

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2021

KATEŘINA NETRDOVÁ

Soustavy lineárních rovnic – sbírka příkladů

Bakalářská práce

Kateřina Netrdová

Bibliografický záznam

Autor:	Kateřina Netrdová Přirodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Soustavy lineárních rovnic – sbírka příkladů
Studijní program:	Ekologická a evoluční biologie
Studijní obor:	Biologie se zaměřením na vzdělání, Matematika se zaměřením na vzdělání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Akademický rok:	2020/2021
Počet stran:	xiv + 59
Klíčová slova:	sbírka příkladů; matice; determinant; soustavy lineárních rovnic; hodnota matice

Bibliographic Entry

Author: Kateřina Netrdová
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Systems of linear equations – collection of examples

Degree Programme: Ecological and Evolutionary Biology

Field of Study: Biology with a view to Education, Mathematics with a view to Education

Supervisor: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Academic Year: 2020/2021

Number of Pages: xiv + 59

Keywords: exercise book; matrix; determinant; systems of linear equations; rank of matrix

Abstrakt

Tato bakalářská práce je sbírkou příkladů, která je určena k procvičování látky z předmětu MUC31 Lineární algebra. Obsahuje úlohy na procvičení teorie a početních příkladů z kapitol "Matice a determinanty" a "Soustavy lineárních rovnic". Tyto úlohy byly vytvářeny tak, aby mohly být použity v aplikaci Informačního systému Masarykovy univerzity – "Odpovědníky".

Abstract

This bachelor's thesis is a collection of examples, that was created to practice the subject MUC31 Linear Algebra. It contains exercises for practicing theory and numerical exercises from the chapters "Matrices and determinants" and "Systems of linear equations". The examples were created, so they can be used in the application of Masaryk University Information System – "Odpovědníky".

ZADÁNÍ
BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2020/2021

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Kateřina Netrdová
Program:	Ekologická a evoluční biologie
Obor:	Biologie se zaměřením na vzdělávání Matematika se zaměřením na vzdělávání

Ředitel ústavu PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Soustavy lineárních rovnic - sbírka příkladů
Název práce anglicky:	Systems of linear equations - collection of examples
Jazyk závěrečné práce:	čeština

Oficiální zadání:

Studentka/student vytvoří sbírku příkladů s tématem soustav lineárních rovnic pro výuku předmětu MUC31 Lineární algebra. Sbíрка bude sestavena tak, aby byla použitelná v aplikaci "Odpovědníky" v Informačním systému MU.

Literatura:

BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. 1. vyd. Praha: Academia, 2000. 197 s. ISBN 8020008438.

PASEKA, Jan a Pavol ZLATOŠ. *Lineární algebra a geometrie I. Elportál*. Brno: Masarykova univerzita, 2010. ISSN 1802-128X.

PROSKURJAKOV, I. V. *Sborník zadač po linejnoj algebre*. 7. vyd. Moskva: Nauka, 1984. 335 s.

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Datum zadání práce:	26. 5. 2020
V Brně dne:	8. 3. 2021

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Kateřina Netrdová, 19. 11. 2020

prof. RNDr. Josef Janyška, DSc., 19. 11. 2020

RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 19. 11. 2020

Poděkování

Na tomto místě bych v první řadě chtěla poděkovat vedoucímu své bakalářské práce panu prof. RNDr. Josefu Janyškovi, DSc., za odborný dohled a čas, který věnoval našim konzultacím. Dále bych chtěla poděkovat kolegovi Jakubu Sochorovi za korekci některých úloh, a v neposlední řadě také všem, jež mě při tvorbě této práce podporovali.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 15. května 2021

.....
Kateřina Netrdová

Obsah

Úvod	1
Kapitola 1. MATICE A DETERMINANTY	3
1.1 Pořadí a permutace	3
1.1.1 Příklady na teorii	3
1.1.2 Početní příklady	6
1.1.3 Nastavení odpovědníků	9
1.2 Matice a determinanty	10
1.2.1 Příklady na teorii	11
1.2.2 Početní příklady	15
1.2.3 Nastavení odpovědníků	20
1.3 Algebra matic	21
1.3.1 Příklady na teorii	22
1.3.2 Početní příklady	24
1.3.3 Nastavení odpovědníků	27
1.4 Hodnota matice	27
1.4.1 Příklady na teorii	28
1.4.2 Početní příklady	30
1.4.3 Nastavení odpovědníků	31
1.5 Další vlastnosti a užití matic	32
1.5.1 Příklady na teorii	32
1.5.2 Početní příklady	33
1.5.3 Nastavení odpovědníků	34
Kapitola 2. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC	37
2.1 Gaussova metoda řešení soustav lineárních rovnic	37
2.1.1 Příklady na teorii	38
2.1.2 Početní příklady	39
2.1.3 Nastavení odpovědníků	42
2.2 Základní vlastnosti soustav lineárních rovnic	43
2.2.1 Příklady na teorii	43
2.2.2 Početní příklady	45
2.2.3 Nastavení odpovědníků	46
2.3 Homogenní soustavy lineárních rovnic	47

2.3.1 Příklady na teorii	47
2.3.2 Početní příklady	48
2.3.3 Nastavení odpovědníků	52
Závěr	53
Přílohy	55
Seznam použité literatury	59

Úvod

Tato bakalářská práce byla sestavena jako sbírka příkladů k procvičování témat "Matice a determinanty" a "Soustavy lineárních rovnic" z předmětu MUC31 Lineární algebra.

Cílem této bakalářské práce je shromáždit sady příkladů, které budou studentům sloužit k opakování látky ve formě odpovědníků v Informačním systému Masarykovy univerzity. Práce obsahuje otázky s různými typy odpovědí - doplnění slova nebo čísla, vybírání jedné popř. více správných odpovědí či vybírání těchto ze seznamu. Formulace otázek je omezena možnostmi Informačního systému, nelze tedy vytvářet sady s otevřenými otázkami typu "uved'te příklad", apod. U otázek s možností více správných odpovědí je nutné dát studentům výběr možných řešení.

Práce je členěna na kapitoly a podkapitoly shodující se s učebním textem prof. Janyšky [1]. Každá podkapitola začíná výčtem definic, jež slouží k zopakování dané látky. Dále jsou zde sekce s úlohami na procvičení teorie a sekce s početními příklady. Na konci každé podkapitoly je sepsáno, jakým způsobem jsou nastaveny mnou vytvořené ukázkové odpovědníky v Informačním systému Masarykovy univerzity.

Hlavními zdroji početních příkladů jsou [2], [3], [4] a [5]. Z učebního textu [1] jsou převzaty definice a věty vyskytující se v bakalářské práci. Členění této práce vychází z obdobné práce, která byla napsána již dříve [6].

Kapitola 1

MATICE A DETERMINANTY

1.1 Pořadí a permutace

Definice. Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak libovolná uspořádaná n -tice utvořená ze všech prvků množiny M se nazývá pořadí z n prvků $1, 2, \dots, n$ nebo stručně *pořadí*.

Nechť $R = (r_1, \dots, r_n)$ je libovolné pořadí. Řekneme, že dvojice r_i, r_j je *inverze* v pořadí R , jestliže $i < j$ a $r_i > r_j$ (tj. jestliže větší z obou čísel předchází v daném pořadí číslu menšímu).

Pořadí, v němž celkový počet inverzí je sudé číslo (resp. liché číslo), se nazývá *sudé pořadí* (resp. *liché pořadí*). Hovoříme pak též o *paritě pořadí*.

Definice. Nechť $R = (r_1, \dots, r_n)$, $S = (s_1, \dots, s_n)$ jsou dvě pořadí. Nechť existují indexy $i \neq j$ tak, že $s_i = r_j$, $s_j = r_i$ a dále $r_k = s_k$ pro $k \neq i, j$. Potom řekneme, že pořadí S vzniklo z pořadí R provedením jedné *transpozice*.

Definice. Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je konečná množina o n prvcích. Pak bijektivní zobrazení P množiny M na sebe se nazývá permutace množiny M nebo krátce *permutace*.

Permutaci P , definovanou předpisem: $P(i_t) = j_t$, pro $t = 1, \dots, n$, budeme zapisovat ve tvaru dvouřádkové tabulky:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Definice. Permutace P se nazývá *sudá permutace*, resp. *lichá permutace*, jestliže součet počtu inverzí v horním a dolním řádku tabulky permutace P je sudé číslo, resp. liché číslo. Hovoříme pak též o *paritě permutace*.

1.1.1 Příklady na teorii

Příklad 1.1.1

Nechť je dáno pořadí $R = (1, 5, 3, 4, 2, 6)$. Které z následujících pořadí vzniklo z pořadí R provedením jedné transpozice?

možnosti:**řešení:**a) $(1, 3, 5, 4, 6, 2)$

b)

b) $(2, 5, 3, 4, 1, 6)$ c) $(1, 5, 3, 4, 2, 6)$ d) $(4, 5, 2, 1, 3, 6)$ **Příklad 1.1.2**

Nechť je dáno pořadí $R = (1, 5, 3, 4, 2, 6)$. Které z následujících pořadí vzniklo z pořadí R provedením dvou transpozic?

možnosti:**řešení:**a) $(3, 2, 1, 6, 5, 4)$

c)

b) $(1, 5, 3, 4, 2, 6)$ c) $(3, 2, 1, 4, 5, 6)$ d) $(6, 5, 3, 4, 2, 1)$ **Příklad 1.1.3**

Určete x, y tak, aby pořadí $(4, x, 3, 6, y, 1)$ bylo sudé.

možnosti:**řešení:**a) $x = 2, y = 5$

a)

b) $x = 5, y = 2$ **Příklad 1.1.4**

Určete x, y tak, aby pořadí $(3, x, 2, 5, y)$ bylo liché.

možnosti:**řešení:**a) $x = 4, y = 1$

b)

b) $x = 1, y = 4$

Příklad 1.1.5

Nechť n je pevné přirozené číslo. Z následujících tvrzení vyberte všechna pravdivá.

možnosti:

- a) Z n prvků lze utvořit celkem $(n + 1)$ různých pořadí.
- b) Všechna $n!$ pořadí z n prvků lze seřadit tak, že provedením jedné transpozice obdržíme z předchozího pořadí, pořadí následující.
- c) Z n prvků lze utvořit celkem $(n + 1)!$ různých pořadí.
- d) Z n prvků lze utvořit celkem n různých pořadí.
- e) Z n prvků lze utvořit celkem $n!$ různých pořadí.

