MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Mocninné řady

Bakalářská práce

Brno 2007

Martina Tučková

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Miroslava Bartuška, DrSc. a uvedla v seznamu literatury všechny použité zdroje.

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Miroslavu Bartuškovi, DrSc. Za cenné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

………………..

Obsah

Úvod

Mocninné řady jsou speciálním případem řad funkčních. Mocninnou řadu tedy získáme, dosadíme-li ve funkční řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za $f_n(x)$ výraz $a_n(x-a)^n$. (Funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dostaneme, nahradíme-li v nekonečné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ členy a_n funkcemi f_n proměnné x, definovanými na intervalu I.)

První kapitola obsahuje věty a definice týkající se pojmů, které se v průběhu textu vyskytují a je třeba je znát, abychom textu porozuměli.

Druhá kapitola je již věnována definici samotné mocninné řady a její konvergenci.

Ve třetí kapitole se seznámíme s pojmem poloměr konvergence mocninné řady a postupem používaným při jeho určování.

Čtvrtá kapitola pojednává o vlastnostech mocninné řady. Konkrétně o její spojitosti v krajním bodě konvergenčního intervalu, její derivaci a integraci.

Pátá kapitola je věnována speciálním případům mocninné řady. Těmi jsou řada Taylorova a Maclaurinova.

Šestá a poslední kapitola je zaměřena na možnosti užití mocninných řad při výpočtu přirozeného logaritmu, výpočtu čísla π a při řešení diferenciálních rovnic.

Kapitola 1

Základní pojmy

Definice 1.1. Ke každé číselné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme přiřadit novou číselnou posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy jsou dány předpisem $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ pro každé n a výraz $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, který zapisujeme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a nazýváme *řadou* o členech a_n.

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a členy posloupnosti s_1, s_2, …, s_n, … pak první, druhý, …, n-tý, … částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 1.2. Jestliže má posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vlastní limitu s, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má *součet s*, což zapisujeme buď $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = s$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu nemá, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*. Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *určitě diverguje* k $\pm\infty$.

O divergentní řadě, která není určitě divergentní, řekneme, že *osciluje*.

Věta 1.1 (*Nutná podmínka konvergence*). Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definice 1.3. Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s libovolnými členy. Tuto řadu nazýváme *absolutně konvergentní*, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definice 1.4. Nechť posloupnost funkcí $\{s_n(x)\}$ konvergentní na intervalu I definuje funkci $s(x)$ rovnicí $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N takový, že pro všechna $n \geq N$ a pro každé $x \in I$ platí $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$, řekneme, že je posloupnost $\{s_n(x)\}$ stejnoměrně konvergentní na intervalu I.
O řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ řekneme, že je *stejnoměrně konvergentní* na intervalu I, je-li na tomto intervalu stejnoměrně konvergentní příslušná posloupnost částečných součtů.

Ke zjišťování, zda je daná řada konvergentní či divergentní, existuje celá řada kriterií. My si zde však uvedeme jen ta, která jsou použita při dokazování platnosti vět v následujícím textu.

Věta 1.2 (*Srovnávací kriterium*). Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a pro všechna n jsou splněny nerovnosti $a_n \leq b_n$. Pak platí: Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 1.3 (*Limitní podílové kriterium*). Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada kladných čísel. Nechť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$, potom diverguje.

Věta 1.4 (*Leibnitzovo kriterium*). Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost, která konverguje k 0 pro $n \to \infty$, potom řada $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$, jejíž všechny členy a_n jsou kladná čísla, konverguje a má součet s splňující nerovnost $a_1 - a_2 <$ $< s < a_1$.

Věta 1.5 (*Weierstrassovo kriterium*). Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ řada funkcí definovaných na intervalu I. Nechť $|f_n(x)| \leq \gamma_n$ pro každé n a každé $x \in I$. Nechť číselná řada

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ konverguje. Potom řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu *I*.

Kapitola 2

Mocninná řada

Definice 2.1. *Mocninnou řadou* o středu v bodě a nazýváme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \,. \qquad [2.1]$$

Čísla a_0, a_1, a_2, … nazýváme *koeficienty* řady.

Je-li $a = 0$, dostaneme mocninnou řadu o středu v počátku, která je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \qquad [2.2]$$

Položíme-li v řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ za x číslo a nebo v řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za x číslo 0, vidíme, že řady konvergují a mají součet a_0.

