

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2019

VLASTA PELAJOVÁ

Interaktivní materiály k středoškolské matematické analýze

Diplomová práce

Vlasta Pelajová

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Vlasta Pelajová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Interaktivní materiály k středoškolské matematické analýze
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy, Učitelství anglického jazyka a literatury pro střední školy
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Akademický rok:	2018/2019
Počet stran:	viii + 98
Klíčová slova:	interaktivní materiály, interaktivní tabule, Prowise, funkce, posloupnosti, řady, moderní výukové metody, tablety, interaktivita, praxe, implementace, mobily

Bibliographic Entry

Author:	Bc. Vlasta Pelajová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Interactive materials for the secondary school calculus
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics, Upper Secondary School Teacher Training in English Language and Literature
Supervisor:	prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Academic Year:	2018/2019
Number of Pages:	viii + 98
Keywords:	interactive materials, interactive whiteboards, Prowise, functions, sequences, series, modern educational methods, tablets, interactivity, teaching practice, implementation, mobile phones

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je tvorba moderních výukových materiálů zaměřených na témata elementární funkce, posloupnosti a nekonečné řady, sloužící k oživení či doplnění standardní středoškolské výuky matematiky. Výsledné materiály kladou důraz především na interaktivitu a propojení matematiky s praxí. Lze je využít na interaktivních tabulích, tabletech, noteboocích i mobilních telefonech.

První kapitola práce popisuje výhody a způsob práce v programu Prowise Presenter, v němž byly materiály vytvořeny. Následující tři kapitoly představují tištěnou verzi materiálů spolu s příručkou pro učitele. V poslední kapitole je pak popsán průběh implementace materiálů na dvou vybraných brněnských gymnáziích během školního roku 2018/2019.

Abstract

The aim of this thesis is to produce modern teaching materials dealing with the topics of elementary functions, sequences and infinite series which can serve to complement and modernize the standard mathematical education at secondary schools. The materials place great emphasis on interactivity and the interconnection of mathematics with practice. They can be used on interactive whiteboards, tablets, laptops, and mobile phones.

The first chapter describes the advantages and ways of working in the Prowise Presenter in which the materials were created. The following three chapters present a printed version of the materials together with a teacher's handbook, the last chapter describes the course of material implementation at two selected grammar schools in Brno during the school year 2018/2019.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

Ústav: Ústav matematiky a statistiky
Studentka: Bc. Vlasta Pelajová
Program: Matematika
Obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství anglického jazyka a literatury pro střední školy

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce: Interaktivní materiály k středoškolské matematické analýze

Název práce anglicky: Interactive materials for the secondary school calculus

Oficiální zadání:

Vypracujte interaktivní materiály k výuce středoškolské matematické analýzy s výstupy pro interaktivní tabuli, tablety a smartphony. Předmětem výuky jsou zejména elementární funkce, posloupnosti a řady. Materiály připravte v programu Prowise Presenter nebo jiném programu, který je univerzální pro různá zařízení.

Literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia : funkce*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2002. 168 s. ISBN 8071961647.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia : posloupnosti a řady*. 2. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2002. 126 s. ISBN 8071961957.

CIZLEROVÁ, Michaela, Marek ZAHRADNÍČEK a Alena ZAHRADNÍČKOVÁ. *Matematika pro střední školy. učebnice..* Vydání první. Brno: Didaktis, 2014. 88 stran. ISBN 9788073582142.

ZEMEK, Václav. *Matematika pro střední školy. učebnice..* Vydání první. Brno: Didaktis, 2014. 96 stran. ISBN 9788073582173.

Jazyk závěrečné práce: čeština

Vedoucí práce: prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Datum zadání práce: 9. 10. 2017

V Brně dne: 9. 10. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

.....
Bc. Vlasta Pelajová
studentka

.....
prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
vedoucí práce

.....
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí své diplomové práce za její trpělivost a důvěru ve mě vloženou. Zároveň bych chtěla poděkovat Zdeňku Kadeřábkovi a Janu Kadlecovi za umožnění spolupráce a pomoc při korekturách a zdokonalování materiálů.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 25. dubna 2019

.....
Vlasta Pelajová

Obsah

Úvod	viii
Kapitola 1. Jak používat interaktivní materiály	1
1.1 Software Prowise	1
1.2 Práce se softwarem	2
1.2.1 Registrace a přihlášení do programu	2
1.2.2 Základní práce se softwarem	4
1.2.3 Práce s interaktivními materiály	11
Kapitola 2. Elementární funkce	17
2.1 Úvod do funkcí, Lineární funkce	18
2.1.1 Úvod do funkcí	18
2.1.2 Lineární funkce	20
2.2 Funkce s absolutní hodnotou	28
2.3 Kvadratické funkce	37
2.4 Lineární lomené funkce	43
2.5 Mocninné funkce	48
2.5.1 Mocninné funkce s přirozeným exponentem	49
2.5.2 Mocninné funkce s celým záporným exponentem	51
2.5.3 Mocninné funkce s racionálním exponentem	52
2.6 Exponenciální funkce	57
2.7 Logaritmické funkce	63
Kapitola 3. Posloupnosti	68
3.1 Úvod do posloupností, Aritmetická posloupnost	68
3.2 Geometrická posloupnost	75
Kapitola 4. Nekonečná geometrická řada	82
Kapitola 5. Pilotování interaktivních materiálů na vybraných SŠ	85
Závěr	88
Přílohy	89
Seznam použité literatury	98

Úvod

V dnešní učitelské praxi se často setkáváme s tím, že ačkoliv je mnoho škol plně vybaveno nej-různějšími moderními technologiemi jako jsou interaktivní tabule či dokonce žákovské tablety, málokterá z nich umí naplno využít jejich potenciál. Každý nový ročník žáků je čím dál více na technologiích závislý a většina tříd je umí velmi dobře využívat ke své zábavě, málokdo už však k podpoře studia. Přitom právě technologie jsou velmi užitečným motivačním nástrojem, který by učitelé měli být schopni využívat.

Tato diplomová práce slouží jako výchozí materiál, inspirace a motivace učitelů matematiky k využití technologií, ale především k nadchnutí žáků pro trénování matematiky i mimo prostředí školy. Jejím hlavním výstupem je série interaktivních materiálů k tématům Elementární funkce, Posloupnosti a Nekonečné řady, které lze využívat na interaktivních tabulích, počítačích (např. v počítačových učebnách), tabletech nebo mobilních telefonech.

V první kapitole je stručně popsána práce s programem Prowise Presenter, ve kterém jsou materiály vytvořeny a se kterým si každý učitel může vytvořit své vlastní interaktivní prezentace na míru, a to poměrně snadno a rychle.

Další tři kapitoly práce představují příručku učitele k daným interaktivním materiálům. Obsahují tedy stejné informace a příklady, avšak navíc jsou zde zahrnuty také poznámky pro učitele, především tipy na ozvláštnění hodin či náměty k efektivnímu využití jednotlivých úloh. Tato část práce byla zpracována po konzultaci většího množství středoškolských učebnic jak českých ([7], [8], [1], [10]), tak zahraničních ([2], [6], [5], [9]). Pečlivou selekcí však byly nakonec vybrány učebnice [7] a [8], ze kterých práce přejímá teorii, formulace definic a matematických vět spolu s některými ze základních příkladů. Aplikační příklady a další zajímavosti jsou pak čerpány především z anglicky psané literatury. Grafické zpracování těchto kapitol se snaží co nejvíce korespondovat s přiloženými materiály. Obsahuje tedy množství obrázků pro pozitivní stimulaci žáků a jejich vyšší motivaci ke zvládnutí daného učiva.

V poslední kapitole jsou pak popsány výsledky pilotování vytvořených materiálů na dvou vybraných gymnáziích v Brně. Čtenář zde najde rozdílné učitelské přístupy k jejich využití i reakce žáků na práci s nimi.

Přílohou práce jsou pak samotné interaktivní materiály využitelné ve třídách na libovolných typech zařízení. Některé instrukce vestavěných miniaplikací v interaktivních materiálech byly ponechány v angličtině. Mohou tak představovat krůček k vytvoření mezipředmětového vztahu matematiky a anglického jazyka, a zároveň vybaví žáka jazykovými znalostmi základních pojmů. Na konci každého z materiálů je zahrnut minikvíz k procvičení probraného učiva. Celkově materiály představují berličku k modernější, více motivační a praktické výuce matematiky na střední škole.

Kapitola 1

Jak používat interaktivní materiály

V dnešní době je společnost už ve velké míře závislá na technologiích a internetu. Nejinak je tomu i v českém školství. Podle tematické zprávy ČŠI ze září 2017 už téměř 99 % středních a vyšších odborných škol využívá informační systémy pro vedení svých agend a více než 36 % z těchto škol nabízí třídy vybavené ICT prostředky pro práci každého žáka. Jihomoravský kraj patří v technické vybavenosti středních škol mezi 3 nejlepší (po Zlínském a Libereckém kraji). [3]

Po vlně využívání evropských prostředků pro zakoupení interaktivních tabulí pro co nejvíce učeben školy však zůstává mnoho takových, které jsou vybaveny často různými druhy interaktivních tabulí, ovšem s nedostatečnými výukovými materiály, jenž by umožňovaly jejich plné využití. Velkou překážkou zůstává i fakt, že různí výrobci interaktivních tabulí vydávají své vlastní certifikované softwary, které lze na tabulích jako jediné využívat. Když si tedy pedagog připraví materiál v jednom z těchto softwarů na jedné dané tabuli, často jeho materiály už nefungují na tabuli v jiné učebně. Řešením není ani výběr jednoho z těchto komerčních softwarů, který by následně školy využívaly i na jiných typech interaktivních tabulí, které vlastní. I s ohledem na to je pochopitelné, že ačkoliv je dnes již množství škol touto technologií vybaveno, většina učitelů je kvůli technické nekompatibilitě a časové náročnosti pochopení několika softwarů a následné zpracování materiálů v nich příliš nepoužívá.

Jedinou možností učitelů zůstává využití open source softwarů. To jsou bezplatné, volně dostupné aplikace či webové stránky, které lze spustit z libovolného zařízení (tedy jak z domácího, tak ze školního počítače, tabletu či dokonce mobilního telefonu). Mezi nejznámější z nich patří Open-Sankoré, před několika lety se však objevil na trhu i další z těchto volně dostupných programů, Prowise Presenter.

1.1 Software Prowise

Interaktivní výukové materiály vytvořené v rámci této diplomové práce jsou zpracovány v open source softwaru Prowise Presenter. Ten je jedním z produktů nizozemské společnosti Prowise, která se zaměřuje na vývoj softwarů a hardwarů pro vzdělávání a nabízí pro školy kompletní řešení v oblasti IT.

Mezi jejich v současnosti nabízené produkty z oblasti hardware patří

- interaktivní dotykové obrazovky Prowise Touchscreen, které mohou ve třídách suplovat funkci interaktivních tabulí,

- Prowise Chromebooks – tablety vyvinuté speciálně pro oblast vzdělávání,
- notebooky Prowise EduBook se zabudovaným systémem Prowise a
- Prowise All-in-One PC, které nabízí výhody tabletu a počítače v jednom zařízení.

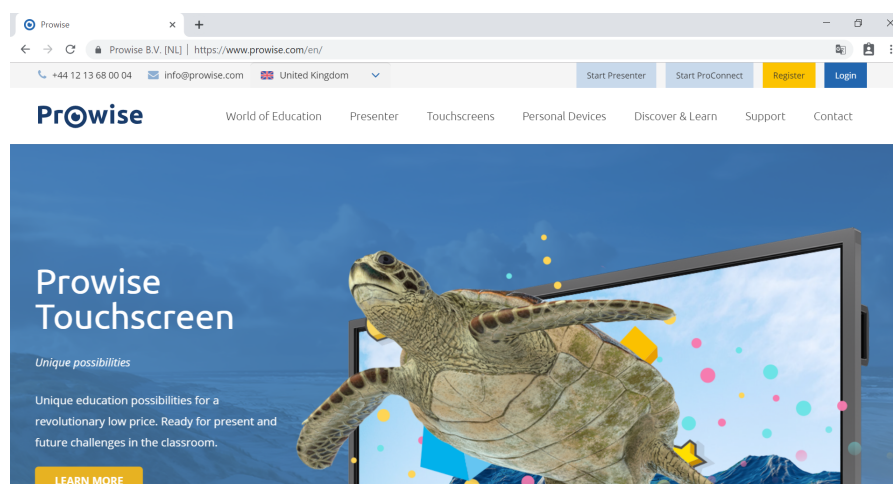
Mezi nabízené softwary pak patří především Prowise Presenter, univerzální prezentační program vytvořený pro všechna zařízení od interaktivních tabulí, přes tablety a počítače, až k mobilním telefonům. Společnost Prowise dále ve svých produktech nabízí i kompletní operační systémy Prowise a online banku vzdělávacích aplikací Prowise World of Education, která je zatím (do začátku roku 2020) přístupná všem uživatelům zcela zdarma.

Produkty Prowise jsou v českém prostředí dosud méně známe a téměř nepoužívané. Přitom program Prowise Presenter je výborným řešením pro situaci v českých školách, kdy v rámci jednoho bezplatného a uživatelsky jednoduchého softwaru, který je dostupný na všech zařízeních připojených k internetu, je možné vytvořit jedny materiály pro všechna zařízení (všechny typy interaktivních tabulí, tablety, smartphony) – stačí pouze funkční webový prohlížeč.

1.2 Práce se softwarem

1.2.1 Registrace a přihlášení do programu

Program Prowise Presenter je možné využívat buď v online verzi přímo v prohlížeči (funguje v libovolném zařízení připojeném k internetu) nebo v programu Prowise Presenter, který je dostupný na všech platformách. Lze jej tedy nainstalovat jak do osobního počítače, tabletu i mobilního telefonu s libovolným operačním systémem.



Obrázek 1.1: Domovská stránka společnosti Prowise

Pro práci v programu je nejprve nutné provést bezplatnou registraci. Tuto registraci by měl mít každý z učitelů, který chce program využívat, ať už pro práci s interaktivními materiály z této práce nebo tvorbu svých vlastních. Registrace se provádí na stránce www.prowise.com – viz 1.1.

Zahájení registrace proběhne po kliknutí na žluté tlačítko „Register“. Objeví se formulář (1.2), ve kterém je třeba vyplnit e-mailovou adresu (Email address), jméno (First name) a příjmení (Surname) nového uživatele. Dále je nabízena možnost zvolit jazyk, ve kterém chce uživatel program

využívat (Prowise v této chvíli nabízí výběr mezi angličtinou, nizozemštinou, dánštinou, němčinou, norštinou, švédštinou, španělštinou, italštinou a francouzštinou) a způsob, kterým bude program využívat (módy učitel (Teacher) a žák (Student) jsou pouze informativní, chod programu nijak neovlivňují). Jako poslední si pak stačí zvolit přihlašovací heslo (Password) a potvrdit podmínky užívání programu.

Obrázek 1.2: Prostředí registrace nového uživatele

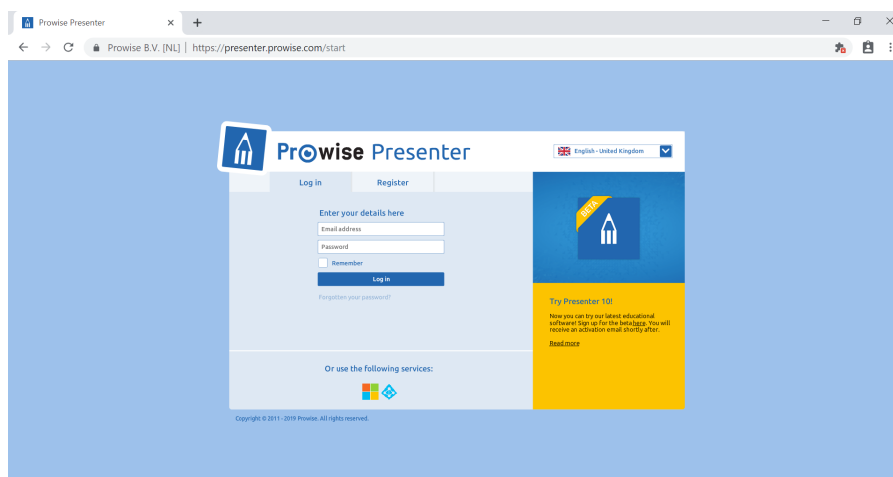
Registraci do programu je nutné dokončit zadáním hesla, které je uživateli zasláno na tu e-mailovou adresu, kterou uvedl při registraci:

Obrázek 1.3: Potvrzení registrace pomocí e-mailové adresy

Samotná registrace není nijak obtížná ani časově náročná, nicméně v prostředí školy (např. v počítačové učebně) je výhodnější založit jeden školní účet, který umožní přístup všem žákům. Ze zkušeností s pilotováním interaktivních materiálů (více viz Kapitola 5) totiž vyplynulo, že právě potvrzení e-mailové adresy způsobuje velká zdržení před začátkem samotného užívání programu a materiálů, navíc vždy hrozí, že žáci svá hesla zapomenou. Jeden obecný školní účet by tak měl zajistit plynulý a rychlý průběh.

1.2.2 Základní práce se softwarem

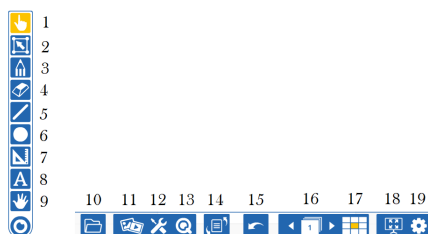
Po dokončení registrace je možné začít program používat. Ukažme si nejprve prostředí online verze, kterou lze spustit v libovolném prohlížeči po zadání webové adresy <https://presenter.prowise.com>. Pro bezproblémové spuštění je třeba mít v zařízení nainstalovaný Flash Player. Pokud vše proběhne hladce, na obrazovce se zobrazí stránka pro přihlášení (1.4):



Obrázek 1.4: Přihlášení do programu Prowise Presenter

Zde se zadávají údaje, pod kterými byla provedena registrace. Přihlášení proběhne po stisknutí tlačítka „Log in“ a vstup do programu po stisku „Start presenter“.

Na obrázku 1.5 jsou vidět dvě základní nástrojové lišty programu, které zpřístupňují jeho základní funkce.



Obrázek 1.5: Základní nástroje webové aplikace Prowise Presenter

Boční lištu s nástroji 1-9 lze libovolně přesouvat po pracovní ploše po uchopení kolečka v její dolní části.

Tlačítko 1 na liště je Ruka. Ta umožňuje přesouvat objekty, ovládat pohyblivé prvky v interaktivních materiálech a miniaplikace.

Tlačítko 2 slouží pro práci s objekty. Tím lze objekt otáčet, ukotvit v libovolné části pracovní plochy, přidat k němu interaktivní prvky (odkaz, označení správné či špatné odpovědi, přidání rámečku, zvuku, ...) či jej úplně smazat.

Dalším objektem na postranní liště je **tlačítko 3**. Toto tlačítko umožňuje pracovat s programem jako s plochou pro psaní. Nástroj nabízí celkem 5 různých režimů psaní – obyčejná tužka, kaligrafické pero, fixa a dva nástroje, které převádí text psaný rukou do tištěné podoby.

Následujícím nástrojem, který se skrývá pod **tlačítkem 4**, je možné vygumovat psaný text či celou pracovní plochu.

Tlačítka 5 a 6 nabízejí vytváření různých čar, šipek, tvarů a objektů.

Pod **tlačítkem 7** se nacházejí rýsovací pomůcky – pravítka, kružítko, úhloměr a stopky.

Tlačítko 8 pak umožňuje napsat v programu libovolný text pomocí klávesnice (vhodné při přípravě materiálů do hodin).

Posledním nástrojem, pod **tlačítkem 9**, je lupa, která funguje běžně známým způsobem.

Spodní nástrojová lišta začíná zleva **tlačítkem 10**. To slouží k otevírání, ukládání a sdílení prezentací vytvořených v programu.

Hned vedle něj lze pomocí **tlačítka 11** vkládat obrázky, tvary, videa, zvuky či pozadí do prezentace.

Tlačítko 12 slouží k přidávání různých interaktivních miniaplikací. Ty jsou rozděleny do kategorií Jazyk (Language), Matematika (Maths), Ostatní (Others), Stavební bloky (Building blocks) – obsahuje například bloky k odkrývání správných odpovědí či přidání doplňujících otázek – Nástroje (Tools) a ProConnect obsahující minihry, které lze spustit pro více hráčů na jejich osobních zařízeních (notebooky, tablety, mobilní telefony).

Pomocí **tlačítka 13** je možné vložit existující kvíz do prezentace nebo vytvořit vlastní. Tyto kvízy mohou sloužit k ověření znalostí žáků na konci probíraného učiva – práce s tímto nástrojem je blíže popsána v následujících částech.

Zajímavé je i **tlačítko 14**, které umožňuje komunikaci s žáky přes jejich zařízení, tzv. *ProConnect*. Pomocí tohoto nástroje lze ve třídě na žákovských zařízeních hrát již zmíněné minihry, provést rychlou volbu či kvíz (žáci ve svých zařízeních kliknou na jednu z nabízených možností – může sloužit k ověření pochopení učiva) nebo použít sdílení obrazovek (skvělé např. pro načrtnutí grafů funkcí). Podrobněji bude nástroj popsán dále.

Poslední z tlačítek v levé části spodní nástrojové lišty je **tlačítko 15**. To velmi jednoduše slouží k návratu k poslednímu provedenému kroku v prezentaci.

V pravé spodní části obrazovky se nachází navigace po prezentaci. **Tlačítko 16** se skládá z šipek vlevo a vpravo, které umožňují přecházet z jednoho snímku na druhý. Po kliknutí doprostřed tlačítka se objeví přehled všech snímků v prezentaci, které lze přesouvat, mazat či upravovat.

Po stisknutí **tlačítka 17** se zobrazí celá pracovní plocha programu Prowise. Ta je rozdělena do devíti částí. Základní část obrazovky je uprostřed, nicméně její okolí může sloužit k prostému psaní na tabuli nebo k rozšíření tohoto slidu, jak je tomu v příložených interaktivních materiálech.

Tlačítkem 18 lze pracovní okno programu rozšířit na celou obrazovku (Full screen) nebo přepnout do prezentačního módu (Presentation mode).

Poslední na obrazovce je nástroj Nastavení (**tlačítko 19**). V něm se uživatel může odhlásit ze svého účtu, upravovat svůj profil, přepnout nástrojovou lištu s tlačítky 1-9 do vertikální či horizontální polohy, nastavit poměr stran prezentace, viditelnost částí pracovní plochy a hypertextových odkazů.

Kromě online internetové verze Prowise Presenter je možné do každého zařízení stáhnout i program, který je taktéž zdarma pro všechny uživatele. Stáhnutí programu je přístupné z adresy <https://www.prowise.com/en/support/presenter-software/>.

Oproti webové aplikaci je ta desktopová opatřena dvěma tlačítky ve spodní liště navíc:



Obrázek 1.6: Přidané nástroje desktopové aplikace Prowise Presenter

Tlačítko 20 přepíná do aplikace *Touch Table Tools*. Program je možné nainstalovat buď s touto aplikací, nebo bez ní. V aplikaci je možné hrát matematické i další hry, je však vhodná spíše pro základní školy, k použití na tablety. Další prozkoumání aplikace je ponecháno na čtenáři samotném.

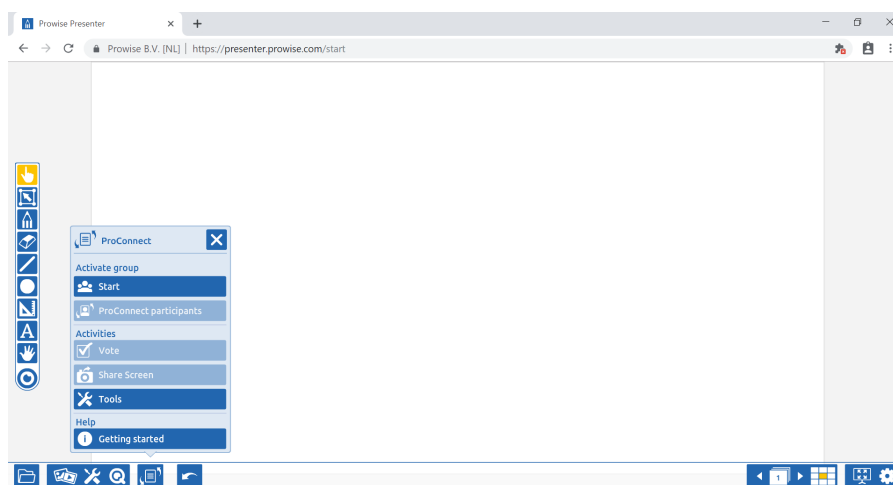
V interaktivních materiálech vytvořených v rámci této práce se jí dále nevyužívá.