řešení: b), e)

Příklad 1.1.6

Vyberte všechna pravdivá tvrzení.

možnosti:

- a) Bijektivní zobrazení P množiny M na sebe se nazývá inverze.
- b) V sudém pořadí je lichý počet inverzí.
- c) V sudém pořadí je sudý počet inverzí.
- d) Jestliže máme 5-prvkové pořadí, pak v tomto pořadí je právě 60 pořadí sudých.
- e) Celkový počet permutací 7-prvkové množiny je roven číslu 49.

řešení: c), d)

Příklad 1.1.7

Provedení jedné transpozice (1) paritu daného pořadí.

možnosti:

- (1): a) změnění b) nezmění

řešení:

a)

Příklad 1.1.8

Nechť $n \geq 2$. Pak z celkového počtu $n!$ různých pořadí z n prvků je (1) pořadí sudých a (2) pořadí lichých.

možnosti:

- (1): a) $(n - 1)!$ b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n!}{2}$ d) $\frac{(n-1)!}{2}$
- (2): a) $\frac{(n-1)!}{2}$ b) $\frac{n}{2}$ c) $(n - 1)!$ d) $\frac{n!}{2}$

řešení:

c)

d)

Příklad 1.1.9

Nechť $n \geq 2$. Pak z celkového počtu $n!$ různých permutací n -prvkové množiny je (1) permutací sudých a (2) permutací lichých.

možnosti:**řešení:**

(1): a) $(n-1)!$ b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n!}{2}$ d) $\frac{(n-1)!}{2}$ c)

(2): a) $\frac{(n-1)!}{2}$ b) $\frac{n!}{2}$ c) $n!$ d) n^2 b)

Příklad 1.1.10

Permutace množiny M je (1) $M \rightarrow M$.

možnosti:**řešení:**

(1): a) injektivní zobrazení c)
 b) surjektivní zobrazení
 c) bijektivní zobrazení

Příklad 1.1.11

Jakému číslu je roven počet různých permutací n -prvkové množiny?

možnosti:**řešení:**

a) $(n-1)!$ c)
 b) $(n-1)$
 c) $n!$
 d) n^2

1.1.2 Početní příklady**Příklad 1.1.12**

Vyberte všechna pořadí pro n .

(1): $n = 5$ (2): $n = 6$

a) (2, 4, 8, 5, 3)

a) (8, 1, 2, 3, 5)

b) (2, 5, 3, 1, 4)

b) (4, 5, 2, 6, 1, 3)

c) (3, 4, 2, 5, 1)

c) (6, 5, 1, 3, 4, 6)

d) (6, 5, 2, 1, 3, 4)

d) (4, 5, 2, 3, 1, 6)

e) (3, 4, 2, 5, 6)

e) (9, 8, 5, 4, 6, 1)

(3): $n = 6$

- a) (4, 5, 2, 8, 1, 3)
- b) (4, 1, 2, 3, 5, 6)
- c) (9, 8, 5, 4, 6, 1)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 6)
- e) (6, 5, 1, 3, 4, 2)

(5): $n = 4$

- a) (4, 2, 3, 4)
- b) (4, 2, 3, 1)
- c) (8, 1, 2, 3)
- d) (2, 1, 4, 3)
- e) (5, 1, 3, 4)

řešení: (1) b, c (2) b, d (3) b, e (4) a, c, d (5) b, d (6) c, d

(4): $n = 4$

- a) (4, 3, 2, 1)
- b) (5, 1, 2, 3)
- c) (2, 1, 4, 3)
- d) (2, 4, 3, 1)
- e) (2, 5, 1, 3, 4)

(6): $n = 5$

- a) (4, 5, 2, 6, 1)
- b) (5, 1, 2, 3, 5)
- c) (4, 5, 2, 3, 1)
- d) (5, 1, 3, 4, 2)
- e) (9, 4, 1, 2, 3, 4)

Příklad 1.1.13

Vyberte všechna pořadí pro n .

(1): $n = 8$

- a) (4, 5, 2, 6, 1, 3, 4, 9)
- b) (4, 5, 2, 3, 1, 6, 8, 6)
- c) (8, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 4)
- d) (9, 8, 5, 4, 6, 1, 7, 3)
- e) (6, 5, 1, 3, 4, 8, 7, 2)

(3): $n = 8$

- a) (8, 5, 2, 6, 1, 3, 4, 9)
- b) (4, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 7)
- c) (7, 8, 5, 4, 6, 1, 7, 3)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 8, 7, 2)
- e) (4, 5, 2, 3, 1, 6, 5, 6)

(5): $n = 10$

- a) (6, 5, 9, 3, 4, 7, 2, 10, 9, 8)
- b) (9, 7, 5, 8, 6, 1, 2, 7, 3, 4)
- c) (4, 5, 8, 2, 1, 9, 3, 10, 7, 5)
- d) (5, 6, 8, 7, 3, 9, 10, 1, 2, 4)
- e) (6, 8, 5, 4, 7, 3, 9, 10, 1, 2)

(2): $n = 10$

- a) (1, 6, 10, 3, 4, 8, 2, 7, 9, 5)
- b) (8, 1, 2, 3, 5, 4, 9, 10, 6, 7)
- c) (4, 5, 2, 3, 1, 6, 5, 6, 10)
- d) (6, 5, 9, 3, 4, 7, 2, 10, 9, 8)
- e) (9, 7, 5, 8, 6, 1, 2, 7, 3, 4)

(4): $n = 9$

- a) (4, 8, 5, 4, 9, 8, 2, 3, 7)
- b) (5, 8, 9, 2, 1, 3, 7, 6, 4)
- c) (9, 7, 5, 8, 6, 2, 1, 6, 7)
- d) (9, 7, 4, 3, 1, 1, 3, 4, 7)
- e) (9, 4, 8, 6, 3, 5, 2, 7, 1)

(6): $n = 9$

- a) (8, 7, 5, 8, 6, 2, 1, 6, 7)
- b) (9, 7, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 7)
- c) (3, 2, 8, 7, 5, 1, 9, 4, 6)
- d) (1, 8, 2, 6, 7, 3, 9, 4, 5)
- e) (6, 5, 9, 3, 4, 7, 2, 9, 8)

řešení: (1) c, e (2) a, b (3) b, d (4) b, e (5) d, e (6) c, d

Příklad 1.1.14

Vyberte všechna sudá pořadí pro n .

(1): $n = 6$

- a) (4, 5, 2, 6, 1, 3)
- b) (4, 1, 3, 2, 5, 6)
- c) (7, 5, 2, 3, 1, 6)
- d) (6, 5, 1, 3, 2, 4)
- e) (2, 3, 5, 4, 6, 1)

(2): $n = 7$

- a) (4, 5, 2, 7, 1, 6, 3)
- b) (4, 1, 2, 3, 7, 6, 5)
- c) (9, 5, 2, 3, 1, 6, 4)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 7, 2)
- e) (7, 2, 5, 4, 6, 1, 3)

(3): $n = 6$

- a) (4, 5, 2, 6, 3, 1)
- b) (7, 3, 5, 4, 6, 1)
- c) (4, 1, 2, 3, 5, 6)
- d) (4, 5, 2, 3, 1, 6)
- e) (6, 5, 1, 3, 4, 2)

(4): $n = 8$

- a) (7, 5, 2, 6, 1, 3, 8, 4)
- b) (8, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 4)
- c) (4, 5, 2, 3, 1, 7, 8, 6)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 8, 2, 7)
- e) (7, 8, 5, 4, 6, 1, 3, 2)

(5): $n = 7$

- a) (4, 3, 2, 7, 6, 5, 1)
- b) (4, 7, 2, 5, 1, 6, 3)
- c) (7, 5, 2, 3, 1, 6, 4)
- d) (6, 4, 1, 5, 3, 2, 7)
- e) (7, 1, 5, 4, 6, 3, 2)

řešení: (1) b, d, e (2) b, e (3) a, d (4) b, c (5) a, b, e

Příklad 1.1.15

Vyberte všechna lichá pořadí pro n .

(1): $n = 7$

- a) (4, 3, 2, 7, 6, 5, 1)
- b) (7, 5, 2, 3, 1, 6, 4)
- c) (4, 7, 2, 5, 1, 6, 3)
- d) (6, 4, 1, 5, 3, 2, 7)
- e) (7, 1, 5, 4, 6, 3, 2)

(2): $n = 8$

- a) (7, 5, 2, 6, 1, 4, 8, 3)
- b) (8, 1, 2, 3, 5, 6, 4, 7)
- c) (4, 5, 2, 3, 1, 7, 8, 6)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 8, 2, 7)
- e) (7, 8, 5, 4, 6, 1, 3, 2)

(3): $n = 6$

- a) (4, 1, 3, 2, 5, 6)
- b) (4, 5, 2, 6, 1, 3)
- c) (4, 5, 2, 3, 6, 1)
- d) (6, 5, 1, 3, 2, 4)
- e) (2, 3, 5, 4, 6, 1)

(4): $n = 7$

- a) (4, 5, 2, 7, 1, 3, 6)
- b) (4, 1, 2, 3, 7, 6, 5)
- c) (7, 5, 2, 3, 4, 1, 6)
- d) (6, 5, 1, 3, 4, 2, 7)
- e) (7, 2, 5, 4, 6, 1, 3)

(5): $n = 6$

- a) (4, 5, 2, 6, 1, 3)
- b) (4, 1, 3, 2, 5, 6)
- c) (4, 5, 3, 2, 1, 6)
- d) (2, 3, 5, 4, 6, 1)
- e) (6, 5, 1, 2, 3, 4)

řešení: (1) b, d (2) b, d, e (3) b, c (4) c, d (5) a, c, e

1.1.3 Nastavení odpovědníků

Příklady na teorii

Odpovědník na příklady z teorie tvoří jeden příklad z 1.1.1 až 1.1.4 a tři příklady z 1.1.5 až 1.1.11. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početní příklady

Odpovědník na početní příklady je složen ze čtyř otázek, ty tvoří vždy jedna z možných variant z každého příkladu 1.1.12 až 1.1.15. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

1.2 Matice a determinanty

Definice. Nechť T je číselné těleso, m, n jsou přirozená čísla. Pak obdélníkové schéma tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in T$ pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$, se nazývá *matice typu m/n* (nad tělesem T).