Věta 2.1. Každá mocninná řada konverguje ve svém středu.

Poznámka. Substitucí $X = x - a$ přejde každá mocninná řada tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ do mocninné řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Dále tedy budeme uvažovat jen mocninnou řadu o středu v počátku.

Věta 2.2. Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, potom konverguje absolutně na otevřeném intervalu $(-\rho, \rho)$, kde $\rho = |x_0|$ a stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $\langle -\theta\rho, \theta\rho \rangle$, kde $0 < \theta < 1$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ konverguje na intervalu $(-\rho, \rho)$, kde $\rho = |x_0| \neq 0$. Z konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ plyne, že posloupnost členů řady konverguje k 0 pro $n \to \infty$, je tedy omezená. Existuje tedy číslo $M > 0$ takové, že je $|a_n x_0^n| \le M$ pro každé n. Dále platí $|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \dfrac{x^n}{x_0^n}\right| \le M \left|\dfrac{x^n}{x_0^n}\right| = M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ pro každé n. Pro $|x| < |x_0| = \rho$ je $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ a tedy geometrická řada $M + M\left|\dfrac{x}{x_0}\right| + M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ konverguje. Podle srovnávacího kriteria řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně na intervalu $(-\rho, \rho)$.

Tvrzení o stejnoměrné konvergenci dokážeme následovně: Buď $0 < \theta < 1$, potom geometrická řada $M + M\theta + M\theta^2 + \ldots + M\theta^n + \ldots$ konverguje. Protože pro každé n je splněna nerovnost $|a_n x^n| \le M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \le M\theta^n$ pro $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| \le \theta$ tzn. pro $x \in \langle -\theta\rho, \theta\rho \rangle$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na tomto intervalu podle Weierstrassova kriteria.

Věta 2.3. Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada o středu v počátku. Jestliže tato řada nekonverguje pro všechna $x \ne 0$, potom existuje číslo $r > 0$ takové, že řada konverguje absolutně pro všechna $|x| < r$ a diverguje pro všechna $|x| > r$.

Důkaz. Každý bod $x_0 \ne 0$, v němž mocninná řada konverguje, je krajním bodem intervalu $(-\rho, \rho)$, $\rho = |x_0|$, na němž řada konverguje. Jestliže tedy mocninná řada nekonverguje jen v počátku, označme množinu všech čísel x, v nichž konverguje, písmenem M. Množina M je buď shora omezená nebo shora neomezená.

Je-li M shora omezená, označme sup $M = r$. Zřejmě je $0 < r < \infty$. Je-li pro nějaké x splněna nerovnost $|x| > r$, potom $x \notin M$ a pro takové x mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje. Je-li pro jiné x splněna nerovnost $|x| < r$, potom existuje číslo $x_0 \in M$ takové, že platí $|x| < |x_0| \le r$. Protože v čísle x_0 mocninná řada konverguje, konverguje v čísle x absolutně.

Není-li M shora omezená, potom ať je x jakékoliv číslo, vždy existuje $x_0 \in M$ takové, že $|x| < x_0$ a mocninná řada tedy v čísle x konverguje absolutně.

Kapitola 3

Poloměr konvergence mocninné řady

Definice 3.1. Číslo r, o němž byla řeč v předchozí kapitole, nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Interval $(-r, r)$ nazýváme *konvergenčním intervalem* mocninné řady.

Poznámka. V případě, že mocninná řada konverguje jen ve svém středu, klademe $r = 0$. Jestliže konverguje pro každé $x \in (-\infty, \infty)$, klademe $r = \infty$.

Věta 3.1. Poloměr konvergence r mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je dán vzorcem

$$r = \frac{1}{\lambda}, \text{ kde } \lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} . \qquad [3.1]$$

Klademe $r = 0$ pro $\lambda = +\infty$ a $r = \infty$ pro $\lambda = 0$.

Důkaz. Nechť $\lambda = 0$. Buď $x_0 \neq 0$ libovolné číslo. Potom je zřejmě $\frac{1}{2|x_0|} > 0$. Protože je $\lambda = 0$, existuje index N takový, že je nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$ splněna pro všechna $n \geq N$. Odtud vyplývá, že je $|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$ pro skoro všechna n a tedy podle srovnávacího kriteria řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v čísle x_0 konverguje absolutně, neboť geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní řada s kvocientem $\frac{1}{2}$.

