dx dy dz. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Důkaz. Nyní dokážeme rovnost

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iiint_V R_z(x, y, z) dx dy dz,$$

kde V je sjednocení konečného počtu normálních oborů U_1, \dots, U_n vzhledem k ose z . Předpokládejme, že S_i je hranice každé oblasti U_i , $i = 1, \dots, n$, orientovaná ve směru vnější normály. Pak přímo z věty 6.2.1 plyne, že

$$\begin{aligned} \iiint_V R_z(x, y, z) dx dy dz &= \sum_{i=1}^n \iiint_{U_i} R_z(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} R_z(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_S R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

protože v každém bodě $D \in S_j \cap S_k$, $j \neq k$, se potkají dvě normály s opačnou orientací. Analogicky můžeme ukázat, že platí

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iiint_V P_x(x, y, z) dx dy dz, \quad (6.3)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iiint_V Q_y(x, y, z) dx dy dz, \quad (6.4)$$

kde v (6.3) je množina V sjednocení konečného počtu normálních oborů vzhledem k ose x a v případě (6.4) k ose y . Sečtením všech tří rovnic dostaneme uvedený vzorec ve větě. \square

Věta 6.2.3. *Nechť V je normální obor v \mathbb{R}^3 a S je jeho hranice orientovaná ve směru vnější normály. Pak pro objem množiny V platí*

$$m(V) = \frac{1}{3} \iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Důkaz. Důkaz plyne přímo z Gauss-Ostrogradského věty.

Položíme-li

$$P(x, y) = \frac{1}{3}x, \quad Q(x, y) = \frac{1}{3}y, \quad R(x, y) = \frac{1}{3}z,$$

dostaneme přímo z Gauss-Ostrogradského věty požadovanou rovnost

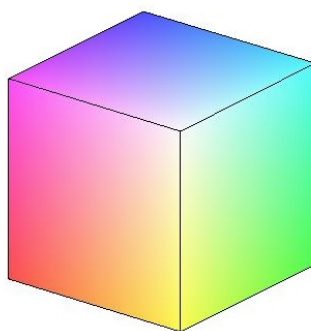
$$\frac{1}{3} \iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \iiint_V 3 \, dx \, dy \, dz = \iiint_V dx \, dy \, dz = m(V).$$

□

Příklad 6.3. Pomocí Gauss-Ostrogradského věty vypočítejte plošný integrál

$$\iint_S x^2 y \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy,$$

kde plocha S je povrch krychle $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$ orientovaná ve směru vnější normály (obr. 6.2).



Obrázek 6.2: Plocha k příkladu 6.3

Řešení. Nejdříve si vypočítáme příslušné parciální derivace.

$$P_x(x, y, z) = 2xy, \quad Q_y(x, y, z) = 1 \quad R_z(x, y, z) = 2z.$$

Nyní po dosazení do vztahu (6.2) můžeme integrál vypočítat jako

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 y \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (2xy + 1 + 2z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int_0^2 \int_0^2 [x^2 y + x + xz]_0^2 \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^2 4y + 2 + 2z \, dy \, dz = \int_0^2 [2y^2 + 2y + 2yz]_0^2 \, dz = \\ &= \int_0^2 8 + 4 + 4z \, dz = [12z + 2z^2]_0^2 = 32. \end{aligned}$$

6.3 Stokesova věta

Druhou důležitou integrální větou, kterou si zde uvedeme, je Stokesova věta. Tato věta vyjadřuje vztah mezi křivkovým a plošným integrálem.

Definice 6.3.1. Nechť vektorová funkce $F = (P, Q, R)$ je definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Rotací vektorové funkce F v bodě $[x, y, z] \in M$ nazýváme vektor definovaný předpisem

$$\text{rot } F(x, y, z) = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (x, y, z), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (x, y, z), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y, z) \right),$$

což můžeme pomocí determinantu zapsat jako

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

kde \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} jsou jednotkové vektory ve směru souřadných os.

Poznámka. Jednoduchá hladká plocha S je orientovaná souhlasně se svým okrajem K , pokud položíme dlaň pravé ruky kolmo k ploše S a platí, že palec ukazuje směr normály plochy a prsty ukazují orientaci křivky K .