Označení: $A = (a_{ij})$ typu m/n . Čísla $a_{ij} \in T$ se nazývají *prvky matice A* .

Matice $A = (a_{ij})$ typu m/n a matice $B = (b_{ij})$ typu p/q jsou si rovny, jestliže jsou stejného typu (tj. $m = p \wedge n = q$) a je-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé i, j .

Množinu všech matic typu m/n nad tělesem T budeme označovat $Mat_{mn}(T)$.

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n nad T . Potom:

1. je-li $a_{ij} = 0$ pro každé i, j (tj. všechny prvky matice jsou rovny nule), matice se nazývá *nulová matice* (typu m/n) a označuje se symbolem 0_{mn}
2. je-li $m = n$ (tj. počet řádků je roven počtu sloupců), matice A se nazývá *čtvercová matice řádu n*
3. matice $A' = A^T$ typu n/m , která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tj.:

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *transponovaná matice* k matici A

4. čtvercová matice taková, že $A^T = A$ (respektive $A^T = -A$, kde $-A = (-a_{ij})$) se nazývá *symetrická matice* (respektive *antisymetrická matice*).

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T . Pak *determinant matice A* je číslo z tělesa T označené $\det A$ (nebo též $|A|$) a definované vztahem:

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

kde $I(j_1, \dots, j_n)$ značí celkový počet inverzí v permutaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

použitých řádkových a sloupcových indexů. Sčítání se provádí přes všechna různá pořadí $(j_1, \dots, j_n)$ sloupcových indexů.

Výraz

$$(-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

se nazývá *člen determinantu*.

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Nechť je zvoleno k jejích řádků a sloupců ($k < n$), a sice: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, resp. $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Pak matice vytvořená ze zvolených řádků a sloupců, tj. matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

se nazývá *submatice* matice A určená řádky $i_1, \dots, i_k$ a sloupce $j_1, \dots, j_k$. Její determinant $|M|$ se nazývá *minor* řádu k matice A .

Zbývajících $(n - k)$ řádky a $(n - k)$ sloupců je určena submatice $\overline{M}$ matice A , která se nazývá *doplňková submatice* k submatici M a její minor $|\overline{M}|$ se nazývá *doplňek* minoru $|M|$.

Označme $s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k$. Pak číslo $(-1)^{s_M} \cdot |\overline{M}|$ se nazývá *algebraický doplňek* minoru $|M|$. Člen doplňku $|\overline{M}|$ vynásobený číslem $(-1)^{s_M}$ se pak nazývá *člen algebraického doplňku* minoru $|M|$.

Determinant submatice tvořené stejnými řádky a sloupce, tj. $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$, se nazývá *hlavní minor* řádu k .

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Pak algebraický doplňek minoru jednoprvkové submatice sestávající z prvku a_{ij} budeme krátce nazývat *algebraický doplňek* prvku a_{ij} a označovat symbolem A_{ij} .

1.2.1 Příklady na teorii

Příklad 1.2.1

Nechť A je čtvercová matice řádu n , pak:

Prvky a_{ii} , $i = 1, \dots, n$, tvoří (1) matice A .

Prvky a_{ij} , $i + j = n + 1$ tvoří, (2) matice A .

Jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ platí $a_{ji} = a_{ij}$, pak se matice A nazývá (3).

Jestliže pro každé $i, j = 1, \dots, n$ platí $a_{ji} = -a_{ij}$, pak se matice A nazývá (4).

možnosti:

řešení:

(1): a) hlavní diagonálu b) vedlejší diagonálu a)

(2): a) hlavní diagonálu b) vedlejší diagonálu b)

(3): a) symetrická b) antisymetrická a)

(4): a) symetrická b) antisymetrická b)

Příklad 1.2.2

Determinant matice A je roven nule, tj. $\det A = 0$, jestliže (vyberte všechna pravdivá tvrzení):

možnosti:

řešení:

- a) dva různé řádky jsou shodné a), d), e)
- b) matice A je jednotková
- c) matice A je ve schodovitém tvaru
- d) jeden sloupec je násobkem jiného sloupce
- e) matice A obsahuje nulový řádek

Příklad 1.2.3

Determinant matice A je roven nule, tj. $\det A = 0$, jestliže (vyberte všechna pravdivá tvrzení):

možnosti:

řešení:

- a) matice A je jednotková b), d), e)
- b) dva různé sloupce jsou shodné
- c) matice A je ve schodovitém tvaru
- d) některý řádek je lineární kombinací ostatních řádků
- e) matice A obsahuje nulový sloupec

Příklad 1.2.4

Nechť A je čtvercová matice řádu n , nechť $|M|$ je minor řádu k matice A ($k < n$). Pak součin libovolného členu algebraického doplňku s libovolným členem minoru je člen determinantu.

možnosti:

řešení:

- a) Ano a)
- b) Ne

Příklad 1.2.5

Nechť A je čtvercová matice řádu n a nechť je pevně zvoleno k řádků matice A , kde $0 < k < n$. Pak (1) matice A je roven (2) všech $\binom{n}{k}$ (3) minorů řádu k , vybraných ze zvolených k řádků, s jejich (4).

možnosti:**řešení:**

- | | |
|--|----|
| (1): a) doplněk b) minor c) determinant d) algebraický doplněk | c) |
| (2): a) součtu b) součinu | a) |
| (3): a) součtů b) součinů | b) |
| (4): a) determinanty b) algebraickými doplňky c) minory | b) |

Příklad 1.2.6

Nechť matice B vznikne z matice A záměnou dvou různých řádků, pak:

možnosti:**řešení:**

- | | |
|------------------------------|----|
| a) $\det B = \det A$ | c) |
| b) $\det B = t \cdot \det A$ | |
| c) $\det B = -\det A$ | |

Příklad 1.2.7

Nechť matice B vznikne z matice A vynásobením jednoho řádku pevným číslem $t \in T$, pak:

možnosti:**řešení:**

- | | |
|------------------------------|----|
| a) $\det B = t \cdot \det A$ | a) |
| b) $\det B = \det A$ | |
| c) $\det B = -\det A$ | |

Příklad 1.2.8

Nechť matice B vznikne z matice A záměnou dvou různých sloupců, pak:

možnosti:**řešení:**

- | | |
|------------------------------|----|
| a) $\det B = \det A$ | b) |
| b) $\det B = -\det A$ | |
| c) $\det B = t \cdot \det A$ | |

Příklad 1.2.9

Nechť matice B vznikne z matice A vynásobením jednoho sloupce pevným číslem $t \in T$, pak:

možnosti:**řešení:**

a) $\det B = -\det A$

c)

b) $\det B = \det A$

c) $\det B = t \cdot \det A$

Příklad 1.2.10

Transponováním matice A se hodnota determinantu:

možnosti:**řešení:**

a) změní

b)

b) nezmění

Příklad 1.2.11

Jestliže k jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků. Pak se determinant matice A :

možnosti:**řešení:**

a) změní

b)

b) nezmění

Příklad 1.2.12

Jestliže k jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku. Pak se determinant matice A :

možnosti:**řešení:**

a) změní

b)

b) nezmění

Příklad 1.2.13

Jestliže k jednomu sloupci matice A přičteme libovolný násobek jiného slupce. Pak se determinant matice A :

možnosti:

- a) změní
- b) nezmění

řešení:

b)

Příklad 1.2.14

Jestliže k jednomu sloupci matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních sloupců. Pak se determinant matice A :

možnosti:

- a) změní
- b) nezmění

řešení:

b)

1.2.2 Početní příklady**Příklad 1.2.15**

Určete determinant matice A .

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(6) A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

řešení:

(1) 21 (2) -21 (3) -21 (4) 0 (5) 0 (6) -34

Příklad 1.2.16

Určete determinant matice A .

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(6) A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

řešení:

- (1)
- -29
- (2)
- 29
- (3)
- -151
- (4)
- -151
- (5)
- 102
- (6)
- -102

Příklad 1.2.17

Nechť je dána matice A . Určete parametr a tak, aby determinant matice A byl roven nule. Zlomky zapište v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapište jako $1/3$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 8 & a \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -a & 8 \end{pmatrix}$

řešení:

- (1)
- $a = \frac{10}{3}$
- (2)
- $a = \frac{16}{5}$
- (3)
- $a = -\frac{4}{7}$
- (4)
- $a = 22$
- (5)
- $a = -10$
- (6)
- $a = -\frac{32}{5}$

Příklad 1.2.18

Nechť je dána matice A . Určete parametr a tak, aby determinant matice A byl roven nule. Zlomky zapište v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapište jako $1/3$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -a \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 5 & a & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ a & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -a \end{pmatrix}$

řešení:

- (1)
- $a = -\frac{4}{3}$
- (2)
- $a = \frac{27}{2}$
- (3)
- $a = -\frac{49}{29}$
- (4)
- $a = \frac{171}{49}$
- (5)
- $a = \frac{135}{13}$
- (6)
- $a = -\frac{45}{38}$

Příklad 1.2.19

Je dána matice A . Určete její determinant.

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(5) A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:

(1) 40

(2) -57

(3) -27

(4) 72

(5) -22

Příklad 1.2.20

Je dána matice A . Užitím Laplaceovy věty a definice determinantu určete determinant.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

řešení:

(1) -108

(2) 576

(3) -90

(4) 0

(5) 54

(6) 140

Příklad 1.2.21

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{21}, A_{23} .

řešení:

$$A_{21} = -6$$

$$A_{23} = 7$$

Příklad 1.2.22

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{31} , A_{33} .

řešení:

$$A_{31} = -17$$

$$A_{33} = 14$$

Příklad 1.2.23

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{22} , A_{31} .

řešení:

$$A_{22} = 23$$

$$A_{31} = 39$$

Příklad 1.2.24

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{32} , A_{13} .

řešení:

$$A_{32} = 29$$

$$A_{13} = -9$$

Příklad 1.2.25

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{21} , A_{12} .

řešení:

$$A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -23$$

Příklad 1.2.26

Nechť je dána matice $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Určete algebraický doplněk prvků A_{11} , A_{23} .