Tlačítko 21 je pak vhodné pro práci na interaktivní tabuli. Toto tlačítko přepne celý program pouze do postranní lišty a umožňuje pracovat s dalšími programy a materiály uloženými v počítači, se stálou možností využití některých nástrojů z postranní lišty (pero, fixa, guma, snímek obrazovky).

ProConnect

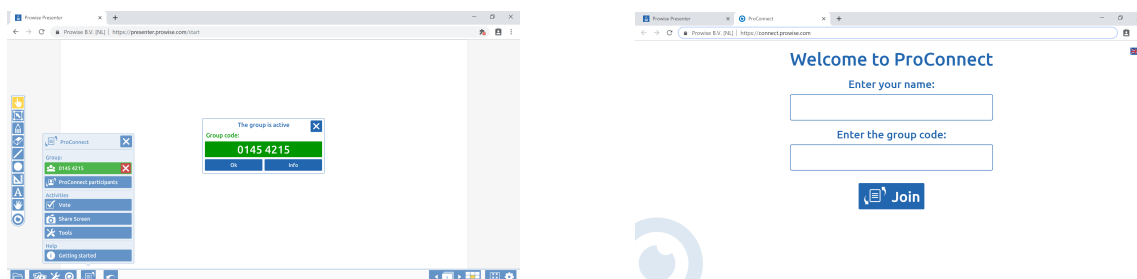
Pojďme si nyní blíže popsat práci s nástrojem *ProConnect*, který se nachází pod **tlačítkem 14** v základním zobrazení programu (viz 1.5).

Po rozkliknutí tlačítka se zobrazí nabídka nástroje (1.7). Pro využití ProConnect k hraní některé z miniher stačí kliknout na tlačítko „Tools“, vybrat si z šesti nabízených a spustit hru tlačítkem „Start“.



Obrázek 1.7: Nabídka nástroje ProConnect

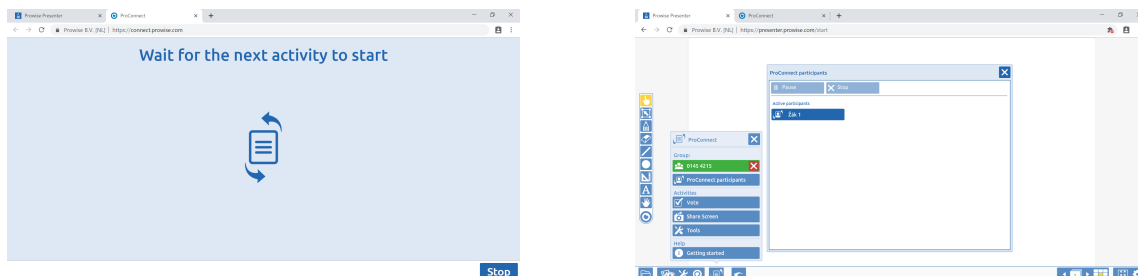
V opačném případě je třeba v nabídce kliknout na tlačítko „Start“. Tím se vygeneruje kód, pomocí kterého se mohou žáci k nástroji ProConnect přihlásit z libovolného zařízení (připojeného k internetu) ze stránky <https://connect.prowise.com/>. Levá část obrázku 1.8 zachycuje obrazovku učitele v programu Prowise Presenter. Zobrazený kód, který byl vygenerován, je třeba sdílet mezi žáky. Ti pak na uvedené stránce vyplní své jméno či přezdívku (Enter your name) a vygenerovaný skupinový kód (Enter group code), jak je vidět v pravé části obrázku 1.8:



Obrázek 1.8: Generace skupinového kódu v nástroji ProConnect

Po přihlášení žáci čekají, než učitel spustí některou z vybraných aktivit v nástroji ProConnect (viz levá část obrázku 1.9). Tímto způsobem mohou být žáci přihlášení v nástroji po dobu celé

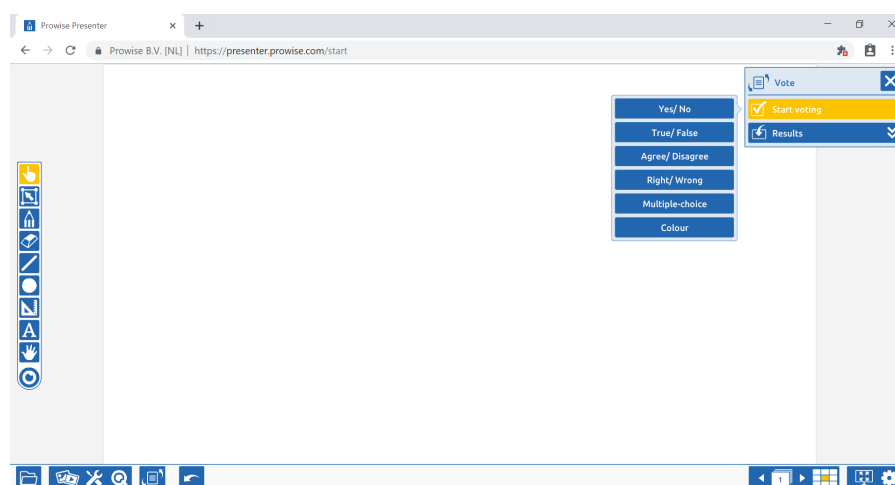
vyučovací hodiny. Vždy, když pak bude učitel využívat některé z funkcí tohoto nástroje, není třeba se znovu přihlašovat. Počet a seznam přihlášených žáků může učitel sledovat po kliknutí na tlačítko „ProConnect participants“ v nabídce (viz pravá část obrázku 1.9).



Obrázek 1.9: Nástroj ProConnect – čekání na zahájení aktivity

Jak již bylo zmíněno dříve, nástroj ProConnect umožňuje spuštění hned několika aktivit. Vedle miniher je to nástroj Volby (Vote) a Sdílení obrazovky (Share Screen). Pojdme nejprve popsat první z nich.

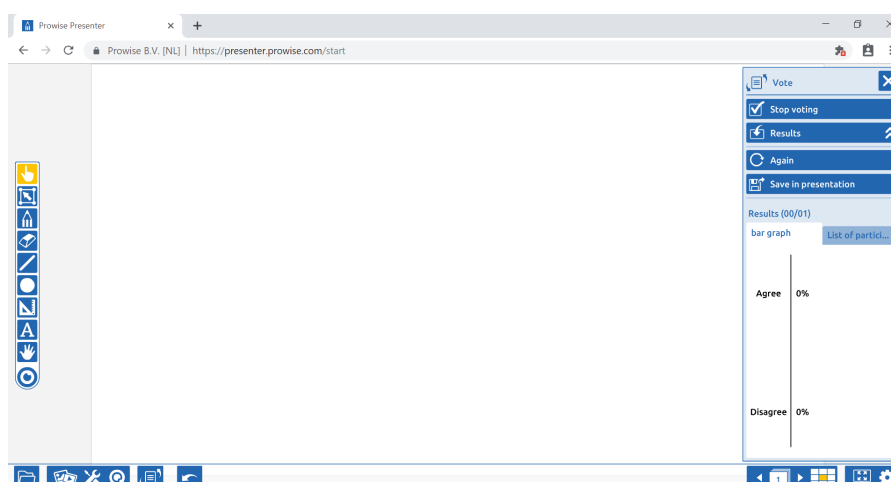
Aktivita Vote v nabídce nástroje slouží k rychlému sesbírání odpovědí žáků na jednoduchou, uzavřenou otázku. Po otevření aktivity se na obrazovce zobrazí následující nabídka:



Obrázek 1.10: Zahájení aktivity Volba

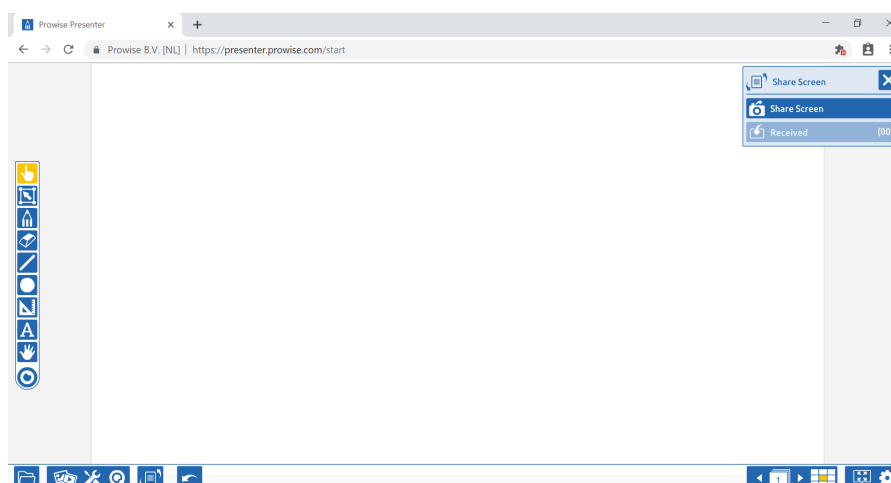
Pomocí tlačítka „Start voting“ lze nejprve vybrat formát, ve kterém budou žáci hlasovat či vkládat odpovědi. Na výběr je z formátů Ano/Ne (Yes/No), Pravda/Nepřavda (True/False), Souhlasím/Nesouhlasím (Agree/Disagree), Správně/Špatně (Right/Wrong), výběr z několika nabízených možností (Multiple-choice) nebo barev (Colour). Podle typu otázky si tedy stačí vybrat vhodný formát.

Průběh volby je pak možné sledovat v pravé části obrazovky. Po jejím skončení lze volbu opakovat (Again) nebo uložit přímo do prezentace (Save in presentation):



Obrázek 1.11: Průběh aktivity Volba

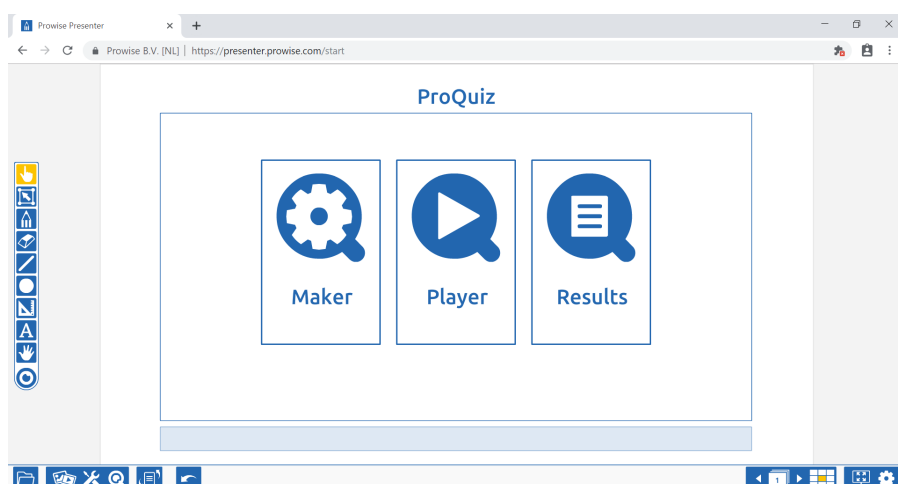
Druhou z nabízených aktivit nástroje ProConnect je Sdílení obrazovky. Tato aktivita je velmi vhodná při zadání úlohy načrtnout graf funkce. Žákům je pak možné např. sdílet souřadnou osu či milimetrový papír, do kterého mohou graf zakreslit a poslat zpět učiteli ke kontrole. Aktivitu lze velmi snadno zahájit stisknutím tlačítka „Share screen“. Odevzdané práce se pak opět zobrazí v pravé části obrazovky, kde je možné si je prohlížet, opravovat či uložit do prezentace.



Obrázek 1.12: Zahájení aktivity Sdílení obrazovky

ProQuiz

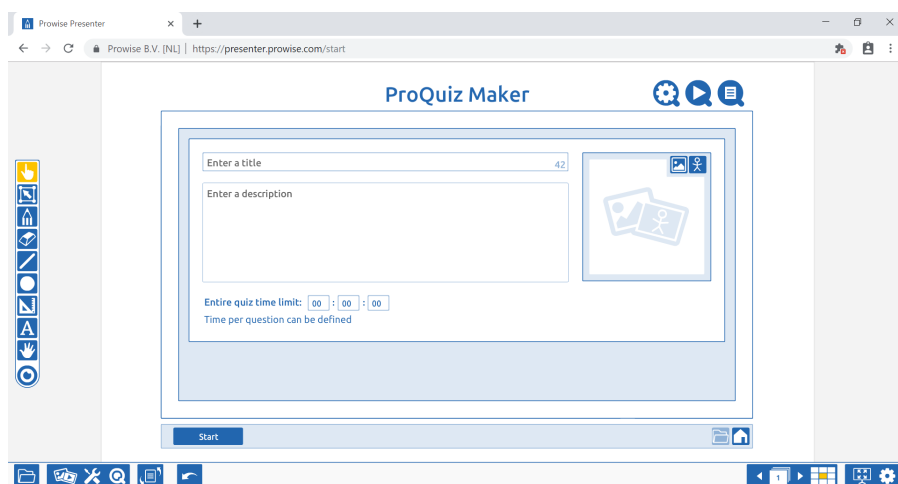
Dalším z užitečných nástrojů je *ProQuiz* pod **tlačítkem 15** (viz 1.5), který umožňuje tvorbu a spouštění kvízů v programu. Po kliknutí na tlačítko ProQuiz se otevře následující nabídka, kterou lze vidět na obrázku 1.13.



Obrázek 1.13: Základní nabídka nástroje ProQuiz

Pro vytvoření nového, vlastního kvízu je třeba otevřít záložku „Maker“. Nástroj poté nabídne editaci již existujícího, uživatelem vytvořeného kvízu (Edit existing quiz) nebo vytvoření nového (Make new quiz).

Při tvoření zcela nového kvízu je jako první třeba zadat jeho název (Enter a title) a popis (Enter a description), jak je vidět na obrázku 1.14. Volitelně lze také vložit úvodní obrázek kvízu (ikona obrázku vpravo nahoře) nebo jeho časový limit (Enter quiz time limit). Kvíz se vytvoří po stisknutí tlačítka „Start“ v levé spodní části.

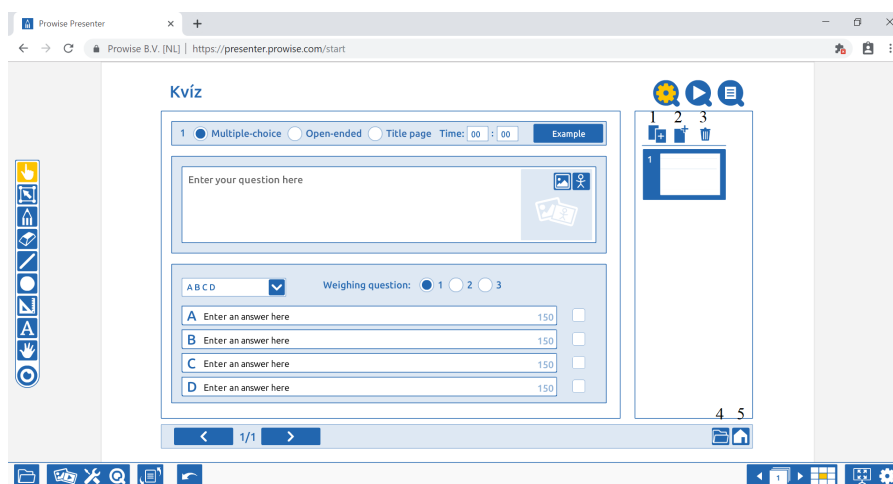


Obrázek 1.14: Úvodní obrazovka k vytvoření nového kvízu

V samotné tvorbě kvízu, která je zachycena na obrázku 1.15, je nejprve vždy třeba vybrat v horní liště typ otázky – výběr z několika možností (Multiple-choice) nebo otevřená otázka (Open-ended) – či vytvořit titulní stránku kvízu (Title page). Dále lze pro každou otázku volitelně nastavit časový limit (Time), toto nastavení však není povinné. Samotné zadání otázky (Enter your question here) umožňuje běžné psaní, bohužel nepodporuje matematické znaky. Ty je však možné, podobně jak je tomu u příložených materiálů, vložit do zadání prostřednictvím obrázku.

Každá otázka dále může mít váhu 1, 2, nebo 3 (Weighing question). Základní formou odpovědi

na otázku Multiple-choice je výběr z možností A, B, C nebo D. K alespoň dvěma z těchto možností je třeba zadat odpověď (Enter an answer here) a vpravo označit, které z nich jsou správné. Odpovědi je možné také zadávat ve formě obrázků, označeny mohou být písmeny, tvary, nebo mohou zůstat bez označení. Správné odpovědi pro otázky Open-ended typu lze pak buď přímo naformulovat nebo zadat několik klíčových slov, podle kterých bude hodnocena správnost žákovských odpovědí.



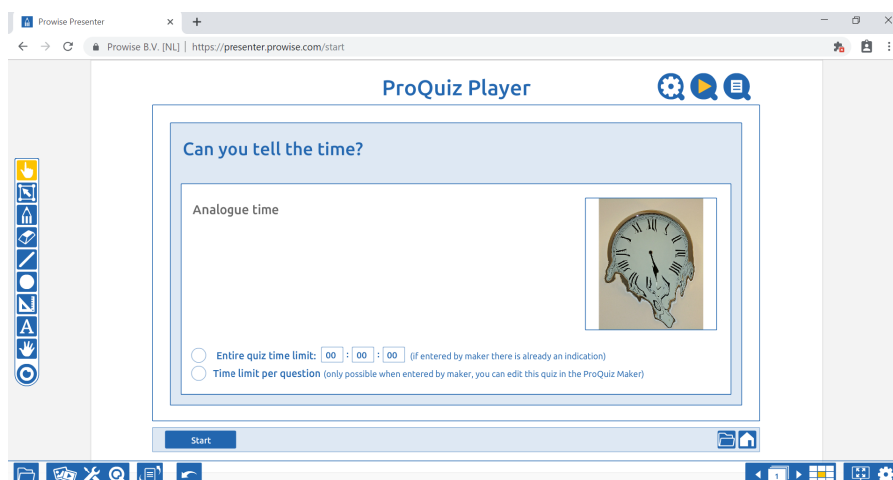
Obrázek 1.15: Prostředí tvorby nového kvízu

Po vytvoření otázky je možné v postranní liště tuto otázku zduplikovat **tlačítkem 1**, vytvořit novou pomocí **tlačítka 2** či otázku smazat **tlačítkem 3** (viz 1.15).

Ve chvíli, kdy je kvíz dokončen, stačí ho uložit kliknutím na **tlačítko 4** volbou možnosti „Save Quiz as“. Po výběru umístění je kvíz připraven pro pozdější použití nebo vložení do prezentace.

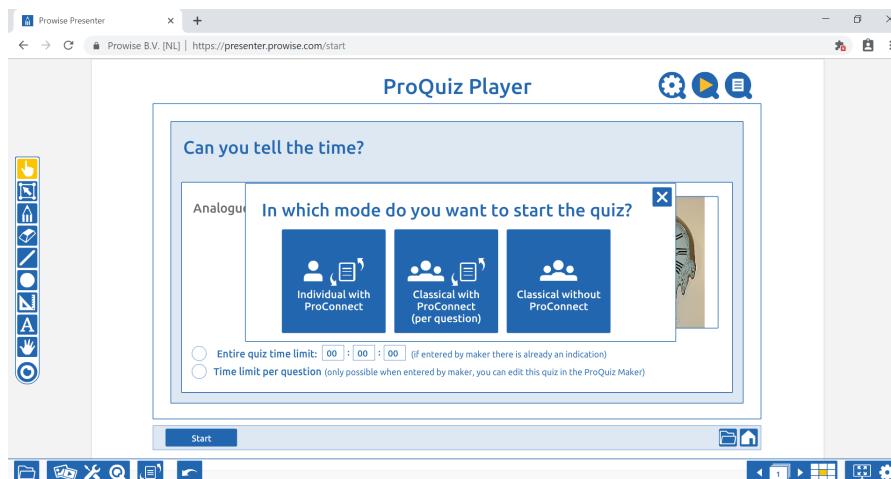
Pro vyplňování již existujícího kvízu slouží záložka „Player“ (viz 1.13), kde je nejprve třeba otevřít umístění kvízu. Na veřejném online úložišti (záložka „Community“) je k dispozici množství kvízů do různých předmětů, připravených k použití. Tyto kvízy byly vytvořeny ostatními uživateli programu Prowise a zpřístupněny pro usnadnění práce jejich kolegů.

Po výběru a otevření kvízu se zobrazí úvodní obrazovka (viz obrázek 1.16).



Obrázek 1.16: Úvodní obrazovka po spuštění již vytvořeného kvízu

Na ní je možné (ale ne nutné!) zvolit časový limit pro vyplnění kvízu a povolit časový limit pro jednotlivé otázky (pokud byl při vytváření zadán). Kvíz se pak spustí stisknutím tlačítka „Start“, kdy se zobrazí k výběru jedna z následujících možností:



Obrázek 1.17: Spuštění vytvořeného kvízu v ProQuiz

Pro otevření kvízu přímo v zařízení (vhodné např. při opakování ve třídě) je třeba zvolit třetí z možností, tedy „Classical without ProConnect“. Při tomto výběru se zobrazí jednotlivé otázky, které lze s žáky ve třídě vyplnit a ověřit si tak jejich znalosti. Tento mód umožňuje přepínat mezi otázkami a ukazovat i správné odpovědi.

Chce-li učitel kvíz s žáky vyplnit formou testu, je dobré zvolit první („Individual with ProConnect“) nebo druhou možnost („Classical with ProConnect“). Obě z těchto možností přepnou uživatele do režimu ProConnect, který byl popsán dříve. První ze zmiňovaných režimů umožní žákům vyplňovat kvíz vlastním tempem, otázky se pak však neobjeví na obrazovce učitele. Oproti tomu druhý z režimů zobrazí na učitelské obrazovce vždy danou otázku, kterou žáci vyplňují a umožní učiteli regulovat tempo kvízu.

Pro bližší seznámení s programem Prowise Presenter autorka doporučuje bakalářskou práci [4], která je více věnována jednotlivým funkcím v programu a jejich fungování.

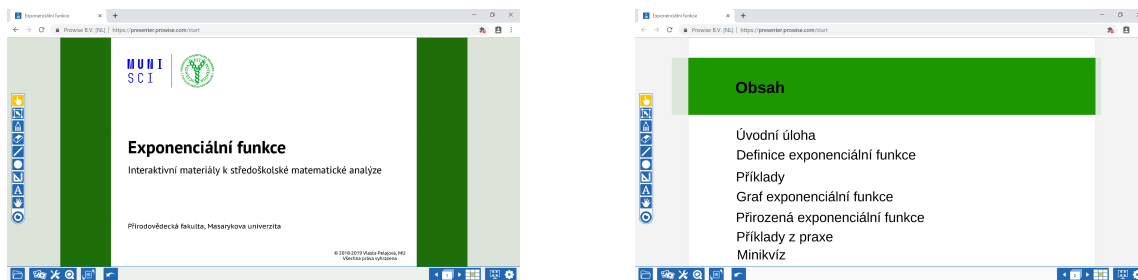
1.2.3 Práce s interaktivními materiály

V rámci této práce byly v popsaném programu Prowise Presenter vytvořeny interaktivní výukové materiály pro středoškolskou látku funkcí, posloupností a řad. V následující části je blíže popsána struktura těchto materiálů a způsob, jak s nimi pracovat.

Všechny interaktivní materiály jsou dostupné online na stránkách <https://sites.google.com/view/ssmaterialyfunkce/>, odkazy na všechny materiály se nacházejí i v příloze práce (5). Z těchto stránek či z přílohy stačí materiál otevřít a přihlásit se do programu Prowise pod svými údaji, jak bylo popsáno dříve. Plný přepis textů i příkladů z materiálů, včetně poznámek vhodných pro učitele, se nachází v kapitolách 2, 3 a 4.

Každý materiál začíná úvodní stránkou a obsahem. Libovolná položka v obsahu funguje jako odkaz – chce-li se tedy učitel např. v rámci opakování dostat ke konkrétní části prezentace, stačí na

ni kliknout v obsahu a prezentace k ní okamžitě přesměruje.