Nechť $\lambda = +\infty$. Nejdříve provedeme tuto úvahu: Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v čísle $x_0 \neq 0$, konverguje posloupnost členů řady $\{a_n x^n\}$ k 0 pro $n \to \infty$ a je tedy omezená. Tedy i posloupnost $\left\{\sqrt[n]{|a_n x_0^n|}\right\}$ je omezená. Existuje proto číslo $M_1 > 0$

takové, že platí nerovnost $\sqrt[n]{|a_n x_0^n|} < M_1$. Odtud vyplývá, že pro všechna n platí nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} < M$, kde $M = \dfrac{M_1}{|x_0|}$. Tedy i posloupnost $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ je omezená.

Je-li tedy $\lambda = +\infty$, znamená to, že posloupnost $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ je neomezená a tedy podle předchozí úvahy nemůže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergovat v žádném čísle $x \neq 0$.

Nechť $0 < \lambda < +\infty$. Buď x_0 takové číslo, že $|x_0| < \dfrac{1}{\lambda}$. Potom lze zvolit číslo $\rho > 0$ takové, že $|x_0| < \rho < \dfrac{1}{\lambda}$. Je tedy $\dfrac{1}{\rho} > \lambda$ a pro skoro všechna n platí nerovnost $\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} < \dfrac{1}{\rho}$ a tedy také nerovnost $\sqrt[n]{|a_n x_0^n|} < \dfrac{x_0}{\rho}$ a $|a_n x_0^n| < \left(\dfrac{|x_0|}{\rho}\right)^n$. Podle srovnávacího kriteria řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v čísle x_0 absolutně, neboť geometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{|x_0|}{\rho}\right)^n$ je konvergentní řada s kvocientem $\dfrac{|x_0|}{\rho} < 1$.

Buď nyní x_0 takové číslo, že platí $|x_0| > \dfrac{1}{\lambda}$. Potom $\dfrac{1}{|x_0|} < \lambda$. Pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ tedy platí nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{|x_0|}$ a tedy také nerovnost $|a_n x_0^n| > 1$. Proto posloupnost $\{a_n x_0^n\}$ nekonverguje k 0 pro $n \to \infty$ a řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v bodě x_0 diverguje.

Poznámka. Poloměr r konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je tedy dán vlastností posloupnosti $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$. Jestliže má posloupnost $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ limitu λ, potom $r = \dfrac{1}{\lambda}$ a klademe $r = 0$ pro $\lambda = +\infty$ a $r = \infty$ pro $\lambda = 0$.

Příklad 1. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ má poloměr konvergence $r = 1$.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \text{ neboť } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \text{ Takže } r = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Příklad 2. Řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ má poloměr konvergence $r = +\infty$.

Buď k libovolné přirozené číslo. Potom pro $n > k$ platí $n! \geq k!k^{n-k}$ a tedy $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{k!}\sqrt[n]{k^{n-k}} = \sqrt[n]{k!}k^{1-\frac{k}{n}}$. Protože $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k!}k^{1-\frac{k}{n}} = k$, je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} \geq k$. Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$ a tedy $\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. Takže $r = +\infty$.

Příklad 3. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ má poloměr konvergence $r = 0$.

$\lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Tedy $r = 0$.

Kapitola 4

Vlastnosti mocninných řad

4.1 Spojitost v krajním bodě konvergenčního intervalu

Poznámka. Součet mocninné řady $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je spojitá funkce uvnitř konvergenčního intervalu $(-r, r)$, neboť členy řady jsou spojitými funkcemi a stejnoměrně konvergentní na každém uzavřeném intervalu ležícím uvnitř konvergenčního intervalu.

Věta 4.1.1 (*Abelova*). Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v pravém (levém) krajním bodě konvergenčního intervalu, potom je součet $s(x)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v tom bodě funkce spojitá zleva (zprava).