řešení:

$$A_{11} = 24$$

$$A_{23} = 0$$

Příklad 1.2.27

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ a její submatice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Určete doplněk a algebraický doplněk minoru $|M|$.

řešení:

Doplněk: 2

Algebraický doplněk: -2

Příklad 1.2.28

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ a její submatice $M = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Určete doplněk a algebraický doplněk minoru $|M|$.

řešení:

Doplněk: -35

Algebraický doplněk: -35

Příklad 1.2.29

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ a její submatice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

Určete doplněk a algebraický doplněk minoru $|M|$.

řešení:

Doplněk: 11

Algebraický doplněk: 11

Příklad 1.2.30

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ a její submatice $|M| = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Určete doplněk a algebraický doplněk minoru $|M|$.

řešení:Doplňek: -6 Algebraický doplňek: 6 **Příklad 1.2.31**

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ a její submatice $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Určete doplňek a algebraický doplňek minoru $|M|$.

řešení:Doplňek: 8 Algebraický doplňek: -8 **1.2.3 Nastavení odpovědníků****Příklady na teorii**

Odpovědník na příklady z teorie tvoří dva příklady z 1.2.1 až 1.2.5, dva příklady z 1.2.6 až 1.2.9 a dva příklady z 1.2.10 až 1.2.14. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Počtetní příklady

Odpovědník na počtetní příklady je složen z osmi otázek, z toho prvních šest tvoří vždy jedna z možných variant z každého příkladu 1.2.15 až 1.2.20. Dále je zahrnut jeden z příkladů 1.2.21 až 1.2.26 a poslední otázku tvoří jeden z příkladů 1.2.27 až 1.2.31 v tomto pořadí.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

1.3 Algebra matic

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(T)$, $t \in T$ libovolné. Pak:

1. matice $A + B = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(T)$ definovaná:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

se nazývá *součet matic* A, B

2. matice $t \cdot A = (d_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(T)$ definovaná:

$$d_{ij} = t \cdot a_{ij} \quad \text{pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

se nazývá *součin čísla t s maticí A* nebo násobek matice A číslem t .

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n , $B = (b_{ij})$ je matice typu n/p (obě nad týmž tělesem T). Pak matice $A \cdot B = C = (c_{ij})$, typu m/p , kde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj},$$

pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, se nazývá *součin matic* A, B (v tomto pořadí).

Definice. Čtvercová matice řádu n (nad T) tvaru:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tj. matice mající v hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde samé nuly) se nazývá *jednotková matice* (řádu n).

Definice. Čtvercová matice A se nazývá *regulární matice*, je-li $\det A \neq 0$, resp. *singulární matice*, je-li $\det A = 0$.

Definice. Nechť A je čtvercová matice řádu n . Matice X s vlastností:

$$A \cdot X = E_n \quad \wedge \quad X \cdot A = E_n$$

se nazývá *inverzní matice k matici A* s označuje se symbolem A^{-1} .

Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Pak matice

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *adjungovaná matice k matici A* .

1.3.1 Příklady na teorii

Příklad 1.3.1

Vzhledem k operacím sčítání matic a součinu čísla s maticí je množina $Mat_{mn}(T)$ nad tělesem T vektorový prostor a jeho dimenze je rovna:

možnosti:

a) $m + n$

b) $m \cdot n$

c) $m - n$

řešení:

b)

Příklad 1.3.2

Množina všech matic typu m/n nad tělesem T s operací sčítání matic, tj. $(Mat_{mn}(T), +)$ je:

možnosti:

a) Nekomutativní grupa

b) Těleso

c) Komutativní grupa

d) Obor integrity

řešení:

c)

Příklad 1.3.3

Násobení matic je asociativní, tj. nechť matice A je typu m/n , B je typu n/p a C je typu p/q . Pak platí:

možnosti:

a) $A + (B \cdot C) = A \cdot (B + C)$

b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

řešení:

b)

Příklad 1.3.4

Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání matic, tj. nechť matice A je typu m/n , resp. B, C jsou typu n/p . Potom platí:

možnosti:

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

řešení:

a)

$$\text{b) } A \cdot (B + C) = A \cdot B - A \cdot C$$

$$\text{c) } A + (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Příklad 1.3.5

Množina všech čtvercových matic řádu n (nad T) s operacemi sčítání matic a násobení matic, tj. $(Mat_{nn}(T), +, \cdot)$, je (1) s jedničkou. (2) je pro $n \geq 2$ (3) a (4) dělitele nuly.

možnosti:**řešení:**

(1): a) okruh b) pologrupa a)

(2): a) Tato pologrupa b) Tento okruh b)

(3): a) komutativní b) nekomutativní b)

(4): a) obsahuje b) neobsahuje a)

Příklad 1.3.6

Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n . Pro násobení matic platí:

možnosti:**řešení:**

$$\text{a) } \det(A \cdot B) = \det A + \det B \quad \text{b)}$$

$$\text{b) } \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\text{c) } \det(A + B) = \det A \cdot \det B$$

Příklad 1.3.7

Ke čtvercové matici A řádu n existuje matice inverzní (1) A je regulární matice.

možnosti:**řešení:**

(1): a) $\Leftarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Leftrightarrow$ c)

Příklad 1.3.8

Nechť A, B jsou regulární matice řádu n . Pak platí (vyberte všechna pravdivá tvrzení):

možnosti:**řešení:**

$$\text{a) } (A^{-1})^{-1} = A \quad \text{a) c) d) f)}$$

$$\text{b) } (A \cdot B)^{-1} = B \cdot A$$

$$\text{c) } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\text{d) } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\text{e) } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\text{f) } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Příklad 1.3.9

Množina všech regulárních matic řádu n (nad tělesem T) s operací násobení matic je (1) (1 slovo), která je pro $n \geq 2$ (2) (1 slovo).

řešení:

(1) grupa

(2) nekomutativní

1.3.2 Početní příklady

Příklad 1.3.10

Spočtěte matici $A \cdot B$.

$$(1) \ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \ A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 1 & -6 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 11 \\ 8 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \ A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 11 \\ 8 & 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(6) \ A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(7) A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 7 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -2 & 9 & 4 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) \begin{pmatrix} 20 & 44 & 0 & 37 \\ -7 & 29 & 21 & -16 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 32 & 65 & 13 & 45 \\ 13 & 63 & 32 & 48 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 92 & 89 & 51 & 11 \\ 16 & -31 & -10 & 54 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -8 & 84 & 53 & 78 \\ 37 & -3 & 38 & -49 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -61 & 88 & 32 & 71 \\ 33 & 10 & 34 & -65 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} -61 & 88 & 32 \\ 33 & 10 & 34 \\ -7 & 59 & 49 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 5 & 115 & 77 \\ -23 & -18 & 36 \\ 7 & 71 & 13 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.3.11

Spočtěte matici $(A + B) \cdot C$.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 11 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 12 \\ -8 & 11 & 18 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 8 & 11 & 2 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & -8 & 10 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) \begin{pmatrix} 33 & 21 & -6 \\ 24 & 23 & 3 \\ 24 & 23 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 38 & 19 & 28 \\ 8 & 15 & 5 \\ 32 & 23 & 21 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 18 & 19 & 36 \\ 39 & 32 & 67 \\ 34 & 27 & 57 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 63 & 83 & -5 \\ 59 & 58 & 13 \\ 49 & 55 & 15 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 53 & 30 & 9 \\ 2 & 57 & 67 \\ 47 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.3.12

Spočítejte inverzní matici A^{-1} k matici A . Zlomky zapište v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapište jako $1/3$.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) A^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \quad (4) A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.3.13

Spočítejte inverzní matici A^{-1} k matici A .

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$(3) A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & -2 & 17 \\ 13 & 1 & -9 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad (4) A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 41 \\ 11 & -7 & -30 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Nastavení odpovědníků

Příklady na teorii

Odpovědník na příklady z teorie tvoří čtyři příklady z 1.3.1 až 1.3.9. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početni příklady

Odpovědník na početní příklady je složen z pěti otázek, z toho první tvoří dvě z možných variant z příkladu 1.3.10, pak postupně vždy jedna z možných variant z každého příkladu 1.3.11 až 1.3.13 v tomto pořadí.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

1.4 Hodnost matice

Definice. Nechť A je matice typu m/n nad T . Pak dimenze podprostoru vektorového prostoru T^n , který je generován řádky matice A , se nazývá *hodnost matice A* a označuje se symbolem $h(A)$.

Definice. Nechť A je matice typu m/n nad tělesem T . Pak každá z následujících úprav matice A se nazývá *elementární řádková úprava matice A* :

1. libovolná záměna pořadí řádků,
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem z T ,
3. k jednomu řádku přičtení jiného řádku vynásobeného libovolným číslem z T .

Definice. Nechť A je matice typu m/n . Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

1.4.1 Příklady na teorii**Příklad 1.4.1**

Nechť A je nenulová matice typu m/n . Pak hodnost matice A je rovna (1) z řádů nenulových minorů matice A .

možnosti:**řešení:**

(1) a) maximálnímu b) minimálnímu

a)

Příklad 1.4.2

Hodnost matice je (1) (2) počtu jejích lineárně (3) řádků.

možnosti:**řešení:**(1) (2) a) $>$ b) $=$ c) $<$

b)

(2) a) maximálnímu b) minimálnímu

a)

(3) a) závislých b) nezávislých

b)

Příklad 1.4.3

Hodnost matice je (1) (2) počtu jejích lineárně (3) sloupců.

možnosti:**řešení:**(1) (2) a) $>$ b) $=$ c) $<$

b)

(2) a) maximálnímu b) minimálnímu

a)

(3) a) závislých b) nezávislých

b)

Příklad 1.4.4

Nechť A je matice typu m/n a B je matice typu n/p , pak: (1) a (2)

možnosti:**řešení:**(1) a) $h(A \cdot B) \leq h(A)$ b) $h(A \cdot B) = h(A)$ c) $h(A \cdot B) \geq h(A)$

a)

(2) a) $h(A \cdot B) \leq h(B)$ b) $h(A \cdot B) = h(B)$ c) $h(A \cdot B) \geq h(B)$

a)

Příklad 1.4.5

Nechť A je matice typu m/n a nechť R je regulární matice řádu n a S je regulární matice řádu m , pak: (1) a (2).