Obrázek 1.18: Úvodní slidy interaktivních materiálů

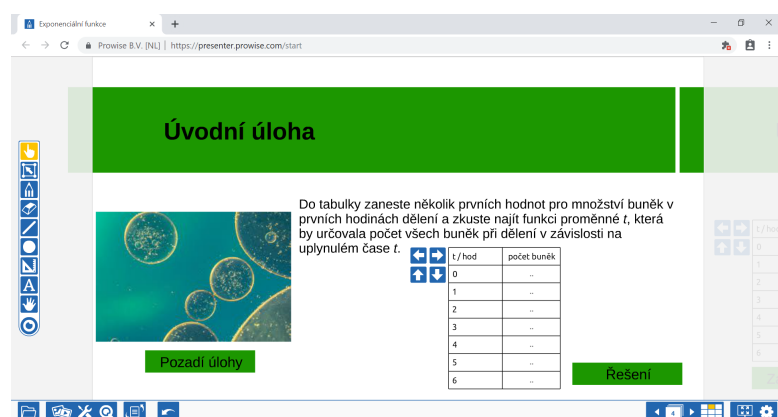
Ještě před úvodní úlohou je v každém materiálu zahrnut snímek *K čemu jsou...?*, který se v obsahu nenachází. Tento snímek má podpořit motivaci žáků ke zvládnutí následujícího učiva. Každý učitel určitě zná typickou žákovskou otázku „A k čemu nám to bude?“. Právě na ni by zde žáci měli najít odpověď a získat alespoň přibližnou představu propojení této části středoškolské matematiky s praxí. Ačkoliv některé zmíněné aplikace jsou pouze velmi přibližnými matematickými modely, alespoň pro názornou ukázkou by měly posloužit.



Obrázek 1.19: Motivační snímek „K čemu jsou...?“ v úvodu materiálů

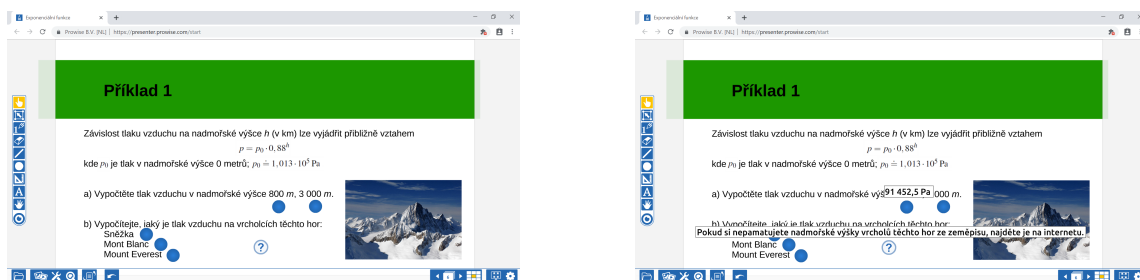
Jak bylo popsáno v předešlé části, k navigaci v prezentaci slouží **tlačítko 16** ve spodní liště (viz obrázek 1.5). V některých příkladech, jak je tomu i na obrázku 1.20, jsou však příklady rozsáhlejší, než by se vešlo do jednoho snímku; k přepínání mezi jednotlivými částmi plochy pak slouží zelená tlačítka („Pozadí úlohy“, „Řešení“, ...).

Nachází-li se v libovolné části interaktivních materiálů tabulka, jak je tomu na snímku výše (1.20), je možné ji vyplnit dvěma způsoby, a to pomocí nástroje Ruka (**tlačítko 1, 1.5**), kdy stačí do volného políčka kliknout a pomocí klávesnice vepsat číslo, nebo pomocí nástroje Pero (**tlačítko 3, 1.5**) pouhým vepsáním čísla na tabuli nebo do zařízení.



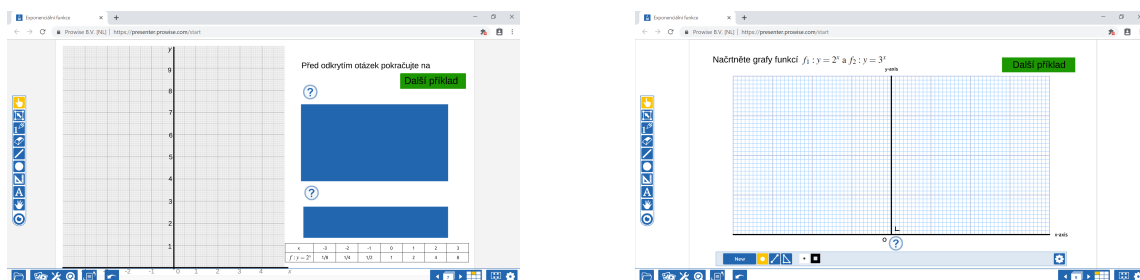
Obrázek 1.20: Ukázka snímku z interaktivních materiálů

Modré interaktivní prvky v materiálech, jako jsou modrá kulatá tlačítka na obrázku 1.21, skrývají odpovědi či řešení zadaných příkladů. Po jejich rozkliknutí pomocí nástroje Ruka se tento výsledek zobrazí. Podobně kulatá tlačítka se symbolem otazníku obsahují skryté doplňující otázky a tipy pro práci na konkrétním snímku. Tyto tipy lze opět zobrazit pouhým kliknutím na daný interaktivní prvek.



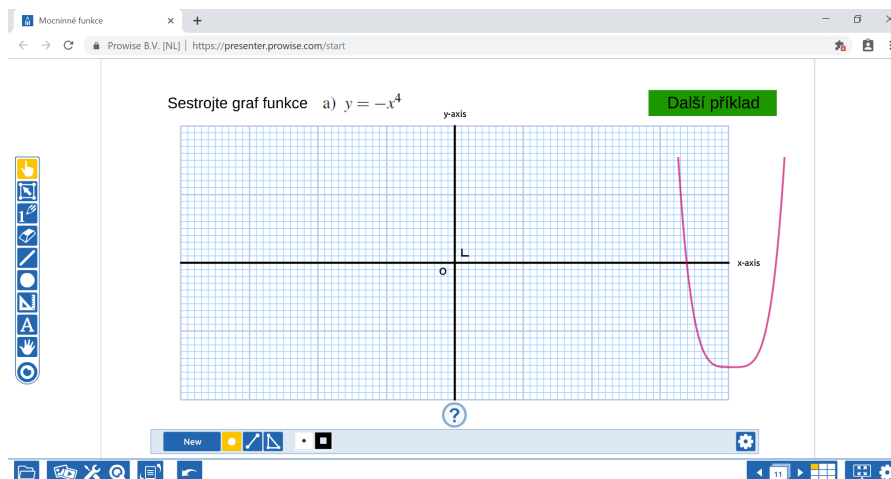
Obrázek 1.21: Modré interaktivní prvky zobrazující řešení či odpovědi k úlohám

V kapitolách funkcí se často nacházejí příklady a úlohy, v nichž mají žáci zakreslit grafy daných funkcí. Tyto grafy zakreslují do jednoho z prostředí na obrázku 1.22. Vlevo je pouhá čtvercová síť s kartézskou soustavou souřadnic. Žáci do ní mohou vkreslit graf pomocí nástroje Pero (tlačítko 3, 1.5) nebo některých tvarů z nástroje pod tlačítkem 5 (1.5). Jak již bylo zmíněno, pro tento typ úlohy je možným oživením využití funkce Sdílení obrazovky nástroje ProConnect. V pravé části je pak vidět zakreslení grafu do interaktivní souřadné soustavy. V ní je nejprve třeba v pravé dolní části v nastavení vybrat potřebné parametry – měřítko, rozsah os x a y , zobrazení a velikost čtvercové sítě, ... Poté už stačí z lišty vlevo vybrat bod nebo přímku a graf zakreslit.



Obrázek 1.22: Práce s grafy v interaktivních materiálech

V neposlední řadě jsou zde i příklady, které slouží k procvičení transformací jednotlivých typů grafů. U těchto příkladů by bylo zbytečně náročné a zdlouhavé nechat žáky celý graf vytvářet, proto je na snímku poskytnut základní tvar této funkce, který mohou přesouvat pomocí nástroje Ruka nebo zvětšovat či zmenšovat pomocí **tlačítka 2** (1.5):



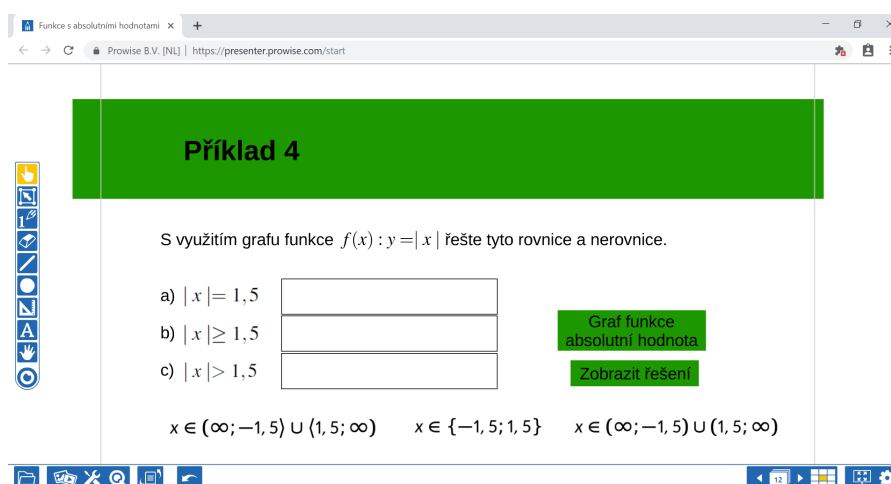
Obrázek 1.23: Ukázka příkladu na transformaci grafu funkce

Dalším interaktivním prvkem v materiálech je výběr správné odpovědi z nabízených. V takovýchto typech příkladů stačí pomocí nástroje Ruka označit vybranou odpověď, u které se posléze objeví řešení:

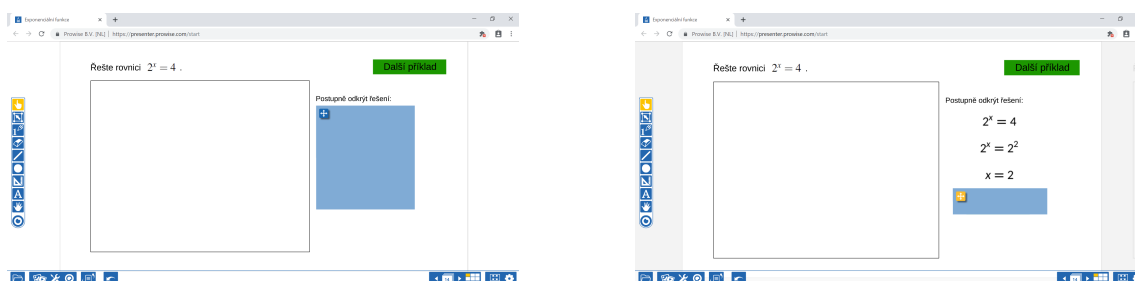
Obrázek 1.24: Interaktivní úlohy s odkrýváním správného řešení

V některých příkladech mají žáci přetahovat (opět pomocí nástroje Ruka) některou z odpovědí do připravených rámečků. Tyto úlohy bohužel není možné nastavit na automatickou kontrolu, proto se u takových příkladů vždy nachází zelené tlačítko „Zobrazit řešení“, jak je vidět na obrázku 1.25. Po kliknutí na něj se zobrazí správné odpovědi a učitel, či žáci samostatně, mohou své odpovědi zkontrolovat.

V materiálech se nachází i takové úlohy, ve kterých je potřeba znát nejen samotnou odpověď, ale i její detailní řešení. Jedna z takových úloh je zachycena na obrázku 1.26. Pod modrým prvkem *Opona* vpravo se nachází celé řešení zadaného příkladu, které lze postupně odkrýt uchopením tmavě modrého čtverce v levém horním rohu a postupným posunutím směrem dolů.

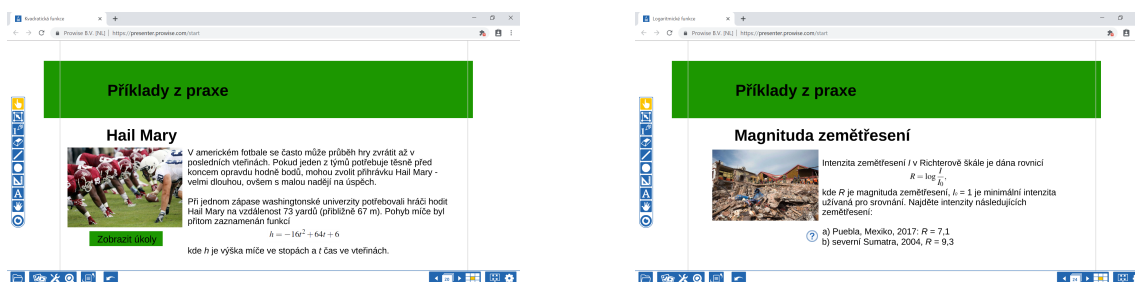


Obrázek 1.25: Interaktivní úlohy s přetahováním správných odpovědí



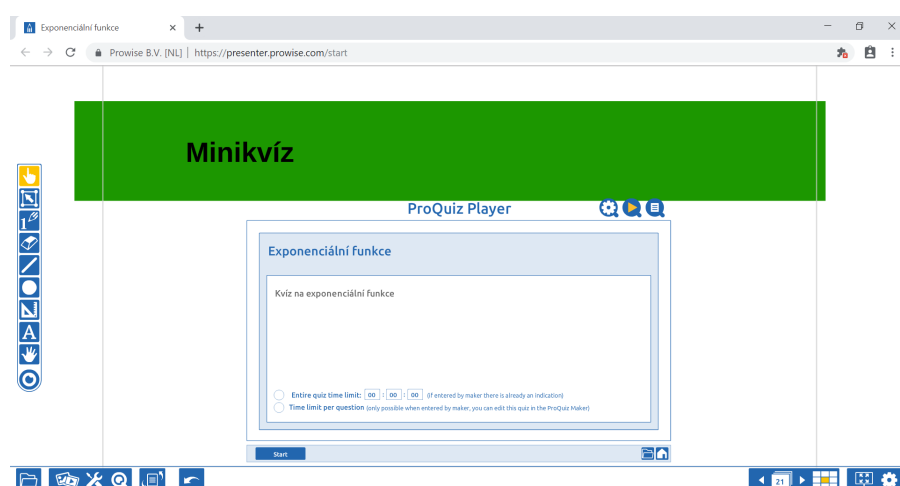
Obrázek 1.26: Interaktivní úlohy s odkrýváním správného postupu řešení

Ze stejného důvodu jako jsou na začátku každé prezentace ukázky konkrétních aplikací dané funkce v praxi, jsou i na konci zahrnuty aplikační příklady z praxe. Opět je nutné podotknout, že se ve většině případů jedná o matematické modely, které ne vždy přesně popisují reálnou situaci. Jejich zařazení slouží především k tomu, aby si žáci uvědomili využitelnost matematiky v dalších oborech, pro zvýšení atraktivity počítání příkladů, ale i kvůli státní maturitě, kde se často nacházejí slovní úlohy, se kterými se žáci ve středoškolské výuce už málokdy setkávají.



Obrázek 1.27: Sekce „Příklady z praxe“ v interaktivních materiálech

Na konci každého materiálu se pak nachází kvíz vytvořený nástrojem ProQuiz, který byl popsán již dříve. Tento kvíz je určen pro zopakování probíraného učiva v každé kapitole a lze jej využít buď pro společné opakování ve třídě, nebo jako rychlý test, který je možné i oznámkovat a zahrnout do klasifikace.



Obrázek 1.28: Ukázka vloženého minikvízu na konci každého z interaktivních materiálů

Celkově jsou interaktivní materiály velmi intuitivní a obzvlášť žáci, kteří v dnešní době využívají elektronických zařízení jako prodloužené ruky, nebudou mít pravděpodobně problém se v nich velmi rychle orientovat. Autorka nicméně doporučuje věnovat čas alespoň v části první hodiny, kdy se s materiálem pracuje a ukázat základní funkce softwaru Prowise. Umožní to tak plnou využitelnost potenciálu, který materiály nabízí.

Kapitola 2

Elementární funkce

Následující kapitoly (2, 3, 4) představují učební text kopírující obsah interaktivních výukových materiálů včetně didaktických poznámek pro učitele. Teorie, znění definic i matematických vět a několik základních příkladů je převzato z českých gymnaziálních učebnic [7] a [8]. Náplň kapitol je však do značné míry inspirovaná zahraničními učebnicemi z anglicky mluvících zemí, kde je kladen velký důraz na využitelnost poznatků v praxi, na aplikační příklady a zaujetí žáků.

Seznam použitých zahraničních textů:

- COLLINGWOOD, David H., K. David PRINCE a Matthew M. CONROY. *Precalculus* ([2]),
- MCASKILL, Bruce et. all. *Pre-Calculus 11* ([6]),
- LARSON, Ron a Robert HOSTETLER. *Precalculus*. 7th ed. ([5]),
- RICE UNIVERSITY. *Precalculus* ([9]).

Všechny příklady jsou v textu práce uvedeny bez řešení, s výjimkou úvodních úloh. Řešení většiny příkladů je možné najít v interaktivních materiálech, příklady z praxe jsou však ponechány bez řešení i tam, neboť se předpokládá nutné zapojení doprovodného výkladu učitele.

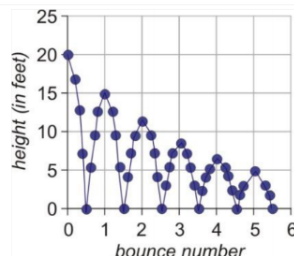
2.1 Úvod do funkcí, Lineární funkce

2.1.1 Úvod do funkcí

Ceník taxislužeb v Brně

Počet km	Konečná cena
0	40
1	70
2	100
3	130
4	160
5	190

Obrázek 2.1



Obrázek 2.2

$$S = \pi r^2$$

Obrázek 2.3

Podívejte se pozorně na všechny tři obrázky. Našli byste mezi nimi nějakou souvislost? A souvislost mezi nimi a matematikou?

Všechny tři obrázky představují nějaké vyjádření funkcí, kterým se budeme věnovat v této kapitole. Dříve, než si odhalíme co přesně taková funkce je, všimněme si na základě obrázků, že může být reprezentována rovnicí, tabulkou, grafem nebo i slovy, například ve formě slovní úlohy.

Pojďme nyní zadefinovat, co to vlastně funkce je. Využijeme k tomu pozorování společných znaků na obrázcích. Ve všech třech se nachází dvě veličiny (Obr. 2.1 – počet km a konečná cena, Obr. 2.2 – počet odrazů a výška ve stopách, Obr. 2.3 – obsah kruhu a jeho poloměr), přičemž vždy jedna z veličin je závislá na té druhé. Funkce tedy vyjadřuje *závislost jedné veličiny na druhé*.

Definice funkce

Definice 2.1.1. Funkce f je předpis, který každému prvku množiny D přiřazuje právě jedno reálné číslo. Zapisujeme

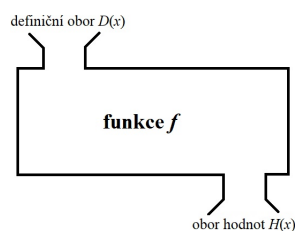
$$y = f(x).$$

Množinu $D \in \mathbb{R}$ nazýváme **definiční obor funkce**. Číslo $f(x)$ se nazývá hodnota funkce f v bodě x , y představuje závislou a x nezávislou proměnnou.

Všimněte si!

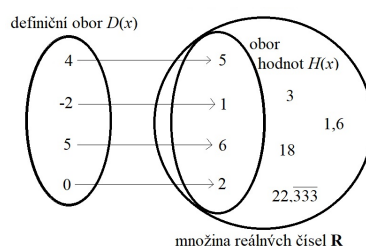
Na množině přirozených čísel existuje podobný předpis, který každému přirozenému číslu $1, \dots, n$ přiřadí právě jedno reálné číslo. Tomuto předpisu neříkáme funkce, ale posloupnost. Více si o nich řekneme v další kapitole.

Představme si tedy funkci jako určitý mechanismus, nebo stroj. Do tohoto stroje na jednom konci vložíme číslo x a funkce nám z něj „vyrobí“ jiné číslo y (nebo také $f(x)$), které nazýváme **hodnotou funkce v bodě x** :



Obrázek 2.4

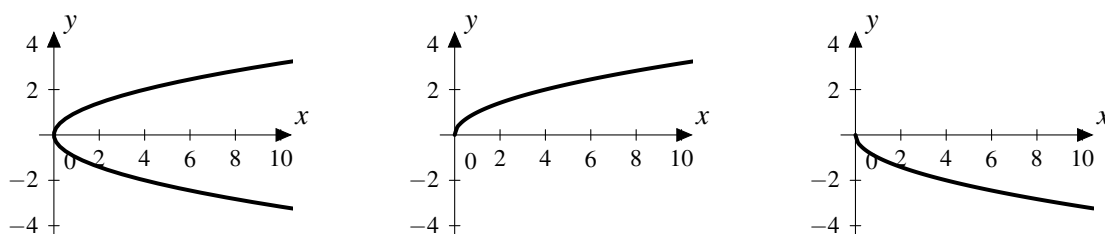
Stejně tak si můžeme, více matematicky, představit princip fungování funkce pomocí následujícího diagramu. Všimněme si, že podle definice je využit každý prvek z definičního oboru funkce D a každému tomuto prvku je přiřazen *nejvýše jedno* reálné číslo. Množinu všech prvků, na které nám tímto způsobem funkce f něco zobrazí pak nazýváme **oborem hodnot H** :



Obrázek 2.5

Příklad 1 Vraťme se teď zpátky k příkladům funkcí na obrázcích. Dokážete určit, jaký je definiční obor a obor hodnot těchto funkcí a která z proměnných je závislá, resp. nezávislá?

Graf funkce



Obrázek 2.6

Je potřeba říct, že ne každá křivka zakreslená v souřadném systému je grafem funkce. Jak ho tedy poznáme? Podívejme se na tři obrázky výše. Jeden z nich nepředstavuje graf žádné reálné funkce. Poznáte který a proč tomu tak je?

Zaměřme se znovu na definici funkce. Podle ní přiřazujeme každému x (na vodorovné ose) právě jedno y (na svislé ose). Podíváme-li se však na první z obrázků, například v bodě $x = 6$ zjistíme, že této hodnotě jsou přiřazeny celkem dvě hodnoty y . Obrázek tedy nemůže být grafem žádné funkce!

Podle toho je tedy zřejmé, že jakmile najdeme jedinou svislou přímku, která by protínala křivku grafu ve více než jednom bodě, nebude se jednat o graf funkce.

Příklad 2 Zkuste graficky znázornit následující situace:

1. Z kohoutku chceme natočit do hrnce vodu na vaření špaget. Ve chvíli, kdy se voda z kohoutku spustí, má pokojovou teplotu. My však chceme natočit vodu co nejteplejší, abychom poté ušetřili energii. Znázorněte změnu teploty vody na čase.
2. Trávník na golfovém hřišti roste na jaře konstantní rychlostí. Každou středu odpoledne přichází zahradník a trávu poseká. Znázorněte graficky růst trávy v průběhu několika týdnů.
3. Představte si, že jste pozorovatel, který chce zjistit, ve kterém měsíci v roce svítí slunce nejdéle. Nakreslete tedy závislost počtu hodin slunečního svitu na měsíci v roce.

Domácí úkol: Zkuste ve svém okolí (na procházce, po cestě ze školy, . . .) najít něco, co vám připomíná funkci – ať už bude mít daný objekt tvar podobný nějakému grafu nebo se bude jednat o slovní či jiné vyjádření závislosti. Vyfoťte si tuto věc na mobilní telefon pro diskusi se spolužáky v příští hodině.

2.1.2 Lineární funkce

K čemu jsou lineární funkce?

Pro žáky je vždy důležité vědět, kvůli čemu danou látku probírají, proč musí právě teď sedět v lavicích a učit se. I proto jsou na začátku každé kapitoly zařazeny příklady některých aplikací, v nichž lze dané funkce využít.

V případě lineární funkce jsou do materiálů zařazeny tyto aplikace:

- Hookův zákon,
- účty za spotřebu vody a elektřiny,
- převod mezi teplotními stupnicemi ($^{\circ}\text{C}$, $^{\circ}\text{F}$, $^{\circ}\text{K}$),
- spotřeba benzínu,
- cena za nákup.