Věta 6.3.1 (Stokesova). *Nechť M je otevřená množina v \mathbb{R}^3 a vektorová funkce $F = (P, Q, R)$ je spojitá i se svými parciálními derivacemi 1. řádu na množině M . Dále nechť $S \subset M$ je po částech hladká plocha, jejíž okraj tvoří uzavřená po částech hladká křivka K orientovaná souhlasně s plochou S . Pak platí*

$$\begin{aligned} \oint_K P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \iint_S \operatorname{rot} F(x, y, z) dS = \\ &= \iint_S (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx + (Q_x - P_y) dx dy. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Důkaz. Uvažujme plochu S , která je grafem funkce

$$z = f(x, y).$$

Nechť L je hranice množiny M a $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový normálový vektor plochy S . Předpokládejme, že plocha S je se svým normálovým vektorem \vec{n} souhlasně orientovaná. Transformaci křivkového integrálu na plošný integrál provedeme podle následujícího schématu.

$$\oint_K \longrightarrow \oint_L \longrightarrow \iint_M \longrightarrow \iint_S,$$

kde první projekce převede křivkový integrál přes prostorovou křivku K na křivkový integrál podél rovinné křivky L , následně tento integrál pomocí Greenovy věty převedeme na dvojný integrál přes množinu M a nakonec provedeme zpětnou projekci na plošný integrál přes plochu S .

Uvažujme integrál

$$\oint_K P(x, y, z) dx.$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \oint_K P(x, y, z) dx &= \oint_L P(x, y, f(x, y)) dx = - \iint_M \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy = \\ &= - \iint_M [P_y(x, y, f(x, y)) + P_z(x, y, f(x, y)) f_y(x, y)] dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_M \left[P_y(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} - \right. \\
&\quad \left. - P_z(x, y, f(x, y)) \frac{-f_y(x, y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right] \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy = \\
&= \iint_S [P_z(x, y, z)n_2 - P_y(x, y, z)n_3] \, dS = \iint_S P_z(x, y, z) \, dz \, dx - P_y(x, y, z) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Tato rovnost bude platit i v případě, že plocha S se skládá z konečného počtu částí S_1, \dots, S_n , kde K_i je okraj kousku S_i . Sečteme-li levou stranu předchozí rovnice od 1 do n , opět dostaneme integrál $\oint_K P(x, y, z) \, dx$, protože integrály přes společné hranice jednotlivých ploch se vzájemně vyruší, neboť po každé takové hranici se integruje dvakrát a to vždy s navzájem opačnými orientacemi hranice. Podobným způsobem můžeme dokázat rovnosti

$$\begin{aligned}
\oint_K Q(x, y, z) \, dy &= \iint_S Q_x(x, y, z) \, dx \, dy - Q_z(x, y, z) \, dy \, dz, \\
\oint_K R(x, y, z) \, dz &= \iint_S R_y(x, y, z) \, dy \, dz - R_x(x, y, z) \, dx \, dz.
\end{aligned}$$

Celkem tedy můžeme psát

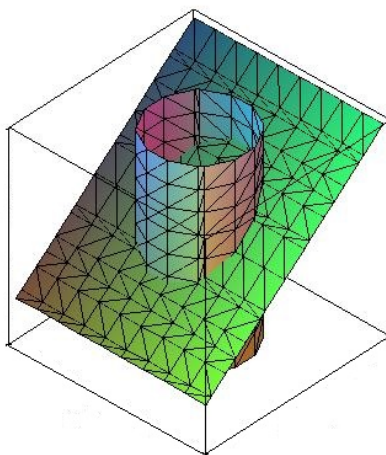
$$\begin{aligned}
\oint_K P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz &= \\
&= \iint_S (R_y - Q_z) \, dy \, dz + (P_z - R_x) \, dz \, dx + (Q_x - P_y) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

□

Příklad 6.4. Užitím Stokesovy věty vypočítejte integrál

$$\oint_K (y - z) \, dx + (2x + 3z) \, dy + x \, dz,$$

kde křivka K je průnik válce $x^2 + y^2 = 1$ s rovinou $x + z = 1$ orientovaná tak, že její průmět do roviny xy je orientován kladně (tj. proti směru hodinových ručiček).