možnosti:**řešení:**

$$(1) \quad \text{a) } h(A \cdot R) \leq h(A) \quad \text{b) } h(A \cdot R) \geq h(A) \quad \text{c) } h(A \cdot R) = h(A) \quad \text{c)}$$

$$(2) \quad \text{a) } h(S \cdot A) \leq h(A) \quad \text{b) } h(S \cdot A) = h(A) \quad \text{c) } h(S \cdot A) \geq h(A) \quad \text{b)}$$

Příklad 1.4.6

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Pro regulární matici A platí:

možnosti:**řešení:**

$$\text{a) } h(A) < n \quad \text{b)}$$

$$\text{b) } h(A) = n$$

$$\text{c) } h(A) > n$$

Příklad 1.4.7

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Vyberte všechny ekvivalentní výroky s výrokem: Matice A je regulární.

možnosti:**řešení:**

$$\text{a) řádky matice } A \text{ jsou lineárně závislé} \quad \text{b), d)}$$

$$\text{b) sloupce matice } A \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

$$\text{c) sloupce matice } A \text{ jsou lineárně závislé}$$

$$\text{d) řádky matice } A \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

Příklad 1.4.8

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Pro singulární matici A platí:

možnosti:**řešení:**

$$\text{a) } h(A) = n \quad \text{b)}$$

$$\text{b) } h(A) < n$$

$$\text{c) } h(A) > n$$

Příklad 1.4.9

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Vyberte všechny ekvivalentní výroky s výrokem: Matice A je singulární.

možnosti:**řešení:**

- a) sloupce matice A jsou lineárně závislé
- b) řádky matice A jsou lineárně nezávislé
- c) sloupce matice A jsou lineárně nezávislé
- d) řádky matice A jsou lineárně závislé

a), d)

Příklad 1.4.10

Vyberte všechna pravdivá tvrzení.

možnosti:**řešení:**

- a) Žádnou matici nelze převést na schodovitý tvar.
- b) Provedení elementární řádkové úpravy změní hodnotu matice.
- c) Každou matici lze převést na schodovitý tvar.
- d) Provedení elementární řádkové úpravy nezmění hodnotu matice.
- e) Elementární řádková úprava je záměna čísel v řádku.
- f) Je-li A nenulová matice, pak její hodnota je rovna nule.
- g) Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem je elementární řádková úprava.

c), d), g)

1.4.2 Početní příklady**Příklad 1.4.11**

Určete hodnotu matice A (nad R).

možnosti:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 12 & 17 & 3 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 19 \\ -5 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) h(A) = 3 \quad (2) h(A) = 3 \quad (3) h(A) = 4 \quad (4) h(A) = 4 \quad (5) h(A) = 4$$

Příklad 1.4.12

Určete čísla a, b tak, aby hodnota matice $h(A) = 2$. Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

možnosti:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & b & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 & b \\ 1 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & -6 & b \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:

$$(1) a = 3 \quad b = 2 \quad (2) a = 2 \quad b = -1 \quad (3) a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{3}{14}$$

$$(4) a = -7 \quad b = 1 \quad (5) a = 2 \quad b = 3$$

1.4.3 Nastavení odpovědníků

Příklady na teorii

Odpovědník na příklady z teorie tvoří dva příklady z 1.4.1 až 1.4.5 a dva příklady z 1.4.6 až 1.4.10. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početní příklady

Odpovědník na početní příklady je složen ze čtyř otázek, ty tvoří vždy dvě z možných variant z každého příkladu 1.4.11 a 1.4.12. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

1.5 Další vlastnosti a užití matic

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou dvě báze prostoru V . Nechť dále je:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= a_{11} \cdot \mathbf{u}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + a_{n1} \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_2 &= a_{12} \cdot \mathbf{u}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + a_{n2} \cdot \mathbf{u}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{1n} \cdot \mathbf{u}_1 + a_{2n} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \mathbf{u}_n\end{aligned}$$

Pak matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice přechodu od báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$* .

1.5.1 Příklady na teorii

Příklad 1.5.1

Nechť A je regulární matice řádu n nad tělesem T . Vyberte všechna pravdivá tvrzení.

možnosti:

- Matici A lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.
- Matici A lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na nulovou matici.

- c) Matici A lze konečným počtem elementárních sloupcových úprav převést na jednotkovou matici.
- d) Matici A lze konečným počtem elementárních sloupcových úprav převést na nulovou matici.
- e) Provedení jedné řádkové elementární úpravy matice A je ekvivalentní vynásobení matice A zleva jistou regulární maticí řádu n .

řešení:

a) c) e)

Příklad 1.5.2

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou dvě báze vektorového prostoru V . Nechť matice A je maticí přechodu od báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Potom maticí přechodu od báze $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ k bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je matice (vyberte všechna pravdivá tvrzení):

možnosti:

řešení:

a) A

b) d)

b) A^{-1}

c) A^T

d) $\frac{1}{|A|} \cdot A^*$

1.5.2 Početní příklady

Příklad 1.5.3

Rozhodněte, zda dané matice A, B, C, D tvoří bázi vektorového prostoru $Mat_{22}(R)$.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

řešení:

(1) Ano (2) Ne (3) Ano (4) Ano (5) Ano (6) Ne

Příklad 1.5.4

Nalezněte matici přechodu od báze (a) k bázi (b) vektorového prostoru $V = R^3$.

- (1) (a) $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (6, 3, 4)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 2)$
 (b) $\mathbf{v}_1 = (15, 7, 9)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (30, 14, 24)$
- (2) (a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 3, 7)$
 (b) $\mathbf{v}_1 = (12, 16, 35)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 9, 21)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 11, 26)$
- (3) (a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 4, -1)$
 (b) $\mathbf{v}_1 = (-1, -3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (11, 17, -8)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 13, -2)$
- (4) (a) $\mathbf{u}_1 = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -2, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 4)$
 (b) $\mathbf{v}_1 = (10, -8, 25)$, $\mathbf{v}_2 = (-10, -6, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (6, -10, 19)$
- (5) (a) $\mathbf{u}_1 = (2, 2, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-4, 0, -2)$
 (b) $\mathbf{v}_1 = (18, 18, -12)$, $\mathbf{v}_2 = (-36, -8, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (27, 9, 1)$

řešení:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 11 & 22 & 3 \\ -7 & -19 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & -44 & 21 \\ 6 & 10 & 1 \\ 3 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

1.5.3 Nastavení odpovědníků

Příklady na teorii

Odpovědník na příklady z teorie tvoří příklady 1.5.1 a 1.5.2. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti

předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početni příklady

Odpovědník na početní příklady je složen ze čtyř otázek, ty tvoří vždy dvě z možných variant z každého příkladu 1.5.3. a 1.5.4. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Kapitola 2

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

2.1 Gaussova metoda řešení soustav lineárních rovnic

Definice. Necht T je číselné těleso. Pak soustava rovnic:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde $a_{ij} \in T$, $b_i \in T$, se nazývá (*nehomogenní*) *soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad T)*.

Řešení soustavy (2.1) je každá uspořádaná n -tice $(t_1, \dots, t_n)$ prvků z T taková, že po dosazení t_i za x_i ($i = 1, \dots, n$) všechny rovnice v (2.1) přejdou v identity, tj. platí:

$$\begin{aligned}a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n &= b_1 \\a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{k1}t_1 + a_{k2}t_2 + \cdots + a_{kn}t_n &= b_k\end{aligned}$$

Definice. Soustava lineárních rovnic se nazývá *řešitelná soustava* (resp. *neřešitelná soustava*), jestliže existuje alespoň jedno její řešení (resp. neexistuje žádné její řešení).

Dvě soustavy lineárních rovnic o n neznámých (nad týmž tělesem T) se nazývají *ekvivalentní soustavy*, jestliže množiny jejich řešení si jsou rovny. Jakákoliv úprava dané soustavy lineárních rovnic, po níž vznikne soustava ekvivalentní, se nazývá *ekvivalentní úprava* dané soustavy lineárních rovnic.

2.1.1 Příklady na teorii

Příklad 2.1.1

Z Gaussovy metody vyplývá:

možnosti:

řešení:

- a) kolik neznámých volíme za volné neznámé a které to jsou b)
- b) kolik neznámých volíme za volné neznámé, nikoliv však, které to jsou

Příklad 2.1.2

Nechť máme soustavu tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstanou nám 2 lineárně nezávislé řádky. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 2

Příklad 2.1.3

Nechť máme soustavu tří lineárních rovnic o pěti neznámých (nad R), pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstanou nám 2 lineárně nezávislé řádky. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 3

Příklad 2.1.4

Nechť máme soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých (nad R), pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstanou nám 2 lineárně nezávislé řádky. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 2

Příklad 2.1.5

Nechť máme soustavu tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých (nad R), pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstanou nám 3 lineárně nezávislé řádky. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 1

Příklad 2.1.6

Nechť máme soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých (nad $\mathbb{R}$), pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstane nám 5 lineárně nezávislých řádků. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 0

Příklad 2.1.7

Nechť máme soustavu čtyř lineárních rovnic o šesti neznámých (nad $\mathbb{R}$), pomocí elementárních úprav převedeme na matici ve schodovitém tvaru a zůstanou nám 3 lineárně nezávislé řádky. Kolik musíme volit volných neznámých?