Úvodní úloha



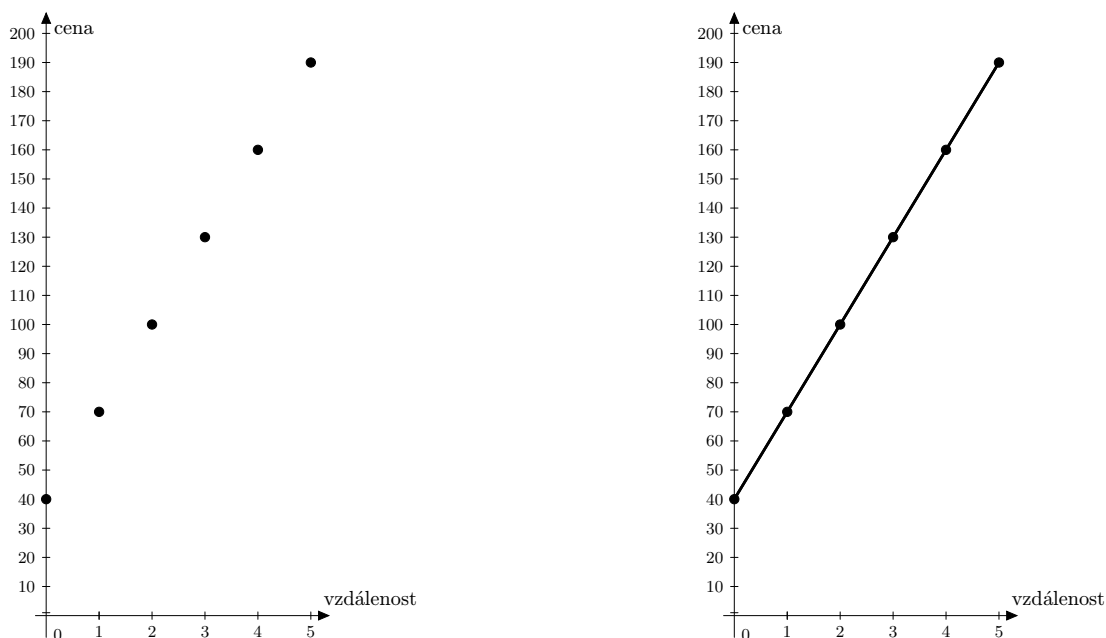
Obrázek 2.7

Jistá taxi služba v centru Brna si účtuje nástupní sazbu 40 Kč a poté 30 Kč za každý ujetý kilometr. Jak závisí konečná cena cesty po Brně na ujetých kilometrech?

Nejprve zkusíme převést problém do matematického jazyka. Udělejme si pro větší názornost tabulku, ve které zaznamenáme do jednoho sloupce ujeté kilometry a do druhého konečnou cenu:

Počet km	Výpočet ceny (Kč)	Konečná cena (Kč)
0	40	40
1	$40 + 1 \cdot 30$	70
2	$40 + 2 \cdot 30$	100
3	$40 + 3 \cdot 30$	130
4	$40 + 4 \cdot 30$	160
5	$40 + 5 \cdot 30$	190

Vyjádřeme nyní tuto závislost ceny na vzdálenosti grafem. Do soustavy souřadnic, kde vodorovná osa bude představovat vzdálenost v kilometrech a svislá cenu v Kč, zaneseme jednotlivé body naší tabulky:



Obrázek 2.8

Vidíme, že body zanesenými z tabulky můžeme proložit přímkou a díky ní tedy lehce zjistit konečnou cenu v libovolném počtu kilometrů. Takovéto závislosti říkáme **lineární funkce**. Je to taková funkce, která roste (případně klesá) konstantní „rychlostí“.

Cenu taxi služeb v závislosti na ujeté vzdálenosti se nám podařilo vyjádřit slovně (zadání úlohy), tabulkou i grafem. Pokusme se nyní najít poslední z možných vyjádření této funkce – její předpis.

Nejprve určíme, že celková cena je závislou proměnnou, která závisí na vzdálenosti. Můžeme tedy cenu považovat za y a vzdálenost za x .

Po každém ujetém kilometru (každém jednom x) se cena navýší 30krát. Lze tedy zapsat

$$y = 30x.$$

Navíc musíme myslet i na nástupní sazbu, která se platí jednorázově a je ji tedy potřeba k celkové ceně pouze přičíst. Získáme tak předpis

$$y = 30x + 40.$$

Odpověď: Hledaná závislost ceny brněnské taxi služby na ujeté vzdálenosti je vyjádřena předpisem $y = 30x + 40$.

Definice lineární funkce

Definice 2.1.2. Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$, která je dána ve tvaru

$$y = ax + b.$$

Speciálním případem lineárních funkcí jsou funkce, pro něž je $a = 0$, tj. funkce

$$y = b,$$

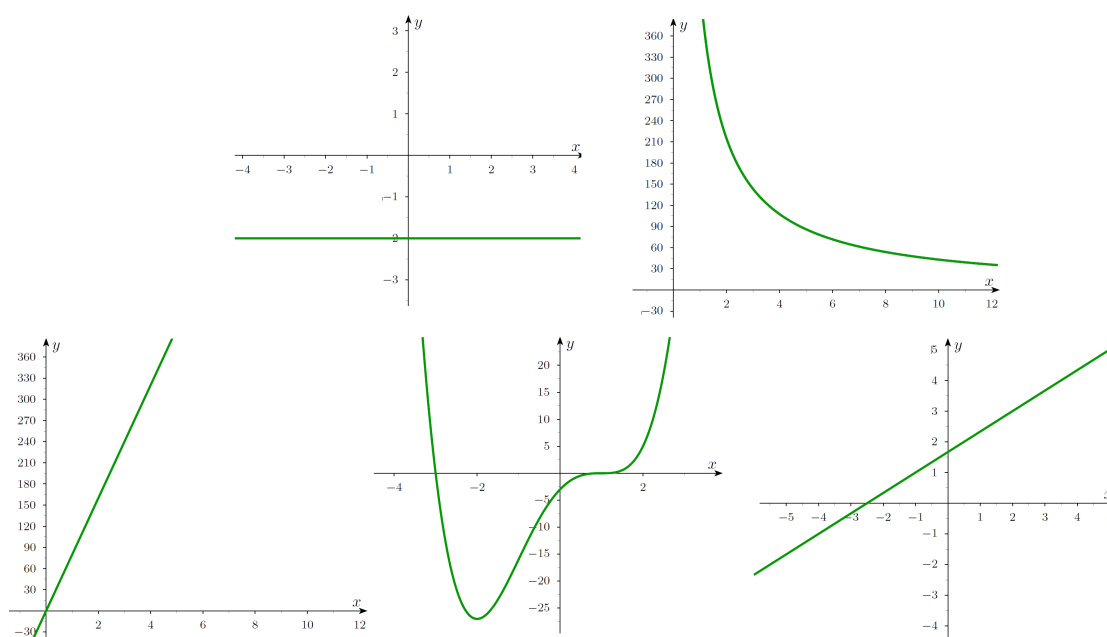
kteřé nazýváme **konstantní funkce**. Pro lineární funkce, vyjádřené ve tvaru

$$y = ax$$

užíváme název **přímá úměrnost**. Grafem lineární funkce je přímka.

Velmi jednoduše: lineární funkce popisuje jakousi rychlost změny. Velmi často v jejím slovním vyjádření najdeme fráze jako „kilometr ZA hodinu“, „sto korun ZA den“, . . .

Příklad 3 Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou lineární.

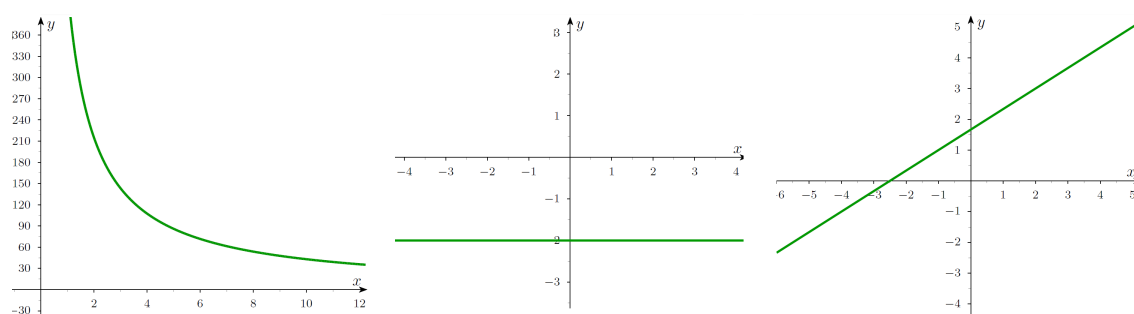


Obrázek 2.9

Příklad 4 Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou lineární.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| 1. $f_1 : y = \sqrt{x-5}$, | 5. $f_5 : y = x^2 - 2x$, |
| 2. $f_2 : y = \frac{x+3}{3}$, | 6. $f_6 : y = x + 3$, |
| 3. $f_3 : y = 800x + 3,2$, | 7. $f_7 : y = 21$, |
| 4. $f_4 : y = \frac{x+1}{x}$, | 8. $f_8 : y = x^3 + 1$. |

Příklad 5 Které z následujících funkcí jsou konstantní a které jsou přímé úměrnosti?



Obrázek 2.10

Graf lineární funkce

Z předešlých příkladů můžeme vidět, že grafem každé lineární funkce je přímka. Pro konstantní funkci je tato přímka rovnoběžná s osou x , pro přímou úměrnost prochází vždy počátkem systému souřadnic $[0, 0]$. Stejně tak platí opačné tvrzení – každá přímka různoběžná s osou y vyjadřuje nějakou lineární funkci.

Proč také přímka rovnoběžná s y netvoří graf funkce?

Z definice přece víme, že každému jednomu x musí být přiřazeno právě jedno y . Přiřazení, které by odpovídalo takovéto přímce by tedy bylo nejednoznačné.

Jak ale takový graf zkonstruovat?

Z geometrie jistě víte, že každá přímka je jednoznačně zadána dvěma body. Tyto dva body nám tedy stačí najít a okamžitě jsme schopni graf lineární funkce vykreslit. U konstantních funkcí stačí dokonce bod jediný, kterým povedeme rovnoběžku s osou x .

Příklad 6 Načrtněte grafy funkcí podle předpisu. Určete jejich průsečík s osou y a tangentu.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| 1. $f_1 : y = 1x + 7$, | 5. $y = 5x + 2$, |
| 2. $f_2 : y = 7x - 9$, | 6. $y = 6x + 1$, |
| 3. $f_3 : y = \frac{1}{3}x + 2$, | 7. $y = -10x + 10$, |
| 4. $f_4 : y = 5x + 5$, | 8. $y = 9x + 10$. |

Poznámka pro učitele: Tento příklad je v interaktivních materiálech zadáván automaticky miniaplikací. Instrukce jsou pouze v angličtině, to však žákům umožňuje osvojit si základní matematické pojmy spojené s funkcemi i v jiném než rodném jazyce. Nový příklad je vygenerován vždy po stisknutí tlačítka „New“.

Autorka doporučuje nechat příklad k samostatné práci na tabletech nebo mobilních telefonech.

Příklad 7 Přiřaďte jednotlivé body k funkci, na které leží.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| 1. $f_1 : y = 8x$ | a. $[1, 8]$ |
| 2. $f_2 : y = \frac{1}{3}x + 4$ | b. $[\frac{3}{2}, 0]$ |
| 3. $f_3 : y = -8x + 9$ | c. $[6, 6]$ |
| 4. $f_4 : y = -3x + 1$ | d. $[5, -7]$ |
| 5. $f_5 : y = \frac{1}{2}x - 1$ | e. $[2, -7]$ |
| 6. $f_6 : y = 5x$ | f. $[-1, 4]$ |
| 7. $f_7 : y = 9x - 4$ | g. $[-6, -4]$ |
| 8. $f_8 : y = 6x - 9$ | h. $[-2, -10]$ |
| 9. $f_9 : y = \frac{1}{5}x - 8$ | i. $[-3, -31]$ |

Příklad 8 Pro lineární funkci h platí $h(3) = -5$, $h(-1) = 4$. Vyjádřete ji předpisem $y = ax + b$ a sestrojte její graf.

Příklad 9 Najděte předpis funkce na následujících grafech (nejprve nalezněte tangentu, poté určete posunutí grafu ve směru osy y).

Poznámka pro učitele: Tento příklad je podobně jako Příklad 6 zadáván miniaplikací. Instrukce pro žáky jsou opět v angličtině. Vzhledem k náročnosti příkladu autorka doporučuje udělat několik vzorových úloh společně na interaktivní tabuli, a pak práci zadat samostatně nebo do skupin na tabletech či mobilních telefonech.

Grafy lineárních funkcí při řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav

Příklad 10 Sestrojte graf lineární funkce $f : y = -2x + 3$ a zjistěte pak z něho, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. $-2x + 3 = 0$, | 4. $-2x + 3 \leq -5$, |
| 2. $-2x + 3 \geq 0$, | 5. $-2x + 3 > 8$. |
| 3. $-2x + 3 < 0$, | |

Příklad 11 Sestrojte grafy lineárních funkcí $g : y = x + 1$ a $h : y = -0,5x + 4$. Určete pak všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1. $x + 1 = -0,5x + 4$, | 2. $x + 1 \leq -0,5x + 4$, |
| 3. $x + 1 < -0,5x + 4$, | 4. $x + 1 \geq -0,5x + 4$. |

Příklad 12 Sestrojte graf funkce $m : y = -x + 2,5$. Z grafu pak určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| 1. $m(x) = 0$, | 4. $m(x) \leq -1$, |
| 2. $m(x) \leq 0$, | 5. $-3 \leq m(x) \leq 2$, |
| 3. $m(x) > 3$, | 6. $-7,5 < m(x) < 4,5$. |

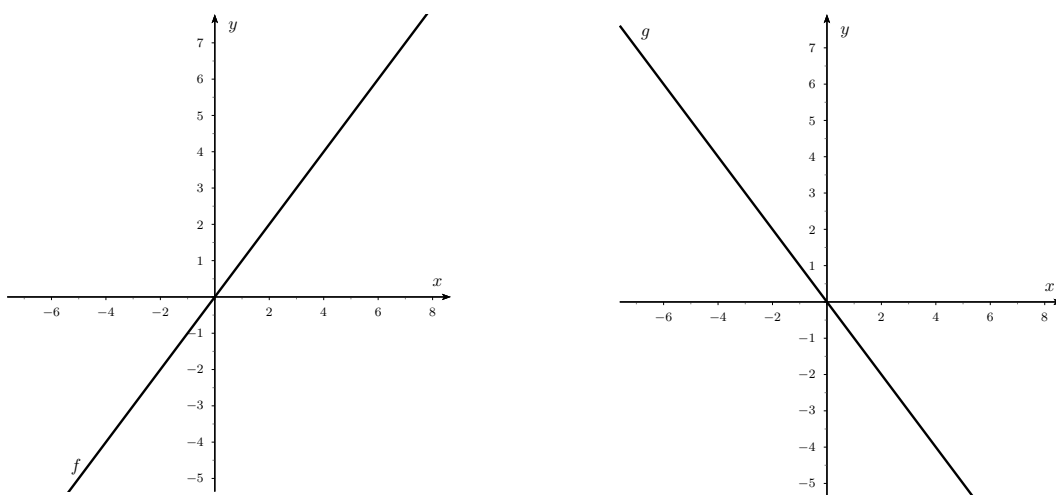
Příklad 13 Sestrojte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí $s : y = 0,5x - 2$, $t : y = -x - 1$. Z obrázku pak zjistěte, které z následujících výroků jsou pravdivé.

1. $s(0) > t(0)$,
2. $s(4) \geq t(4)$,
3. $s(-2) < t(-2)$,
4. $s(3) \leq t(3)$.

Poznámka pro učitele: Příklady 10-13 jsou vhodné k samostatné práci po nasdílení obrazovek (viz Kapitola 1). Výsledky mohou žáci opětovně zaslat učiteli pro kontrolu.

Rostoucí a klesající funkce

Podívejte se na následující dva grafy – jeden z nich je příkladem rostoucí a druhý příkladem klesající funkce. Dokážete odhadnout, který je který?



Obrázek 2.11

Určitě hned vidíme, že funkce f je rostoucí, zatímco funkce g je klesající. Uveďme si nyní přesnou definici této vlastnosti funkcí.

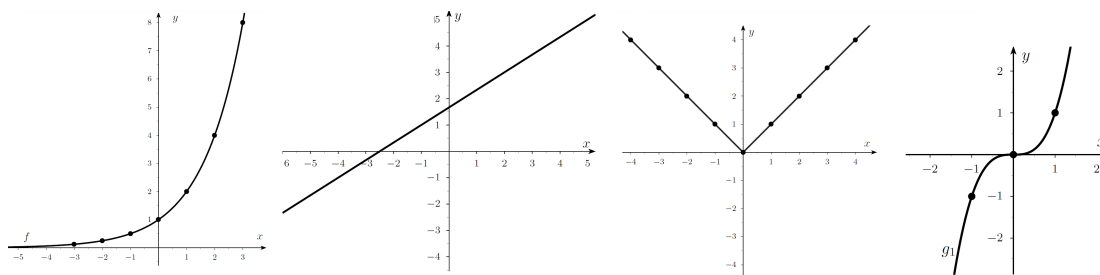
Definice 2.1.3. Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Definice 2.1.4. Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

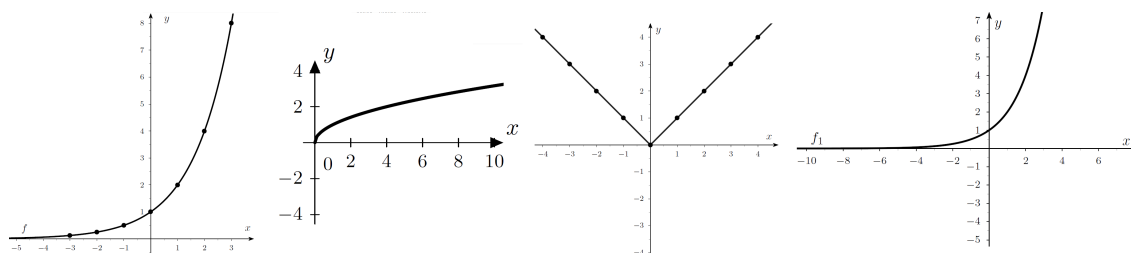
Obě funkce na předešlých grafech tedy byly prosté. To, zda je funkce prostá, můžeme snadno ověřit pomocí vodorovné přímky – rovnoběžky s osou x . Tato rovnoběžka nesmí v žádném bodě protínat graf funkce ve více než jednom bodě!

Příklad 14 Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou rostoucí a které klesající.



Obrázek 2.12

Příklad 15 Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté.



Obrázek 2.13

Příklady z praxe

Příroda je plná vztahů a závislostí, které jsou ovšem mnohem složitější, než aby tvořily přímo lineární funkci – ty najdeme především v úlohách týkajících se výtvarů člověka (celkové náklady na tisk, cena nákupu v obchodě, příjmy, investice, ...). Přesto jsou lineární modely často využívány i pro přírodní zákonitosti, a to především pro jejich zjednodušení. Pojďme si uvést několik příkladů toho, kde všude se s lineární funkcí můžeme setkat.

Koncentrace CO_2



Obrázek 2.14

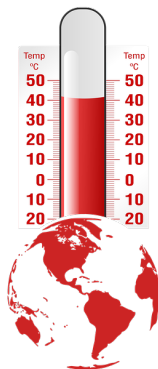
Průměrnou koncentraci oxidu uhličitého v atmosféře lze přibližně vyjádřit pomocí lineární funkce

$$C = 1,71262t - 3054,14,$$

kde C je koncentrace s jednotkou částice na milion a t čas v letech.

- Určete, jaká byla koncentrace CO_2 v atmosféře v roce 1987.
- Předpovězte hodnotu koncentrace pro rok 2020.
- Kdy bude podle tohoto modelu koncentrace $\frac{420}{10^6}$ částic?

Teplota Země



Obrázek 2.15

Nedávné studie naznačují, že průměrná teplota povrchu Země roste konstantní rychlostí. Někteří vědci zaznamenali tuto teplotu jako lineární funkci tvaru

$$T = 0,02t + 8,5,$$

kde T je teplota ve stupních Celsia a t čas od roku 1900.

- Nakreslete graf této funkce a interpretujte, co vyjadřuje průsečík jeho křivky s osou T .
- Využijte funkci k odhadnutí průměrné povrchové teploty Země v roce 2100.

Dávkování léku



Obrázek 2.16

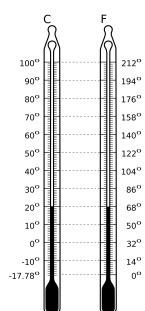
Doporučená denní dávka léku pro dospělého člověka je vyjádřena proměnnou D (v mg). Pro určení správné dávky c tohoto léku pro dítě ve věku a let lékárníci používají funkci

$$c = 0,0417D(a + 1).$$

U léků na srdeční onemocnění je doporučená denní dávka pro dospělého 200 mg.

- Načrtněte graf funkce c pro daný lék. Co představuje?
- Jaká by byla doporučená denní dávka takového léku pro novorozence s vrozenou srdeční poruchou?

Převod mezi stupni



Obrázek 2.17

Z hodin fyziky jistě víte, že pro převod mezi jednotkami teploty stupně Fahrenheit a Celsius platí vztah lineární funkce

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

- Načrtněte graf závislosti teploty ve $^{\circ}\text{F}$ na teplotě v $^{\circ}\text{C}$.
- Určete průsečík grafu funkce s osou F a interpretujte ho.

Výrobní náklady



Obrázek 2.18

Majitel obchodního domu IKEA při měsíčním účetnictví zjistil, že výroba 100 židlí za pracovní den ho přijde na 44 000 Kč a výroba 300 židlí na 96 000 Kč.

- Vyjádřete funkci lineární závislosti celkové výrobní ceny na počtu židlí a načrtněte její graf.
- Co vyjadřuje průnik grafu s osou y ?

2.2 Funkce s absolutní hodnotou

K čemu jsou absolutní hodnoty a funkce s nimi?

Pojďme si opět nejprve říct, k čemu lze absolutních hodnot a funkcí s absolutními hodnotami využít.

Mezi způsoby využití jsou v materiálech uvedeny:

- vzdálenosti na číselné ose,
- vzdálenosti ve vesmíru,
- velikost fyzikálních veličin,
- odchylky.

Příklady pro většinu z těchto aplikací uvidí žáci během následující kapitoly.

Úvodní úloha

Představte si situaci, kdy vy i váš kamarád bydlíte od školy 2 km. Vy však bydlíte na severní a kamarád na jižní stranu. Pokud bychom zvolili školu jako nulu na číselné ose, dalo by se tedy říct, že zatímco vy bydlíte v bodě 2 km, kamarád bydlí v bodě -2 km. I kvůli tomu abychom mohli zanedbat směr lze využít **absolutní hodnotu**, se kterou jste se setkali již dříve.



Obrázek 2.19

Stejně jako v předešlém příkladu, i ve vesmíru je možné měřit vzdálenosti všemi směry. Proto je vhodné vyjadřovat vesmírné vzdálenosti v absolutní hodnotě.

Připomeňme si, co vlastně absolutní hodnota znamená na následujícím příkladu:



Obrázek 2.20

Nejvyšší teplotní rekord naměřený v Saskatoonu v Kanadě byl zaznamenán 5. června roku 1988, kdy se teploty vyšplhaly na $40,6^{\circ}\text{C}$. Vůbec nejnižší teplota -50°C pak byla naměřena 1. ledna 1893.

Jaký je celkový maximální naměřený teplotní rozdíl v Saskatoonu?

Odpověď: Celkový maximální teplotní rozdíl v Saskatoonu můžeme vypočítat jako

$$-50 - 40,6 = -90,6$$

nebo

$$40,6 - (-50) = 90,6.$$

To znamená, že největší teplotní výkyvy v Saskatoonu jsou až $90,6^{\circ}\text{C}$.

Definice absolutní hodnoty

Definice 2.2.1. Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:
 je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$,
 je-li $a < 0$, je $|a| = -a$.