Obrázek 6.3: Průnik válce s rovinou $x + z = 1$

Řešení. Křivka K je v tomto případě elipsa, která vznikla řezem válce $x^2 + y^2 = 1$ rovinou $x + z = 1$ (obr. 6.3). Nejprve si vypočítáme potřebné parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2, & \frac{\partial R}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -1, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= 3, & \frac{\partial R}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Rotace vektorové funkce F se rovná

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0 - 3, -1 - 1, 2 - 1) = (-3, -2, 1).$$

Plochu S , která je část roviny $x + z = 1$ ohraničená křivkou K , můžeme parametrizovat jako

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi), \\ y &= \rho \sin(\varphi), \\ z &= 1 - \rho \cos(\varphi), \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Nyní si vypočítáme normálový vektor plochy S

$$\begin{aligned} A(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) & \rho \sin(\varphi) \end{vmatrix} = \rho, \\ B(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} -\cos(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \end{vmatrix} = 0, \\ C(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \rho. \end{aligned}$$

Normálový vektor plochy S se tedy rovná

$$\vec{n}(\rho, \varphi) = (\rho, 0, \rho).$$

Po dosazení do vztahu (6.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \oint_K (y - z) dx + (2x + 3z) dy + x dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3, -2, 1)(\rho, 0, \rho) d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2\rho d\rho d\varphi = 2\pi \left[\frac{-2\rho^2}{2} \right]_0^1 = -2\pi. \end{aligned}$$

6.4 Příklady

1. Vypočítejte křivkové integrály II. druhu přes danou plochu S

- $\iint_S \frac{y}{x} dy dz + z dx dy$, kde S je kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientovaná ve směru vnější normály,
- $\iint_S y dy dz - x dx dz + z dx dy$, kde S je parabolická plocha $z = x^2 + y^2 \leq 4$ orientovaná normálou dovnitř,

- (c) $\iint_S (x+y) dy dz + (y^2+z) dx dz - yz^2 dx dy$, kde S je plocha $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$, orientovaná proti orientaci osy z .

2. Pomocí Gauss-Ostrogradského věty vypočtete

- (a) $\iint_S xy^2 dy dz + x^2 y dx dz - (2z+1) dx dy$, kde S je válcová plocha $x^2 + y^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq 2$ orientovaná normálou ven,
 (b) $\iint_S yz dy dz + y dx dz + 2z dx dy$, kde S je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, $R > 0$, orientovaná ve směru vnější normály.

3. Pomocí Stokesovy věty vypočtete

- (a) $\oint_K yz dx + xz dy + y^2 dz$, kde křivka K je obvod trojúhelníka s vrcholy $[2, 0, 0]$, $[0, 2, 0]$ a $[0, 0, 2]$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů,
 (b) $\oint_K (x^2 - y^3) dx + (x^3 - y^3) dy + y^2 z^2 dz$, kde křivka K vznikne jako průsečík kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$ a roviny $z = 1$ a je orientovaná proti směru pohybu hodinových ručiček při pohledu z kladné osy z .

Výsledky

1. (a) $\frac{4}{3}\pi$; (b) 8π ; (c) 0
 2. (a) 9π ; (b) $2\pi R^3$
 3. (a) $\frac{8}{3}$; (b) $\frac{3}{2}\pi$

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo popsat teorii a využití křivkového a plošného integrálu. Práce je rozčleněna do celkem šesti kapitol, z nichž první tři se vztahují ke křivkovému integrálu a zbylé tři k plošnému integrálu.

Úvodní kapitola je věnována křivkám, je zde uvedena samotná definice křivky, její základní druhy a vlastnosti, které jsou dále využívány u křivkového integrálu. Dále jsme se zabývali orientací křivky, která je důležitá při výpočtu křivkového integrálu II. druhu. V této kapitole je také odvozen vztah pro výpočet délky křivky.

Druhá kapitola pojednává o křivkovém integrálu I. druhu. Nejprve je zmíněna nezbytná definice křivkového integrálu I. druhu, dále i princip výpočtu, který je poté aplikován na konkrétních příkladech. Následně jsme se věnovali vlastnostem křivkového integrálu I. druhu, které jsou analogické s vlastnostmi určitého integrálu. Na závěr této kapitoly jsou představeny některé geometrické a fyzikální aplikace jako například hmotnost, statické momenty či momenty setrvačnosti křivky.