Napište číslo (1)

řešení: (1) = 3

2.1.2 Početní příklady**Příklad 2.1.8**

Pomocí Gaussovy metody řešení lineárních rovnic určete, kolik řešení má tato soustava.

$$\begin{array}{lcl} & 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ (1) & 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 & (2) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ & 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 & 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & 6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 & 5x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 1 \\ (3) & 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 & (4) \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 = 1 & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 3 & \\ (5) & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2 & \\ & 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 & \\ (6) & -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 2 & \\ & -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 1 & \end{array}$$

možnosti:

(1), (2), (3), (4), (5)

a) Nemá řešení

b) Nekonečně mnoho řešení

c) Právě jedno řešení

řešení:

(1) (2) a), (3) (5) (6) b), (4) c)

Příklad 2.1.9

Pomocí Gaussovy metody řešte soustavu lineárních rovnic. Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$(1) \quad \begin{array}{rrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 9x_2 & - & 5x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 9x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -9x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{rrcr} -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & -1 \end{array}$$

řešení:

$$(1) \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

$$(2) \quad x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$(3) \quad x_1 = \frac{5}{11}, x_2 = \frac{4}{11}, x_3 = -\frac{5}{11}$$

$$(4) \quad x_1 = -\frac{9}{28}, x_2 = -\frac{1}{28}, x_3 = \frac{3}{28}$$

$$(5) \quad x_1 = -\frac{6}{7}, x_2 = -\frac{1}{7}, x_3 = 0$$

Příklad 2.1.10

Pomocí Gaussovy metody řešte soustavu lineárních rovnic. Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$(1) \quad \begin{array}{rrcr} -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{rrcr} -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\
 & & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\
 (5) & -2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 1
 \end{array}$$

řešení:

$$\begin{array}{l}
 (1) \ x_1 = \frac{7}{6}, \ x_2 = \frac{1}{12}, \ x_3 = -\frac{7}{3}, \ x_4 = \frac{1}{4} \\
 (2) \ x_1 = \frac{23}{36}, \ x_2 = \frac{29}{18}, \ x_3 = \frac{1}{12}, \ x_4 = 1 \\
 (3) \ x_1 = -\frac{11}{13}, \ x_2 = \frac{12}{13}, \ x_3 = \frac{8}{13}, \ x_4 = \frac{1}{13} \\
 (4) \ x_1 = \frac{6}{17}, \ x_2 = -\frac{1}{17}, \ x_3 = \frac{5}{17}, \ x_4 = \frac{2}{17} \\
 (5) \ x_1 = -\frac{2}{13}, \ x_2 = -\frac{17}{26}, \ x_3 = \frac{5}{13}, \ x_4 = \frac{15}{26}
 \end{array}$$

Příklad 2.1.11

Pomocí Gaussovy metody řešte soustavu lineárních rovnic. Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$\begin{array}{rclcl}
 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & - & 7 & = & 0 \\
 (1) & x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & - & 3 & = & 0 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & 1 & = & 0 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 & + & 7 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 2x_1 & - & 2x_2 & & + & x_4 & + & 3 & = & 0 \\
 (2) & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & 6 & = & 0 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & - & 6 & = & 0 \\
 (3) & 3x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & - & 2 & = & 0 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & - & 6 & = & 0 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & + & 7 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 3x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & - & 3 & = & 0 \\
 (4) & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 3 & = & 0 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & + & 3 & = & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 9x_4 & - & 22 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 3 & = & 0 \\
 (5) & 6x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 4 & = & 0 \\
 & 10x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & - & 3 & = & 0 \\
 & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 7 & = & 0
 \end{array}$$

řešení:

(1) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1$

(2) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3$

(3) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{3}{2}$

(4) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$

(5) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = 2, x_4 = -3$

Příklad 2.1.12

Je dána soustava lineárních rovnic. Jakému číslu se nesmí rovnat parametr a , aby soustava měla alespoň jedno řešení? Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$(1) \begin{array}{rrrrrcl} -7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & & & = & -1 \\ 3x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{rrrrrcl} 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & ax_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{rrrrrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 6 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{rrrrrcl} ax_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{rrrrrcl} 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ ax_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

řešení:

$$(1) a \neq \frac{43}{2} \quad (2) a \neq \frac{9}{5} \quad (3) a \neq -\frac{43}{10} \quad (4) a \neq \frac{118}{3} \quad (5) a \neq 105$$

2.1.3 Nastavení odpovědníků**Příklady na teorii**

Odpovědník na příklady z teorie tvoří čtyři příklady z 2.1.1 až 2.1.7. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Počtení příklady

Odpovědník na počtení příklady je složen z osmi otázek, z toho šest tvoří vždy dvě z možných variant z každého příkladu 2.1.8 až 2.1.10 a jedna z možných variant z každého příkladu 2.1.11 a 2.1.12. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém opovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

2.2 Základní vlastnosti soustav lineárních rovnic**2.2.1 Příklady na teorii****Příklad 2.2.1**

Soustava lineárních rovnic (nad tělesem T) je řešitelná (1) hodnost matice $h(A)$ této soustavy je (2) hodnosti rozšířené matice $h(\bar{A})$ této soustavy.

možnosti:**řešení:**(1) a) $\Leftarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Rightarrow$ b)(2) a) $\leq$ b) $\geq$ c) $=$ c)**Příklad 2.2.2**

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy A je regulární. Pak soustava má (1) řešení $(x_1, \dots, x_n)$, přičemž platí: $x_j = \underline{(2)}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$, kde A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením j -tého (3) (4) absolutních členů.

možnosti:**řešení:**(1) a) právě jedno b) nejvýše jedno c) alespoň jedno a)(2) a) $|A|$ b) $\frac{|A_j|}{|A|}$ c) $|A| + 1$ c) $\frac{1}{|A|}$ b)(3) a) řádku b) sloupce b)(4) a) řádkem b) sloupcem b)

Příklad 2.2.3

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých. Pak soustava má jediné řešení právě když:

možnosti:**řešení:**

a) $h(A) = h(\overline{A}) = n$

a)

b) $h(A) = h(\overline{A}) < n$

c) $h(A) = h(\overline{A}) > n$

Příklad 2.2.4

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých. Pak soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když:

možnosti:**řešení:**

a) $h(A) = h(\overline{A}) = n$

b)

b) $h(A) = h(\overline{A}) < n$

c) $h(A) = h(\overline{A}) > n$

Příklad 2.2.5

Nechť máme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých. Kolik má tato soustava řešení, jestliže neexistuje žádná volná neznámá?

možnosti:**řešení:**

a) právě jedno

a)

b) nekonečně mnoho

Příklad 2.2.6

Nechť máme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých a hodnost matice $A = 3$. Kolik má tato soustava řešení?

Napište číslo: (1)

řešení:

$(1) = 1$

2.2.2 Početní příklady

Příklad 2.2.7

Určete parametr a tak, aby soustava rovnic nebyla řešitelná.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = & -7 \\ 7x_1 - 4x_2 + ax_3 & = & -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 & = & -a \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 + ax_2 - 5x_3 & = & 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = & 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3) \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 & = & 5 \\ -x_1 - ax_2 + 3x_3 & = & -9 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4) \quad \begin{array}{rcl} ax_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 18 \end{array} \end{array}$$

řešení:

$$(1) \ a = -141 \quad (2) \ a = 5 \quad (3) \ a = 3 \quad (4) \ a = 2$$

Příklad 2.2.8

Je dána soustava lineárních rovnic. Určete determinant matice soustavy a v případě, že je determinant nenulový řešte soustavu Cramerovým pravidlem. Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + 2x_3 & = & 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3) \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 2x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4) \quad \begin{array}{rcl} -2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (5) \quad \begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & -1 \end{array} \end{array}$$

řešení:

$$(1) \ \text{Det} = 26, \ x_1 = \frac{4}{13}, \ x_2 = \frac{23}{13}, \ x_3 = -\frac{2}{13}$$

$$(2) \ \text{Det} = -10, \ x_1 = \frac{3}{5}, \ x_2 = \frac{8}{5}, \ x_3 = \frac{3}{5}$$

$$(3) \ \text{Det} = -20, \ x_1 = -\frac{13}{10}, \ x_2 = -\frac{11}{10}, \ x_3 = \frac{3}{5}$$

$$(4) \ \text{Det} = 35, \ x_1 = \frac{1}{7}, \ x_2 = -1, \ x_3 = \frac{3}{7}$$

$$(5) \ \text{Det} = 2, \ x_1 = 9, \ x_2 = -25, \ x_3 = -20$$

Příklad 2.2.9

Je dána soustava lineárních rovnic. Lze tuto soustavu řešit pomocí Cramerova pravidla?

$$\begin{array}{rcl} 13x_1 & + & 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ (1) \quad -5x_1 & + & x_2 - 3x_3 = 7 \\ 7x_1 & - & 6x_2 + 18x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & - & x_2 + 2x_3 = 1 \\ (2) \quad -2x_1 & + & 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 & + & x_2 - 3x_3 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & + & x_2 + 2x_3 = 1 \\ (3) \quad -2x_1 & + & 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 & + & x_2 + 3x_3 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & + & x_2 + 2x_3 = 1 \\ (4) \quad -4x_1 & + & 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 & + & x_2 + 2x_3 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & - & x_2 + x_3 = 10 \\ (5) \quad 5x_1 & + & x_2 + 2x_3 = 29 \\ -4x_1 & + & x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}$$

řešení:

(1) Ne (2) Ano (3) Ano (4) Ne (5) Ano

2.2.3 Nastavení odpovědníků**Příklady na teorii**

Odpovědník na příklady z teorie tvoří čtyři příklady z 2.2.1 až 2.2.6 Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početní příklady

Odpovědník na početní příklady je složen z pěti otázek, z toho čtyři tvoří vždy dvě z možných variant z každého příkladu 2.2.7 a 2.2.8. Dále je zahrnuta jedna varianta z příkladu 2.2.9. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

2.3 Homogenní soustavy lineárních rovnic

Definice. Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in T$, se nazývá *homogenní soustava* k lineárních rovnic o n neznámých nad T .

Definice. Nechť je dána nehomogenní soustava lineárních rovnic nad T :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pak homogenní soustava lineárních rovnic s týmiž koeficienty u neznámých, tj.:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

se nazývá *zhomogenizovaná soustava* k soustavě (2.2).