Příklady

Příklad 1 Vypočítejte absolutní hodnoty těchto čísel:

1. $|5, 1| =$
2. $|-0, 8| =$
3. $|-7, 2| =$
4. $|0| =$

Příklad 2 Vypočítejte:

1. $|\sqrt{2}| - |\sqrt{2}| =$
2. $|8 - 11| - |3 - 9| =$
3. $|-3, 5 - 3(-0, 8)| =$
4. $14 - |4, 6 - 5, 3| =$
5. $|-2 - |5 - 7|| =$
6. $|-|2 - 5| + |1 - 7| =$

Funkce absolutní hodnota

Víme-li jak funguje absolutní hodnota jako taková, můžeme rozbořem zjistit i jak vypadá **funkce absolutní hodnota**, tedy taková funkce, jejíž předpis má tvar

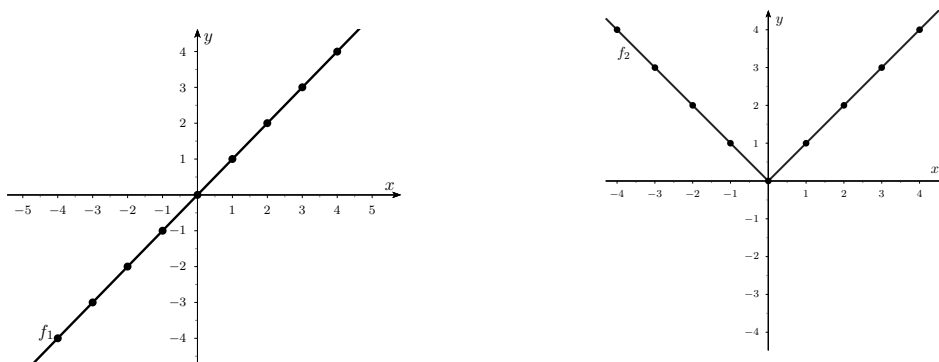
$$f(x) : y = |x|.$$

Srovnáme tuto funkci s funkcí lineární, jejíž předpis, graf i některé vlastnosti již známe:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_1 : y = x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_2 : y = x $	4	3	2	1	0	1	2	3	4

Z pohledu na tabulku je už teď jasné, že lineární funkce a funkce absolutní hodnota budou mít část grafu společnou; navíc funkce absolutní hodnota bude zřejmě symetrická, jak je vidět z jejích hodnot.

Pojďme si nyní grafy obou funkcí načrtnout:



Obrázek 2.21

Příklad 3 Z grafu funkce $f: y = |x|$ zjistěte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

1. $|x| = 2$, 2. $|x| \leq 2$, 3. $|x| > 2$.

Příklad 4 S využitím grafu funkce $g: y = |x|$ řešte v $\mathbb{R}$ tyto rovnice a nerovnice.

1. $|x| = 1,5$, 2. $|x| \geq 1,5$, 3. $|x| > 1,5$.

Grafy funkcí s absolutními hodnotami

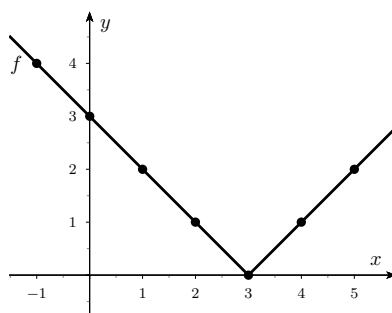
Jak sestrojíme graf náročnějších funkcí s absolutními hodnotami? Pojďme si to ukázat na příkladu funkce

$$f: y = |3 - x|.$$

Zkusme nejprve zaznačit několik hodnot této funkce do tabulky:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f: y = 3 - x $	4	3	2	1	0	1	2

Nyní zanesme tyto hodnoty do grafu:

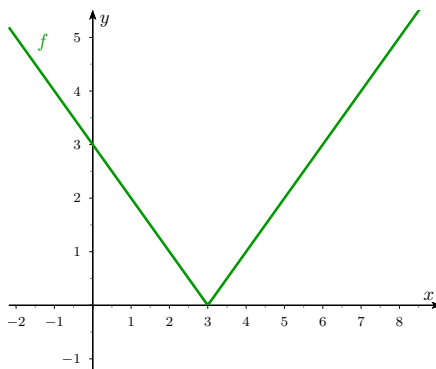


Obrázek 2.22

Vidíme, že číslo 3 uvnitř absolutní hodnoty určuje posunutí grafu funkce $f: y = |x|$ o 3 dílky po ose x . Znaménko $-$ v tomto případě znamená posunutí doprava. Sami můžete zkusit, že pro znaménko $+$ bychom posouvali o stejnou vzdálenost doleva.

Příklad 5 Rozhodněte, jak se bude chovat graf funkce $g: y = |3 - x| + 2$.

Příklad 6 Na obrázku je graf funkce $f: y = |3 - x|$. Jak se liší od grafu funkce $g: y = |x - 3|$? Zdůvodněte své tvrzení.



Obrázek 2.23

Příklad 7 Sestrojte graf funkce

$$f : y = |x - 2| + |x + 1|.$$

Jak na to?

U složitějších funkcí je třeba zvolit algebraickou analýzu. Najdeme tedy nejprve hodnoty, pro něž jsou výrazy v absolutních hodnotách rovny nule. Tyto body nám rozdělí číselnou osu na 3 intervaly; v každém z nich se můžeme „zbavit“ absolutních hodnot a určit grafy lineárních funkcí.

V intervalu $(-\infty; -1)$ jde o funkci

$$f_1 : y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1,$$

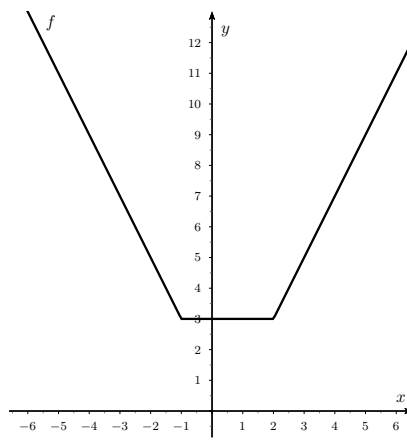
v intervalu $(-1; 2)$ o funkci

$$f_2 : y = -x + 2 + x + 1 = 3$$

a v intervalu $(2; \infty)$ o funkci

$$f_3 : y = x - 2 + x + 1 = 2x - 1.$$

Zakreslíme-li v funkce f_1, f_2 a f_3 v příslušných intervalech, dostaneme následující:



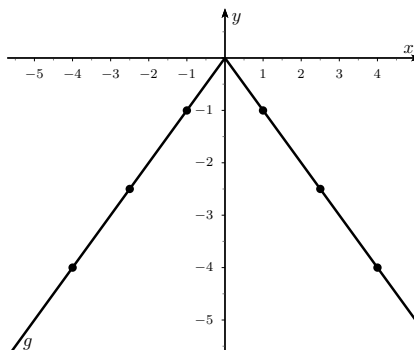
Obrázek 2.24

Příklad 8 Sestrojte graf funkce $g : y = 15 - |2 - x| - |2x - 7| - 3 \cdot |1 + x|$.

Sudá a lichá funkce

Příklad 9 Sestrojte graf funkce $g : y = -|x|$.

Vyznačte pak v něm hodnoty $g(-1)$ a $g(1)$, $g(2,5)$ a $g(-2,5)$, $g(4)$ a $g(-4)$.



Obrázek 2.25

Funkce z předchozí úlohy je příkladem tzv. sudé funkce.

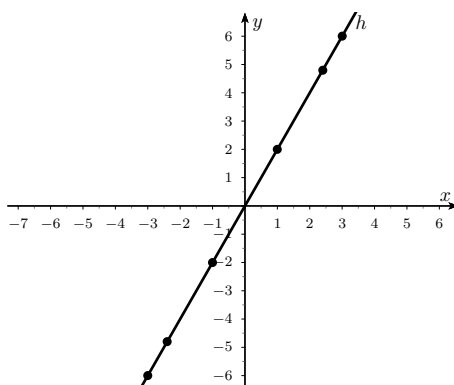
Definice 2.2.2. Funkce f se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.
2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$.

Připomeňme si, že k bodu $A[x, f(x)]$ je bodem souměrně sdruženým podle osy y bod $A'[-x, f(x)]$. Platí tedy, že **graf sudé funkce je souměrný podle osy y** .

Příklad 10 Sestrojte graf funkce $h : y = 2x$.

Vyznačte pak v něm hodnoty $h(-1)$ a $h(1)$, $h(-2, 4)$ a $h(2, 4)$, $h(3)$ a $h(-3)$.



Obrázek 2.26

Funkce z předchozí úlohy je příkladem tzv. liché funkce.

Definice 2.2.3. Funkce f se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.
2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$.

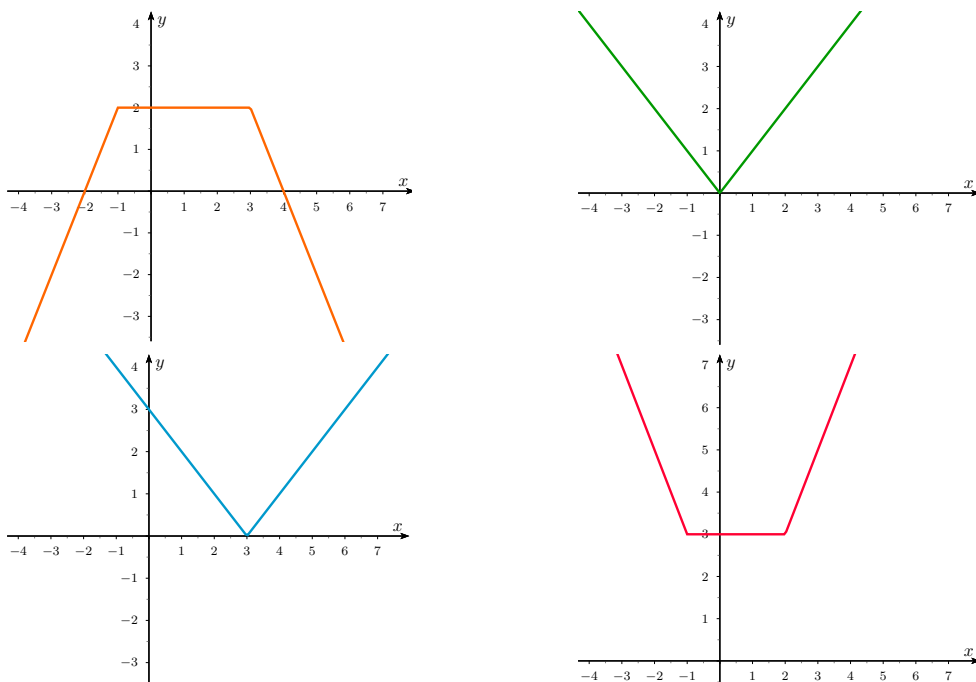
Připomeňme si, že bodem souměrně sdruženým podle počátku soustavy souřadnic k bodu $A[x, f(x)]$ je bod $A'[-x, -f(x)]$.

Graf liché funkce je tedy souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Příklad 11 Zjistěte, které z daných funkcí jsou sudé a které liché:

1. $y = 2x, x \in (-4; 5)$,
2. $y = 2 - x$,
3. $y = \frac{1}{x^3}$,
4. $y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$.

Příklad 12 Určete, které z následujících funkcí jsou sudé a které jsou liché.



Obrázek 2.27

Existuje na množině reálných čísel nějaká funkce, která by byla sudá i lichá zároveň?
Odpověď: Ano! Je to konstantní funkce $y = 0$.

Omezená funkce

V životě se často setkáváme s ukazateli, jejichž hodnoty jsou nějakým způsobem omezeny. Uvedeme si pro ilustraci příklad.



Rychlost automobilů při průjezdu obcemi je shora omezená. Obvykle nesmí být vyšší než 50 km/h.

Objasníme si, co znamená, když řekneme, že funkce je zdola omezená, shora omezená, omezená.

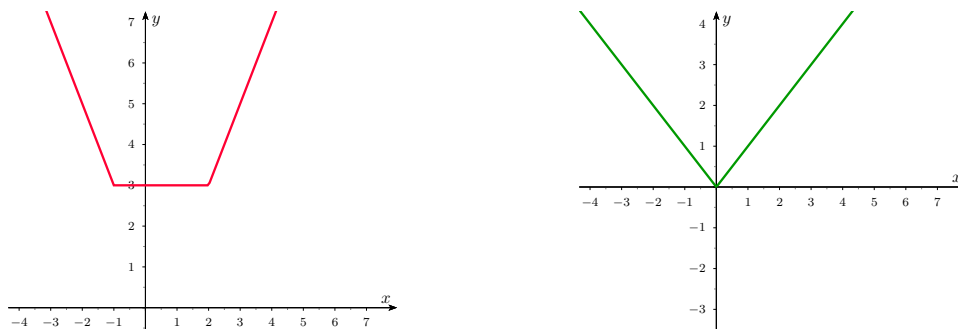
Obrázek 2.28

Definice 2.2.4. Funkce f se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená**, právě když existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq h$.

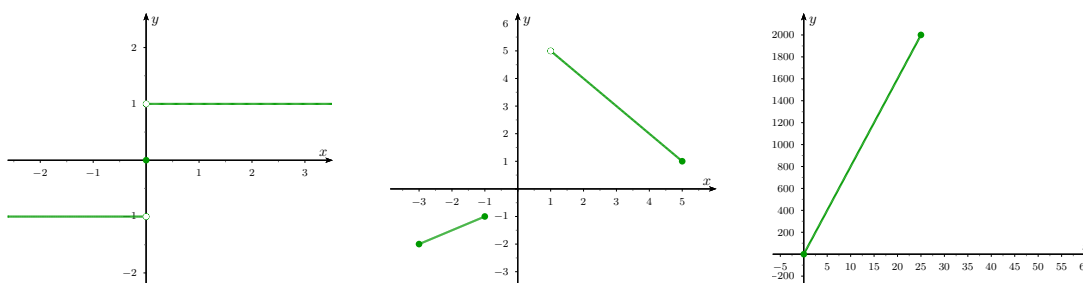
Funkce f se nazývá **omezená**, právě když je zdola omezená a zároveň shora omezená.

Příklad 13 Určete, zda jsou grafy funkcí na obrázcích shora či zdola omezené.



Obrázek 2.29

Příklad 14 Zdůvodněte, že funkce na následujících grafech jsou omezené.



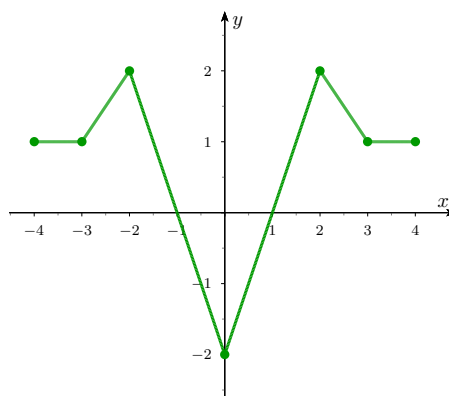
Obrázek 2.30

Příklad 15 Uveďte příklad funkce, která

1. je shora omezená, ale není zdola omezená,
2. je zdola omezená, ale není shora omezená,
3. není ani shora ani zdola omezená.

Maximum a minimum funkce

Příklad 16 Podívejte se na graf funkce na obrázku. Co všechno lze z grafu o funkci vyčíst?



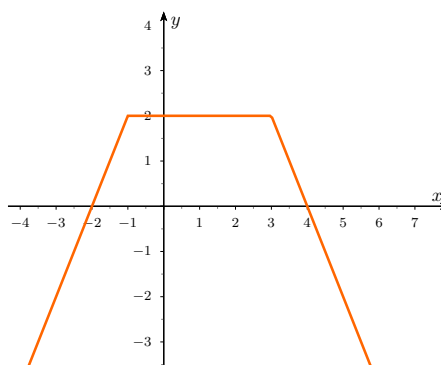
Obrázek 2.31

Definice 2.2.5. Říkáme, že **funkce f má v bodě a maximum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq f(a)$.

Říkáme, že **funkce f má v bodě b minimum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq f(b)$.

Příklad 17 Ve kterých bodech má funkce $y = |x|$ maximum a ve kterých minimum?

Příklad 18 Ve kterých bodech má daná funkce maximum a minimum?



Obrázek 2.32

Uveďte příklad funkce, která je zdola či shora omezená, ale nemá maximum ani minimum.

Odpověď: Taková funkce je omezená hodnotou, která nepatří do oboru hodnot funkce, např. $y = |x|$ na intervalu $(0; \infty)$.

Příklady z praxe

Odpor rezistoru



Obrázek 2.33

Pro elektrické součástky jako rezistor nebo kondenzátor jsou vždy specifikovány jejich parametry: odpor, elektrická kapacita, . . . Kvůli drobným odchylkám, ke kterým dochází při výrobě se však hodnoty těchto parametrů mohou lišit, a to u každého kusu jinak. Výrobci proto stanovují odchylky těchto výkyvů, například $\pm 1\%$, $\pm 5\%$, $\pm 10\%$.

Zakoupili jsme rezistor s odporem $680\ \Omega$ a odchylkou $\pm 5\%$. V jakých hodnotách můžeme očekávat, že se bude pohybovat jeho skutečný odpor?

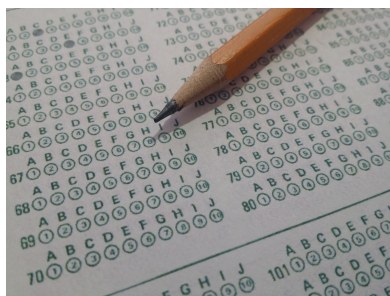
Podpora senátu



Obrázek 2.34

Procento lidí p , kteří jsou příznivě nakloněni fungování Senátu České republiky a nesouhlasí s jeho zrušením, je asi 60% s rozpětím chyby $1,5\%$. Zapište toto tvrzení pomocí absolutní hodnoty.

Výsledky testu



Obrázek 2.35

Při psaní testu z matematiky prošli pouze ti studenti, kteří měli výsledný počet bodů v rozmezí 18 bodů od meze 82 bodů.

Přepište toto tvrzení pomocí absolutní hodnoty (pro počet bodů využijte proměnnou x).

Odchylka při výrobě



Obrázek 2.36

Výrobce ložisek má pro výrobu danou mez, o kterou se můžou maximálně vychýlit jejich rozměry. Maximální vychýlení rozměrů je 0,01 cm při průměru ložiska 5 cm. Pro průměr ložiska použijte neznámou x a přepište toto tvrzení ve smyslu funkce s absolutní hodnotou.

2.3 Kvadratické funkce

K čemu jsou kvadratické funkce?

Žáci opět určitě uvítají, když budou obeznámeni s alespoň několika využitími kvadratické funkce, kterou budou dále v této kapitole probírat.

Mezi způsoby využití jsou v materiálech uvedeny:

- vrhy tělesy,
- architektura staveb,
- tvar satelitních přijímačů,
- maximální obsah,
- rozlišení obrázků v pixelech,
- zrychlení automobilu,
- trajektorie skoku.

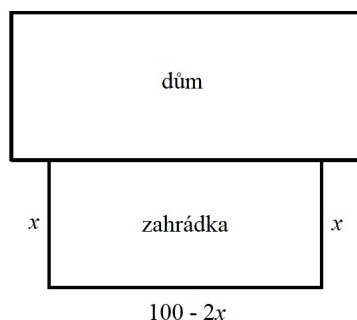
Úvodní úloha

Honza má k dispozici celkem 100 m pletiva k ohrazení zahrádky, která bude přiléhat ke zdi domu. Bohužel zapomněl, jaké si jeho maminka přála mít rozměry jahodových záhonků. Ví pouze, že zahrádka by měla mít obdélníkový tvar a co největší obsah. Jaké rozměry má Honza zvolit?

Jak začít?

Pro správné vyřešení úlohy je nesmírně důležité umět si dobře představit zadanou situaci. Do obrázku si tedy zaznačme, co víme.

Šířku zahrádky označme jako x . Víme, že jedna ze stran zahrádky přiléhá k domu, tato část se tedy nebude oplocovat. Na délku pak zahrádka musí mít $(100 - 2x)$ m, což je zbytek pletiva, které má Honza k dispozici.



Obrázek 2.37

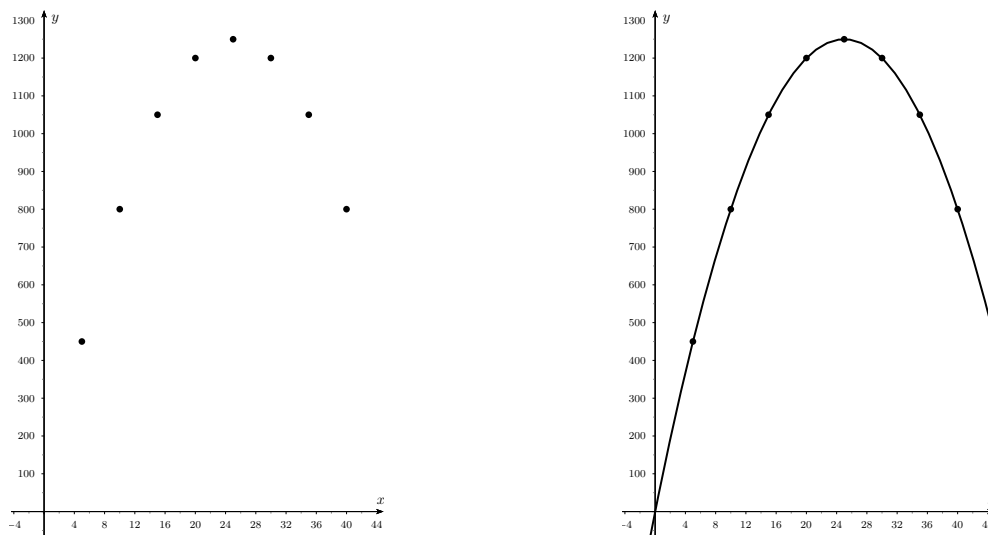
Obsah oploceného záhonku v závislosti na jeho šířce tedy můžeme vyjádřit jako $S = x \cdot (100 - 2x)$, což je po úpravě

$$S = 100x - 2x^2.$$

Jak již víme, funkci lze vyjádřit několika různými způsoby. Ze slovního zadání se nám podařilo odvodit předpis kvadratické funkce. Pojďme nyní ilustrovat tabulkou, jak se hodnoty obsahu proměňují v závislosti na šířce.

x	5	10	15	20	25	30	35	40
S	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800

Vidíme, že maximální možná hodnota obsahu, které lze dosáhnout, je $1\,250\text{ m}^2$ a nastane při šířce zahrádky 25 m. Zkusme ještě vyjádřit závislost grafem, pomocí dat z tabulky.



Obrázek 2.38

Odpověď: Pro maximální plochu zahrádky by Honza měl zvolit šířku 25 m a délku 50 m.

Definice kvadratické funkce

Definice 2.3.1. Kvadratická funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ (tj. o definičním oboru $\mathbb{R}$) daná ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$.

ax^2 nazýváme **kvadratickým členem**, bx **lineárním členem** a c **členem absolutním**.

Příkladem kvadratické funkce je funkce $y = -2x^2 + 18x$, v níž je $a = -2$, $b = 18$, $c = 0$.

Úloha Vláša si rád jen tak hází tenisovým míčkem. Vyhodí jej napřaženou rukou vzhůru ve výšce 3 m nad zemí s počáteční rychlostí 14 m/s. Jaké největší výšky míček dosáhne?

Právě vrhy, které jistě znáte z fyziky, představují typické využití kvadratických funkcí. Pokud si nepamätujete vztah pro výpočet okamžité výšky balonu v závislosti na čase, lze ji velice jednoduše odvodit.

Počáteční výška míčku, než jej Vláša vyhodí vzhůru, je 3 m. Trojka tedy bude představovat absolutní člen.

Lineární člen je dán klasickým vztahem pro dráhu rovnoměrného pohybu $s = v \cdot t$, v našem případě tedy $14t$.

Chybí nám už jen jeden, ovšem nejdůležitější člen, a to kvadratický. V něm bude vystupovat gravitační zrychlení. Jelikož gravitace působí svisle dolů, její znaménko bude záporné a hodnota $\frac{1}{2}g$. Celý kvadratický člen pak bude vypadat takto: $-5t^2$.

Získáváme funkci popisující pohyb míčku od vržení vzhůru po jeho dopad na zem:

$$h = 3 + 14t - 5t^2.$$

Po načrtnutí grafu této funkce pak lehce zjistíme maximální výšku jako maximum funkce h .

