

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Bakalářská práce

BRNO 2015

MICHAEL KOLAŘÍK



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



Studium vodního víru

Bakalářská práce

Michael Kolařík

Vedoucí práce: prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Brno 2015

Bibliografický záznam

Autor	Michael Kolařík
	Přírodovědecká fakulta Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce	Studium vodního víru
Studijní program	Fyzika
Studijní obor	Fyzika
Vedoucí práce	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Akademický rok	2014/2015
Počet stran	7+52
Klíčová slova	stacionární vodní vír, viskozita, mechanika kapalin, teorie víru, rychlost, výška hladiny

Bibliographic Entry

Author	Michael Kolařík Faculty of Science Department of Theoretical Physics and Astrophysics
Thesis Topic	Investigation of a water vortex
Programme	Physics
Field of Study	Physics
Thesis supervisor	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Academic year	2014/2015
Number of Pages	7+51
Keywords	stationary water wortex, viscosity, mechanic of liquid the theory of wortex, velocity, height of the level

Abstrakt

Tato práce se zabývá stacionárním vírem v kapalině. V teoretické části jsou popsány některé základní vlastnosti vírů v kapalině a odvozeny základní rovnice, popisující oběhovou rychlost elementu kapaliny ve stabilizovaném víru a výšku hladiny tohoto útvaru. Pro tyto rovnice bylo nalezeno přibližné řešení metodou iterace. Na základě tohoto řešení byly odhadnuty i závislosti pro rotaci rychlosti a tlak. Dále bylo na základě iterativního řešení porovnáno očekávané chování kapalin s jinými parametry. V experimentální části byl vytvořen stacionární vír v nádobě s vodou a byly změřeny výška jeho hladiny a jeho oběhová rychlost. Tyto hodnoty byly porovnány s teoretickými a byly zjištěny rozdíly v desítkách procent.

Abstract

Topic of this thesis is a stationary vortex. We describe some basic features of a vortex in liquid. We deduce equations which describe the velocity of an element of liquid and height of its level. Approximate solution of these equations were found by an iterative method. We found relations for pressure and curl of velocity based on iterative solution. We compared behaviour expected by iterative solutions for liquids with different parameters. In the experimental part, we created stationary vortex in container and we measure velocity of circulation and height of the level. These values were compared with theoretical values and differences in decimals percent was founded.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce, profesoru Tomáši Tycovi Ph.D., za ochotu a trpělivost během celé naší spolupráce. Také magistru Jiřímu Bartošovi Ph.D. za skutečně zásadní a rozsáhlou pomoc při konstrukci experimentálního zařízení. Dále bych rád poděkoval RNDr. Pavlu Konečnému CSc. a Mgr. Jiřímu Chaloupkovi Ph.D. za ochotu, se kterou vyhověli žádostem o pomoc s dílčími aspekty této práce a bakaláři Jakubu Bělinovi a Jakubovi Dóczymu za pomoc při experimentování. Musím rovněž poděkovat svým rodičům, Tomášovi a Ivaně Kolaříkovým, kteří mne mnoha způsoby podporovali po celou dobu studia. A pokládám za vhodné poděkovat i Masarykově univerzitě, České republice, Evropské unii a Organizaci spojených národů za to, že zde panují podmínky natolik dobré, aby v nich mohly vznikat práce jako tato.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 19. května 2015

.....

Jméno Příjmení



MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav:

Student: Michael Kolařík

Program: Fyzika

Obor: Fyzika

Ředitel ústavu PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Studium vodního víru

Téma práce anglicky: Investigation of a water vortex

Oficiální zadání:

S víry a vírovými strukturami se setkáme v přírodě velice často. Jejich vznik úzce souvisí se zachováním momentu hybnosti tekutiny. V důsledku toho je rotace pole rychlosti ideálního víru soustředěna do vírové čáry, kde má singularitu, a rychlost je pak nepřímo úměrná vzdálenosti od vírové čáry. V reálném víru se ale rychlost od tohoto zákona odchyluje vlivem viskozity tekutiny. Cílem bakalářské práce bude jednak teoreticky popsat pole rychlosti v reálném víru, jednak je proměřit experimentálně na uměle vytvořeném ustáleném vodním víru, a oba výsledky porovnat.

Jazyk závěrečné práce: čeština

Vedoucí práce: prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Datum zadání práce: 22. 4. 2014

V Brně dne: 10. 12. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Michael Kolařík
student

prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
vedoucí práce

prof. Rikard von Unge, Ph.D.
ředitel ústavu

Obsah

1 Úvod	9
2 Teoretická část	11
2.1 Obecná teorie vírů	11
2.1.1 Základní veličiny popisující vír	11
2.1.2 Změna cirkulace vírové čáry v čase	12
2.2 Stacionární vír v nádobě	14
2.2.1 Odvození rovnice pro oběhovou rychlost	14
2.2.2 Odvození rovnice pro výšku hladiny	15
2.2.3 Řešení rovnic metodou iterace	16
2.2.4 Limitní případy pro viskozitu	16
2.2.5 Tlak ve stacionárním víru	17
2.2.6 Rotace rychlosti ve stacionárním víru	19
2.2.7 Bezrozměrný zápis rovnic víru	20
2.2.8 Model pro různé kapaliny	21
3 Experimentální část	27
3.1 Popis experimentálního zařízení	27
3.2 Postup měření	36
3.2.1 Měření výšky hladiny	36
3.2.2 Měření rychlosti	38
3.2.3 Měření toku	39
3.2.4 Měření pomocí koule	39
3.3 Vyhodnocení měření	41
3.3.1 Měření 1	41
3.3.2 Měření 2	44
3.3.3 Měření 3	46
3.3.4 Měření 4	49
3.3.5 Porovnání s teoretickou předpovědí	52
4 Závěr	58
5 Literatura	59

Kapitola 1

Úvod

S víry v kapalině, nejčastěji pochopitelně vodě, se lidé setkávali už od pradávna. Nejčastěji na ně narazili při vytékání vody z nádoby malým otvorem a při proudění po nepravidelném reliéfu dna. Tyto situace jsou sice odlišné co do svých příčin, ale obě vedou k na pohled podobné situaci. K trychtýřovité struktuře, do které proud unáší plovoucí předměty.

Víry, vzniklé prouděním na nepravidelném podloží, si vysloužily více pozornosti dávných lidí. Plavci se vyhýbali místům, kde se tvořily, protože silnější proudy v těchto útvarech je mohly strhnout. Neznalí jejich fyzikální podstaty přisuzovali síly, jenž je táhly pod hladinu, rukám vodníků a jim podobných bytostí. Víry mořské, útvary v rozměrech až desítek metrů s výrazným nálevkovitým tvarem, vzbuzovaly bázeň a opatrnost možná ještě větší. Tyto útvary, byly-li stálé či vznikaly-li pravidelně na tomtéž místě, dostávaly jména, stejně jako hory a řeky, a byly pokládány za sídla mořských nestvůr. Fantazii lidí nepřestaly jitřit ani poté, co mytologie ustoupila vysvětlením racionálním. Stačí vzpomenout umělecká díla jako Pád do Malströmu od E. A. Poa.

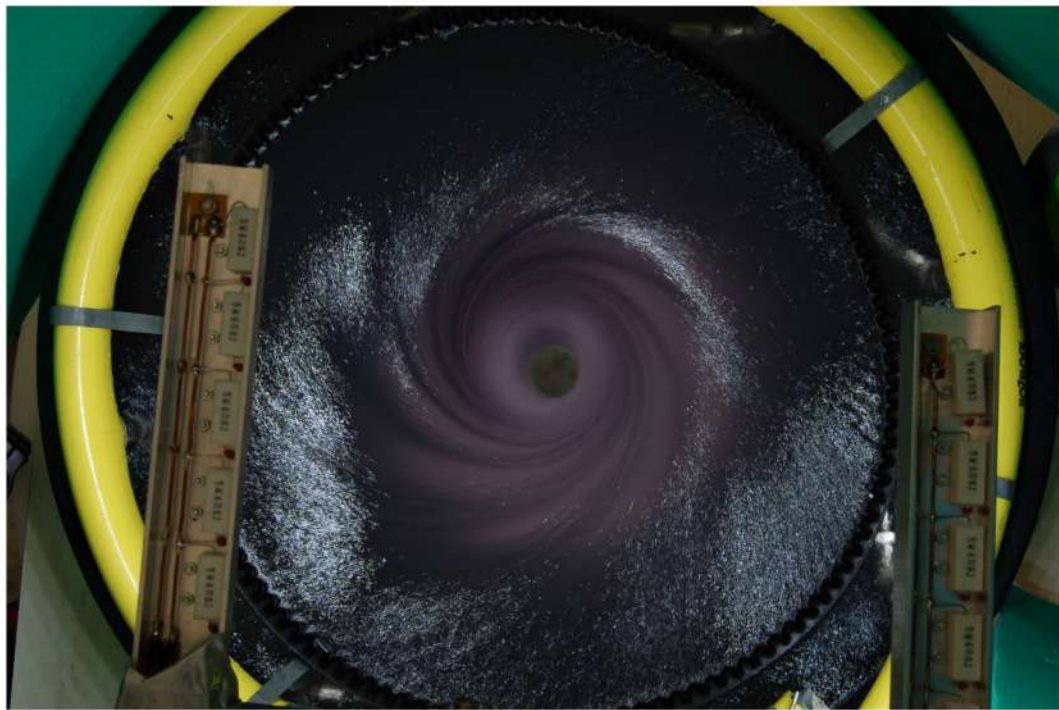
Vedle těchto přírodních úkazů působí vír, který se vytvoří v umyvadle, jako malý a nevýrazný. Nikoho neděsí, a při jeho každodennosti si ho leckdo ani nevšimne. Ovšem i ten dokáže zaujmout člověka tak, že pozoruje umyvadlo, dokud neodteče všechna voda, či se snaží změnit tvar a polohu víru svými prsty.

Jak je vidět, víry vzbuzovaly zájem i zcela nefyzikální. Ovšem jejich fungování je velmi zajímavé i z hlediska čistě fyzikálního. Stabilní, ustálený vír je patrně nejjednodušším a nejzákladnějším případem turbulentního proudění v kapalině. A jako každý relativně jednoduchý problém může sloužit jako odrazový můstek k problémům složitějším. Ovšem může taky posloužit jako jejich dostatečná aproximace, jako jednoduchý náhled na tento problém, který je velmi zajímavý už sám o sobě.

Dokonce je natolik zajímavý, že jsme se rozhodli vyrobit v laboratoři a prozkoumat jeho vlastnosti. K tomu nám poslouží nádoba, ve kterém ho vytvoříme proudem vody proudícím na její stěny, zatímco dříve dodaná kapalina odtéká otvorem ve dně. Přičemž hlídáme, aby tok vody z trysek plně odpovídal odtoku otvorem a hladina kapaliny ani nestoupala, ani neklesala.

Vír, se kterým pracujeme, neodpovídá zcela ani jednomu z příkladů z prvních odstavců tohoto textu. Od víru vzniklého při vytékání z nádoby se liší nejen tím, že je mu neustále dodávána nová kapalina, ale i tím, že ho pohání stálý proud, a nikoli zprvu chaotický pohyb v kapalině. V tom se podobá spíše vírům vzniklým v přírodě na nepravidelnostech povrchu, které nutí zatáčet proudící kapalinu. Od nich se ovšem liší tím, že v jeho ose kapalina odtéká, ztrácí se ze systému, zatímco v přírodních vírech v něm zůstává. Zkoumaný případ obsahuje z dvou přirozených systémů ten jednodušší mechanismus. Z vírů na nepravidelnostech nenáhodné podmínky vzniku a z odtoku z nádoby jednoduché zbavení se kapaliny, které nenarušuje samotné proudění. Ovšem při výzkumu složitých problémů, kam turbulentní proudění kapaliny nepochybně patří, je třeba provést určitá zjednodušení.

Vír, kterým se zabývá tato práce, je přesně takovým zjednodušením. Je časově stálý, v rotačně symetrické nádobě s rovným dnem. Časová stálost umožňuje nejen to, aby byl vír pozorován, ale i to, aby byl pečlivě proměřen, což by nebylo možné, pokud by se jeho parametry s časem výrazně proměňovaly. Rotační symetrie na druhou stranu umožňuje, aby se některé veličiny proměřovaly pouze podél jednoho poloměru. Stejně dobře tyto předpoklady zjednodušují i teoretické úvahy.