2.3.1 Příklady na teorii

Příklad 2.3.1

Nechť je dána homogenní soustava k lineárních rovnic o n neznámých s maticí soustavy A . Potom (vyberte všechna pravdivá tvrzení):

možnosti:

řešení:

a) soustava má pouze nulové řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$

b) c)

b) soustava má pouze nulové řešení $\Leftrightarrow h(A) = n$

c) soustava má také nenulová řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$

d) soustava má také nenulová řešení $\Leftrightarrow h(A) = n$

Příklad 2.3.2

Množina U všech řešení homogenní soustavy k lineárních rovnic o n neznámých je vektorovým (1) ve vektorovém prostoru T^n a platí: $\dim U =$ (2)

možnosti

řešení:

(1) a) prostorem

b) podprostorem

b)

(2) a) $n + h(A)$

b) $n - h(A)$

c) $-n + h(A)$

b)

Příklad 2.3.3

U homogenní soustavy číslo $n - h(A)$ udává počet volných neznámých.

možnosti:

řešení:

a) Ano

a)

b) Ne

2.3.2 Početní příklady**Příklad 2.3.4**

Vyberte z nabídky všechny báze podprostoru řešení U homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:

řešení:

a) $(2, 3, 2, 1), (0, 1, 2, 0)$

b) c)

b) $(-1, 0, 1, 0), (3, -1, 0, 1)$

c) $(6, -2, 0, 1), (-2, 0, 2, 0)$

d) $(0, 1, 2, -3), (1, -3, 2, 5)$

Příklad 2.3.5

Vyberte z nabídky všechny báze podprostoru řešení U homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:

řešení:

a) $(0, 2, 0, 0), (4, 0, 2, 2)$

a) c)

b) $(3, 0, 1, 4), (0, 2, 1, 1)$

c) $(2, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)$

d) $(2, 0, 3, 1), (2, 1, 4, 0)$

Příklad 2.3.6

Vyberte z nabídky všechny báze podprostoru řešení U homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rrrrrr} 3x_1 & - & x_2 & & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & = & 0 \end{array}$$

možnosti:

řešení:

a) $(1, 3, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)$

a) d)

b) $(1, 5, 3, 0), (0, 1, 2, 1)$

c) $(0, 3, 0, 1), (2, 8, 1, 0)$

d) $(-2, -2, 0, 2), (2, 6, 2, 0)$

Příklad 2.3.7

Vyberte z nabídky všechny báze podprostoru řešení U homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:

řešení:

a) $(2, -2, 0, 1), (-2, 2, 1, 0)$

b) d)

b) $(-3, 2, 2, 0), (2, -2, 0, 2)$

c) $(2, 0, 1, 2), (2, -3, 0, 1)$

d) $(4, -4, 0, 4), (-6, 4, 4, 0)$

Příklad 2.3.8

Vyberte z nabídky všechny báze podprostoru řešení U homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x_1 & & - & 8x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & & = & 0 \end{array}$$

možnosti:

řešení:

a) $(1, -2, 0, 2), (4, 0, 2, 0)$

a) b)

b) $(2, 0, 1, 0), (-\frac{1}{2}, -1, 0, 1)$

c) $(\frac{1}{2}, 0, 1, 2), (3, 1, 1, 0)$

d) $(1, 2, 1, -\frac{1}{2}), (2, 3, -1, 0)$

Příklad 2.3.9

Je dána homogenní soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, spočítejte a vyberte správné řešení.

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:**řešení:**

- a) $x_1 = \frac{23}{31} \cdot t, x_2 = -\frac{31}{16} \cdot t, x_3 = \frac{17}{31} \cdot t, x_4 = t$ d)
- b) $x_1 = \frac{35}{31} \cdot t, x_2 = -\frac{27}{10} \cdot t, x_3 = \frac{17}{31} \cdot t, x_4 = t$
- c) $x_1 = \frac{37}{31} \cdot t, x_2 = -\frac{26}{5} \cdot t, x_3 = \frac{11}{31} \cdot t, x_4 = t$
- d) $x_1 = \frac{37}{31} \cdot t, x_2 = -\frac{26}{31} \cdot t, x_3 = \frac{17}{31} \cdot t, x_4 = t$
- e) $x_1 = \frac{7}{31} \cdot t, x_2 = -\frac{26}{31} \cdot t, x_3 = \frac{17}{11} \cdot t, x_4 = t$

Příklad 2.3.10

Je dána homogenní soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, spočítejte a vyberte správné řešení.

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:**řešení:**

- a) $x_1 = \frac{4}{31} \cdot t, x_2 = \frac{9}{11} \cdot t, x_3 = \frac{47}{31} \cdot t, x_4 = t$ b)
- b) $x_1 = \frac{23}{31} \cdot t, x_2 = \frac{9}{31} \cdot t, x_3 = \frac{47}{31} \cdot t, x_4 = t$
- c) $x_1 = -\frac{23}{17} \cdot t, x_2 = \frac{9}{31} \cdot t, x_3 = -\frac{47}{31} \cdot t, x_4 = t$
- d) $x_1 = \frac{23}{31} \cdot t, x_2 = \frac{9}{31} \cdot t, x_3 = \frac{23}{31} \cdot t, x_4 = t$
- e) $x_1 = \frac{7}{12} \cdot t, x_2 = -\frac{9}{31} \cdot t, x_3 = \frac{47}{31} \cdot t, x_4 = t$

Příklad 2.3.11

Je dána homogenní soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, spočítejte a vyberte správné řešení.

$$\begin{array}{rrrrr} -x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

možnosti:
řešení:

a) $x_1 = \frac{6}{13} \cdot t, x_2 = \frac{17}{48} \cdot t, x_3 = -\frac{11}{21} \cdot t, x_4 = t$

c)

b) $x_1 = \frac{5}{24} \cdot t, x_2 = \frac{13}{11} \cdot t, x_3 = \frac{5}{8} \cdot t, x_4 = \frac{6}{5}$

c) $x_1 = \frac{5}{24} \cdot t, x_2 = \frac{17}{48} \cdot t, x_3 = \frac{5}{8} \cdot t, x_4 = t$

d) $x_1 = \frac{6}{11} \cdot t, x_2 = -\frac{17}{7} \cdot t, x_3 = \frac{5}{8} \cdot t, x_4 = t$

e) $x_1 = \frac{5}{24} \cdot t, x_2 = \frac{1}{5} \cdot t, x_3 = -\frac{5}{3} \cdot t, x_4 = t$

Příklad 2.3.12

Je dána homogenní soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, spočtete a vyberte správné řešení.

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

možnosti:
řešení:

a) $x_1 = t, x_2 = \frac{5}{7} \cdot t, x_3 = \frac{21}{11} \cdot t, x_4 = t$

e)

b) $x_1 = t, x_2 = -\frac{3}{5} \cdot t, x_3 = -\frac{7}{2} \cdot t, x_4 = t$

c) $x_1 = \frac{3}{2} \cdot t, x_2 = \frac{1}{2} \cdot t, x_3 = -\frac{5}{2} \cdot t, x_4 = t$

d) $x_1 = -\frac{7}{2} \cdot t, x_2 = \frac{5}{2} \cdot t, x_3 = -\frac{5}{2} \cdot t, x_4 = t$

e) $x_1 = t, x_2 = \frac{3}{2} \cdot t, x_3 = -\frac{5}{2} \cdot t, x_4 = t$

Příklad 2.3.13

Je dána homogenní soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, spočtete a vyberte správné řešení.

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0$$

možnosti:
řešení:

a) $x_1 = \frac{1}{7} \cdot t, x_2 = \frac{28}{37} \cdot t, x_3 = -\frac{12}{23} \cdot t, x_4 = t$

b)

b) $x_1 = \frac{35}{37} \cdot t, x_2 = \frac{28}{37} \cdot t, x_3 = -\frac{12}{37} \cdot t, x_4 = t$

c) $x_1 = -\frac{35}{37} \cdot t, x_2 = \frac{5}{37} \cdot t, x_3 = -\frac{12}{31} \cdot t, x_4 = t$

d) $x_1 = \frac{11}{27} \cdot t, x_2 = -\frac{21}{23} \cdot t, x_3 = -\frac{12}{31} \cdot t, x_4 = t$

e) $x_1 = \frac{24}{11} \cdot t, x_2 = \frac{5}{7} \cdot t, x_3 = \frac{11}{37} \cdot t, x_4 = t$

Příklad 2.3.14

Je dána soustava lineárních rovnic. Jakému číslu se musí rovnat parametr a , aby soustava měla i nenulová řešení? Zlomky запиšte v základním tvaru (a/b , popř. $-a/b$), např. $4/12$ запиšte jako $1/3$.

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ ax_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 7x_1 - ax_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + ax_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

řešení:

$$(1) a = -\frac{17}{6} \quad (2) a = \frac{27}{4} \quad (3) a = \frac{86}{3} \quad (4) a = -105 \quad (5) a = -\frac{3}{4}$$

2.3.3 Nastavení odpovědníků**Příklady na teorii**

Odpovědník na příklady z teorie tvoří příklady 2.3.1, 2.3.2 a 2.3.3. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Početní příklady

Odpovědník na početní příklady je složen z pěti otázek, z toho dvě jsou tvořeny z příkladů 2.3.4 až 2.3.8, dvě z příkladů 2.3.9 až 2.3.13. Dále je zahrnuta jedna varianta z příkladu 2.3.14. Pořadí odpovědí u otázek, kde vybíráme z více odpovědí, je zcela náhodné. Stejně tak je v celém odpovědníku zcela náhodné i pořadí otázek.

Bodování je nastaveno tak, že za každou správnou odpověď dostane student 1 bod, za špatnou nebo žádnou odpověď 0 bodů.

Počet bodů i správné výsledky se studentům zobrazí ihned po odevzdání odpovědníku, výsledky nejsou zaznamenávány do poznámkového bloku. Studenti se i po odevzdání odpovědníku mohou vracet k otázkám a upravovat je. Průchod odpovědníku není časově omezen a splnění či nesplnění odpovědníku není hodnoceno. Přístup mají pouze studenti předmětu MUC31 Lineární algebra.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sady příkladů, které slouží k procvičování témat "Matice a determinanty" a "Soustavy lineárních rovnic". Sady jsou vhodné k sestavení odpovědníku z jedné či více kapitol nebo podkapitol dané látky. V Informačním systému Masarykovy univerzity jsem k procvičení jednotlivých podkapitol vytvořila ukázkové odpovědníky. Z daných sad si může v budoucnu vyučující předmětu vytvářet odpovědníky například k zadávání domácích úloh, průběžnému testování nebo závěrečnému zkoušení.

V přílohách této práce nalezneme ukázky odpovědníků, jež se zobrazí studentům. Na obrázku 1 vidíme odpovědník na početní příklady před jeho zodpovězením a na obrázku 2 vidíme výsledky zodpovězeného odpovědníku i s ukázkou získaných bodů. Na obrázku 3 vidíme odpovědník na teorii před jeho zodpovězením a na obrázku 4 obdobně vidíme výsledky již zodpovězeného odpovědníku i s ukázkou získaných bodů.