Příklady

Příklad 1 Výkon P turbíny závisí na počtu n obrátek za sekundu. Určete počet obrátek, pro nějž bude výkon maximální, víte-li, že tento výkon je vyjádřen vztahem

$$P = \alpha n - \beta n^2,$$

kde $\alpha = 0,455\,43\,\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$, $\beta = 0,001\,034\,4\,\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Příklad 2 Je dán kvádr se čtvercovou podstavou o délce hrany a cm a výšce 4 cm. Zapište funkci, která vyjadřuje

1. závislost objemu kváдру na délce hrany podstavy;
2. závislost povrchu kváдру na délce hrany podstavy.

Grafy kvadratických funkcí

S grafem kvadratické funkce jsme se, stejně jako s grafem funkce lineární, mohli setkat už při grafickém řešení kvadratických rovnic. Dokážete tento graf najít v následujících obrázcích známých staveb?



Obrázek 2.39

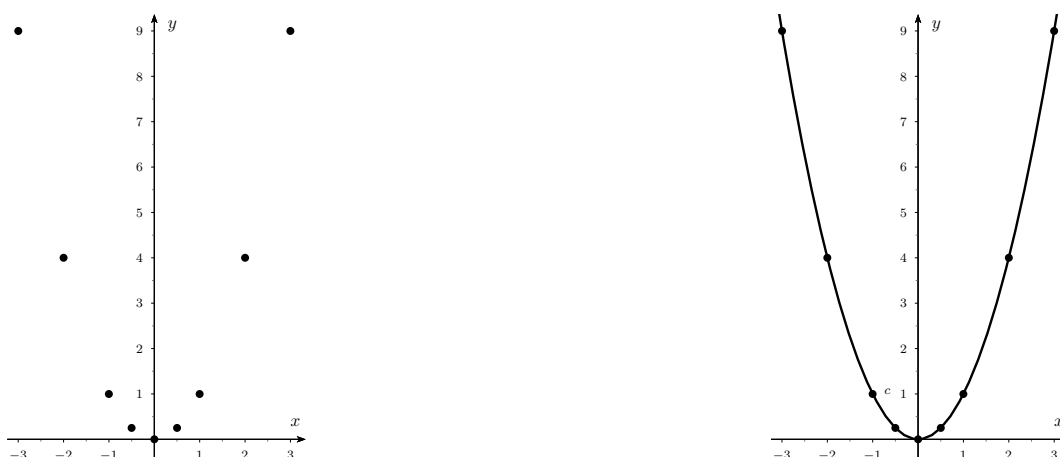
Křivka znázorněná na obrázcích se nazývá **parabola**.

Uvažujme kvadratickou funkci

$$f : y = x^2.$$

Zapišme do tabulky její funkční hodnoty v bodech -3 ; -2 ; -1 ; $-0,5$; 0 ; $0,5$; 1 ; 2 a 3 . Získané uspořádané dvojice pak vyznačíme v soustavě souřadnic O_{xy} :

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f : y = x^2$	9	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4	9



Obrázek 2.40

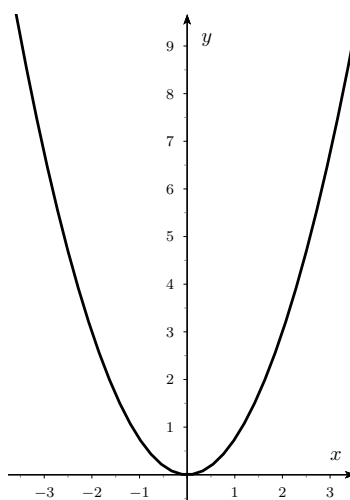
Proložíme-li jednotlivými body spojitou křivku, jedná se právě o námi hledanou parabolu.

Jaké vlastnosti kvadratické funkce poznáte z grafu paraboly $f : y = x^2$?

Odpověď: Funkce je sudá, tj. souměrná podle osy y . $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle 0; \infty \rangle$. Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0; \infty \rangle$, klesající v intervalu $(-\infty; 0)$, zdola omezená s minimem v bodě $x = 0$.

Příklad 3 Načrtněte si graf funkce $f : y = x^2$ a pak v téže soustavě souřadnic zakreslete graf funkcí $g_1 : y = \frac{1}{2}x^2$ a $g_2 : y = 2x^2$.

Příklad 4 Na obrázku je graf funkce $f : y = \frac{3}{4}x^2$. Sestrojte pomocí něho graf funkce $g_1 : y = \frac{3}{4}x^2 - 3$.



Obrázek 2.41

Příklad 5 Sestrojte graf funkce $g_2 : y = \frac{3}{4}(x+1)^2$, a to opět využitím grafu funkce $f : y = \frac{3}{4}x^2$.

Příklad 6 Sestrojte graf funkce $g_3 : y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$ pomocí grafu funkce $f : y = \frac{3}{4}x^2$.

Poznámka pro učitele: Příklady 3, 4 a 5 je opět vhodné řešit sdílením obrazovky počítače se

zadanou funkcí f do žákovských zařízení, kde si každý může zkusit vytvořit funkce g_1 , g_2 a g_3 sám a následně zaslat zpět učiteli.

Příklad 7 Sestrojte graf funkce $h: y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

Na základě příkladu 3, jak se změní tvar paraboly, budeme-li měnit koeficient kvadratického členu a (např. $y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2, \dots$)?

Odpověď: Čím větší koeficient, tím je parabola „užší“.

Na základě příkladu 4, jak se změní graf kvadratické funkce, budeme-li měnit koeficient absolutního členu c (např. $y = x^2 + 1, y = x^2 - 4, \dots$)?

Odpověď: Graf se posouvá podél osy y buď nahoru (+), nebo dolů (−).

Na základě příkladu 5, jak se změní graf kvadratické funkce, budeme-li mít závorku umocněnou na druhou, např. $y = (x + 1)^2$?

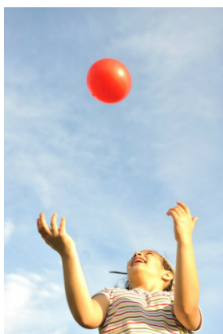
Odpověď: Graf se posouvá podél osy x buď doleva (+), nebo doprava (−).

Příklad 8 Načrtněte graf funkce $f_1: y = 1,5x^2$. Můžete ho nějak využít k sestrojení grafu funkce $f_2: y = -1,5x^2$?

Jaká je vzájemná poloha grafů funkcí $y = ax^2, y = -ax^2$ při daném $a \neq 0$?

Příklady z praxe

Let balonu



Obrázek 2.42

Balon spustíme z věže z výšky 450 m nad zemí. Pohyb, přesněji jeho momentální výška, je monitorována ve vteřinových intervalech. Přístroj určil rovnici, jíž se pohyb řídí, jako

$$h = 449,36 + 0,96t - 4,9t^2.$$

Načrtněte graf funkce h a určete, po kolika vteřinách se balon nachází ve výšce 100 m.

Štěstí a cheeseburger



Obrázek 2.43

Představte si, že jako milovníkovi cheeseburgerů by vaše štěstí záviselo na tom, kolik cheeseburgerů denně sníte, a to podle vzorce

$$h = -x^2 + 6x + 16,$$

kde h je míra štěstí a x počet zkonzumovaných cheeseburgerů.

Zakreslete graf této závislosti a zodpovězte otázky:

- Kolik cheeseburgerů musíte denně sníst, abyste dosáhli maximálního štěstí?
- Co znázorňuje průsečík grafu s osou y ?

- c) Kolik cheeseburgerů můžete za den sníst, než se stanete nešťastnými (tj. $h < 0$)?
- d) Jaká bude míra vašeho štěstí, pokud sníte 10 cheeseburgerů?

Hail Mary



Obrázek 2.44

V americkém fotbale se často může průběh hry zvrátit až v posledních vteřinách. Pokud jeden z týmů potřebuje těsně před koncem opravdu hodně bodů, mohou zvolit přihrávku Hail Mary – velmi dlouhou, ovšem s malou nadějí na úspěch.

Při jednom zápase washingtonské univerzity potřebovali hráči hodit Hail Mary na vzdálenost 73 yardů (přibližně 67 m). Pohyb míče byl při tom zaznamenán funkcí

$$h = -16t^2 + 64t + 6,$$

kde h je výška míče ve stopách a t čas ve vteřinách.

- a) 73 yardů není dlouhá vzdálenost pouze na dohození, ale také k běhu. Aby někdo z týmu dostal šanci doběhnout celou cestu přes hřiště a chytit míč ještě před jeho dopadem na zem, musí rozehrávač udržet míč ve vzduchu co nejdéle. Jak dlouho letěl míč v tomto případě?
- b) Hráči trvá přibližně 8 sekund uběhnout vzdálenost 73 yardů. Jak dlouho má rozehrávač čekat s hodem, aby měl hráč šanci míč chytit?
- c) Poté, co rozehrávač vyhodil míč, všechny kamery na stadionu s ním ztratily vizuální kontakt. Vystoupal do takové výšky, že ho nemohly zachytit. Pokud kamery mohly dosáhnout do výšky 40 stop, o kolik výš míč vystoupal?
- d) Jaké největší výšky míč dosáhl?

2.4 Lineární lomené funkce

K čemu jsou lineární lomené funkce

Znovu uvedeme několik využití lineárních lomených funkcí, díky kterým si snad žáci budou moci představit význam probíraného učiva.

Mezi vybrané způsoby využití patří

- Newtonův gravitační zákon,
- výška tónu,
- vztah mezi frekvencí a periodou kmitání,
- Boyleův-Mariottův zákon.

Úvodní úloha



Určitě už jste někdy byli na dovolené v zahraničí. Byli jste vyměnit peníze ve směnárně? Jak funguje měnový kurz?

Měnový kurz je cena jedné měny vyjádřená v jednotkách měny jiné. Typicky je tento kurz vyjádřen jako poměr dvou měn, např. v následující tabulce 1 EUR = 25,830 CZK.

Obrázek 2.45

země	měna	množství	kód	kurz
EMU	euro	1	EUR	25,830
Chorvatsko	kuna	1	HRK	3,477
Maďarsko	forint	1	HUF	0,080
Polsko	zlotý	1	PLN	6,000
USA	dolar	1	USD	22,685
Velká Británie	libra	1	GBP	29,278

Zdroj: ČNB (24. 10. 2018)

Podle tabulky ČNB můžeme 1 maďarský forint koupit už za 0,080 korun. Kolik forintů pořídíme za 1 Kč?

Odpověď: Pro zjištění této hodnoty stačí vypočíst podíl $\frac{1}{0,080} = 12,5$.

Na převráceném vztahu hodnot jsou založeny také lineární lomené funkce, které si hned vysvětlíme.

Definice lineární lomené funkce

Definice 2.4.1. Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$, vyjádřená ve tvaru

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Nepřímá úměrnost

Nejjednodušším příkladem lineární lomené funkce je funkce **nepřímá úměrnost**, se kterou jste se jistě setkali už na základní škole.

Definice 2.4.2. **Nepřímá úměrnost** je každá funkce na množině $\mathbb{R} - \{0\}$ daná ve tvaru

$$y = \frac{k}{x},$$

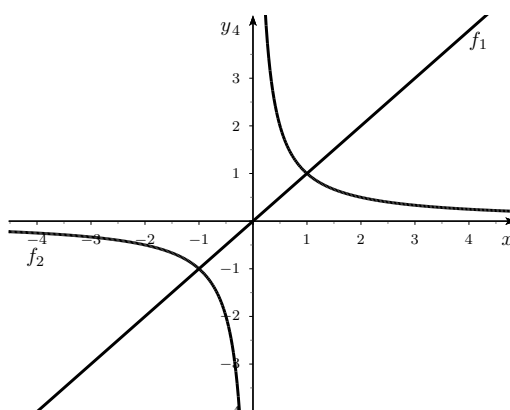
kde k je reálné číslo různé od nuly.

Tato funkce má široké uplatnění mimo jiné ve fyzice a chemii.

Graf nepřímé úměrnosti

Využijte tabulku hodnot pro načrtnutí grafů lineární funkce $f_1 : y = x$ a nepřímé úměrnosti $f_2 : y = \frac{1}{x}$ do téže soustavy souřadnic.

$f_1 : y = x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_2 : y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	nedefinováno	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



Obrázek 2.46

Pamatujte si!

Grafem každé lineární lomené funkce je tzv. **hyperbola**. V případě nepřímé úměrnosti se jedná o rovnosou hyperbolu, jakou vidíme na obrázku.

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{x}$.

Odpověď: $D(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Diskutujte, jak se funkce chová v okolí hodnoty $x = 0$ a proč.

Odpověď: Funkce se blíží $\pm\infty$.

Příklady

Příklad 1 Sestrojte grafy funkcí $g_1 : y = \frac{2}{x}$ a $g_2 : y = -\frac{2}{x}$. Mají nějaké stejné vlastnosti? V čem se liší?

Příklad 2 Načrtněte grafy těchto funkcí:

1. $f_1 : y = \frac{0,5}{x}$,

3. $f_3 : y = \frac{3}{x}$,

2. $f_2 : y = -\frac{0,5}{x}$,

4. $f_4 : y = -\frac{3}{x}$.

Příklad 3 Obdélníková parcela o rozměrech 25 metrů a 17 metrů má být vyměněna za jinou parcelu obdélníkového tvaru, která bude mít stejnou výměru, ale její šířka bude 12 metrů. Jakou délku bude mít nová parcela?

Příklad 4 Je známo, že pumpou čerpající 3,5 litru vody za sekundu by se voda ze stavební jámy vyčerpala za 30 minut.

1. Určete funkci, která vyjadřuje závislost času potřebného k vyčerpání vody z jámy na výkonu pumpy.
2. Užijte získanou funkci k určení času potřebného k vyčerpání vody, použije-li se výkonnější pumpa, která čerpá 7,8 litru vody za sekundu.
3. Jaký výkon by musela mít pumpa, aby voda byla vyčerpána nejpozději za 20 minut?

Grafy obecných lineárních lomených funkcí

Příklad 5 Sestrojte graf funkce $g : y = \frac{-3+2x}{x}$.

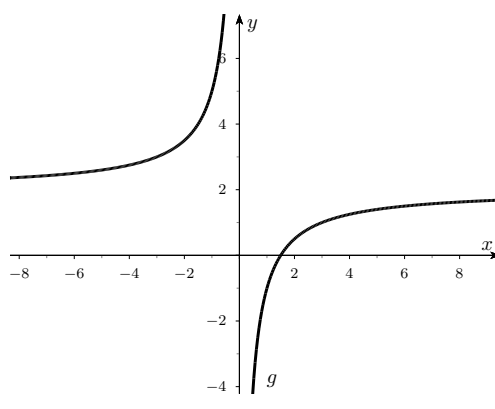
Jak upravíme tvar této funkce, abychom ji mohli znázornit do grafu?

Naším cílem je upravit předpis funkce g na tvar, který bude co nejbližší nepřímé úměrnosti. Upravujeme tedy následovně:

$$\frac{-3+2x}{x} = \frac{-3}{x} + \frac{2x}{x}.$$

Neboť x bude určitě různé od nuly, můžeme ve druhém zlomku vykrátit a získáme tak

$$\frac{-3}{x} + 2.$$



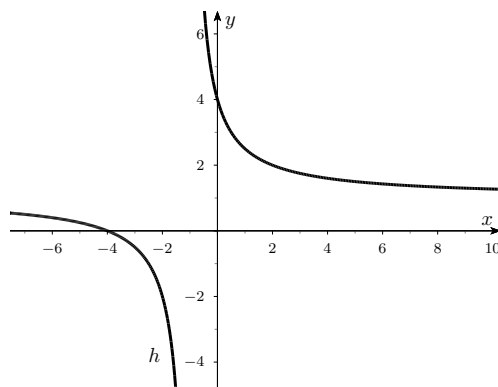
Obrázek 2.47

Stačí najít graf funkce $y = \frac{-3}{x}$ a posunout jej o 2 jednotky nahoru podél osy y .

Příklad 6 Sestrojte graf funkce $h : y = \frac{x+1}{x-2}$.

Znovu nejprve upravíme. Tentokrát bude třeba vydělit mnohočlen $x + 1$ mnohočlenem $x - 2$. Po tomto dělení dostaneme výsledek

$$(x + 1) : (x - 2) = 1 + \frac{3}{x - 2}.$$



Obrázek 2.48

Tuto funkci získáme posunutím funkce $y = \frac{3}{x}$ o jednu jednotku vlevo podél osy x a jednu nahoru podél osy y .

Na základě příkladů 5 a 6, jak se změní graf lineární lomené funkce, budeme-li měnit koeficient k (např. $f_2 : y = \frac{1}{x}$, $g_1 : y = \frac{2}{x}$, ...)?

Odpověď: Čím větší koeficient, tím jsou ramena hyperboly dále od asymptot.

Na základě předchozích dvou úloh, jak se graf této funkce změní, bude-li ve jmenovateli funkce součet proměnné a čísla, např. $h : y = \frac{3}{x+1}$?

Odpověď: Graf se posouvá podél osy x buď doprava ($-$), nebo doleva ($+$).

Na základě předchozích dvou úloh, jak se graf této funkce změní, bude-li její předpis součtem zlomku nepřímé úměrnosti a libovolného reálného čísla, např. $g : y = \frac{-3}{x} + 2$?

Odpověď: Graf se posouvá podél osy y buď nahoru ($+$), nebo dolů ($-$).

Příklady z praxe

Pohyb kyvadla



Obrázek 2.49

Pohyb kyvadla ve fyzice lze popsat hned několika vztahy, pomocí několika veličin. Například frekvence f kmitů v hertzech (Hz) je nepřímo úměrná periodě kmitání T v sekundách. Platí tedy

$$f = \frac{1}{T}.$$

- Zakreslete graf funkce f .
- Určete frekvenci kyvadla s periodou 2,5 s.

- c) Jaká je perioda kyvadla o frekvenci kmitů 1,6 Hz?

Věděli jste, že...? Mnohé, co známe o kyvadle popsal už Galileo Galilei. Jeho zájem o kyvadlo údajně vzešel z pozorování houpající se lampy v katedrále v Pise, Itálii.

Vynoření potápěče



Obrázek 2.50

Maximální čas (v minutách), po který může potápěč stoupat nahoru k hladině bez toho, aby si udělal dekompresní přestávku, je definována funkcí

$$t = \frac{525}{d - 10},$$

kde d je hloubka, ve které se potápěč nachází (v metrech).

- Načrtněte graf funkce t .
- Určete definiční obor funkce t vzhledem k zadání úlohy.
- Určete maximální dobu stoupání bez dekompresní přestávky z hloubky 40 m.
- Načrtněte do stejné soustavy souřadnic graf funkce $t = 40$. Najděte průsečík obou funkcí a interpretejte jej.

Intenzita zvuku



Obrázek 2.51

Intenzita zvuku I ve wattech na metr čtvereční je rovna 0,004násobku převrácené hodnoty druhé mocniny vzdálenosti od zdroje zvuku v metrech.

- Zapište funkci vyjadřující závislost intenzity zvuku na vzdálenosti od jeho zdroje.
- Zakreslete graf této funkce s definičním oborem pro $d > 0$.
- Jaká je intenzita zvuku klaksonu auta pro osobu stojící 5 m od něj?

2.5 Mocninné funkce

K čemu jsou mocninné funkce?

Mocninné funkce jsou poměrně rozsáhlým tématem, pod které spadají téměř všechny dosavadní kapitoly. Proto je v úvodu uvedeno pouze několik aplikací, které souvisí s vyššími mocninami tohoto typu funkce.

Mezi tyto aplikace patří:

- objemy těles,
- rychlost dopadu,
- doba volného pádu,
- moment setrvačnosti kruhu.

Úvodní úloha

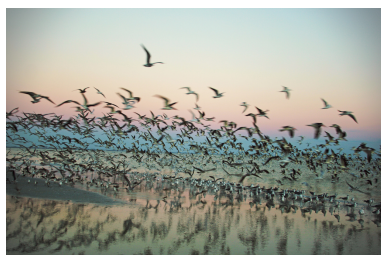
Množství ptačí populace na jistém malém ostrově v letech 2009-2013 je zaznamenána v následující tabulce:

Rok	2009	2010	2011	2012	2013
Ptačí populace	800	897	992	1 083	1 169

Růst této populace lze vyjádřit funkcí

$$P(t) = -0,3t^3 + 97t + 800,$$

kde $P(t)$ představuje velikost ptačí populace na ostrově t let po roce 2009.



Obrázek 2.52

Tento model můžeme použít, abychom odhadli, ve kterém roce dosáhne ptačí populace svého maxima a jaká bude v té době její velikost. Podobně můžeme model použít i pro odhad, kdy ptačí populace na ostrově zcela zmizí.

S pomocí programu www.desmos.com/calculator zakreslete graf funkce $P(t) = -0,3t^3 + 97t + 800$, zaznačující ptačí populaci na ostrově a určete:

- a) Ve kterém roce dosáhne ptačí populace svého maxima?
- b) Jaká bude největší možná ptačí populace na ostrově?
- c) Kdy ptačí populace z ostrova úplně zmizí?

V této kapitole se blíže podíváme na podobné, i když o něco jednodušší funkce jako je $P(t)$. Tyto funkce nazýváme **mocninné** a poznáme je podle mocniny v jejich předpisu.

Definice mocninné funkce

Definice 2.5.1. Mocninná funkce je funkce, která je vyjádřena předpisem

$$f(x) = kx^p,$$

kde $k, p \in \mathbb{R}$, k nazýváme **koeficient**.

Některé příklady takových funkcí už dávno známe, může jít například o *obsah kruhu* $A(r) = \pi r^2$, nebo *objem koule* $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Příklady

Příklad 1 Přiřaďte k předpisům známých funkcí jejich názvy. Které z těchto funkcí jsou mocninné?

1. $f(x) = x^2$
 2. $f(x) = x$
 3. $f(x) = \sqrt{x}$
 4. $f(x) = x^3$
 5. $f(x) = \frac{1}{x}$
 6. $f(x) = 1$
- kvadratická funkce
lineární funkce
funkce odmocnina
konstantní funkce
lineární lomená funkce
kubická funkce

2.5.1 Mocninné funkce s přirozeným exponentem

Mocninné funkce jsou velmi širokým pojmem a výrazně se liší podle toho, jaké číslo mají ve svém exponentu p . Budeme tedy funkce zkoumat postupně podle tohoto exponentu.

Nejprve se budeme zabývat mocninnými funkcemi

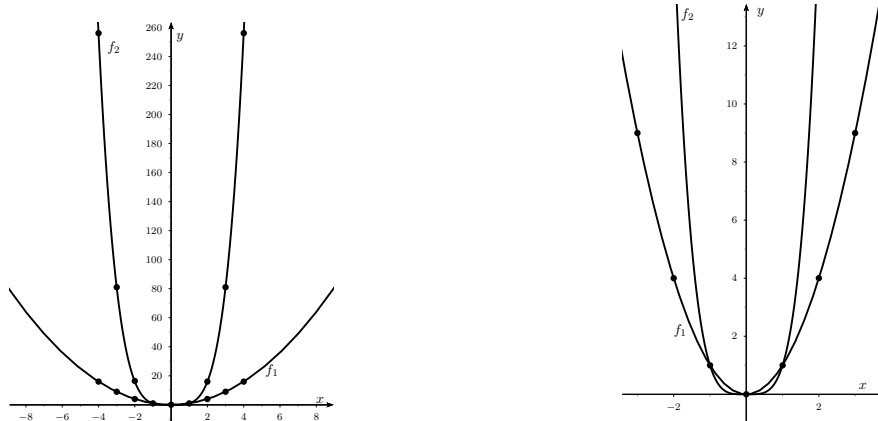
$$f(x) = kx^p,$$

kde $p \in \mathbb{N}$.

Grafy mocninných funkcí s přirozeným exponentem

Úloha Sestrojte tabulku hodnot a grafy funkcí $f_1 : y = x^2$ a $f_2 : y = x^4$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_1 : y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$f_2 : y = x^4$	256	81	16	1	0	1	16	81	256



Obrázek 2.53

Jaké jsou vlastnosti těchto funkcí?