Důkaz. Nechť řada $\sum_{n=é}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v pravém krajním bodě r konvergenčního intervalu $(-r, r)$. Máme dokázat, že $\lim_{x \to r-} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

Lze předpokládat, že $r = 1$, neboť jinak provedeme substituci $x = rz$ a místo řady $\sum_{n=é}^{\infty} a_n x^n$ budeme uvažovat řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n$, která konverguje pro $z = 1$.

Nechť tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $r = 1$ a konverguje pro $x = 1$. Máme dokázat, že $\lim_{x \to 1-} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (= s(1))$. Stačí tedy dokázat, že řada konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Označme $s_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ a $r_{mn} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$, kde $n > m$. Potom $s_n(x) - s_m(x) = a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n = r_{m,m+1} x^{m+1} + (r_{m,m+2} - r_{m,m+1}) x^{m+2} + \ldots + (r_{m,n} - r_{m,n-1}) x^n = r_{m,m+1}(x^{m+1} - x^{m+2}) + r_{m,m+2}(x^{m+2} - x^{m+3}) + \ldots + r_{m,n-1}(x^{n-1} - x^n) +$

$r_{mn}x^n$. Posloupnost zbytků $\{r_{mn}\}$ konverguje k 0 pro $n \to \infty$, tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N takový, že pro $n > m \geq N$ platí $|r_{mn}| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dále pro $0 \leq x \leq 1$ je $x^\gamma - x^{\gamma+1} \geq 0$ pro každé přirozené γ. Tedy pro $n > m \geq N$ a $0 \leq x \leq 1$ máme $|s_n(x) - s_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon|x^{m+1} - x^{m+2}| + \frac{1}{2}\varepsilon|x^{m+2} - x^{m+3}| + \ldots + \frac{1}{2}\varepsilon|x^{n-1} - x^n| + \frac{1}{2}\varepsilon x^n = \frac{1}{2}\varepsilon(x^{m+1} - x^{m+2} + x^{m+2} - x^{m+3} + \ldots + x^{n-1} - x^n + x^n) = \frac{1}{2}\varepsilon x^{m+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ stejnoměrně konvergentní.

Příklad. Řada $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ má poloměr konvergence $r = 1$ a konverguje i pro $x = 1$, neboť alternující řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ konverguje podle Leibnitzova kriteria. V důsledku Abelovy věty tedy platí

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

4.2 Derivace

Definice 4.2.1. Derivujeme-li mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ člen po členu, dostaneme novou mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^n + \ldots, \qquad [4.2.1]$$

kterou nazýváme *derivací* mocninné řady.

Věta 4.2.1. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a její derivace $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mají tentýž poloměr konvergence.

Důkaz. Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 > 0$, je $\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ mají tentýž poloměr konvergence.

Ale druhá řada se dá psát ve tvaru $x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, takže derivace mocninné řady má tentýž poloměr konvergence jako daná řada.

Věta 4.2.2. Je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x)$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = s'(x)$, $x \in \langle -\theta r, \theta r \rangle$, kde 0 < < θ< 1.

Poznámka. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ je opět mocninná řada a má tedy na konvergenčním intervalu $\langle -r, r \rangle$ derivaci. Derivací je opět mocninná řada s týmž poloměrem konvergence *r*.

Věta 4.2.3. Součet mocninné řady je funkce, která má na konvergenčním intervalu derivaci libovolného řádu. Je-li *k* přirozené číslo, potom je

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}. \qquad [4.2.2]$$

Příklad. Víme, že $1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$ pro –1 < x < 1. Derivací řady člen po členu dostaneme $1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$ pro –1 < x < 1.

4.3 Integrace

Definice 4.3.1. Mocninnou řadu $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence *r* můžeme *integrovat* od 0 do *x*, kde |*x*| < *r*, člen po členu. Platí

$$\int_0^x s(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + ... + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ..., \qquad [4.3.1]$$

kde $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Poloměr konvergence nové řady je opět *r*.

Důkaz. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle -\theta r, \theta r\rangle$, 0 < θ < 1, řadu tedy můžeme integrovat člen po členu od 0 do x, kde $x \in \langle -\theta r, \theta r\rangle$.

Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tedy řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ mají tentýž poloměr konvergence. Ale řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ lze psát ve tvaru $x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$, takže i tato řada má poloměr konvergence r.