Přílohy

NEVYPLNĚNO OTÁZEK celkem

4

Průběžně uložit

Zavřít bez uložení

Odevzdat

Příklady 2.4 Hodnost matice – odpovídání

PřF: MUC31 Lineární algebra (jaro 2021) jiné předměty

!

Upozornění: Podle nastavení časů nelze nyní s tímto odpovědníkem pracovat. Jste učitelem předmětu nebo máte vyšší oprávnění, omezení se ignorují.

PARAMETRY ODPOVĚDNÍKU

4 BODOVANÉ OTÁZKY

+1 správně

0 neodpovězeno

0 špatně

Více ▾

OMEZENÍ PŘÁV A ČASŮ

1 OMEZENÍ

Více ▾

!

Varování: Znění testových otázek je autorským dílem. Šíření otázek bez písemného souhlasu autora je porušením autorských práv a jako takové může být postihováno dle platných zákonů.

1. Určete hodnotu matice A (nad $\mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = \text{[]}$$

K. Nemetová, učo 4891927, 21. 5. 2021 13:23:24

2. Určete hodnotu matice A (nad $\mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = \text{[]}$$

K. Nemetová, učo 4891927, 21. 5. 2021 13:23:24

3. Určete čísla a, b tak, aby hodnost matice $h(A) = 2$.
Zlomky zapíšte v základním tvaru (a/b popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapíšte jako $1/3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & -6 & b \end{pmatrix}$$

$$a = \text{[]}$$

$$b = \text{[]}$$

K. Nemetová, učo 4891927, 21. 5. 2021 13:23:24

4. Určete čísla a, b tak, aby hodnost matice $h(A) = 2$.
Zlomky zapíšte v základním tvaru (a/b popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapíšte jako $1/3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \text{[]}$$

$$b = \text{[]}$$

K. Nemetová, učo 4891927, 21. 5. 2021 13:23:24

Odevzdat

Obrázek 1: Odpovědník na početní příklady - ukázka (zdroj: snímek obrazovky, <https://is.muni.cz/>, 2021)

Příklady 2.4 Hodnost matice – prohlídka

Celkem bodů: 2.000

Zpět

CHCI HODNOTIT DO POZNÁMKOVÉHO BLOKU

Vybrat

Založit

PřF: MUC31 Lineární algebra (jaro 2021) jiné předměty

PARAMETRY ODPOVĚDNIKU

4 BODOVANÉ OTÁZKY +1 správně 0 neodpovězeno 0 špatně Více ▾

OMEZENÍ PRÁV A ČASŮ

1 OMEZENÍ Více ▾

Varování: Znění testových otázek je autorským dílem. Šíření otázek bez písemného souhlasu autora je porušením autorských práv a jako takové může být postihováno dle platných zákonů.

1. Určete hodnotu matice A (nad $\mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$h(A) =$ ✓ (4)

K. Němeček, učo 4891407, 21. 5. 2021 13:25:40

(zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Priklady_4_2_a_Hodnost_matice.qdefx) 1

2. Určete hodnotu matice A (nad $\mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$h(A) =$ ✗ (4)

K. Němeček, učo 4891407, 21. 5. 2021 13:25:40

(zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Priklady_4_2_a_Hodnost_matice.qdefx) 0

3. Určete čísla a, b tak, aby hodnost matice $h(A) = 2$.
Zlomky zapíšte v základním tvaru (a/b popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapíšte jako $1/3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & -6 & b \end{pmatrix}$$

$a =$ ✓ (7)

$b =$ ✓ (1)

K. Němeček, učo 4891407, 21. 5. 2021 13:25:40

(zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Priklady_4_2_Hodnost_matice.qdefx) 0

4. Určete čísla a, b tak, aby hodnost matice $h(A) = 2$.
Zlomky zapíšte v základním tvaru (a/b popř. $-a/b$), např. $4/12$ zapíšte jako $1/3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$a =$ ✓ (2)

$b =$ ✗ (3)

K. Němeček, učo 4891407, 21. 5. 2021 13:25:40

(zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Priklady_4_2_Hodnost_matice.qdefx) 1

Zpět

Obrázek 2: Odpovědník na početní příklady - ukázka (zdroj: snímek obrazovky, <https://is.muni.cz/>, 2021)

NEVPLNĚNO OTÁZEK
celkem 4

Průběžně uložit

Zavřít bez uložení

Odevzdat

Teorie 2.4 Hodnost matice – odpovídání

PřF: MUC31 Lineární algebra (jaro 2021) jiné předměty

PARAMETRY ODPOVĚDNÍKU

4 BODOVANÉ OTÁZKY +1 správně 0 nezodpovězeno 0 špatně Více ▾

OMEZENÍ PRÁV A ČASŮ

1 OMEZENÍ Více ▾

Varování: Znění testových otázek je autorským dílem. Šíření otázek bez písemného souhlasu autora je porušením autorských práv a jako takové může být postihováno dle platných zákonů.

1. Necht A je matice typu m/n a necht R je regulární matice řádu n a S je regulární matice řádu m pak: a

K. Nierzdová, učo 481167, 21. 5. 2021 13:02:03

2. Hodnost matice je počtu jejich lineárně sloupců.

K. Nierzdová, učo 481167, 21. 5. 2021 13:02:03

3. Necht A je čtvercová matice řádu n . Vyberte všechny ekvivalentní výroky s výrokem: Matice A je singularní.

- ☐ sloupce matice A jsou lineárně nezávislé
- ☐ sloupce matice A jsou lineárně závislé
- ☐ řádky matice A jsou lineárně závislé
- ☐ řádky matice A jsou lineárně nezávislé

K. Nierzdová, učo 481167, 21. 5. 2021 13:02:03

4. Vyberte všechna pravdivá tvrzení.

- ☐ Elementární řádková úprava je záměna čísel v řádku.
- ☐ Provedení elementární řádkové úpravy změní hodnost matice.
- ☐ Je-li A nenulová matice, pak její hodnost je rovna nule.
- ☐ Žádnou matici nelze převést na schodovitý tvar.
- ☐ Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem je elementární řádková úprava.
- ☐ Každou matici lze převést na schodovitý tvar.
- ☐ Provedení elementární řádkové úpravy nezmění hodnost matice.

K. Nierzdová, učo 481167, 21. 5. 2021 13:02:03

Odevzdat

Obrázek 3: Odpovědník na teorii - ukázka (zdroj: snímek obrazovky, <https://is.muni.cz/>, 2021)

Teorie 2.4 Hodnost matice – prohlídka

Celkem bodů: 4.000

Zpět

CHCI HODNOTIT DO POZNÁMKOVÉHO BLOKU

Vybrat

Založit

PřF: MUC31 Lineární algebra (jaro 2021) Jiné předměty

PARAMETRY ODPOVĚDÍ

4 BODOVANÉ OTÁZKY +1 správně 0 nezodpovězeno 0 špatně Více ▾

OMEZENÍ PRÁV A ČASŮ

1 OMEZENÍ Více ▾

Varování: Znění testových otázek je autorským dílem. Šíření otázek bez písemného souhlasu autora je porušením autorských práv a jako takové může být postihováno dle platných zákonů.

1. Necht A je matice typu m/n a necht B je regulární matice řádu n a S je regulární matice řádu m pak: $h(A * B) = h(A)$ ✓ a
 $h(S * A) = h(A)$ ✗

K. Nezdovák, učo 481162, 21. 5. 2021 13:03:55
 (zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Teorie_4_2_Hodnost_matice.qdefx [m](#)) 1

2. Hodnost matice je = ✓ maximálnímu počtu jejich lineárně ✓ nezávislých sloupců. ✓

K. Nezdovák, učo 481162, 21. 5. 2021 13:03:55
 (zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Teorie_4_2_Hodnost_matice.qdefx [m](#)) 3

3. Necht A je čtvercová matice řádu n . Vyberte všechny ekvivalentní výroky s výrokem: Matice A je singularní.

☐ sloupce matice A jsou lineárně nezávislé
☒ ✓ sloupce matice A jsou lineárně závislé
☐ řádky matice A jsou lineárně závislé
☐ řádky matice A jsou lineárně nezávislé

K. Nezdovák, učo 481162, 21. 5. 2021 13:03:55
 (zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Teorie_4_2_1_Hodnost_matice.qdefx [m](#)) 0

4. Vyberte všechna pravdivá tvrzení.

☐ Elementární řádková úprava je záměna čísel v řádku.
☐ Provedení elementární řádkové úpravy změní hodnost matice.
☐ Je-li A nenulová matice, pak její hodnost je rovna nule.
☐ Žádnou matici nelze převést na schodovitý tvar.
☐ *Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem je elementární řádková úprava.
☐ *Každou matici lze převést na schodovitý tvar.
☐ *Provedení elementární řádkové úpravy nezmění hodnost matice.

K. Nezdovák, učo 481162, 21. 5. 2021 13:03:55
 (zdrojová sada otázek: /el/sci/jaro2021/MUC31/odp/tb/Teorie_4_2_1_Hodnost_matice.qdefx [m](#)) 0

Zpět

Obrázek 4: Odpovědník na teorii - ukázka (zdroj: snímek obrazovky, <https://is.muni.cz/>, 2021)

Seznam použité literatury

- [1] HORÁK, P., JANYŠKA, J., Lineární algebra. [online]. Brno, 2020 [cit. 2021-04-09]. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/~janyska/LA_CELE.pdf.
- [2] HORÁK, Pavel. Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky. Brno: Masarykova univerzita, 1991. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-210-0288-3.
- [3] PROSKURJAKOV, I. V. Sbornik zadač po linejnoj algebre. 7. vyd. Moskva: Nauka, 1984. 335 s.
- [4] Prikklady.com - Sbírka úloh: Inverzní matice. 301 Moved Permanently [online]. Copyright © 2012 [cit. 2021-03-09]. Dostupné z: <https://prikklady.com/cs/index.php/matrice/inverzni-matrice>
- [5] Prikklady.com - Sbírka úloh: Hodnost matice. 301 Moved Permanently [online]. Copyright © 2012 [cit. 2021-04-05]. Dostupné z: <https://prikklady.com/cs/index.php/matrice/hodnost-matrice>
- [6] BUMBÁLKOVÁ, A., Geometrická zobrazení - sbírka příkladů. [online]. Brno, 2017 [cit. 2021-04-05]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/th/jrjwd/bakalarska_prace_Bumbalkova_is.pdf