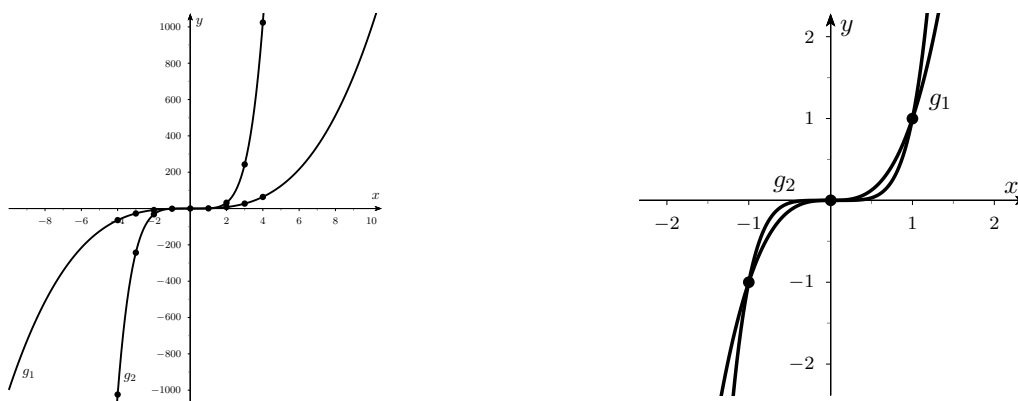
Odpověď: Obě funkce jsou sudé, klesající v intervalu $(-\infty; 0)$ a rostoucí v intervalu $(0; \infty)$. Obě funkce mají minimum v bodě $x = 0$, jsou tedy zdola omezené.

Popište, jak se navzájem liší grafy obou funkcí.

Odpověď: Oproti parabole $f_1 : y = x^2$ je graf funkce $f_2 : y = x^4$ více rozšířený v intervalu $x \in (-1; 1)$, ve zbytku definičního oboru je však oproti parabole o dost „užší“. Čím vyšší pak bude mocnina v exponentu, tím více se bude tvar grafu mocninné funkce podobat části „obdélníka“.

Úloha Sestrojte tabulku hodnot a grafy funkcí $g_1 : y = x^3$ a $g_2 : y = x^5$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g_1 : y = x^3$	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$g_2 : y = x^5$	-1 024	-243	-32	-1	0	1	32	243	1 024



Obrázek 2.54

Jaké jsou vlastnosti těchto funkcí?

Odpověď: Obě funkce jsou liché, prosté, rostoucí v celém svém definičním oboru. Nemají minimum ani maximum a nejsou shora ani zdola omezené.

Popište jak se navzájem liší grafy obou funkcí.

Odpověď: Čím větší je exponent, tím blíže je graf funkce ose y v intervalu $x \in (-1, 1)$ a tím dále je od ní na zbytku definičního oboru.

Příklad 2 Sestrojte grafy následujících funkcí.

- $f_1 : y = -x^4$,
- $f_2 : y = x^3$,
- $f_3 : y = (x+1)^4$,
- $f_4 : y = x^3 - 1$,
- $f_5 : y = x^4 + 3$,
- $f_6 : y = |x^3|$.

Jak jsme viděli už několikrát na příkladech předchozích známých funkcí, i u mocninných funkcí znamená $(x+1)^4$ posunutí doleva podél osy x o 1 jednotku a $x^4 + 3$ posunutí nahoru podél osy y o 3 jednotky.

Příklad 3 Porovnejte podle velikosti následující čísla. Můžete přitom využít grafy funkcí $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $(\frac{1}{3})^5, (\frac{1}{4})^5$,
2. $(-\frac{1}{3})^5, (-\frac{1}{4})^5$,
3. $(-0,025)^6, (-0,3)^6$,
4. $0,7^4, (-0,7)^4$,
5. $0,7^3, (-0,7)^3$,
6. $(-1)^5, (-1)^6$.

2.5.2 Mocninné funkce s celým záporným exponentem

V následující kapitole se budeme zabývat mocninnými funkcemi s předpisem

$$f(x) = kx^p,$$

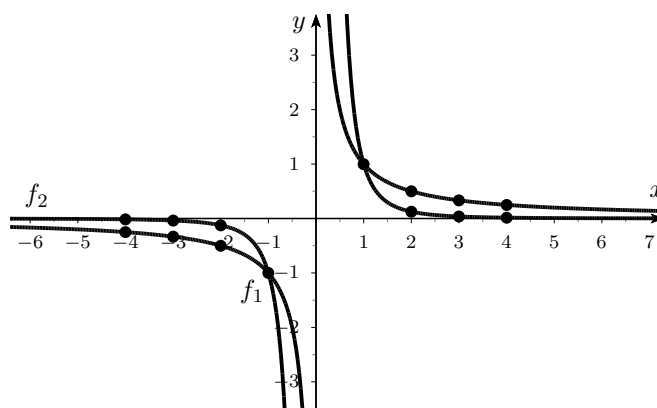
kde $p \in \mathbb{Z}^-$.

Uvědomme si nejprve, jak by vypadala funkce s nulovým exponentem. Šlo by o funkci tvaru $y = kx^0 = k$, která je funkcí konstantní. Nebudeme se jí tedy dále zabývat.

Grafy mocninných funkcí s celým záporným exponentem

Úloha: Sestrojte tabulku hodnot a grafy funkcí $f_1 : y = x^{-1}$ a $f_2 : y = x^{-3}$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_1 : y = x^{-1}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	nedefinováno	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$f_2 : y = x^{-3}$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	-1	nedefinováno	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$



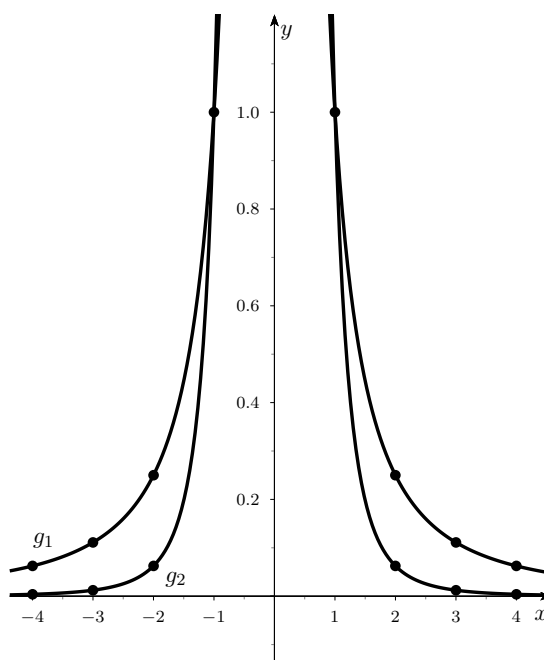
Obrázek 2.55

Jaké jsou vlastnosti těchto funkcí?

Odpověď: Obě funkce jsou liché, prosté, nejsou spojité. Obě jsou klesající v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ (nulu je potřeba z intervalů monotónnosti vyloučit, neboť není součástí definičního oboru funkce). Žádná z funkcí nemá maximum ani minimum a není shora ani zdola omezená.

Úloha Sestrojte tabulku hodnot a grafy funkcí $g_1 : y = x^{-2}$ a $g_2 : y = x^{-4}$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g_1 : y = x^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	nedefinováno	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$
$g_2 : y = x^{-4}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{16}$	1	nedefinováno	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{256}$



Obrázek 2.56

Jaké jsou vlastnosti těchto funkcí?

Odpověď: Obě funkce jsou sudé, nejsou prosté ani spojité. Jsou rostoucí v intervalu $(-\infty; 0)$ a klesající v intervalu $(0; \infty)$. Žádná z funkcí nemá maximum ani minimum, ale obě jsou zdola omezené hodnotou $y = 0$ (asymptotou).

Z předchozích dvou úloh vidíme, že grafy mocninných funkcí se zápornými celými exponenty se skládají vždy ze dvou větví.

V případě lichého exponentu se tyto větve nachází v I. a III. kvadrantu a obě části grafu jsou středově souměrné podle počátku.

V případě sudého exponentu jsou obě větve v kladné části osy y a jsou osově souměrné podle osy y .

Pozor! Poznámka o souměrnosti grafů neplatí, budou-li tyto grafy mocninných funkcí posunuty nebo jinak transformovány.

Příklad 4 Načrtněte grafy těchto funkcí.

1. $f_1 : y = 2x^{-2}$,
2. $f_2 : y = (x+2)^{-2}$,
3. $f_3 : y = \frac{1}{(x-1)^3}$.

Příklad 5 Rozhodněte, které z následujících čísel je větší.

1. $(-0,5)^{-2}$, $(0,5)^{-2}$,
2. $(-2,3)^{-3}$, $(2,3)^{-3}$,
3. $(4,8)^{-4}$, $(4,9)^{-4}$,
4. $(-4,8)^{-4}$, $(-4,9)^{-4}$.

2.5.3 Mocninné funkce s racionálním exponentem

Jako poslední se budeme zabývat mocninnými funkcemi ve tvaru

$$f(x) = kx^p,$$

kde $p \in \mathbb{Q}$.

Inverzní funkce

Připomeňme si z fyziky jednoduchý vzorec pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením a :

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Pokud dráha s představuje určitou funkci proměnné t , pak i čas t vyjádřený vztahem

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

může představovat funkci proměnné s . Tyto funkce jsou pak navzájem inverzní.

Definice 2.5.2. Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

1. $D_{f^{-1}} = H_f$.
2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

Všimněme si, že inverzní funkce existují pouze k funkcím prostým! Kdyby totiž původní funkce nebyla prostá, pak by existovala alespoň jedna dvojice různých čísel z definičního oboru, která by měla různé funkční hodnoty. Inverzní funkce by pak naopak pro jednu funkční hodnotu měla dva různé odpovídající body z definičního oboru – to je v rozporu se samotnou definicí funkce!

Úloha Při volném pádu libovolného tělesa z určité výšky platí pro jeho dráhu v libovolném čase t vztah

$$s = 0,5gt^2.$$

Vypočítejte dobu volného pádu pro $s = 20$ m.

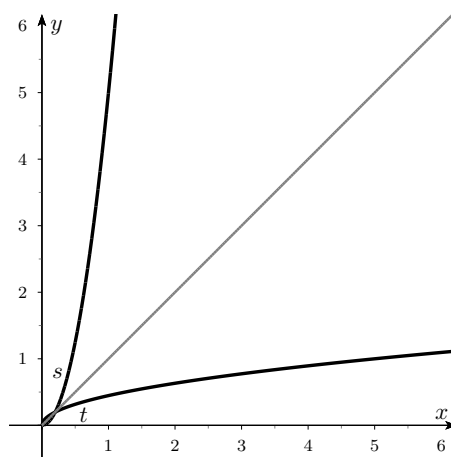
Potřebujeme najít inverzní funkci k mocninné funkci t^2 . Takovou funkci představuje funkce *odmocnina*:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Hledaný čas t pak bude roven $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2$ s.

Na stránce www.desmos.com/calculator znázorníte grafy funkcí $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ a $s = 0,5gt^2$. Určete jejich vzájemnou symetrii.

Odpověď: Grafy dvou inverzních funkcí jsou osově souměrné podle přímky $y = x$.



Obrázek 2.57

TIP: Skutečnost, že funkce odmocnina je inverzní k mocninné funkci nám může pomoci i u hledání grafů.

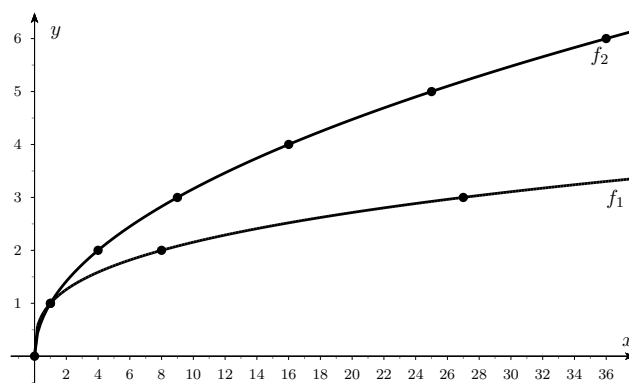
Grafy mocninných funkcí s racionálním exponentem

Sestrojte tabulky hodnot a grafy funkcí $f_1 : y = \sqrt{x}$ a $f_2 : y = \sqrt[3]{x}$.

Musíme si uvědomit, že tentokrát bude definiční obor funkce podmíněn výrazem pod odmocninou; ten nesmí být menší než nula!

x	0	1	4	9	16	25	36
$f_1 : y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6

x	0	1	8	27	64	125	216
$f_2 : y = \sqrt[3]{x}$	0	1	2	3	4	5	6



Obrázek 2.58

Příklad 6 Najděte všechny mocninné funkce $y = x^n$ s celým exponentem n , jejichž graf prochází bodem

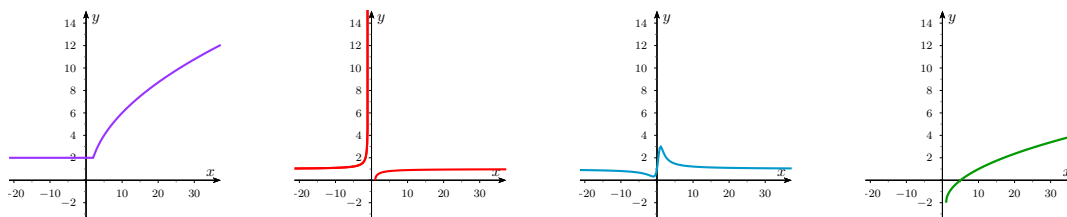
- $[2; 4]$,
- $[2; 32]$,
- $[-2; 4]$,
- $[-2; -8]$,
- $[2; 0, 25]$,
- $[1; 1]$.

Příklad 7 Zjistěte, pro která $v \in \mathbb{R}$ platí

1. $\sqrt{v^2} = v$,
2. $\sqrt{v^2} = -v$,
3. $\sqrt{v^2} = -\sqrt{v^2}$,
4. $\sqrt{v^2} = |v|$.

Příklad 8 Ke každému z grafů funkcí přiřaďte správný funkční předpis.

1. $f_1 : y = \sqrt{2(x + |x - 2|)}$,
2. $f_2 : y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,
3. $f_3 : y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$,
4. $f_4 : y = \sqrt{x-1} - 2$.



Obrázek 2.59

Příklady z praxe

Objem krabice



Obrázek 2.60

Z kartonového čtverce o straně 36 cm byla ohybem konců stran o x cm vytvořena otevřená krabice.

- a) Vyjádřete objem krabice $V(x)$ v závislosti na šířce ohybů představujících boční stěny.
- b) Určete definiční obor funkce $V(x)$.
- c) S pomocí některé stránky vykreslující grafy (např. www.desmos.com) najděte graf funkce $V(x)$ a určete, pro které x bude objem krabice maximální.

Hmotnost hrací kostky

V továrně na hračky se vyrábějí ze dřeva (s hustotou $\rho = 0,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) kostky tvaru krychle.



Obrázek 2.61

- a) Zapište funkci, která vyjadřuje závislost hmotnosti m kostky na délce a její hrany a načrtněte její graf.
- b) Jaká bude hmotnost kostky o délce hrany 4 cm?
- c) Kolikrát se zvětší hmotnost kostky, zdvojnásobí-li se délka její hrany?

Výška v závislosti na objemu

Objem V válcové nádoby o poloměru r a výšce v je roven $\pi r^2 v$.



a) Vyjádřete funkci udávající závislost v na r , víte-li, že $V = 500 \text{ cm}^3$.
Načrtněte její graf.

b) Užijte tuto funkci pro zjištění v při $r = 1,5 \text{ cm}$; $5,4 \text{ cm}$; $12,7 \text{ cm}$.

Obrázek 2.62

2.6 Exponenciální funkce

K čemu jsou exponenciální funkce?

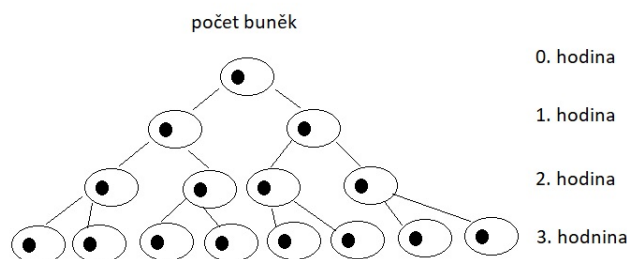
Exponenciální funkce nachází v životě četné využití, z nichž bylo pro ilustrační účely žákům vybráno těchto pět aplikací:

- růst populace,
- složené úročení,
- rozpad radioaktivního materiálu,
- atmosferický tlak v různých nadmořských výškách,
- karbonové datování v archeologii.

S několika z nich se žáci setkají později v této kapitole, v sekci Příklady z praxe.

Úvodní úloha

Jediná buňka se za podmínek příznivých pro její dělení rozmnoží na dvě identické dceřiné buňky během jedné hodiny. Po další hodině se každá z těchto dceřiných buněk také rozdělí na dvě nové identické buňky. Z jedné původní mateřské buňky se tak během pouhých dvou hodin stanou čtyři. Budou-li podmínky příznivé pro růst pokračovat, můžeme si představit, jak bude vzorec dělení pokračovat.



Obrázek 2.63

Do tabulky zanešte několik prvních hodnot pro množství buněk v prvních hodinách dělení a zkuste najít funkci proměnné t , která by určovala počet všech buněk při dělení v závislosti na uplynulém čase t .

t / hod	počet buněk
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Podíváme-li se na počty buněk v jednotlivých hodinách, vidíme, že se vyskytují v mocninách čísla 2 ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, ...). Za předpokladu, že růst buněk bude v následujících hodinách probíhat stejným způsobem tedy můžeme počet buněk v závislosti na čase vyjádřit předpisem

$$N = 2^t.$$

Funkcím, jejichž předpis má podobný tvar jako tento říkáme **exponenciální funkce**.

Definice exponenciální funkce

Definice 2.6.1. Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině $\mathbb{R}$ vyjádřená ve tvaru

$$y = a^x,$$

kde a je kladné číslo různé od 1.

Všimněme si!

Exponenciální funkce má stejně jako funkce mocninná exponent. Ale pozor! Je mezi nimi jeden velký rozdíl – v exponentu exponenciální funkce je vždy proměnná!

Příklady

Příklad 1 Závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce h (v km) lze vyjádřit přibližně vztahem

$$p = p_0 \cdot 0,88^h,$$

kde p_0 je tlak v nadmořské výšce 0 metrů; $p_0 \doteq 1,013 \cdot 10^5$ Pa.

1. Vypočítejte tlak vzduchu v nadmořské výšce 800 m, 3 000 m.
2. Vypočítejte, jaký je tlak vzduchu na vrcholcích těchto hor: Sněžka, Mont Blanc, Mount Everest.

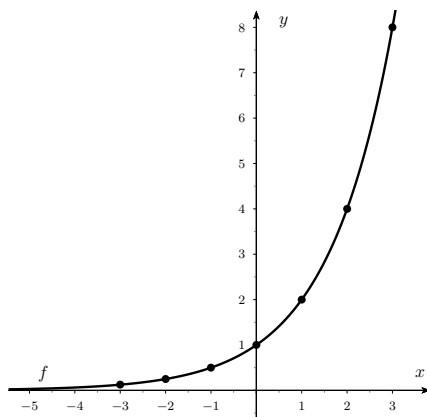
Graf exponenciální funkce

Už víme, jak vypadá předpis exponenciální funkce. Jaký je ale její graf? Zkusme do kartézské soustavy souřadnic zakreslit graf funkce $f : y = 2^x$.

Pro názornost začneme tabulkou obsahující alespoň některé z hodnot.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f : y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

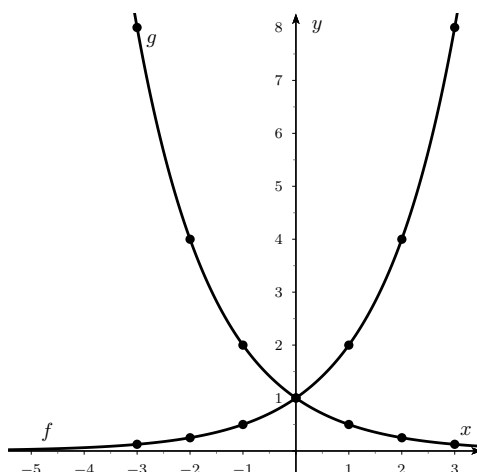
Hodnoty z tabulky zakreslíme jako jednotlivé body do grafu. Těmito body posléze proložíme křivku.



Obrázek 2.64

Do stejné soustavy souřadnic nyní zakresleme graf funkce $g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f : y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Obrázek 2.65

Jaké jsou vlastnosti obou funkcí z předchozích grafů? Najděte společné znaky.

Odpověď: Grafy funkcí f a g jsou osově souměrné podle osy y . Oba grafy mají jedinou horizontální asymptotu, a to osu x . Oba grafy protínají osu y v bodě $[0; 1]$. Obě funkce jsou omezené zdola, ale nemají minimum. Obě funkce jsou prosté.

Jedna z funkcí je rostoucí, druhá klesající. Podle čeho poznáme monotónnost?

Odpověď: Je-li základ exponenciální funkce větší než 1 (tedy např. funkce $y = 2^x$), je funkce rostoucí. Naopak pro základ z intervalu $(0; 1)$ (např. funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$) je funkce klesající.

Protože exponenciální funkce je vždy prostá, existuje k ní i funkce inverzní. Té se budeme podrobněji věnovat v příští kapitole.

Příklad 2 V téže soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí

1. $f_1 : y = 2^x$ a $f_2 : y = 3^x$,
2. $g_1 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $g_2 : y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Příklad 3 Načrtněte grafy následujících funkcí:

1. $h_1 : y = 3^{x+1}$,
2. $h_2 : y = 2^x + 3$,
3. $h_3 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$.

Na příkladech 2 a 3 jsme si názorně vyzkoušeli různé transformace grafů exponenciálních funkcí. Pojďme si stručně shrnout, co jsme se dozvěděli:

- čím větší je základ exponenciální funkce pro $a > 0$, tím strměji její graf stoupá; pro $0 < a < 1$ graf klesá čím strměji, čím menší je základ;
- výraz $x + 1$ v exponentu exponenciální funkce znamená posunutí podél osy x vlevo o 1 jednotku; výraz $x - 1$ znamená naopak posunutí vpravo;
- přičteme-li k exponenciální funkci libovolné reálné číslo, znamená to posunutí grafu podél osy y .

Příklad 4 Na základě vlastností exponenciální funkce určete, které z následujících mocnin jsou větší než jedna, rovny jedné, menší než jedna:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}, 2, 18^{0,1}, 0,45^{0,4}, \left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{1,001}}, \left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2}.$$

Příklad 5 Rozhodněte, zda jsou pravdivé výroky:

1. $\left(\frac{6}{7}\right)^{2,5} < \left(\frac{6}{7}\right)^{2,4}$,
2. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,4} < \left(\frac{4}{3}\right)^{1,3}$.

Příklad 6 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

1. $2^x = 4$,
2. $3^x = \frac{1}{81}$,
3. $3^{3x-1} = 1$,
4. $81^{-x} = 27$,
5. $3^{5-x} = 3^{4+x}$.

Jak řešit exponenciální rovnice?

Obě strany rovnice se snažte s použitím známých **pravidel o počítání s mocninami** převést na výrazy se **stejnými základy**.

Protože exponenciální funkce je funkcí prostou, můžeme z porovnání výrazů se stejnými základy přejít k **porovnání jejich exponentů**.

Přirozená exponenciální funkce

Speciální postavení mezi exponenciálními funkcemi má funkce o základu e , tzv. **Eulerově čísle**

$$e \doteq 2,71828\dots$$

Taková funkce se nazývá **přirozená exponenciální funkce** a je hojně využívána téměř ve všech přírodních vědách, jak uvidíme později v aplikačních příkladech.

Příklad 7 Nakreslete graf funkce $y = e^x$.

Příklady z praxe

Složené úročení

Předpokládejme, že uložíme do banky částku P s roční úrokovou mírou r , úročenou jedenkrát do roka:

$$\begin{array}{lll} \text{rok } 0 & \dots & P \\ \text{rok } 1 & \dots & P_1 = P + P \cdot r = P(1+r) \\ \text{rok } 2 & \dots & P_2 = P_1 + P_1 \cdot r = P_1(1+r) = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2 \\ \text{rok } 3 & \dots & P_3 = P_2 + P_2 \cdot r = P_2(1+r) = P(1+r)^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{rok } t & \dots & P_t = P(1+r)^t \end{array}$$

Počítáme-li s úročením vícekrát do roka, např. n -krát, změní se předpis takto:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt},$$

kde A je zůstatek na účtu, $\frac{r}{n}$ úroková míra, n počet úročení do roka, t počet let.

Pozor! Uvědomme si, že za r , n i t dosazujeme pouze přirozená čísla – neexistuje tedy spojitý graf této funkce!



Obrázek 2.66

Částka \$12 000 byla investována s ročním úrokem 9 %. Jaký bude zůstatek na účtu po 5 letech, jestliže jde o účet s
a) čtvrtletním úročením, b) měsíčním úročením?