Obrázek 1.1: Vír v laboratoři

Kapitola 2

Teoretická část

2.1 Obecná teorie vírů

U následujícího výkladu vybíráme z Brdička-Samek-Sopko: Mechanika kontinua [1] [1]

2.1.1 Základní veličiny popisující vír

Základní veličinou, popisující vírové vlastnosti kapaliny, je rotace rychlosti $\vec{\Omega}$, definovaná jako

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}. \quad (2.1)$$

Tato veličina je triviálně bezzřídlová, protože platí identita

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0. \quad (2.2)$$

Uvažujeme-li o uspořádání rotace rychlosti v objemu kapaliny, je výhodné zavést pojem *vírová čára*. Jedná se o křivku, pro kterou platí, že v každém jejím bodě je k ní $\vec{\Omega}$ tečný. Jedná se vlastně o analogii s proudnicemi. Mysleme si uzavřenou křivku uvnitř kapaliny. Každým jejím bodem prochází právě jedna vírová čára. Všechny vírové čáry procházející danou křivkou tvoří dohromady *vírovou trubici*. Pokud máme v poli $\vec{\Omega}$ uzavřenou křivku, můžeme zavést veličinu zvanou *intenzita víru*. Tu definujeme jednoduše jako tok $\vec{\Omega}$ plochou ohraničenou danou křivkou a určíme ji tedy jako

$$M = \int_S \vec{\Omega} d\vec{S}. \quad (2.3)$$

Pokud hranicí plochy S proložíme vírovou trubici, je intenzita víru zároveň *intenzitou vírové trubice*. Toto můžeme tvrdit pouze v případě, že je intenzita vírové trubice ve všech jejích průřezích stejná. Dokažme, že je tato podmínka splněna pro všechny vírové trubice. Uvažujme uzavřenou plochu tvořenou dvěma průřezy vírové trubice a vírovými čarami. Z (2.2) a Stokesovy věty plyne, že

$$\int_S \vec{\Omega} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{\Omega} dV = 0, \quad (2.4)$$

a zároveň můžeme psát

$$\int_S \vec{\Omega} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{\Omega} d\vec{S} + \int_{S_{pl}} \vec{\Omega} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\Omega} d\vec{S}. \quad (2.5)$$

Prostřední integrál je nulový, protože rotace rychlosti je na plášť tečná (tvoří ho vírové čáry). Zbylé dva integrály představují tok rotace rychlosti průřezů. Jeden z nich je třeba vzít záporně, aby byla zachována orientace vnitřní nebo vnější normálou. Z (2.2), (2.4) a (2.5) už přímo plyne, že

$$M_1 = M_2 \quad (2.6)$$

a to jsme chtěli dokázat. Tento závěr se nazývá *druhou Helmholtzovou větou*. Jejím důsledkem je, že vírová trubice se v kapalině neztrácí, sahá vždy oběma konci k jejím okrajům anebo vytváří prstencovou plochu.

Poslední významnou veličinou je *cirkulace rychlosti*. Tato veličina udává vztah mezi intenzitou víru a rychlostí kapaliny. Definuje se jako křivkový integrál rychlosti po uzavřené křivce, tedy

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l}. \quad (2.7)$$

Pokud na definici (2.7) aplikujeme Stokesovu větu, získáme

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l} = \int_S \vec{\Omega} d\vec{S}, \quad (2.8)$$

tedy že cirkulace po křivce je dána intenzitou vírových trubic, které pokrývají plochu křivkou ohrazenou.

2.1.2 Změna cirkulace vírové čáry v čase

Vír v ideální kapalině

Pro uvažování časového vývoje vírových veličin je třeba rozlišit aproximaci ideální kapalinou, tedy kapalinou s nulovou viskozitou, a kapalinou viskózní. Začneme s představou ideální kapaliny. Navíc předpokládejme, že se nachází v konzervativním poli. Počítejme časovou změnu cirkulace, tedy

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{l}. \quad (2.9)$$

Je potřeba zdůraznit, že křivka l se pohybuje s proudící kapalinou, je tedy tvořena stále stejnými částicemi kapaliny. Časovou změnu rychlosti objemového elementu určíme z druhého Newtonova zákona jako

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (2.10)$$

příčemž síly, které na něj působí jsou síla tlaková $-\nabla p$ a síla vnějšího pole s potenciálem U , tedy $-\nabla U$. Dosadíme-li tyto výrazy do (2.10) a z té následně do (2.9), získáme

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{\rho} \oint (\nabla p + \nabla U) d\vec{l} = -\frac{1}{\rho} \oint d(p + U) = 0, \quad (2.11)$$

příčemž jsme využili toho, že integrál z úplného diferenciálu po uzavřené křivce je nulový. Z toho plyne, že vír v ideální kapalině v konzervativním poli je nezničitelný, tedy je-li v ní přítomen, bude v ní přítomen i v budoucnosti, a nestvořitelný, tedy nebyl-li v ní přítomen dříve, nemůže být v ní přítomen ani nyní.

Vír ve viskózní kapalině

Napíšeme-li 2. Newtonův zákon pro element objemu kapaliny, dostaneme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + \nabla U - f_{\text{vis}}), \quad (2.12)$$

kde f_{vis} je hustota viskózních sil, tedy sil způsobených vnitřním třením v kapalině. Pro tyto síly platí

$$f_{\text{vis}} = \eta \Delta \vec{v}. \quad (2.13)$$

Dosadíme-li z (2.4) do (2.12) a rozepíšeme úplnou derivaci, získáme rovnici

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \vec{\Omega} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + \nabla U - \eta \Delta \vec{v}). \quad (2.14)$$

Tato rovnice se nazývá *Navier-Stokesova rovnice*. Jedná se o základní pohybovou rovnici pro viskózní kapalinu. Pokud na ni aplikujeme operátor rotace, dostaneme s využitím identit

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) \quad (2.15)$$

a

$$(\nabla) \nabla \times \vec{a} = 0 \quad (2.16)$$

rovnici

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - (\vec{\Omega} \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{\Omega} = \nu \Delta \vec{\Omega}. \quad (2.17)$$

Tyto rovnice je nesmírně obtížné řešit, vyjma několika jednoduchých příkladů. Pro toto téma je nejrelevantnější nekonečně hluboká kapalina s jedním nekonečným svislým vírovým vláknem. Soustavu souřadnic volíme tak, že osa z splývá s vláknem. Rychlost a intenzita víru v tomto případě jsou $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ a $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Veličiny Ω , v_x a v_y jsou skalární funkce, které závisí jen na vzdálenosti od vlákna a na čase. Za těchto podmínek jsou všechny členy dvou ze tří rovnic pro složky $\vec{\Omega}$ nulové. Rovnice pro zbylou složku je

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \Delta \Omega. \quad (2.18)$$

Upravíme výraz $v_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega}{\partial y}$ pomocí převodních vztahů pro přechod do válcových souřadnic za předpokladu, že $v_r = 0$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad v_x = -v \sin \phi \quad v_y = v \cos \phi \quad (2.19)$$

a zjistíme, že

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= v \left(-\sin \phi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \cos \phi \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \frac{v}{r} \left(-r \sin \phi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{v}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \frac{v}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pokud dosadíme z (2.20) do (2.18), získáme co do zápisu jednoduchou rovnici

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \Delta \Omega. \quad (2.21)$$

Laplaceův operátor můžeme rozepsat ve válcových souřadnicích s využitím toho, že Ω nezávisí na ϕ a z , jako

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (2.22)$$

Jedná se o *difuzní rovnici*. Jedním z řešení této rovnice je funkce

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (2.23)$$

Z toho je vidět, že vír ve viskózní kapalině časem vymizí, přesněji vydifunduje z dané oblasti ven. V tom se liší od víru v kapalině ideální, ve které je přítomen trvale, tj. nemůže vzniknout ani zaniknout. Pokud chceme mít stálý vír i ve viskózní kapalině, musíme působení viskozity kompenzovat. Takovou situaci ovšem jen těžko můžeme řešit Navier-Stokesovy rovnice přímo, a je třeba najít postup, který je matematicky schůdnější.

2.2 Stacionární vír v nádobě

2.2.1 Odvození rovnice pro oběhovou rychlost

Vtéká-li do válcové nádoby o poloměru R s otvorem ve středu dna a výšce h_0 kapalina konstantní rychlostí V , přičemž kapalina má vzhledem k ose nádoby nenulový moment hybnosti, vznikne v kapalině vír. Odpovídá-li přítok kapaliny jejímu odtoku, vír se ustálí, a lze jej považovat za stacionární.

Přitékající kapalina přináší do systému moment hybnosti. Tato veličina se zachovává, proto nemá-li se v některém místě soustavy hromadit či vymizet, musí být její tok kapalinou nezávislý na vzdálenosti od okraje, respektive od osy víru.

K přenosu momentu hybnosti dochází v kapalině dvěma způsoby. Jednak silovým působením mezi vrstvami kapaliny díky viskozitě, jednak přenosem momentu spolu s proudící kapalinou. Tok momentu hybnosti označme Ψ , tok spojený se silovým působením Ψ_F a tok spojený s pohybem Ψ_Φ . Toky Ψ a Ψ_Φ bereme jako kladné, pokud směřují ve směru od osy víru, a jako záporné míří-li opačným směrem. Tok Ψ_F považujeme za kladný, pokud se moment hybnosti přenáší z vrstvy bližší k ose víru na vrstvu vzdálenější.

Tok Ψ_F lze vyjádřit jako

$$\Psi_F = M_z, \quad (2.24)$$

kde M_z je z-tová složka momentu síly, kterým prostřednictvím válcové plochy o poloměru r působí kapalina uvnitř plochy na kapalinu vně. Moment síly $\vec{M}$ působící na element je daný jako

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.25)$$

kde $\vec{r}$ je vektor polohy, přičemž počátek leží na ose víru, a $\vec{F}$ je působící síla. Sílu, kterou na sebe působí prostřednictvím infinitesimální plošky dvě části viskózní nestlačitelné kapaliny touto ploškou oddělené, lze vyjádřit jako

$$\vec{F} = \hat{\sigma} \vec{S}, \quad (2.26)$$

přičemž $\hat{\sigma}$ je tenzor napětí daný

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad (2.27)$$

kde p je tlak v kapalině, $\hat{\tau}$ je tenzor smykového napětí a vektor $\vec{S}$ je určen vztahem

$$\vec{S} = -\vec{n} dS, \quad (2.28)$$

kde dS je infinitesimální element válcové plochy a $\vec{n}$ normálový vektor k této ploše mířící od osy víru. V nestlačitelné kapalině stačí vzít pouze tenzor $\hat{\tau}$. Tenzor $\hat{\tau}$ je dán jako $\eta\hat{u}$, kde $\hat{u}$ je tenzor rychlosti deformace, definovaný v kartézských souřadnicích jako

$$u_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (2.29)$$

Ve válcových souřadnicích vypadá takto [3]:

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Celkový přenos svislé složky momentu hybnosti silovým působením je podle rovnic (2.24) až (2.29) dán vztahem

$$\Psi_F = -2\pi h \eta r^2 \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right). \quad (2.31)$$

kde h je výška hladiny měřená ode dna nádoby. Při integraci přes válcovou plochu jsme navíc předpokládali, že rychlost nezávisí na hloubce.

Přenos momentu hybnosti prouděním kapaliny je dán patřičným hmotnostním tokem kapaliny a momentem hybnosti jednotkové hmotnosti. Hmotnostní tok kapaliny určíme jako

$$\Phi = 2\pi h \rho v_r. \quad (2.32)$$

Tok momentu hybnosti vlivem proudění kapaliny vyjádříme jako

$$\Psi_\Phi = 2\pi h \rho r^2 v_\phi v_r = \Phi v_\phi r. \quad (2.33)$$

Celkový přenos momentu hybnosti za jednotku času je pak roven součtu

$$\Psi_F + \Psi_\Phi = \Psi. \quad (2.34)$$

Kombinací rovnic (2.31), (2.33) a (2.34) vznikne rovnice

$$-2\pi h \eta r^2 \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \Phi r v_\phi = \Psi. \quad (2.35)$$

Pokud provedeme několik matematických úprav, získáme diferenciální rovnici pro složku rychlosti v_ϕ , ve které tok kapaliny Φ a tok momentu hybnosti Ψ figurují jako konstanty. Kdyby tyto veličiny byly závislé na r , hromadily by se, či naopak vytrácely, v některé části nádoby. To by zapříčinilo jejich proměnlivost v čase, což je v rozporu s předpokladem ustáleného proudění. Pro zjednodušení zápisu budeme od nynějška u v_ϕ vynechávat index ϕ . Píšeme tedy místo v_ϕ pouze v . Výsledná rovnice je

$$\frac{dv}{dr} - \left(1 + \frac{\Phi}{2\pi h \eta} \right) \frac{v}{r} = -\frac{\Psi}{r^2}. \quad (2.36)$$