Příklad 1. Integrujeme-li člen po členu mocninnou řadu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots$$

v mezích od 0 do x, kde $x \in (-1,1)$, dostaneme řadu

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \ .$$

Tato řada konverguje i pro $x = 1$, takže v tomto bodě platí uvedený rozvoj podle Abelovy věty.

Příklad 2. Integrujeme-li člen po členu mocninnou řadu

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \ldots$$

v mezích od 0 do x, kde $x \in (-1,1)$, dostaneme řadu

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \ .$$

Tato řada konverguje i pro $x = 1$ a $x = -1$, takže v těchto bodech platí uvedený rozvoj podle Abelovy věty.

Kapitola 5

Taylorova a Maclaurinova řada

5.1 Taylorova a Maclaurinova řada

Věta 5.1.1. Nechť funkce $f(x)$ je dána součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na jejím konvergenčním intervalu. Potom koeficienty a_n jsou dány vzorci

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots\ . \qquad [5.1.1]$$

Důkaz. Pro funkci $f(x)$ na konvergenčním intervalu platí:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \\
f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots, \\
&\ \vdots \\
f^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n a_n + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1) a_{n+1} x + \ldots, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Jestliže položíme ve všech rovnostech $x = 0$, dostaneme vzorce pro koeficienty mocninné řady.

Definice 5.1.1. Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x = a$ derivace libovolného řádu. Potom lze napsat mocninnou řadu s n-tým koeficientem $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ve tvaru

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\ . \qquad [5.1.2]$$

Skutečnost, že tato řada přísluší k funkci $f(x)$, značíme

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\ . \quad [5.1.3]$$

a takto utvořenou mocninnou řadu nazýváme *Taylorovou řadou* funkce $f(x)$ v bodě a.

Definice 5.1.2. Nechť funkce $f(x)$ má v bodě $x = 0$ derivace libovolného řádu. Potom k funkci $f(x)$ přísluší mocninná řada s koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, což zapisujeme

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \; . \qquad [5.1.4]$$

Tuto mocninnou řadu nazýváme *Maclaurinovou řadou* funkce $f(x)$. Je to tedy Taylorova řada funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$.

Věta 5.1.2. Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ derivace libovolného řádu. Nechť $R_n(x)$ je pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ zbytek v Taylorově vzorci

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \; [5.1.5]$$

pro n = 1, 2, 3, … . Potom Taylorova řada funkce $f(x)$ v bodě a konverguje na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ k funkce $f(x)$, právě když posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ na tomto intervalu konverguje k 0 pro $n \to \infty$.

Důkaz. Jestliže utvoříme posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}$ Taylorovy řady pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$, je

$$s_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n ,$$

takže $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Z této rovnosti plyne na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

5.2 Rozvoj funkce do Taylorovy a Maclaurinovy řady

Definice 5.2.1. Konverguje-li Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje a má-li na konvergenčním intervalu součet $f(x)$, píšeme místo symbolu ~ rovnítko =. Dostáváme tedy vzorec

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \quad [5.2.1]$$

kterému říkáme *rozvoj funkce f(x) do Taylorovy řady* v bodě a.

Je-li a = 0, dostáváme *rozvoj funkce do Maclaurinovy řady* ve tvaru

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad [5.2.2]$$

Věta 5.2.1. Jestliže jsou všechny derivace funkce $f(x)$ rovnoměrně omezené na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, potom posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ na tomto intervalu konverguje k 0 pro $n\to\infty$.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje číslo $M > 0$ takové, že jsou nerovnosti $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ splněny pro každé n a každé $x\in(a-\delta, a+\delta)$.

Protože $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, máme $\left|R_n(x)\right|=\dfrac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$ pro $|x-a|<\delta$.

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$, je tedy i $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$.

5.3 Rozvoje některých elementárních funkcí do Maclaurinovy řady

5.3.1 Rozvoj funkce e^x

Funkce $f(x) = e^x$ má derivaci libovolného řádu pro $x\in(-\infty,\infty)$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad [5.3.1]$$

Pro hodnoty derivací v bodě x = 0 dostaneme $f^{(n)}(0) = 1$.