V následující kapitole se seznamujeme s křivkovým integrálem II. druhu. Stejně jako u křivkového integrálu I. druhu je zde uvedena jeho definice, způsob výpočtu a některé důležité vlastnosti. Součástí této kapitoly jsou i řešené příklady a vztah mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu. Dále jsme se také zabývali Greenovou větou, která vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem II. druhu a dvojným integrálem.

Čtvrtá kapitola se již věnuje plošným integrálům. Nejdříve je vytyčen pojem plocha a její důležité vlastnosti. Poté je popsán normálový vektor, který je nezbytný pro zavedení plošného integrálu I. a II. druhu. V další části kapitoly je vysvětlena orientace plochy, jejíž pochopení je potřebné pro výpočet plošného integrálu II. druhu. Závěrečná část je věnována odvození vztahu pro výpočet obsahu plochy.

Další kapitola, zabírající se plošným integrálem I. druhu, opět začíná uvedením samotné definice a důležitých vlastností. Dále je zde uveden způsob výpočtu, který spočívá v převedení plošného integrálu na dvojný. Poslední podkapitola je věnována fyzikálním aplikacím, pomocí kterých lze určit například hmotnost, statické momenty či těžiště plochy.

Poslední kapitola zkoumá plošný integrál II. druhu. Po jeho zavedení je vyřešeno několik příkladů, které ukazují způsob řešení tohoto druhu plošného integrálu. Tato kapitola zahrnuje dvě významné integrální věty. Gauss-Ostrogradského věta vyjadřuje vztah mezi plošným integrálem II. druhu a trojným integrálem. Druhou důležitou větou je Stokesova, která popisuje vztah mezi křivkovým a plošným integrálem.

V této bakalářské práci, zaměřující se na křivkový a plošný integrál, jsme zvolili postup zavedení teorie a pojmů nezbytných k pochopení dané problematiky a následně jsme tyto poznatky aplikovali do praxe v podobě několika řešených i neřešených příkladů. Tato práce může být užitečná pro další studenty, například jako doplňkový materiál ke studiu.

Seznam použité literatury

- [1] BUCK, R. Creighton a Ellen F. BUCK. *Advanced calculus. 2nd ed.* New York: McGraw-Hill, 1965.
- [2] BUDAK, Boris Michajlovič a Sergej Vasil'jevič FOMIN. *Multiple integrals, field theory and series: An advanced course in higher mathematics.* Přeložil V. M. VOLOSOV. Moscow: Mir publishers, 1973.
- [3] BUDINSKÝ, Bruno a Jura CHARVÁT. *Matematika II.* 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-01-01092-9.
- [4] DANĚČEK, Josef. *Integrální počet II.* Brno: CERM, 2000. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1817-6.
- [5] EDWARDS, C. Henry. *Advanced calculus of several variables.* New York: Academic Press, 1973. ISBN 0-12-232550-8.
- [6] KRBÁLEK, Milan. *Matematická analýza IV: cvičení.* Praha: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04528-2.
- [7] KROPÁČ, Jiří a Jaromír KUBEN. *Skalární a vektorové pole, křivkový a plošný integrál.* Brno: Vojenská akademie, 1999.
- [8] MEJLBRO, L. *Real functions of several variables - Examples of several integrals - Calculus 2c-8;* Ventus Publishing Aps, 2007. ISBN 978-87-7681-259-1.
- [9] NAGY, Jozef a Ondřej NAVRÁTIL. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03176-4.
- [10] NEUSTUPA, Jiří. *Matematika II.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02650-7.
- [11] NOVOTNÝ, Miroslav. *Integrální počet.* Dotisk. Praha: SPN, 1964. Učební texty vysokých škol.
- [12] VŘEŠŤÁLOVÁ, Hana a Evžen VŘEŠŤÁL. *Matematika: vektorová analýza : křivkový a plošný integrál.* Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 1997. ISBN 80-7157-251-9.
- [13] ŽENÍŠEK, Alexander. *Křivkový a plošný integrál.* 2. vyd. Brno: PC-DIR Real, 1999. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1497-9.