2.2.2 Odvození rovnice pro výšku hladiny

Výška hladiny h je funkcí poloměru. Tečna ke křivce, dané jako průnik hladiny a svislé roviny zahrnující osu víru, je vždy kolmá k výslednici sil působících na kapalinu v rotující soustavě spojené s elementem kapaliny rotujícím ve vzdálenosti r s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{r}$. Z této podmínky dostáváme rovnici

$$\frac{dh}{dr} = \frac{F_r}{F_z}. \quad (2.37)$$

V (2.37) představuje F_r radiální složku síly a F_z složku z -ovou. Vodorovná (radiální) složka síly je dána odstředivou silou elementu kapaliny v soustavě s ním spojené, svislá složka pak tíhovou silou. Jejich poměr tedy je

$$\frac{v^2}{rg}.$$

Výška hladiny v závislosti na poloměru lze pak vyjádřit diferenciální rovnicí

$$\frac{dh}{dr} = \frac{v^2}{rg}. \quad (2.38)$$

2.2.3 Řešení rovnic metodou iterace

Vzorce (2.36) a (2.38) představují soustavu spřažených diferenciálních rovnic, ke kterým je třeba najít okrajové podmínky. V praktické realizaci víru, tedy válcové nádoby existují dva význačné poloměry: poloměr celé nádoby R a poloměr otvoru ve dně nádoby r_0 . Pro okrajovou podmínku se ukazuje r_0 jako vhodnější, neboť určení parametrů při okraji může být obtížné. Navíc tato volba umožňuje určitá zjednodušení. Na okraji otvoru se veškerý tok momentu hybnosti přenáší prouděním, platí tedy, že

$$\Psi = \Phi r_0 v_0. \quad (2.39)$$

To umožňuje snížit počet konstant ze tří na dvě. Volíme tedy

$$v(r_0) = v_0, \quad (2.40)$$

$$h(r_0) = h_0. \quad (2.41)$$

Tuto soustavu neumíme řešit analyticky, proto je ji třeba řešit pomocí přibližných metod. První použitá metoda je metoda iterační. Při této metodě předpokládáme jednu z funkcí v jednoduchém tvaru. Dosadíme ji do druhé rovnice a získáme první iteraci druhé funkce. První iteraci druhé funkce dosadíme do první rovnice a určíme druhou iteraci první funkce, a tento postup můžeme opakovat. Začneme předpokladem vodorovné hladiny, čili $h(r) = h_0$. Touto iterací získáme oběhovou rychlost

$$v = v_0 \left(1 - x\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1 + \frac{y}{h_0}} + v_0 x \left(\frac{r_0}{r}\right), \quad (2.42)$$

kde

$$y = \frac{\Phi}{2\pi\eta}$$

a

$$x = \frac{y}{-2h_0 + y}.$$

Pokud tento vztah dosadíme do rovnice (2.38), získáme

$$h = \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\frac{2y}{h_0}} + \frac{2hx(1-x)}{y} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} + \frac{gh_0}{v_0^2} - \frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} - \frac{2hx(1-x)}{y} + \frac{x^2}{2} \right). \quad (2.43)$$

Tato funkce je pro další dosazování příliš komplikovaná. Chceme-li získat přesnější výsledek, je třeba zvolit jinou metodu.

2.2.4 Limitní případy pro viskozitu

Přestože vztahy (2.42) a (2.43) jsou pouze přibližné, lze na jejich základě odhadnout závislost parametrů víru na parametrech použité kapaliny. Zaveďme objemový tok

$$\Phi_V = \frac{\Phi}{\rho}, \quad (2.44)$$

který je nezávislý na parametrech zvolené kapaliny. Nyní v rovnicích vystupují hustota ρ a viskozita η . Tyto veličiny vystupují pouze ve vzájemném poměru, lze je tedy nahradit kinematickou viskozitou ν definovanou vztahem

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.45)$$

Je zřejmé, že parametr y , vystupující v exponentu rovnice(2.43), je kinematické viskozitě nepřímo úměrný, zatímco lineární parametr x závisí na ν přímo úměrně, je-li ovšem dostatečně vysoká (poměr y a h_0 je výrazně větší než 1). Můžeme vyšetřit limitní případy kinematické viskozity, tedy případ, kdy je nulová, a případ, kdy je nekonečná. Pro $\nu \rightarrow 0$ platí, že $y \rightarrow -\infty$ a $x \rightarrow 1$. Platí tedy

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} v = \lim_{\nu \rightarrow 0} v_0 \left(1 - x\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1+\frac{y}{h_0}} + v_0 x \left(\frac{r_0}{r}\right) = 0 \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(e^{\log \frac{r}{r_0} (1+\frac{y}{h_0})}\right) + v_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1}.$$

Protože $r > r_0$, platí $\log \frac{r}{r_0} > 0$ a tedy

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(e^{\log \frac{r}{r_0} (1+\frac{y}{h_0})}\right) = 0$$

tedy

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} v = v_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} \quad (2.46)$$

Pro výšku hladiny obdobným způsobem dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} h &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\frac{2y}{h_0}} + \frac{2hx(1-x)}{y} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{gh_0}{v_0^2} - \frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} - \frac{2hx(1-x)}{y} + \frac{x^2}{2} \right) \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} h &= h_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Toto je *aproximace ideálním vírem*. V této aproximaci je rozložení rychlosti shodné s vírem v ideální kapalině.

Pro $\nu \rightarrow \infty$ platí, že $y \rightarrow 0$ a $x \rightarrow 0$. Z toho plyne

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} v = \frac{v_0 r}{r_0} \quad (2.48)$$

a pro hladinu

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + h_0 - \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.49)$$

V této aproximaci je rozložení rychlosti stejné jako v rotujícím tuhém tělese. Proto ji lze nazvat *aproximace tuhým tělesem*.

2.2.5 Tlak ve stacionárním víru

Další veličinou, kterou můžeme určit, je tlak. Uvažujme Navier-Stokesovu rovnici (2.14), a aplikujme ji na náš případ. Časový člen $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ je nulový, protože vír je stacionární, Laplaceho operátor přejde na $-\nabla \times \nabla \times \vec{v}$, protože $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Externí silou jsou síla gravitační. Vektorovou rovnici si rozdělíme na tři rovnice skalární, s nichž se má smysl zabývat pouze dvěma, neboť závislost na ϕ , kterou bychom získali řešením této rovnice, již známe. Začneme nejsložitější rovnicí pro souřadnici r (pro přehlednost se vrátíme k nezkrácenému značení v_ϕ),

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{v_r^2}{2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\phi^2}{2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_z^2}{2} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_\phi \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (2.50)$$

Člen $\frac{\partial}{\partial r} \frac{v_r^2}{2}$ můžeme oproti ostatním členům rovnice zanedbat, většina ostatních členů se odečte a zbude rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r}. \quad (2.51)$$

Při řešení rovnice ve složce z navíc předpokládáme, že z -ová složka rychlosti nezávisí na poloměru, čímž vypadne jak viskózní člen, tak vektorový součin na pravé straně rovnice. Člen ve formě gradientu je nulový triviálně, zbude tedy jednoduchá rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.52)$$

Získali jsme soustavu diferenciálních rovnic (ve kterých opět můžeme psát v_ϕ jako v):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.54)$$

Řešením rovnice (2.54) je funkce

$$p = -\rho g z + G(r) \quad (2.55)$$

Dosazením rovnice (2.55) do rovnice (2.53), získáme rovnici

$$\frac{dG}{dr} = \rho \frac{v^2}{r} = g \rho \frac{dh}{dr}. \quad (2.56)$$

Pro druhou rovnost jsme využili rovnici (2.38). Řešením je

$$G = \rho g h(r) + c. \quad (2.57)$$

Zkombinujeme (2.55) a (2.57), určíme konstantu c z předpokladu, že při hladině h je tlak atmosférický. Výsledná rovnice je

$$p = \rho g(h(r) - z) + p_{at}. \quad (2.58)$$

Podle této rovnice odpovídá tlak ve víru hydrostatickému tlaku svislého vodního sloupce mezi daným místem a hladinou. Takový výsledek odpovídá fyzikálnímu očekávání.

Dosadíme-li do (2.58) iteraci hladiny z (2.43), dostaneme

$$\begin{aligned} p = \rho v_0^2 & \left(\frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2+\frac{2y}{h_0}} + \frac{2hx(1-x)}{y} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{+y}{h_0}} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \right. \\ & \left. + \frac{gh_0}{v_0^2} - \frac{(1-x)^2}{2(1+\frac{y}{h_0})} - \frac{2hx(1-x)}{y} + \frac{x^2}{2} \right) - \rho g z + p_{at}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Lze provést i aproximaci tlaku pro ideální vír

$$p_{id} = \rho g \left(h_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} - z \right) + p_{at} \quad (2.60)$$

a tuhé těleso

$$p_{tuh} = \rho g \left(\frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + h_0 - \frac{v_0^2}{2g} - z \right) + p_{at}. \quad (2.61)$$

2.2.6 Rotace rychlosti ve stacionárním víru

Rychlost proudění v ideálním víru je podle jeho definice ve válcových souřadnicích

$$\vec{v} = \left(0, \frac{c}{r}, 0\right). \quad (2.62)$$

V kartézských vypadá takto:

$$\vec{v} = \left(-\frac{Cy}{x^2 + y^2}, \frac{Cx}{x^2 + y^2}, 0\right). \quad (2.63)$$

Pokud určíme rotaci rychlosti, tedy

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}, \quad (2.64)$$

zjistíme, že první dva členy jsou triviálně nulové, protože derivace v_z či podle z jsou nulové, neboť rychlost na proměnné z nezávisí a její z -ová složka je nulová. Pro výpočet poslední složky je třeba obecného výrazu pro danou složku v patřičných souřadnicích, ve válcových tedy

$$\Omega_z = (\nabla \times \vec{v})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}. \quad (2.65)$$

Druhý člen je nulový, protože rychlost nezávisí na ϕ . Pokud vynásobíme v_ϕ poloměrem r , poloměry se zkrátí a derivace konstanty je nulová. Tedy celá rotace je nulová. Pro kontrolu provedeme i výpočet v kartézských souřadnicích, z -ová složka rotace je

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (2.66)$$

Určíme rotaci první iterace rychlosti, respektive její dominantní, z -ovou, složku danou rovnicí (2.65). I zde platí, že rychlost nezávisí na ϕ takže stačí iterace rychlosti v_ϕ podle rovnice (2.42). Dosazením dostaneme

$$\Omega_z = \frac{v_0}{r_0} \left(1 - x\right) \left(2 + \frac{y}{h_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}}. \quad (2.67)$$

Spočítáme limitu této složky pro nulovou viskozitu

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Omega_z = \frac{v_0}{r_0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(1 - x\right) \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(2 + \frac{y}{h_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}}. \quad (2.68)$$

První limita je rovna 0, druhou můžeme přepsat jako

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{y}{h_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 + \frac{y}{h_0}\right)}{e^{-\left(\log \frac{r}{r_0}\right) \frac{y}{h_0}}}. \quad (2.69)$$

Pokud na limitu (2.69) aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo, zjistíme, že

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 + \frac{y}{h_0}\right)}{e^{-\left(\log \frac{r}{r_0}\right) \frac{y}{h_0}}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{h_0}}{\frac{1}{h_0} \log \frac{r}{r_0} e^{-\left(\log \frac{r}{r_0}\right) \frac{y}{h_0}}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{\left(\log \frac{r}{r_0}\right) \frac{y}{h_0}}}{\log \frac{r}{r_0}} = 0. \quad (2.70)$$

Limita rotace rychlosti tedy odpovídá rotaci rychlosti v ideální kapalině, což jsme očekávali. Velice snadno můžeme prověřit i aproximaci tuhým tělesem, kde

$$\vec{v} = (0, \omega r, 0) \quad (2.71)$$

a

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = 2\omega. \quad (2.72)$$

Vypočteme-li limitu pro nekonečnou viskozitu

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Omega_z = \frac{v_0}{r_0} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 - x\right) \left(2 + \frac{y}{h_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{y}{h_0}} = 2 \frac{v_0}{r_0}, \quad (2.73)$$

zjistíme, že i tato situace odpovídá očekávání, protože $\omega = \frac{v_0}{r_0}$, neboť úhlová rychlost je v tuhém tělese konstantní.

2.2.7 Bezrozměrný zápis rovnic víru

Zavedeme bezrozměrné proměnné $\bar{r}$, $\bar{h}$ a $\bar{v}$ zavedené tak, že

$$h = h_0 \bar{h} \quad (2.74)$$

$$r = r_0 \bar{r} \quad (2.75)$$

$$v = v_0 \bar{v}. \quad (2.76)$$

Přičemž r_0 je poloměr otvoru ve dně nádoby, a v_0 a h_0 hodnoty rychlosti a výšky hladiny na tomto poloměru. Přepíšeme-li rovnice (2.36) a (2.38) do těchto proměnných, získáme rovnice

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} - \left(1 + \frac{\Phi}{2\pi \bar{h} h_0 \eta}\right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = -\frac{\frac{\Phi}{2\pi \bar{h} h_0 \eta}}{\bar{r}^2} \quad (2.77)$$

a

$$\frac{d\bar{h}}{d\bar{r}} = -\frac{\bar{v}^2 v_0^2}{h_0 \bar{r} g}. \quad (2.78)$$

V nich můžeme provést substituce

$$\bar{y} = \frac{\Phi}{2\pi h_0 \eta} \quad (2.79)$$

a

$$a = \frac{v_0^2}{h_0 g}. \quad (2.80)$$

V rovnicích

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} - \left(1 + \frac{\bar{y}}{\bar{h}}\right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = -\frac{\bar{y}}{\bar{h} \bar{r}^2} \quad (2.81)$$

a

$$\frac{d\bar{h}}{d\bar{r}} = -\frac{\bar{v}^2 a}{\bar{r}} \quad (2.82)$$

vystupují pouze bezrozměrné veličiny. To může být výhodné například pro některé jejich numerická řešení.