Všechny derivace funkce $f(x) = e^x$ jsou rovnoměrně omezené na každém intervalu $(-R, R)$, neboť pro libovolné $R > 0$ platí nerovnosti $0 < e^x < e^R$, takže posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$, kde $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$, na intervalu $(-\infty,\infty)$ konverguje k 0 pro $n\to\infty$, protože pro pevné x platí $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

Maclaurinova řada má tvar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in (-\infty, \infty). \qquad [5.3.2]$$

5.3.2 Rozvoj funkce sin *x*

Funkce $f(x)$ = sin x má derivaci libovolného řádu pro $x \in (-\infty, \infty)$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \qquad [5.3.3]$$

Pro hodnoty derivací v bodě $x = 0$ dostáváme:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \text{pro } n = \begin{cases} 4k+1 \\ sudé, \text{k} = 0, 1, 2, \ldots \\ 4k+3 \end{cases}.$$

Všechny derivace funkce $f(x)$ = sin x jsou rovnoměrně omezené, neboť $\left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ pro každé n a každé $x \in (-\infty, \infty)$, takže posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ konverguje k 0 pro $n \to \infty$.

Maclaurinova řada má tvar

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ x \in (-\infty, \infty). \qquad [5.3.4]$$

5.3.3 Rozvoj funkce cos *x*

Funkce $f(x)$ = cos x má derivaci libovolného řádu pro $x \in (-\infty, \infty)$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \qquad [5.3.5]$$

Pro hodnoty derivací v bodě $x = 0$ dostáváme:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \text{pro } n = \begin{cases} 4k \\ liché, \text{k} = 0, 1, 2, \ldots \\ 4k+2 \end{cases}.$$

Všechny derivace funkce $f(x)$ = cos x jsou rovnoměrně omezené, $\left|\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ pro každé n a každé $x \in (-\infty, \infty)$, takže posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ na $(-\infty, \infty)$ konverguje k 0 pro $n \to \infty$.

Maclaurinova řada má tvar

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in (-\infty, \infty). \qquad [5.3.6]$$

5.3.4 Rozvoj funkce ln(1 + x)

Funkce $f(x)$ = ln(1 + x) má derivaci libovolného řádu pro $x \in (-1, \infty)$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \qquad [5.3.7]$$

Pro hodnoty derivací v bodě x = 0 dostaneme $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,\ n \ge 1$, $f(0) = 0$.

Posloupnost zbytků $\{R_n(x)\}$ na intervalu $(-1, 1\rangle$ konverguje k 0 pro $n \to \infty$.

Jestliže $x \in \langle 0, 1\rangle$, napíšeme zbytek v Lagrangeově tvaru:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \text{ kde } 0 < \theta < 1.$$

Pro uvažovaná x potom máme $|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{n+1}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ a $x \in \langle 0, 1\rangle$.

V případě, že $x \in (-1, 0)$, napíšeme zbytek v Cauchyově tvaru:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta x) \cdot (1-\theta)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = (-1)^n (1-\theta)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1.$$

Pro uvažovaná x máme $\left|R_n(x)\right| = \left|(-1)^n (1-\theta)^n \dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$.

Protože $\theta \cdot (x+1) > 0$, máme 1 + θx > 1 – θ > 0 a podíl $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}$ je kladný a menší než 1, tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n = 0$ pro každé $x \in (-1, 0)$.

Protože činitel $\dfrac{|x|}{1-|x|}$ nezávisí na n, je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ a $x \in (-1, 0)$.

Maclaurinova řada má tvar

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1\rangle . \qquad [5.3.8]$$

Pro x = 1 řada konverguje podle Leibnizova kriteria, pro x = –1 dostaneme divergentní řadu.

5.3.5 Rozvoj funkce $(1 + x)^\alpha$, kde α je reálné číslo.

Funkce $f(x)$ = $(1 + x)^\alpha$, kde α je reálné číslo, má derivaci libovolného řádu pro $x \in (-1, \infty)$. Derivace n-tého řádu je dána vzorcem

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}, \text{ kde } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}. \qquad [5.3.9]$$

Pro hodnoty derivací v bodě x = 0 dostaneme $f^{(n)}(0) = n!\dbinom{\alpha}{n}$.