2.2.8 Model pro různé kapaliny

V sekci (2.2.4) jsme provedli analýzu první iterace řešení pro limitní případ nulové a nekonečné kinematické viskozity. Ovšem reálná hodnota viskozit různých kapalin se pohybuje uvnitř tohoto intervalu, a jejich chování se tedy těmito limitním případy více či méně podobá. Rozdíly mezi nimi jsou rovněž hodny pozornosti. Má-li se pracovat s realistickými hodnotami kinematické viskozity, bylo by vhodné pracovat i s realistickými hodnotami pro ostatní parametry modelu. Nabízí se použití těch, které byly získány v experimentální části práce (viz Experimentální část). Abychom ale lépe napodobili chování různých kapalin v těchto podmínkách, je potřeba přejít k okrajovým podmínkám při vnějším okraji nádoby. Pro skutečné hodnoty z experimentu se poněkud ztrácela přehlednost. Konkrétně se jednalo o problém, že pro příliš mnoho kapalin dosáhla vypočítaná hodnota výšky hladiny nuly pro příliš vysoké r . U většiny kapalin by bylo nutné vyloučit většinu dat. K odstranění ovšem stačila drobná úprava okrajových podmínek a parametrů. Ve výsledku model pracuje s parametry uvedenými v tabulce (2.2.8).

Φ_V (cm ³ s ⁻¹)	-4,63190190
R (m)	0,229997516
V (ms ⁻¹)	0,164539099
H (m)	0,314799935
g (ms ⁻²)	9,81274986

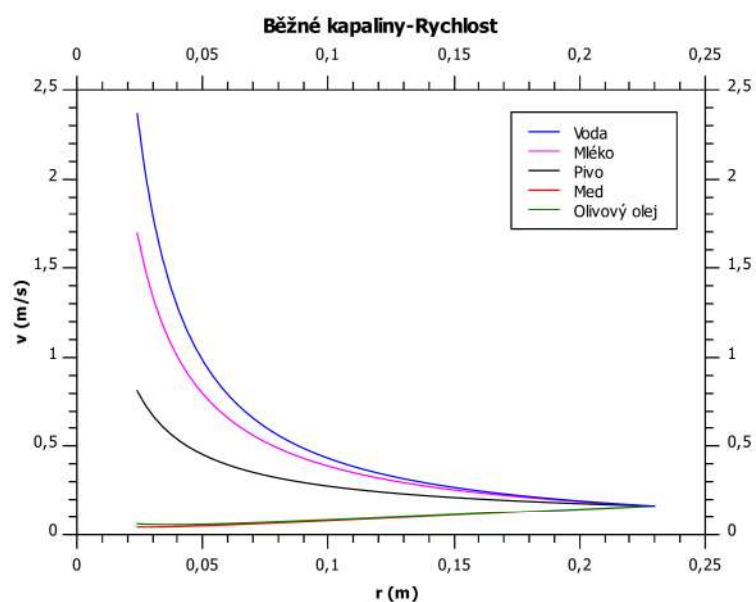
Tabulka 2.1:

Nejprve modelujeme situaci pro několik běžných kapalin, jejichž kinematické viskozity se od sebe příliš neliší. Viskozity jsme převzali z [2]. Vznese oběhové rychlosti do grafu 2.1a totéž

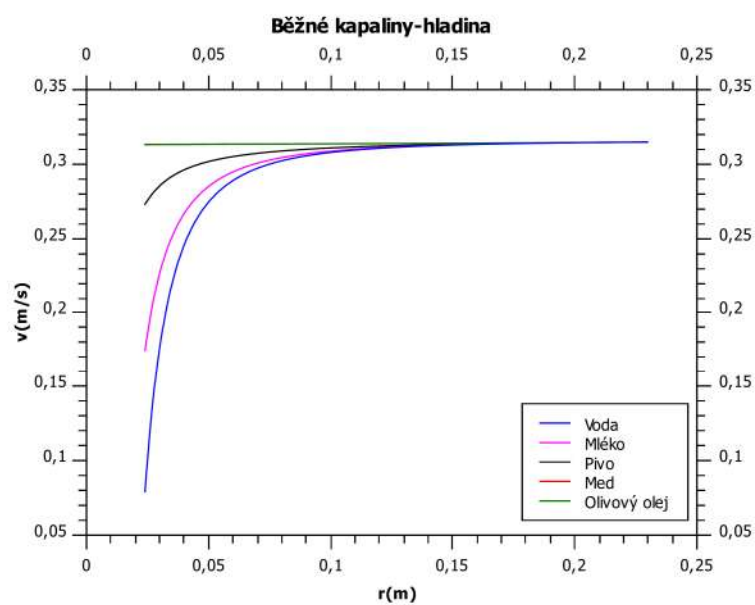
Kapalina	ν (10 ⁻⁶ m ² s ⁻¹)
voda	1,0038
mléko	1,13
pivo	1,8
mléko	1,13
olivový olej	43
med	74

Tabulka 2.2:

provedeme s výškou hladiny jednotlivých kapalin 2.2.



Obrázek 2.1: Vypočtené tečné rychlosti běžných kapalin



Obrázek 2.2: Vypočtené výšky hladiny běžných kapalin

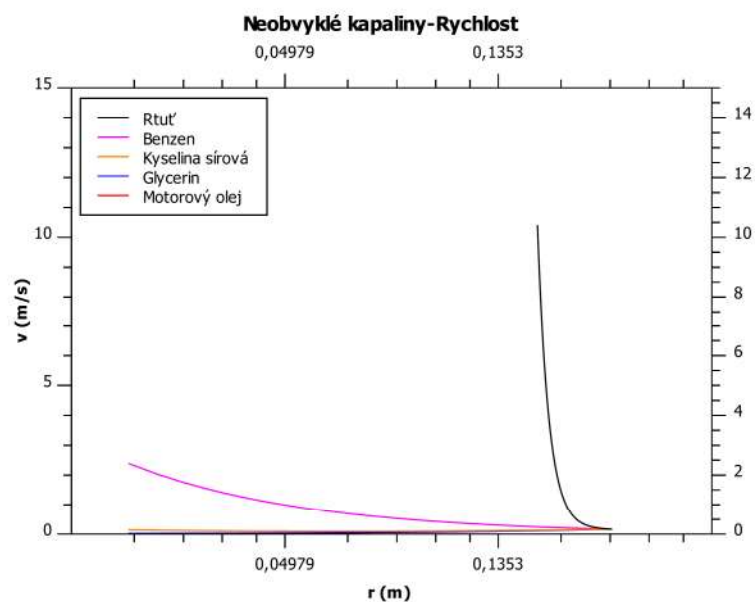
Z grafu vidíme, že rychlost méně viskózní kapaliny je při stejném poloměru vyšší, než křivky kapalin viskóznějších. Rychlosti vody, piva a mléka svým průběhem připomínají rozložení rychlosti v ideálním víru. Rychlosti medu a oleje se mu už příliš nepodobají, nepodobají se ale ani chování tuhého tělesa. Rovněž pro hladiny odpovídá chování vody mléka a piva kvalitativně ideální kapalině. Rychlost oleje a medu je při různých poloměrech za daných podmínek přibližně konstantní.

Stejným způsobem modelujeme chování méně obvyklých kapalin ze širšího rozsahu viskozity. Tyto viskozity jsme rovněž převzali z [2].

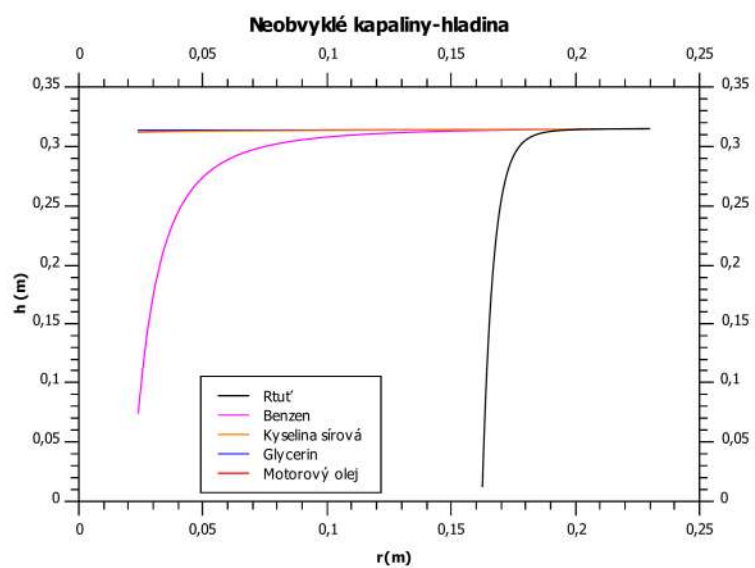
Kapalina	ν ($10^{-6}m^2s^{-1}$)
benzen	1
rtuť	1,18
kyselina sírová	14
glycerin	648
motorový olej	2590

Tabulka 2.3:

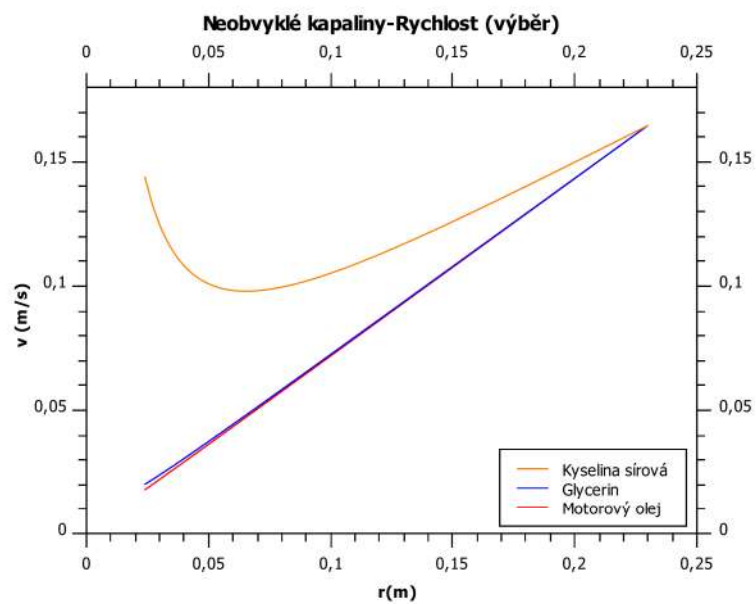
Za zmínku stojí, že viskozity vody a benzenu jsou téměř shodné, což dává jistou představu o tom, kde by se v grafech nacházely kapaliny z tabulky 2.2. Z grafů pro rychlost 2.3 a výšku hladiny 2.4 snadno poznáme, že při parametrech, které používáme v našem modelu, a škálování zachycující průběh pro všechny poloměry a kapaliny, křivky pro hodně viskózní kapaliny splynou. Proto vybereme pouze hodně viskózní kapaliny a zobrazíme jejich rychlost zvlášť v grafu 2.5 a výšku hladiny v grafu 3.1.



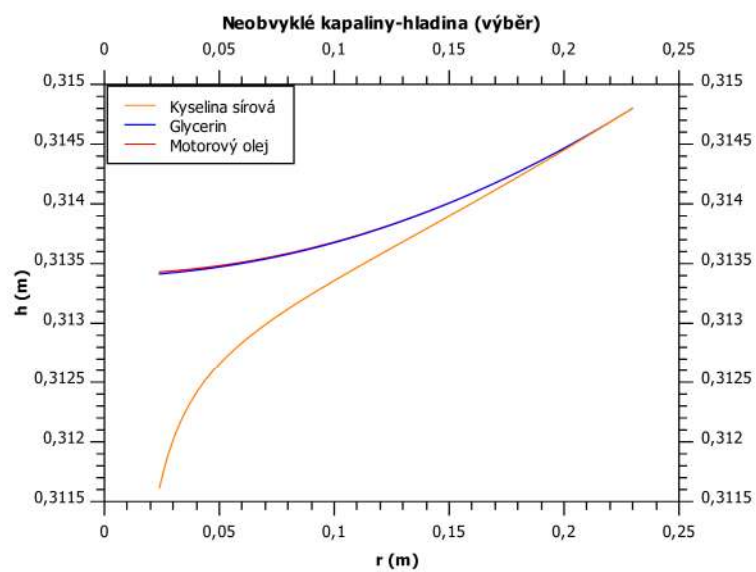
Obrázek 2.3: Vypočtené tečné rychlosti méně obvyklých kapalin



Obrázek 2.4: Vypočtené hladiny méně obvyklých kapalin



Obrázek 2.5: Vypočtené tečné rychlosti méně obvyklých kapalin (výběr)



Obrázek 2.6: Vypočtené hladiny méně obvyklých kapalin (výběr)

První dva grafy ukazují, že kvalitativní závěry vyslovené u běžných kapalin, se u širšího spektra viskozit potvrdily. Málo viskózní rtuť velmi rychle dosáhne vysoké oběhové rychlosti a její hladina klesne na nulu. Naproti tomu benzen se skutečně chová stejně jako voda, a jeho vzrůst rychlosti a pokles hladiny je mnohem pozvolnější. Motorový olej a glycerin se chovají podobně jako kapalina v aproximaci tuhým tělesem, jejich rychlost je téměř lineární a jejich hladina tvoří parabolu. I pro ně platí, že méně viskózní kapalina se na tomtéž poloměru pohybuje rychleji a má níže položenou hladinu než kapalina viskóznější. Nejzajímavější se ukazuje za těchto podmínek chování kyseliny sírové, která se zpočátku chová podobně jako kapaliny velmi viskózní (její rychlost téměř lineárně klesá) ale pak se její chování začne podobat chování málo viskózních kapalin (její rychlost se velmi rychle zvětšuje).