Posloupnost zbytků $R_n(x)$ na intervalu $(-1, 1)$ konverguje k 0 pro $n \to \infty$, neboť napíšeme-li zbytek v Cauchyově tvaru, máme

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta x) \cdot (1-\theta)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = (n+1)!\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot (1-\theta)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

a tedy

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{n!}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot(1+\theta x)^{\alpha-1}\right| \le \left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{n!}\right|\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\cdot\left|1+\theta x\right|^{\alpha-1}.$$

První činitel na pravé straně $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{n!}\right|$ je obecný člen konvergentní řady pro $|x|<1$, jak vyplývá z limitního podílového kriteria, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}\right|\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{|x|^{n+2}}{|x|^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x| = |x| < 1$. Tedy posloupnost členů konverguje k 0 pro $n\to\infty$, neboli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} = 0$ na intervalu $(-1,1)$.

Pro druhý činitel je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n = 0$, neboť kladný podíl $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ je menší než 1.

Třetí činitel je omezený, neboť leží mezi čísly $(1-|x|)^{\alpha-1}$ a $(1+|x|)^{\alpha-1}$. Odtud plyne $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ na intervalu $(-1,1)$.

Maclaurinova řada má tvar

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+...+\binom{\alpha}{n}x^n+...,\ x\in(-1,1). \qquad [5.3.10]$$

Nyní si uvedeme zvláštní případy rozvojů funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, když

a) $\alpha = -1$, b) $\alpha = \frac{1}{2}$, c) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Dostaneme:

a) $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-...+(-1)^{n-1}x^n+...,\ x\in(-1,1)$,

b) $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot...\cdot 2n}x^n+...,$
$x\in(-1,1)$,

c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+...+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot...\cdot 2n}x^n+...,$

$x \in (-1, 1)$.

Jestliže položíme v řadě pro $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ místo x výraz x^2, dostaneme řadu

d) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n} + \ldots,\ x \in (-1, 1)$.

Položíme-li v řadě pro $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ místo x výraz $-x^2$, dostaneme řadu

e) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}x^{2n} + \ldots$.
$x \in (-1, 1)$.

Kapitola 6

Užití mocninných řad

6.1 Výpočet přirozených logaritmů

Výpočet přirozených logaritmů kladných čísel provedeme pomocí rozvoje funkce ln(1 + x) do Maclaurinovy řady, který je tvaru

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{pro } x \in \left(-1,1\right\rangle. \tag{1}$$

Pomocí této řady tedy lze vypočítat logaritmy čísel z intervalu $\left(0,2\right\rangle$. Jestliže položíme v řadě (1) za x výraz $(-x)$ a uvažujeme-li $|x| < 1$, dostaneme

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \quad \text{pro } x \in \left\langle -1,1\right). \tag{2}$$

Po odečtení řady (2) od řady (1) dostaneme řadu

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \quad \text{pro } x \in \left(-1,1\right). \tag{3}$$

Pomocí řady (3) lze vypočítat logaritmy všech kladných čísel, neboť je-li a kladné číslo, stačí položit $\frac{1+x}{1-x} = a$, odtud $x = \frac{a-1}{a+1}$, přičemž platí $-1 < x = \frac{a-1}{a+1} < 1$. Pro výpočet ln a, $a > 0$ tedy do řady (3) dosadíme $x = \frac{a-1}{a+1}$.

Příklad. Chceme-li například vypočítat ln 3, položíme $\frac{1+x}{1-x} = 3$, odtud $x = \frac{1}{2}$. Tedy

$$\ln 3 = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots\right].$$

6.2 Výpočet čísla π

K výpočtu čísla π lze použít rozvoje funkcí arsin x a arctg x do Maclaurinovy řady.

Jestliže položíme v řadě

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots,\ x \in (-1,1),$$

argument $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots$$

a tedy

$$\pi = 3\left(1 + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^6} + \ldots\right).$$

Jestliže položíme v řadě

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,\ x \in \langle -1,1\rangle,$$

argument $x = 1$, dostaneme

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

a tedy

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Jestliže položíme argument $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dostaneme

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots\right)$$

a tedy

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots\right).$$

6.3 Řešení diferenciálních rovnic

Většina diferenciálních rovnic prvního řádu je tvaru $y' = f(x, y)$, kde funkce $f(x, y)$ je mnohočlenem v proměnných x a y nebo funkcí, kterou lze v okolí každého bodu jejího definičního oboru rozvinout v Taylorovu řadu.