Kapitola 3

Experimentální část

3.1 Popis experimentálníhoho zařízení

Experimentální zařízení má z funkčního hlediska tři hlavní části. Generátor víru, zařízení k měření rychlosti a zařízení k měření výšky hladiny.

Základní součástí generátoru víru je nádoba, jejíž tvar přibližně odpovídá komolému kuželu o poloměru spodní podstavy 38 cm, poloměru horní podstavy 46 cm a výšce 28 cm, viz obrázek 3.1. Jeho objem je 39 l. Ve středu dna nádoby je vyvrtán kruhový otvor. Velikost výtokového otvoru se nastavuje pomocí nástavců s různě velkými otvory. Tyto nástavce se připevňují ke dnu nádoby pomocí šroubů. Nástavec pro 5 cm naleznete na obrázku 3.2.



Obrázek 3.1: Generátor víru



Obrázek 3.2: Nástavec s otvorem o průměru 5 cm

Na horním okraji nádoby je umístěna plastová hadice stočená do kruhu, do které je navrtáno osm otvorů, viz obrázek 3.3. Do těchto otvorů byly zasazeny pravoúhlé kolenové trubky, jednu lze vidět na obrázku 3.4. Směr proudění z těchto trubek lze korigovat jejich natočením. Původně byly natočeny kolmo na poloměr, protože při tomto uspořádání získá voda nejvyšší moment hybnosti, ale toto uspořádání se neosvědčilo, protože nárazy proudu do stěn nádoby a trysek vytvářely na hladině víru příliš velké vlny. Proto byly trysky natočeny mírně směrem dovnitř nádoby. K dalšímu omezení vln na hladině víru slouží kruhový řemen, zavěšený na kovových držácích ve výšce hladiny. Řemen zároveň vymezuje oblast měření na kruh o poloměru 18 cm.



Obrázek 3.3: Generátor víru při pohledu shora



Obrázek 3.4: Tryska generátoru víru

Nádoba je zasazena do kruhového otvoru v dřevěné desce, která je umístěna nad zásobník vody, tak aby mohla voda z nádoby odtékat do zásobníku. V zásobníku je umístěno ponorné čerpadlo, které vhání vodu ze zásobníku do stočené hadice, viz obrázek 3.7. V tomto zařízení se používá čerpadlo Fieldmann FVC 2003-EK o výkonu 400 W, lze si ho prohlédnout na obrázku 3.5. Na hadici spojující čerpadlo se stočenou hadicí je umístěna svorka, která slouží k regulaci toku, viz obrázek 3.6.



Obrázek 3.5: Čerpadlo



Obrázek 3.6: Svorka k regulaci toku



Obrázek 3.7: Čerpadlo v zásobníku vody

Další částí experimentu je zařízení k měření výšky hladiny, viz obrázek 3.8. Základním prvkem je dřevěná tyč. Tato tyč je zasunuta do dřevěného jezdcce, který je na obrázku 3.9, ve kterém se může vertikálně pohybovat. Jezdcem samotným lze pohybovat horizontálně po rovněž dřevěných kolejničkách, umístěných na dvou sloupcích. Tato konstrukce slouží k co nejlepšímu umístění tyče v ose víru. Ve spodní části tyče jsou dva úchyty. V horní části tyče (nad jezdcem) je navlečen kovový prstenec. V prstenci je otvor se závity, do kterého lze zasunout kovovou tyčinku. Tato tyčinka při utažení zafixuje polohu prstence.



Obrázek 3.8: Zařízení k měření hladiny



Obrázek 3.9: Jezdec umístěný v kolejnicích

K měření rychlosti se používá fotoaparát, viz 3.11, upevněný na třínohém stativu nad generátorem víru, sloužící ke snímání pohybu tělesa, vloženého do vodního víru. Uspořádání je vidět na obrázku 3.10. Je potřeba použít snímání o vysoké frekvenci (210 snímků za sekundu), aby bylo získáno dostatečné rozlišení. Při takové frekvenci je potřeba, aby byl snímáný objekt dostatečně osvětlen, k čemuž slouží diodový světlomet.



Obrázek 3.10: Světlomet a stativ nad generátorem víru



Obrázek 3.11: Fotoaparát, použitý k měření

3.2 Postup měření

3.2.1 Měření výšky hladiny

Při měření výšky hladiny je na výběr z několika metod:

Metoda krácených špejlí

Do držáků na tyči se symetricky zasunou špejle, na kterých bylo pomocí pravítka vyznačeno měřítko se značkou každých 5 mm. Špejle míří kolmo na hlavní tyč, tedy ve vodorovné rovině, a svírají spolu úhel 180° (3.12). Posunujeme tyčí směrem dolů, dokud se oba konce špejlí nedotknou hladiny víru. V případě, že tato situace nenastává pro žádnou polohu tyče, znamená to, že je tyč špatně umístěna, případně není svislá. Tuto závadu odstraníme posunutím, respektive nakloněním jezdce. Pokud pozorujeme dotyk konců špejlí, utáhneme kovovou tyčinku, aby se prstenec nemohl pohybovat. Poté tyč vytáhneme a odměříme vzdálenost kovové tyčinky a špejlí pomocí pravítka. Poté vezmeme štípací kleště a každou špejli zkrátíme o 5 mm. Poté postup opakujeme. Výšku hladiny určíme odečtením naměřené polohy tyčinky od známé výšky jezdce a poloměr z délky tyčinky a její polohy vůči ose tyče, tedy přibližné ose víru.

Nevýhody této metody:

- Při měření zasouváme tyč natolik nízko, že začne výrazným způsobem ovlivňovat proudění vzduchu v otvoru. Bez přítomnosti tyče proudící kapalina strhává vzduch s sebou. V přítomnosti tyče je strhávání omezeno, a tření mezi kapalinou a vzduchem vzroste. Tím je kapalina natolik zpomalována, že hladina začne klesat.
- Jezdec i tyč v něm mají značnou volnost, což může způsobovat zkreslení měřených hodnot.
- Špejle při měření nevyhnutelně zvlhnou, což způsobí jejich ohnutí. Tato změna může hrát roli zejména při prvních měřeních, kdy je prohnutí nejvýraznější a zároveň se výška mění nejméně.
- Při měření vzdáleností tyčinky a špejle je nutno umístit pravítko kolmo, což se ovšem obtížně realizuje.

Metoda rozevíracích ramen

Do držáků upevníme dvě kovová ramena. Rozevřeme je natolik, aby vzdálenost jejich konců odpovídala zvolenému poloměru. Těmito konci se dotkneme hladiny (viz metoda krácených špejlí). Protože ramena svírají s tyčí úhel, který se během měření mění, nelze polohu konců odečíst přímo. Změříme tedy délku tyče vyčnívající nad kovový prstenec. K tomu slouží posuvné měřidlo. Polohu začátků ramen získáme z této hodnoty jejím odečtením od známé vzdálenosti úchytů od konce tyče. Polohu konců dopočítáme ze známého rozestupu a délky ramene.

Nevýhody této metody:

- Při měření zasouváme tyč natolik nízko, že začne výrazným způsobem ovlivňovat proudění vzduchu v otvoru. Bez přítomnosti tyče proudící kapalina strhává vzduch s sebou. V přítomnosti tyče je strhávání omezeno, a tření mezi kapalinou a vzduchem vzroste. Tím je kapalina natolik zpomalována, že hladina začne klesat.
- Jezdec i tyč v něm mají značnou volnost, což může způsobovat zkreslení.
- Umístit ramena do zvoleného rozestupu lze jen obtížně, aby rozevření bylo provedeno dostatečně přesně, musí se ho účastnit dva lidé. Naproti tomu jejich porušení je velmi snadné, stačí např. rychlý pohyb aparaturou.

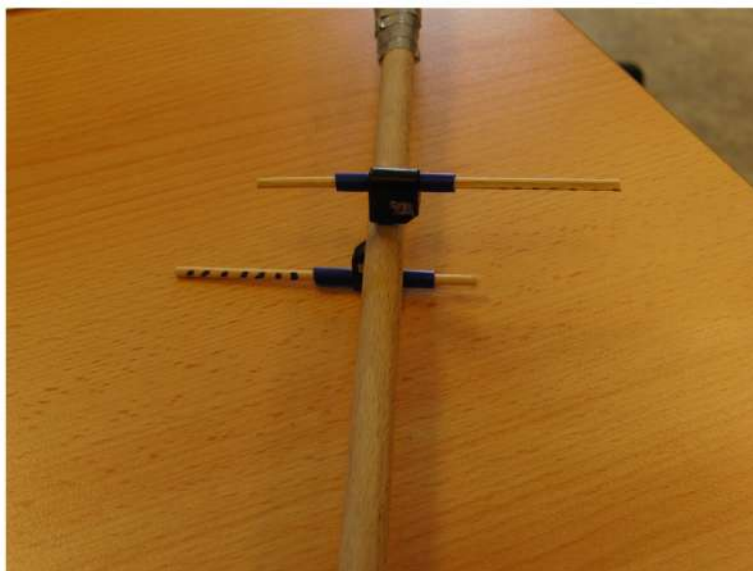
Metoda bodce

Na konec tyče se upevní část špejle známé délky (3.13). Pohybujeme jezdcem podél poloměru a přibližně každých 0,5 cm se dotkneme hrotem špejle hladiny. Měří se délka tyče vyčnívající nad kovový prstenec. Polohu hladiny získáme triviálním odečtem od celkové délky.

Nevýhody této metody:

- Jezdec i tyč v něm mají značnou volnost, což může způsobovat zkreslení. Tato metoda je na tento faktor nejcitlivější, neboť se jimi často a výrazně pohybuje.
- V nejstabilnější poloze neleží kolejnice na průměru nádoby, získané hodnoty je tedy třeba přepočítávat za použití veličin, určených velmi nepřesně.

Zpočátku se zdála nejvhodnější metoda rozevíracích ramen, nebo metoda krácených špejlí, neboť metoda bodce ke správnému výsledku vyžaduje znalost několika parametrů přístroje, jejichž nejistota je srovnatelná s nejistotou samotného měření. V praxi se ale ukázalo, že změna hladiny při použití ostatních metod je až několik centimetrů, tedy přibližně 10% měřené hodnoty. Zejména to platilo pro menší poloměry otvoru. Proto byla nakonec zvolena metoda bodce.



Obrázek 3.12: Držák se zkrácenými špejlemi



Obrázek 3.13: Konec tyče vybavený bodcem

3.2.2 Měření rychlosti

Nejprve pro zvýšení kontrastu nalijeme do vody inkoust. Umístíme fotoaparát na stativ nad spuštěný generátor víru a spustíme záznam vysokofrekvenčního videa. Při okraji měřené oblasti umístíme na hladinu obarvenou polystyrenovou kuličku. Zaznamenáváme obraz, dokud těleso nezmizí v otvoru ve dně nádoby. K vyhodnocení videa použijeme program Tracker. V něm označíme na jednotlivých snímcích polohu tělesa. Z těchto poloh pak získáme rychlost a vzdálenost od osy víru.

Nevýhody použité metody:

- Poloha v souřadnici r je při různých výškách hladiny různě zkreslena perspektivou.
- Ani při dobrém osvětlení není těleso vidět na všech snímcích, případně je rozmazané.
- Prováděné měření časově náročné, a citlivé na lidskou chybu.



Obrázek 3.14: Polystyrenové kuličky použité k měření

3.2.3 Měření toku

Při měření toku ucpeme odtok generátoru víru pomocí polystyrenové koule, generátor víru spustíme. Pomocí stopek měříme čas, za který se nádoba naplní. Tímto časem vydělíme objem nádoby generátoru. Ten má tvar komolého kuželu, jehož objem je dán vztahem $V = \frac{H\pi(R_d^2 + R_h^2 + R_d R_h)}{3}$. Poloměry R_d a R_h a výšku H změříme pomocí pásového metru.

Nevýhody této metody:

- Do objemu nádoby jsou započteny i objemy části zařízení do něj vložených.
- Měření času ovlivňuje i rychlost reflexů pozorovatele při mačkání stopek.
- Utěsnění nádoby není dokonalé, proto část vody při napouštění odtéče.

3.2.4 Měření pomocí koule

Alternativně lze výšku hladiny a rychlost určit pomocí polystyrenové koule. Do víru vložíme polystyrenovou kouli, na které byla vyznačena síť značek (3.15). Tato koule klesne do osy víru, kde je nadnášena a otáčí se. Kouli snímáme a z pohybu značek na jejím povrchu později v programu Tracker určíme její úhlovou rychlost. Dále vezmeme aparaturu na měření výšky hladiny a dotkneme se vršku koule koncem tyče, případně se k tomu těsně přiblížíme. Utáhneme kovovou tyčinku a odměříme její polohu od konce tyče. Analogicky k výpočtu polohy hladiny z polohy tyčinky určíme polohu vršku koule. Předpokládáme-li, že koule se dotýká hladiny ve svém poloměru, můžeme určit výšku hladiny při r rovné poloměru koule. Z pohybu značek můžeme určit úhlovou rychlost koule, a tedy i rychlost na jejím obvodu.

Nevýhody této metody:

- Můžeme provést měření jen pro tolik poloměrů, kolik máme koulí. V našem případě jeden.
- Jezdec i tyč v něm mají značnou volnost, což může způsobovat zkreslení.
- Ani při dobrém osvětlení není značka vidět na všech snímcích, případně je rozmazané.
- Měření polohy značky je citlivé na lidskou chybu.

- Ve skutečnosti neleží koule na hladině, ale je mírně ponořená.
- Koule se nedotkne hladiny v průměru, ale o něco níže.
- Při dotyku může tyč kouli posunout níže, při těsném přiblížení vznikne mezera neznámé tloušťky.



Obrázek 3.15: Koule se sítí značek

3.3 Vyhodnocení měření

Měření bylo provedeno pro dva průměry otvoru dna, 5 cm a 3,5 cm, a pro několik toků. Tíhové zrychlení je konstantní $g = 9,8127 \text{ ms}^{-2}$. Pracovali jsme s jedinou kapalinou, a to vodou, jejíž kinematická viskozita je $\nu = 1,0038 (10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$.

3.3.1 Měření 1

Měření číslo 1 proběhlo s těmito parametry:

Objemový tok ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)	0,000572
Průměr (m)	0,05

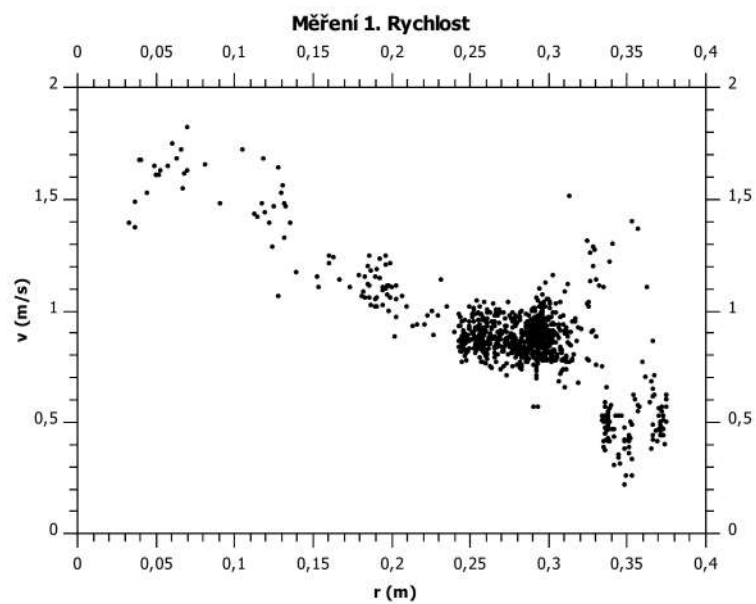
Tabulka 3.1:

Výsledkem měření byly hodnoty pro rychlost a pro výšku hladiny. Hodnoty pro výšku hladiny naleznete v tabulce (3.2) a grafu (3.17), hodnoty pro rychlost v grafu (3.16).

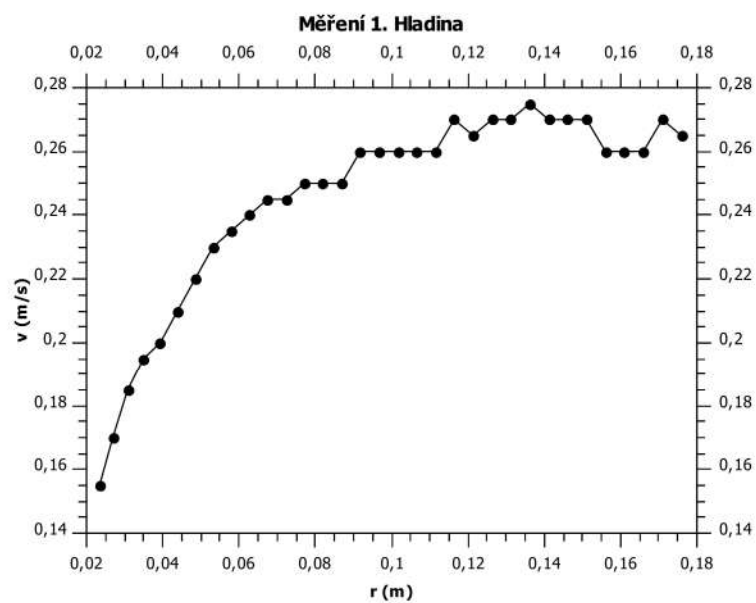
r (m)	h (m)
0,176	0,265
0,171	0,27
0,166	0,26
0,161	0,26
0,156	0,26
0,151	0,27
0,146	0,27
0,141	0,27
0,136	0,275
0,131	0,27
0,126	0,27
0,121	0,265
0,116	0,27
0,111	0,26
0,107	0,26
0,102	0,26
0,097	0,26
0,092	0,26
0,087	0,25
0,082	0,25
0,077	0,25
0,072	0,245
0,067	0,245
0,063	0,24
0,058	0,235
0,053	0,23
0,048	0,22
0,044	0,21
0,039	0,2
0,035	0,195
0,031	0,185
0,027	0,17
0,023	0,155

Tabulka 3.2:

Během tohoto měření bylo provedeno i doplňkové měření pomocí polystyrenové koule. Výsledkem byly hodnoty $r = 0,03$ m, $h = 0,125$ m a $v = 1,316$ ms⁻¹. Měření pomocí bodce a snímání kuličky dávají pro hladinu v daném poloměru hodnotu mezi 0,17 m a 0,18 m pro rychlost okolo $v = 1,5$ ms⁻¹. Protože od metody polystyrenové koule nelze očekávat více, než přibližný odhad hodnoty, lze tuto shodu považovat za uspokojivou.



Obrázek 3.16: Graf oběhové rychlosti pro měření 1



Obrázek 3.17: Graf výšky hladiny pro měření 1

3.3.2 Měření 2

Druhé měření proběhlo s těmito parametry:

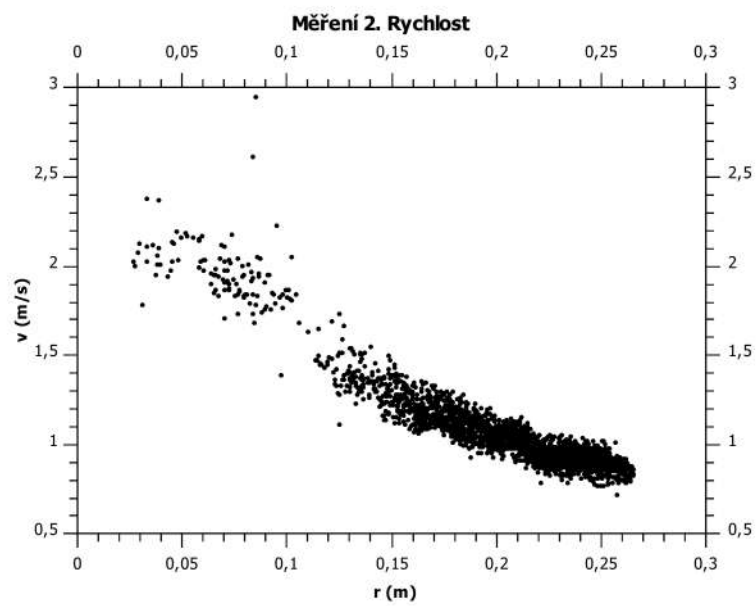
Objemový tok (m^3s^{-1})	0,0003
Průměr (m)	0,035

Tabulka 3.3:

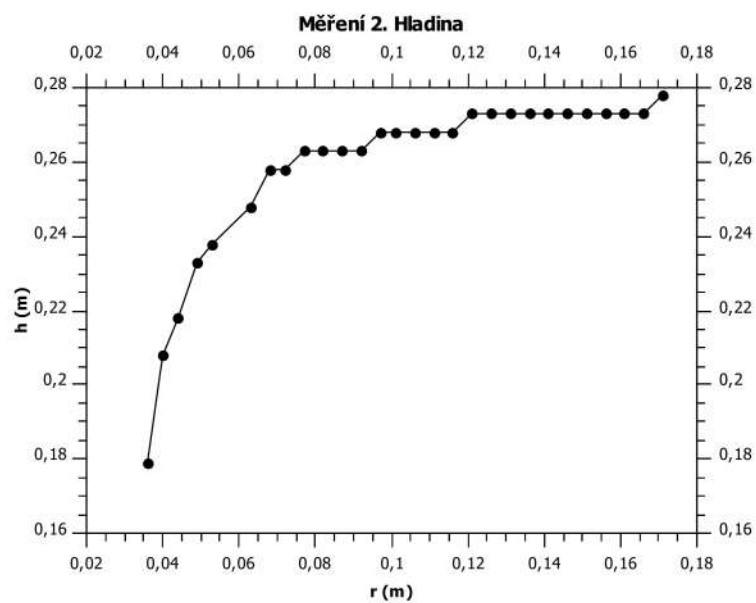
Výsledkem měření byly hodnoty pro rychlost a pro výšku hladiny. Hodnoty pro výšku hladiny naleznete v tabulce (3.2) a grafu (3.17), hodnoty pro rychlost v grafu (3.17).

r (m)	h (m)
0,278	0,171
0,273	0,166
0,273	0,161
0,273	0,156
0,273	0,151
0,273	0,146
0,273	0,141
0,273	0,136
0,273	0,131
0,273	0,126
0,273	0,121
0,268	0,116
0,268	0,111
0,268	0,106
0,268	0,101
0,268	0,097
0,263	0,092
0,263	0,087
0,263	0,082
0,263	0,077
0,258	0,072
0,258	0,068
0,248	0,063
0,238	0,053
0,233	0,049
0,218	0,044
0,208	0,04
0,179	0,036

Tabulka 3.4:



Obrázek 3.18: Graf pro oběhovou rychlost pro měření 2



Obrázek 3.19: Graf pro výšku hladiny pro měření 2

3.3.3 Měření 3

Měření číslo 3 proběhlo s těmito parametry:

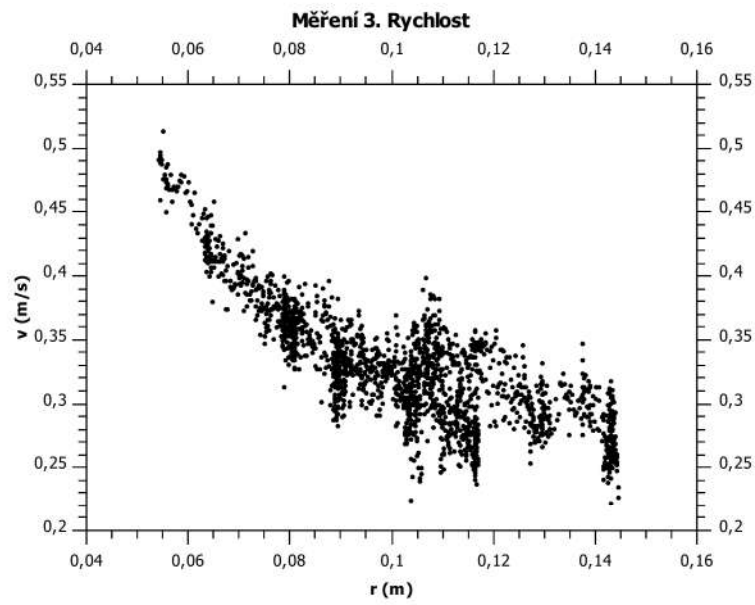
Objemový tok (m^3s^{-1})	0,000284
Poloměr (m)	0,035

Tabulka 3.5:

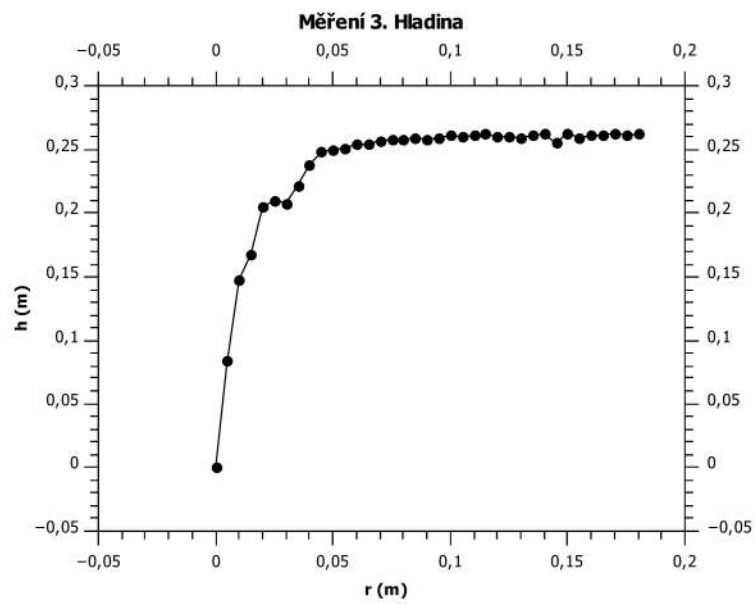
Při tomto měření byl ozkoušen nový postup, kdy byla nejprve změřena rychlost při okraji, a poté zvlášť rychlost uprostřed víru, přičemž tato oblast byla zvětšena pomocí zoomu fotoaparátu. Postup se neosvědčil, neboť s použitím zoomu příliš narostla chyba způsobená perspektivou. Získali jsme tedy pouze hodnoty pro rychlost na okraji a rychlosti přímo uprostřed víru, kde bylo možno použít škálování pomocí šířky otvoru. Měření hladiny proběhlo standardně, výsledkem byly hodnoty v tabulce níže. Pokud data vyneseme do grafů, získáme grafy (3.20) a (3.21).

r (m)	h (m)
0,18	0,262
0,175	0,261
0,17	0,263
0,165	0,261
0,16	0,261
0,155	0,259
0,15	0,263
0,145	0,255
0,14	0,262
0,135	0,261
0,13	0,259
0,125	0,26
0,12	0,26
0,115	0,262
0,11	0,261
0,105	0,26
0,1	0,261
0,095	0,259
0,09	0,258
0,085	0,259
0,08	0,258
0,075	0,258
0,07	0,257
0,065	0,254
0,06	0,254
0,055	0,251
0,05	0,25
0,045	0,248
0,04	0,238
0,035	0,222
0,03	0,208
0,025	0,21
0,02	0,205
0,015	0,168
0,01	0,148
0,005	0,085

Tabulka 3.6:



Obrázek 3.20: Graf pro oběhovou rychlost pro měření 3



Obrázek 3.21: Graf pro výšku hladiny pro měření 3

3.3.4 Měření 4

Čtvrté měření proběhlo s těmito parametry:

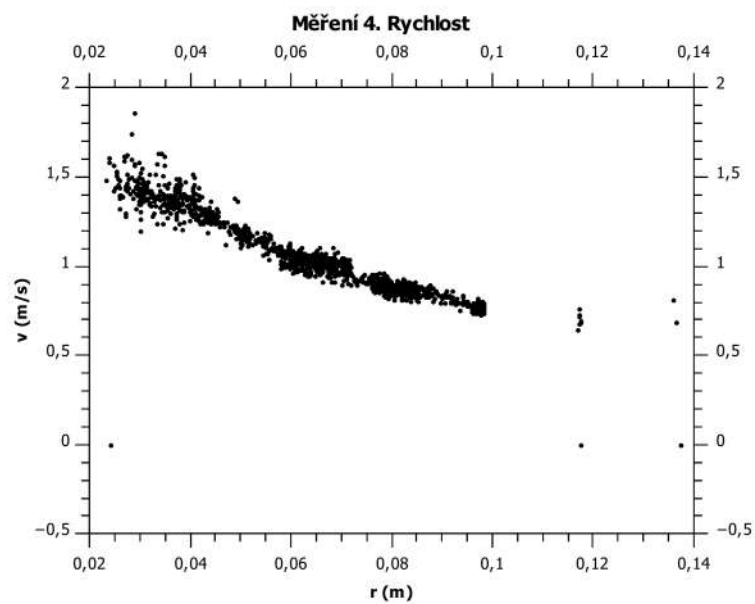
Objemový tok (m^3s^{-1})	0,000348
Poloměr (m)	0,035

Tabulka 3.7:

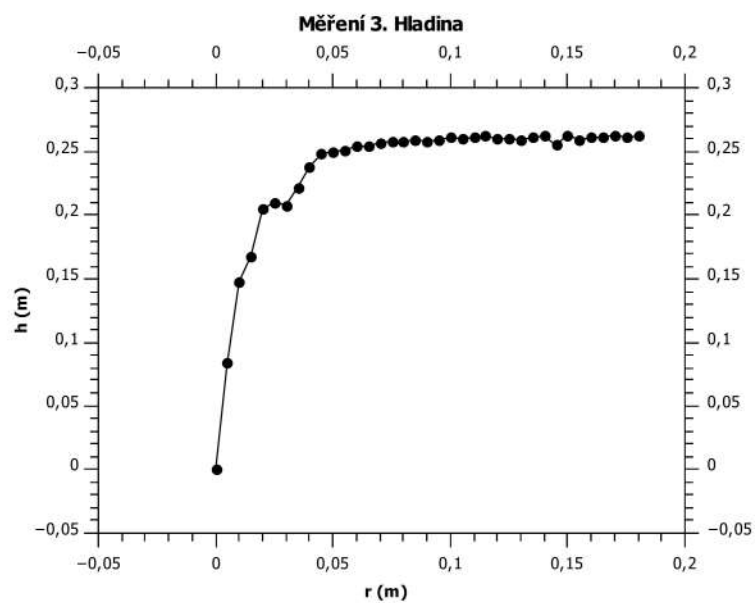
Výsledkem měření byly hodnoty pro rychlost a pro výšku hladiny. Hodnoty pro výšku hladiny naleznete v tabulce (3.8) a grafu (3.23), hodnoty pro rychlost v grafu (3.22).

r (m)	h (m)
0,1825	0,246
0,1775	0,255
0,1725	0,26
0,1675	0,26
0,1625	0,26
0,1575	0,26
0,1525	0,26
0,1475	0,26
0,1425	0,26
0,1375	0,26
0,1325	0,26
0,1275	0,26
0,1225	0,255
0,1175	0,26
0,1125	0,26
0,1075	0,26
0,1025	0,255
0,0975	0,255
0,0925	0,255
0,0875	0,255
0,0825	0,255
0,0775	0,25
0,0725	0,25
0,0675	0,25
0,0625	0,25
0,0575	0,245
0,0525	0,245
0,0475	0,24
0,0425	0,235
0,0375	0,23
0,0325	0,225
0,0275	0,21
0,0225	0,19
0,0175	0,17
0,0125	0,09
0,0075	0,015

Tabulka 3.8:



Obrázek 3.22: Graf pro oběhovou rychlost pro měření 4



Obrázek 3.23: Graf pro výšku hladiny pro měření 4

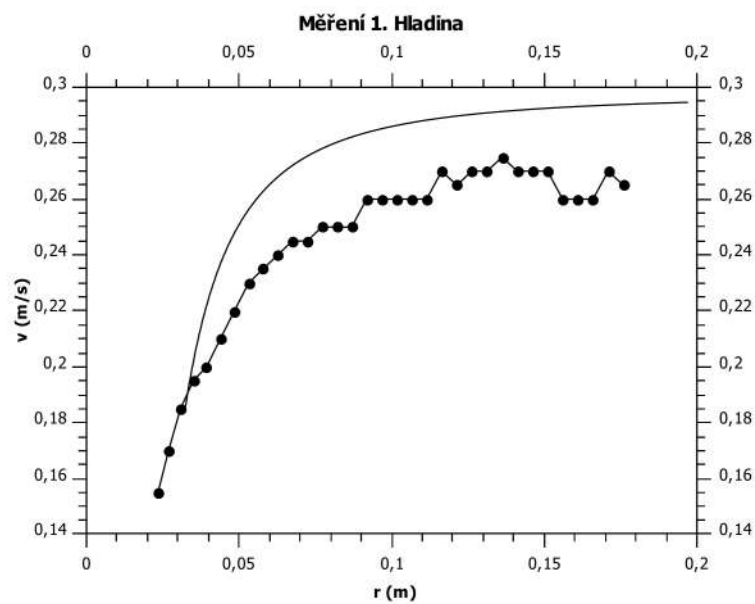
3.3.5 Porovnání s teoretickou předpovědí

Při porovnání teoretické předpovědi s experimentem vyneseme do grafu kromě naměřených dat i teoretickou předpověď danou rovnicemi (2.42) a (2.43), přičemž parametry rovnic volíme stejné jako parametry měření a počáteční podmínky vybereme z naměřených dat. Optimální by bylo znát hladinu i rychlost pro poloměr otvoru nádoby, ale to se při měření nezdařilo. Volíme proto jemu blízkou trojici, respektive hodnotu hladiny a rychlosti pro dva velmi podobné poloměry, a pro jeden z těchto poloměrů. Konkrétně se jedná o hodnoty:

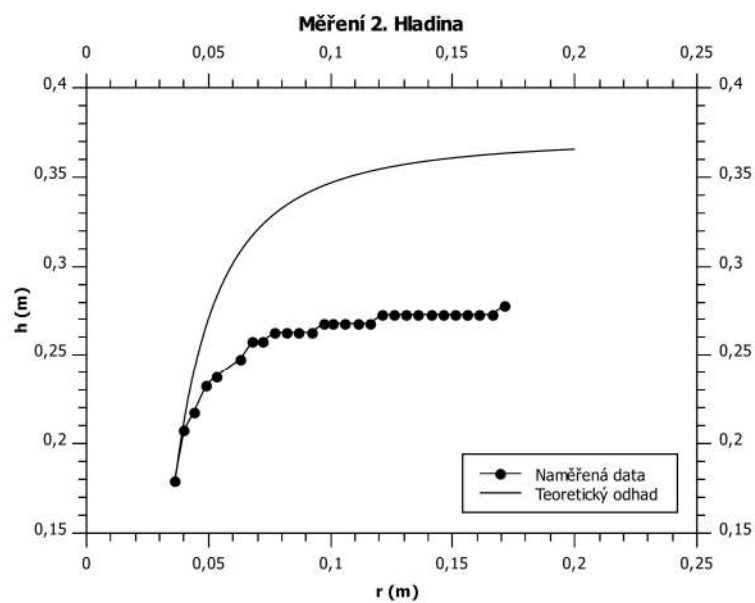
	r_0 (m)	v_0 (ms ⁻¹)	h_0 (m)
Měření 1.	0,0323	1,492	0,185
Měření 2.	0,0363	1,956	0,179
Měření 3.	0,0207	2,425	0,205
Měření 4.	0,0242	1,582	0,19

Tabulka 3.9:

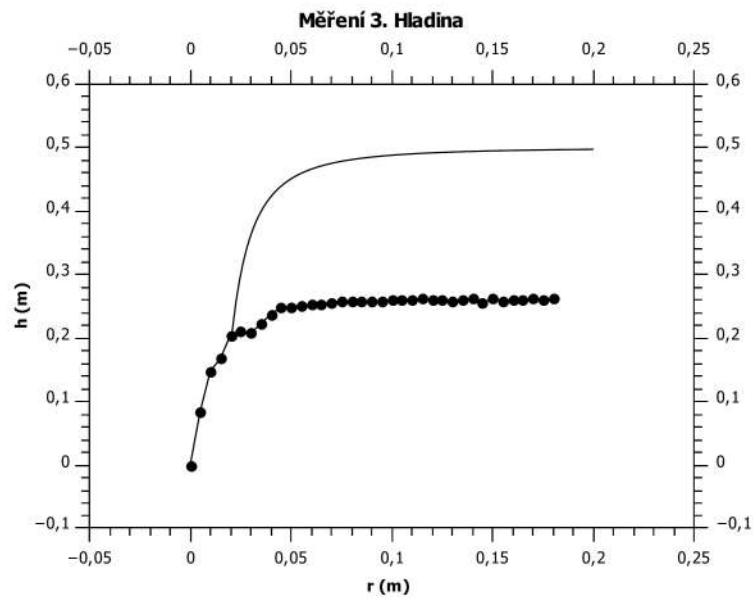
Nejprve vyneseme do grafu měření výšky hladiny. Získáme tak grafy (3.24) až (3.27).