Věta 6.3.1 (*Cauchyova*). Nechť lze funkci $f(x, y)$, $(x, y) \in D$, rozvinout v okolí bodu $(x_0, y_0) \in D$ do Taylorovy řady. Potom existuje právě jedno řešení $y(x)$ diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, které splňuje v bodě x_0 počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ a které lze vyjádřit mocninnou řadou

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad [6.3.1]$$

konvergentní v jistém okolí bodu x_0.

Poznámka. Platnost věty lze rozšířit na případ obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů. Partikulární řešení diferenciální rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, které splňuje v bodě x_0 počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, lze vyjádřit ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, jestliže je funkce f mnohočlenem v proměnných $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ nebo ji lze v okolí bodu $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ rozvinout do Taylorovy řady.

Příklad 1. Pro nalezení partikulárního řešení $y(x)$ diferenciální rovnice $y' = x^2 + 2x + y$, které v bodě $x_0 = 0$ splňuje počáteční podmínku $y(0) = a_0$, použijeme tento postup:

Protože pravá strana dané diferenciální rovnice je mnohočlenem v proměnných x a y, lze podle Cauchyovy věty nalézt hledané partikulární řešení ve tvaru mocninné řady $y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, neboť $y(0) = a_0$. Dosazením této řady a její derivace do dané diferenciální rovnice dostaneme

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... = a_0 + (a_1 + 2)x + (a_2 - 1)x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Protože „dvě mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, konvergentní na jistém intervalu, se sobě rovnají, právě když $a_n = b_n$ pro všechna n“, dostaneme z předchozí rovnosti pro koeficienty $a_1, a_2, a_3, \dots$ pro $n \geq 3$ tyto rovnice:

$$a_1 = a_0,$$

$$2a_2 = a_1 + 2,$$

$$3a_3 = a_2 - 1,$$

$$\vdots$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n.$$

Odtud pro $n \geq 4$

$$a_1 = a_0,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + 2),$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0.$$

Hledané partikulární řešení tedy nacházíme ve tvaru

$$y(x) = a_0 + a_0 x + \frac{1}{2!}(a_0 + 2)x^2 + \frac{1}{3!}a_0 x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}a_0 x^n + \ldots = a_0 e^x + x^2.$$

Příklad 2. Pro nalezení partikulárního řešení $y(x)$ diferenciální rovnice $y'' + y = 11 + 2x + 3x^2$, které v bodě $x_0 = 0$ splňuje počáteční podmínky $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$, použijeme tento postup:

Partikulární řešení hledáme ve tvaru mocninné řady $y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, neboť $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$.

Protože $y''(x)$ lze vyjádřit ve tvaru $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$, dostaneme po dosazení do diferenciální rovnice rovnici:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n\right]x^n = 11 + 2x + 3x^2$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na obou stranách rovnice dostaneme pro koeficienty a_2, a_3, a_4, … pro $n \geq 3$ tyto rovnice:

$$2a_2 + a_0 = 11,$$

$$6a_3 + a_1 = 2,$$

$$12a_4 + a_2 = 3,$$

$$\vdots$$

$$(n + 1)(n + 2)a_{n+2} + a_n = 0.$$

Odtud

$$a_2 = \frac{1}{2}(11 - a_0),$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(-5 + a_0),$$

$$a_6 = -\frac{1}{6!}(-5 + a_0),$$

$$\vdots$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(2 - a_1),$$

$$a_5 = -\frac{1}{5!}(2 - a_1),$$

$$a_7 = \frac{1}{7!}(2 - a_1),$$

$$\vdots$$

Hledané partikulární řešení tedy nacházíme ve tvaru

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2!}(11 - a_0)x^2 + \frac{1}{3!}(2 - a_1)x^3 + \frac{1}{4!}(-5 + a_0)x^4 -$$
$$- \frac{1}{5!}(2 - a_1)x^5 - \frac{1}{6!}(-5 + a_0)x^6 + \ldots$$

neboli

$$y(x) = (a_0 - 5) \cdot \cos x + (a_1 - 2) \cdot \sin x + 5 + 2x + 3x^2 .$$

Literatura

[1] Laitoch, Miroslav
Posloupnosti a řady, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1966

[2] Vlasov, A. K.
Učebnice vyšší matematiky II, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1955

[3] http://cs.wikipedia.org