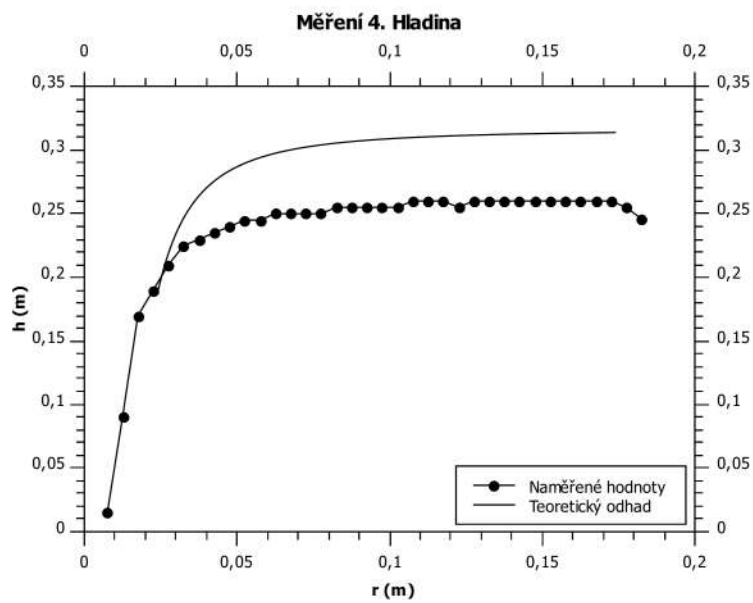
Obrázek 3.24: Srovnání teoretické a experimentální výšky hladiny-měření 1.



Obrázek 3.25: Srovnání teoretické a experimentální výšky hladiny-měření 2.



Obrázek 3.26: Srovnání teoretické a experimentální výšky hladiny-měření 3.



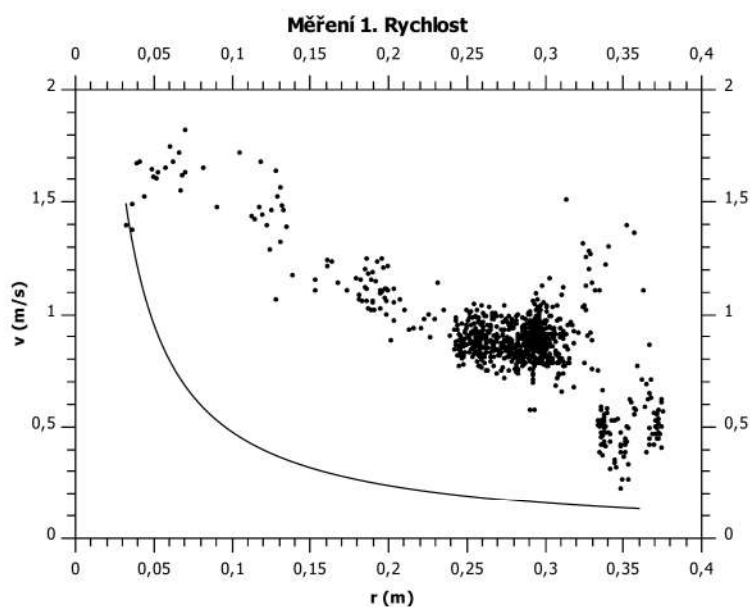
Obrázek 3.27: Srovnání teoretické a experimentální výšky hladiny-měření 4.

Jako první je zřejmý rozpor mezi kvalitativním a kvantitativním výsledkem. Kvalitativně si teorie a experiment odpovídají. Výška hladiny s hodnotou r prudce roste, aby se na určitém intervalu ustálila na přibližně konstantní hodnotě. Ovšem kvantitativně si pro některá měření neodpovídají téměř vůbec. Nejsnáze to posoudíme právě z výšky hladiny v téměř konstantní části.

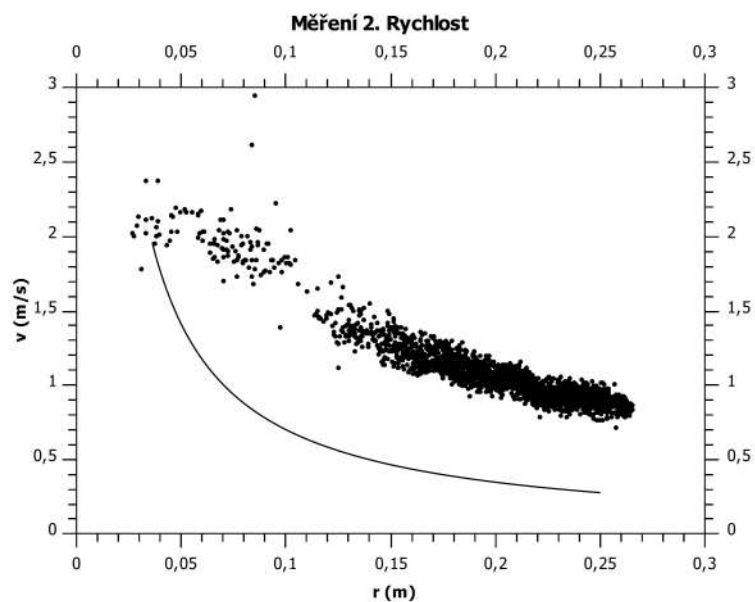
	h_{const} (m)	$h_{\text{c-teor}}$ (m)	$\Delta h_{\text{const/c-teor}}$
Měření 1.	0,265	0,296	10%
Měření 2.	0,271	0,365	35%
Měření 3.	0,261	0,497	90%
Měření 4.	0,260	0,313	20%

Tabulka 3.10:

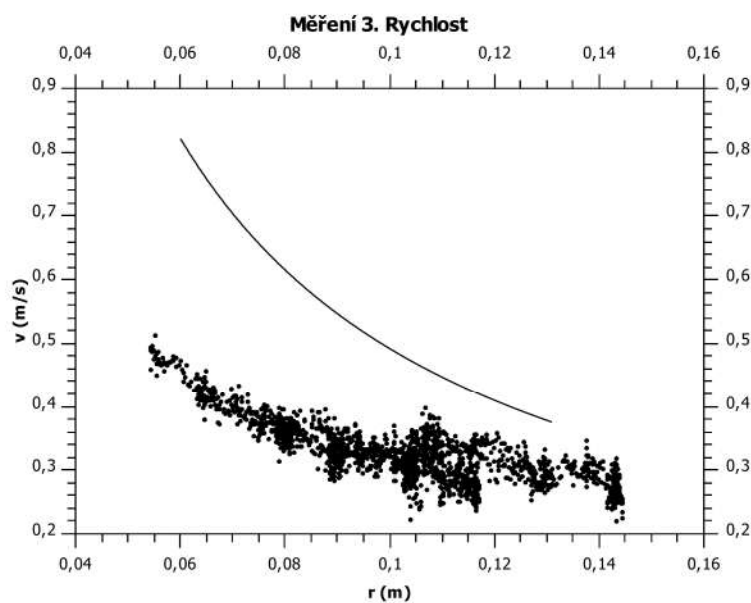
Podobně se můžeme zaměřit na rychlost. Získáme tak grafy 3.28 až 3.31.



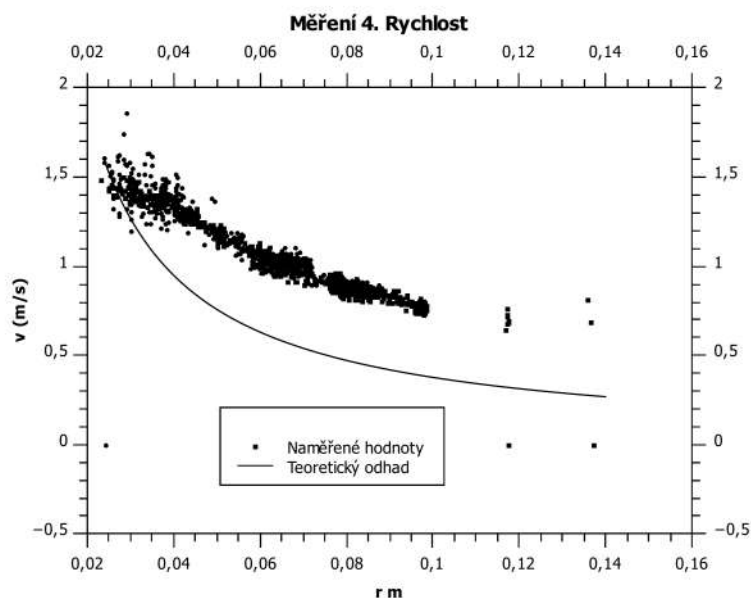
Obrázek 3.28: Srovnání teoretické a experimentální rychlosti-měření 1.



Obrázek 3.29: Srovnání teoretické a experimentální rychlosti-měření 2.



Obrázek 3.30: Srovnání teoretické a experimentální rychlosti-měření 3.



Obrázek 3.31: Srovnání teoretické a experimentální rychlosti-měření 4.

Protože u rychlosti nelze najít hodnotu, kterou by šlo snadno porovnávat, jako byla téměř konstantní hodnota u výšky hladiny, porovnáme hodnoty, které jsou nejdále od okrajových podmínek.

	$v_{fin} \text{ (ms}^{-1}\text{)}$	$v_{f-teor} \text{ (ms}^{-1}\text{)}$	$\Delta v_{fin/f-teor}$
Měření 1.	0,83	0,14	80%
Měření 2.	0,89	0,27	70%
Měření 3.	0,42	0,82	95%
Měření 4.	0,82	0,38	55%

Tabulka 3.11:

Rozdíl mezi experimentálními a teoretickými daty se pohybuje v desítkách procent naměřených hodnot. Extrémní výkyv u hladiny u měření 3 může být daný hrubou chybou při určení počáteční rychlosti, vysoké chyby u rychlosti, pohybující se mezi 95% a 55%, mohou být zčásti způsobeny perspektivou, ovšem odchylka teoretických a experimentálních hodnot pro hladinu v měřeních 1, 2 a 4, pohybující se mezi 10% a 35%, naznačuje, že ani korekce těchto chyb by nesoulad neodstranila. Zlepšení by mohlo přinést nalezení vyšších iterací zkoumaných veličin, které je ovšem matematicky obtížné.

Kapitola 4

Závěr

Odvodili jsme teoretické závislosti rychlosti a výšky hladiny víru na vzdálenosti od jeho osy. Výsledkem byla soustava dvou spřažených diferenciálních rovnic, kterou jsme řešili pomocí metody iterace. Funkce, které jsme takto získali, jsme prověřili výpočtem limit pro nulovou a nekonečnou kinematickou viskozitu. Zjistili jsme, že pro nulovou viskozitu je výsledkem vztah popisující chování ideální kapaliny, a pro nekonečnou popisující chování tuhého tělesa.

Z rychlosti, dané touto iterací, jsme určili složku rotace ve směru osy z , a prověřili ji pro tytéž limitní případy. Odvodili jsme i tlak v různých místech kapaliny, tvořící vír, a zjistili, že tlak odpovídá hydrostatickému tlaku mezi daným místem a hladinou. Určili jsme i konkrétní rovnici pro tlak, kdy hladina odpovídá závislosti získané metodou iterace. Vypočítali jsme i limitní podoby tohoto vztahu pro nekonečnou a nulovou viskozitu.

Na základě těchto teoretických modelů odhadli, jak by se chovaly kapaliny různých viskozit. Některé by se svým chováním podobaly ideální kapalině, vytvořily by hladinu, která poblíž osy velmi prudce klesá a ve větší vzdálenosti je téměř vodorovná zatímco oběhová rychlost by byla téměř nepřímo úměrná vzdálenosti od osy. K těm patřily voda, benzen nebo pivo. Jiné by se svým chováním podobaly tuhému tělesu, vytvořily by parabolickou hladinu a rychlost by byla téměř přímo úměrná. Takové chování lze očekávat třeba od motorového oleje nebo glycerinu. A jiné by se svým chováním příliš nepodobaly ani jednomu meznímu případu, například kyselina sírová.

V experimentální části jsme vytvořili stacionární vír v nádobě, a byla pořízená dokumentace demonstračního charakteru. Dále jsme realizovali experiment, při kterém byly proměřeny závislosti rychlosti a výšky hladiny. Porovnáním teoreticky získaných a naměřených hodnot jsme zjistili, že rozdíl mezi nimi se pohybuje u výšky hladiny mezi 10% a 35%, kromě jednoho měření, kdy dosahuje 90%. U rychlosti se pohybuje mezi 55% a 95%. Tento nesoulad poukazuje na nedostatečnost použití pouze první iterace v iterativní metodě, případně na vhodnost použití jiné přibližné metody. Experiment by šel zdokonalit odstraněním chyb způsobných perspektivou, případně nalezením mechanismu jejich korekce.

Literatura

- [1] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., rev. a upr. Praha: Academia, 2000, 878 s. Gerstner. ISBN 978-80-200-0772-5.
- [2] Engineering ToolBox. [online]. [cit. 2015-05-15]. Dostupné z: [http :
//www.engineeringtoolbox.com/kinematic – viscosity – d397.html](http://www.engineeringtoolbox.com/kinematic-viscosity-d397.html)
- [3] LANDAU, Lev Davidovich, Evgeny Mikhailovich LIFSHITZ. *Theory of elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1975. ISBN 0-08-006465-5.