Radioaktivní rozpad



Obrázek 2.67

V roce 1986 došlo v bývalém Sovětském svazu k nehodě reaktoru jaderné elektrárny Černobyl. Výbuch roznese vysoce radioaktivní chemikálie, jako např. plutonium, do vzdálenosti více než 250 km². Města v této a přilehlých oblastech byla evakuována.

Abychom pochopili, proč zůstávají dodnes opuštěná, musíme uvážit model

$$P = 4,5 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{24100}},$$

který určuje množství zbylého plutonia P v uvedených oblastech (z původních 4,5 kg) v závislosti na uplynulých letech t (přitom $t_0 = 1986$).

Kolik z původních 4,5 kg plutonia bylo v okolí Černobylu ještě v roce 2018?
Kolik ho na místě zbude po 100 000 letech od výbuchu?

Populační růst Kalifornie



Obrázek 2.68

Pro předpokládaný růst populace Kalifornie mezi lety 2015-2030 byl vytvořen přibližný model

$$P = 34,696e^{0,0098t},$$

kde P je množství obyvatel v milionech, t čas v letech (přitom $t = 15$ pro rok 2015).

- Spočítejte předpokládaný počet obyvatel pro rok 2018 a porovnejte na internetu s nejnovějším sčítáním.
- Kdy podle daného modelu překročí populace Kalifornie 50 milionů?

Vstřebávání léku

Obrázek 2.69

Při vpravení látky do žíly injekční stříkačkou je její počáteční koncentrace v krvi $300 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$. Každou hodinu klesne počáteční koncentrace na 75 % koncentrace v hodině předchozí.

- a) Najděte model pro koncentraci látky $C(t)$ v závislosti na čase t v hodinách.
- b) Určete, kolik látky zbude v krvi člověka po 8 hodinách.

2.7 Logaritmické funkce

K čemu jsou logaritmické funkce?

Podobně jako funkce exponenciální jsou i logaritmické funkce v praxi často využívány. Pro názornost k čemu problematika logaritmů, funkcí a rovnic s nimi slouží byly vybrány následující aplikace:

- modely lidské paměti,
- síla a intenzita zemětřesení,
- určení pH,
- výpočty složitějších exponenciálních rovnic.

Úvodní úloha



Obrázek 2.70

Z kapitoly Exponenciální funkce už známe úrokování. Představme si, že investujeme $P_0 = \$1\,000$ s roční úrokovou mírou 8 %, která bude úročena neustále. Pro takový případ využíváme vzorec

$$A = Pe^{rt}.$$

Jak dlouho bude trvat, než budeme mít na účtu \$5\,000?

Po dosazení za známé hodnoty proměnných získáváme rovnici

$$5000 = 1000e^{0,08t},$$

po úpravě

$$5 = e^{0,08t}.$$

Jak z této rovnice vyjádřit t , to zatím nevíme. Pokud bychom však našli funkci inverzní k funkci e^t , mohli bychom ji aplikovat na obě strany rovnice a tu tak vyřešit.

Definice logaritmické funkce

Protože funkce exponenciální je prostá, samozřejmě k ní existuje inverzní funkce. Taková funkce se nazývá **logaritmická**.

Definice 2.7.1. Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci

$$y = a^x,$$

kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné.

Logaritmus čísla

Definice 2.7.2. Logaritmus čísla r o základu a je takové číslo v , pro které platí $a^v = r$:

$$\log_a r = v, \text{ právě když } a^v = r.$$

Rovnice $y = \log_a x$ a $x = a^y$ jsou tedy dva různé zápisy stejné situace – první ve formě logaritmu, druhý jako exponenciální funkce.

Například logaritmická rovnice $\log_3 9 = 2$ může být přepsána ve formě exponenciální rovnice $3^2 = 9$ a naopak, zápis $3^2 = 9$ můžeme převést na rovnici $\log_3 9 = 2$.

Ve speciálním případě, je-li základ logaritmu $a = 10$, nazýváme logaritmus **dekadickým logaritmem** a značíme $\log r$.

Příklady

Příklad 1 Přiřaďte k logaritmům správné výsledky:

1. $\log_2 32$, 2. $\log_4 2$, 3. $\log_3 1$, 4. $\log \frac{1}{100}$.

Nezapomeňte! Logaritmus je exponent. To znamená, že pro výpočet výrazu $\log_a x$ se musíme ptát: „Na kolikátou musíme umocnit a , abychom dostali x ?“

Příklad 2 Zjistěte definiční obory následujících funkcí.

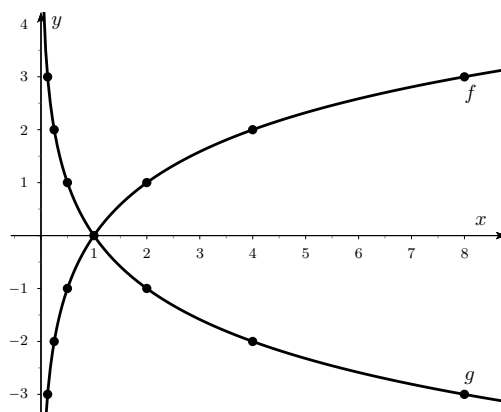
1. $f_1 : y = \log(x + 3)$, 3. $f_3 : y = \log_5 \sqrt{x - 4}$,
2. $f_2 : y = \log_{0,5}(-x)$, 4. $f_4 : y = \sqrt{\log_3 x}$.

Graf logaritmické funkce

Už víme, jak vypadá logaritmus a logaritmická funkce. Jak však vypadá graf této funkce?

Úkol Pomocí tabulky zanešte do téže souřadné soustavy grafy funkcí $f : y = \log_2 x$ a $g : y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f : y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g : y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



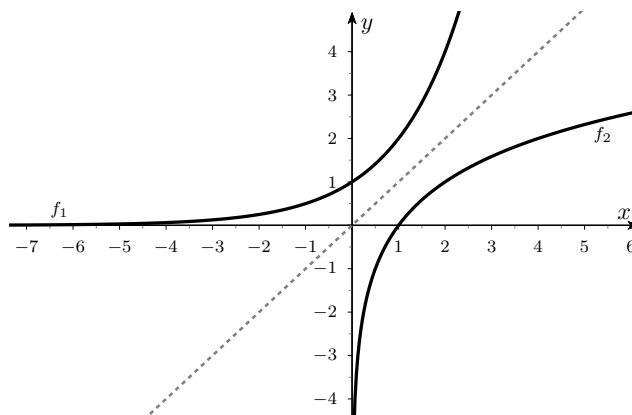
Obrázek 2.71

Jaké jsou průsečíky grafů funkcí se souřadnými osami?

Odpověď: Pouze průsečík s osou x : $[1; 0]$.

Úkol Ověřte, že funkce $f_1 : y = 2^x$ a $f_2 : y = \log_2 x$ jsou navzájem inverzní, tj. že jejich grafy jsou osově souměrné podle osy $y = x$.

Vidíme okamžitě po zakreslení obou funkcí do stejné souřadné osy:



Obrázek 2.72

Příklad 3 Označte pravdivé výroky:

1. $\log_3 5 < \log_3 8$,
2. $\log_{0,5} 7 \leq \log_{0,5} 8$,
3. $\log_3 10 > \log_{\frac{1}{3}} 10$,
4. $\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6$.

Příklad 4 Určete, zda jsou uvedená čísla kladná nebo záporná.

1. $\log_{0,5} 6$,
2. $-\log_{14} 11$,
3. $\log_7 8$.

Přirozený logaritmus

Podobně jako u exponenciálních funkcí, i u logaritmů má zvláštní postavení základ Eulerova čísla e . Takové logaritmy nazýváme **přirozené logaritmy** a obvykle je značíme $\ln x = \log_e x$.

Funkce obsahující přirozený logaritmus pak nazýváme **přirozené logaritmické funkce** a značíme $y = \ln x$. Tyto funkce mají opět velké využití, jak uvidíme v sekci Příklady z praxe.

Příklad 5 Najděte definiční obor následujících funkcí.

1. $f(x) = \ln(x - 2)$,
2. $g(x) = \ln(2 - x)$,
3. $h(x) = \ln x^2$.

Věty o logaritmech

Jak pracovat se složitějšími logaritmy? Na předchozích příkladech už jsme si všimli platnosti následujících tvrzení:

1. $\log_a 1 = 0$, neboť $a^0 = 1$,
2. $\log_a a = 1$, neboť $a^1 = a$,
3. $\log_a a^x = x$,
4. $a^{\log_a x} = x$,

$$5. \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y.$$

Pro úpravu složitějších logaritmů je důležité znát také následující tři věty:

Pro každé $a > 0, a \neq 1$ a pro všechna kladná reálná čísla r, s je

$$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s.$$

„Logaritmus součinu dvou kladných čísel je roven součtu logaritmů jednotlivých čísel.“

Pro každé $a > 0, a \neq 1$ a pro všechna kladná reálná čísla r, s je

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s.$$

„Logaritmus podílu dvou kladných čísel je roven rozdílu logaritmů dělence a dělitele.“

Pro každé $a > 0, a \neq 1$, pro všechna $r \in \mathbb{R}^+$ a pro všechna $s \in \mathbb{R}$ je

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r.$$

„Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu mocnitele a logaritmu základu mocniny.“

Příklad 6 S pomocí zmíněných vět a pravidel vypočtěte:

$$1. \log_4 16^{-0,5},$$

$$3. \log_5 10 + \log_5 12,5,$$

$$2. \log 1500 - \log 15,$$

$$4. \log_2 8 - 4 \cdot \log_2 2 + \log_2 32.$$

Příklad 7 Vraťme se nyní k úvodnímu příkladu se složeným úročením, kde čas pro zisk částky \$5 000 na účtu byl dán rovnicí

$$5 = e^{0,08t}.$$

Spočtěte čas t , za který požadované částky dosáhneme.

Obě strany rovnice tzv. zlogaritmuje – připseme logaritmus o vhodném základu. Dostaneme tedy

$$\ln 5 = \ln e^{0,08t},$$

$$\ln 5 = 0,08t,$$

$$t = \frac{1}{0,08} \ln 5,$$

$$t = 12,5 \cdot \ln 5.$$



Věděli jste, že...?

John Napier, skotský matematik, objevil logaritmy na přelomu 16. a 17. století. Ulehčil tím náročné a únavné výpočty tehdejší doby. Logaritům věnoval celých 20 let práce!

Obrázek 2.73

Příklady z praxe

Model lidské paměti



Obrázek 2.74

Studenti účastníci se psychologického experimentu navštívili několik přednášek na dané téma a posléze skládali test. Každý měsíc v následujícím roce po absolvování přednášek byli znovu testováni pro zjištění, kolik informací si zapamatovali. Průměrné skóre celé skupiny je dáno modelem

$$f(t) = 75 - 6 \ln(t + 1), \quad 0 \leq t \leq 12,$$

kde t je čas v měsících.

- Jaké bylo průměrné skóre skupiny bezprostředně po absolvování přednášek (pro $t = 0$)?
- Jakého průměrného výsledku studenti dosáhli po 2 měsících?
- Jakého průměrného výsledku studenti dosáhli po 6 měsících?

Intenzita zvuku



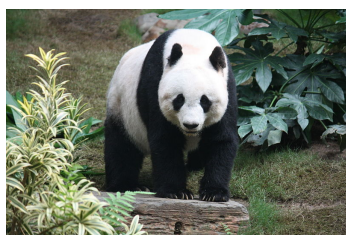
Obrázek 2.75

Vztah mezi počtem decibelů β a intenzitou zvuku I v jednotkách $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ je dán rovnicí

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right).$$

- Určete počet decibelů zvuku o intenzitě $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
- Určete počet decibelů zvuku o intenzitě $10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
- Intenzita zvuku v případě a) je 100x větší než v případě b). Je i počet decibelů 100x větší? Vysvětlete.

Ohrožená zvířata



Obrázek 2.76

Nárůst počtu ohrožených druhů zvířat v USA v letech 1990-2002 je dán modelem

$$y = -119 + 164 \ln t, \quad 10 \leq t \leq 2,$$

t udáváno v letech ($t \in \langle 10; 1990 \rangle$).

Ve kterém roce dosáhl počet ohrožených druhů čísla 357? Kolik jich je dnes?

Magnituda zemětřesení



Obrázek 2.77

Intenzita zemětřesení I v Richterově škále je dána rovnicí

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

kde R je magnituda zemětřesení, $I_0 = 1$ je minimální intenzita užívaná pro srovnání.

Najděte intenzity následujících zemětřesení:

- Puebla, Mexiko, 2017: $R = 7,1$,
- severní Sumatra, 2004: $R = 9,3$.

Kapitola 3

Posloupnosti

3.1 Úvod do posloupností, Aritmetická posloupnost

Úvod do posloupností

Mnoho vzorů v přírodě se řídí určitou sekvencí, posloupností.

Posloupnost si můžeme představit jako sérii po sobě jdoucích členů, které mezi sebou mají nějaký vztah. Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem jsou pouze přirozená čísla.



Obrázek 3.1

Definice posloupnosti

Definice 3.1.1. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel, se nazývá **(nekonečná) posloupnost**, označujeme

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Podobně jako funkce, i posloupnosti můžeme vyjadřovat několika způsoby:

- a) vyjmenováním několika po sobě jdoucích členů:

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, \dots,$$

- b) vzorcem pro n -tý člen posloupnosti (podle něj pak po dosazení libovolného přirozeného čísla můžeme vypočítat hodnotu členu v tomto pořadí):

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty},$$

- c) rekurentně (vzorcem, který určuje jak vypočíst libovolný člen z jednoho či více předcházejících členů):

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příkladem velmi známé a významné posloupnosti je **Fibonacciho posloupnost**, která je zadána rekurentně:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 1, a_2 = 1.$$

Jejích několik prvních členů je tedy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

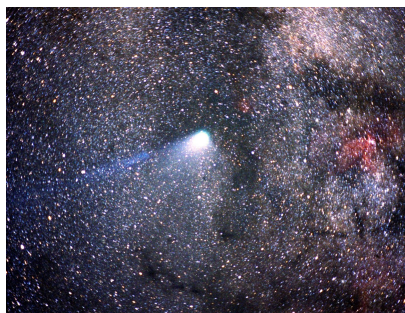
Podle Fibonacciho posloupnosti se řídí růst populace králíků, uspořádání řad semínek v květu slunečnice i tvar tzv. Fibonacciho „zlaté“ spirály připomínající ulitu.

K čemu jsou aritmetické posloupnosti?

Podobně jako pro téma funkcí začíná i v kapitole posloupností každý materiál stručnou motivací, kde všude lze danou posloupnost využít. V případě aritmetické posloupnosti byly vybrány následující aplikace:

- výskyt Halleyovy komety,
- periodické děje,
- pyramidové tvary,
- uhlovodíkové vazby.

Věděli jste, že...?

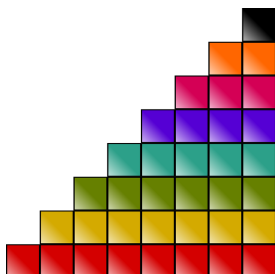


Obrázek 3.2

Jak určitě všichni víme, komety jsou malá vesmírná tělesa tvořená především ledem a prachem, známá pro své nápadné ohony.

Jedna z těchto komet byla ze Země pozorovatelná v letech 1531, 1607 a 1682. V roce 1705 anglický matematik a astronom **Edmund Halley** úspěšně předpověděl její návrat v roce 1758. Na jeho počest byla tato kometa pojmenována Halleyova. Roky, ve kterých je **Halleyova kometa** ze Země pozorovatelná přibližně tvoří členy aritmetické posloupnosti.

Úvodní úloha



Obrázek 3.3

Architekt navrhl pro novou koncertní budovu barevné schodiště složené z různě barevných kostek, jak je vidět na obrázku.

Nejvyšší z osmi schodů je tvořen jedinou černou kostkou, předposlední ze schodů je tvořen dvěma kostkami, pod ním jsou kostky tři atd.

- a) Kolik kostek tvoří nejnižší ze schodů?

- b) Kolik kostek by tvořilo nejnižší ze schodů, pokud by schodiště bylo tvořeno 10 schody, tj. architekt by přidal do návrhu patro z bílé a modré barvy?
- c) Navrhněte způsob jak spočítat počet kostek pro 12., 20., 25. schod.

Definice aritmetické posloupnosti

Kostky ve schodišti z předchozí úlohy, podobně jako roky, kdy se objevuje pro obyvatele Země Halleyova kometa, tvoří členy tzv. **aritmetické posloupnosti**.

Definice 3.1.2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d , že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti.

Vzorec pro n -tý člen

V úvodní úloze jsme si ukázali, jak se vypočte libovolný člen aritmetické posloupnosti, známe-li její první člen a diferencí. Tento postup pro výpočet n -tého členu můžeme shrnout následující větou:

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Příklady

Příklad 1 Rozhodněte, zda je posloupnost tvořená členy 10, 16, 22, 28, ... aritmetická. Pokud ano, spočítejte její šestý člen.

Příklad 2

1. Najděte 9. člen aritmetické posloupnosti, jejíž první dva členy jsou 2 a 9.
2. Čtvrtý člen aritmetické posloupnosti je 20, třináctý člen 65. Napište prvních 11 členů této posloupnosti.

Příklad 3



Růst dítěte ovlivňuje mnoho faktorů. Podle odborníků by dítě ve věku 3-10 let mělo ročně vyrůst přibližně o 5 cm. Předpokládejte, že dítě má ve věku 3 let výšku 70 cm.

1. Napište vzorec závislosti výšky tohoto dítěte na jeho věku.
2. Spočítejte, do jaké výšky by mělo toto dítě vyrůst ve věku 10 let.

Obrázek 3.4

Příklad 4

Obrázek 3.5

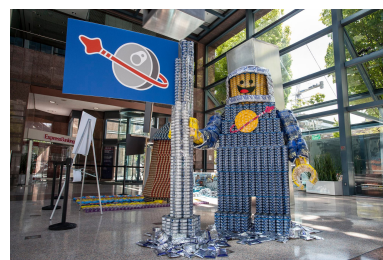
Příklad 5

Obrázek 3.6

CANstruction Vancouver

Skládání plechovek nemusí být nuda!

V listopadu 2018 se ve Vancouveru v Kanadě konal už 14. ročník charitativní akce, výstavy a soutěže CANstruction. Té se účastní týmy architektů, inženýrů, výtvarníků i studentů, kteří tvoří sochy z malých plechovek od jídla.



Obrázek 3.7

Příklad 6 Na obrázku je znázorněn graf aritmetické posloupnosti.

1. Napište prvních 5 členů této posloupnosti.
2. Sestavte vzorec pro n -tý člen posloupnosti.
3. Určete 50. a 200. člen posloupnosti.

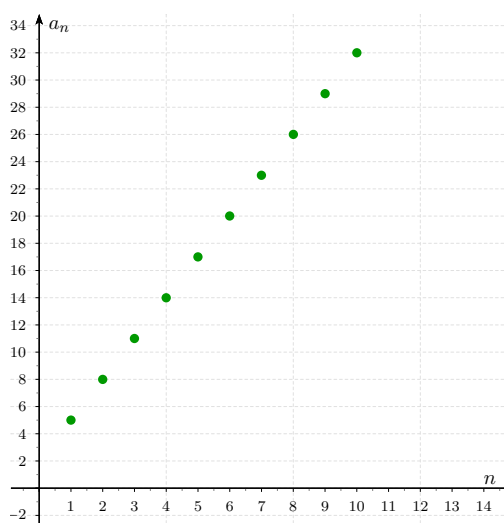
Pižmoň severní je druh savce žijící ve stádech převážně v arktických oblastech severní Kanady. Poté, co v 19. století téměř vyhynuli, se počet pižmoňů od roku 1955 opět zvyšuje. Na Banksově ostrově, jednom z největších a nejzápadněji položených kanadských arktických ostrovů, jich v roce 1955 bylo přibližně 9 250, v následujících letech se pak jejich počet zvyšoval o 1 650 kusů za rok.

Ve kterém roce dosáhla populace pižmoňů severních na Banksově ostrově 100 000 za předpokladu, že tento konstantní nárůst pokračoval?

Adam si sehnal letní brigádu v místním obchodě.

Jeho prvním úkolem bylo vyskládat plechovky Coca-Coly do pyramidy tak, aby úplně nahoře byly dvě plechovky a v každé další řadě pod nimi bylo o dvě plechovky více než v řadě vyšší. Ve třetí řadě od země je celkem 16 plechovek, v 8. řadě od země 6 plechovek.

1. Kolik plechovek je v nejnižší řadě?
2. Kolik řad plechovek je celkem v pyramidě?



Obrázek 3.8

Součet prvních n členů posloupnosti

Příklad 7 Spočítejte součet všech přirozených čísel od 1 do 100.



Tento příklad je velmi úzce spojen se známým německým matematikem Carlem Friedrichem Gaussem (18. století). Když chodil ještě na základní školu a učitel zadal třídě stejný příklad, Gauss za pouhých několik okamžiků znal odpověď. Dokážete ji najít i vy?

Obrázek 3.9

Gaussovo řešení: Gauss si součet čísel od 1 do 100 napsal pod sebe dvakrát, podruhé však v opačném pořadí:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\
 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 101 & + & 101 & + & & + & \dots & + & & + & 101 & + & 101
 \end{array}$$

Poté sečetl všech 100 čísel tak, že vynásobil 101 stokrát a konečný výsledek vydělil 2.

Zamysleme se znovu nad přechodím příkladem. Jak bychom z něj vyvodili obecný vzorec pro výpočet prvních několika členů aritmetické posloupnosti?

Gauss získal 100x součet 101 (tj. součet 1. a 100. členu), který následně vydělil dvěma. Platí tedy:

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. pro

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

platí

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Příklad 8



Obrázek 3.10

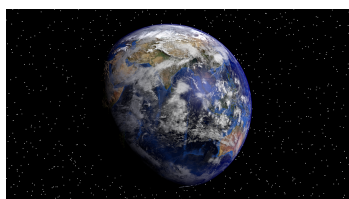
Světélkování u samců světlušek souvisí s jejich rozmnožováním. Právě podle světélkování si samičky světlušek vybírají vhodného partnera. Různé druhy světlušek se totiž liší intenzitou, frekvencí i tvarem záblesků.

Určitý druh světlušky signalizuje dvěma záblesky v první minutě, čtyřmi záblesky v minutě druhé, šesti v minutě třetí.

1. Bude-li tento vzorec pokračovat, kolik záblesků uvidí samice světlušky ve 30. minutě námluv?
2. Kolik celkem vyše samec záblesků během těchto 30 minut?

Příklady z praxe

Rotace Země

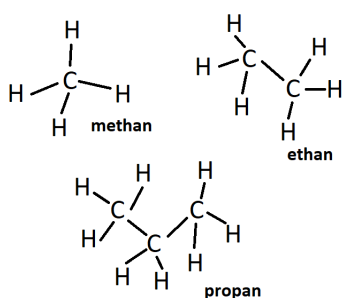


Obrázek 3.11

Země se denně jedenkrát otočí kolem své osy, tj. o 360° .

- a) Určete aritmetickou posloupnost, kterou tvoří počty minut, za které se Země vždy otočí o 1° .
- b) Za jak dlouhou dobu se Země otočí o 80° ?

Chemie a uhlovodíky



Obrázek 3.12

Uhlovodíky jsou základním stavebním prvkem pro vytvoření mnoha produktů, např. paliv, plastů nebo syntetických vláken. Některé uhlovodíkové sloučeniny obsahují pouze atomy uhlíku a vodíku.

Alkany jsou nasycené uhlovodíky, které tvoří jednoduché uhlíkové vazby, jak je vidět na diagramech vlevo.

- a) Vyjádřete posloupnost, kterou tvoří počet atomů vodíku v alkanech, přítomných v závislosti na uhlíku.
- b) Jistý alkan obsahuje 202 atomů vodíku. Kolik atomů uhlíku tvoří tento alkan? Zkuste na internetu najít i jeho název.

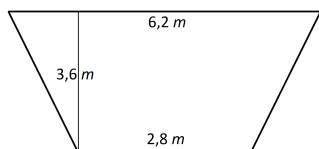
Akvárium pro velryby

Obrázek 3.13

Běluha je kytovec výrazný pro svou bílou barvu. Tuto velrybu chovají jen v několika akváriích na světě. K jednom z nich patří i akvárium ve Vancouveru v Kanadě. Běluhy shání svoji potravu v hloubkách kolem 300 metrů, potápí se však i do dvojnásobné hloubky. Při stavbě akvárií vhodných pro běluhy je potřeba mít na paměti tlak vody, který se zvyšuje s každým metrem hloubky.

Na mořské hladině působí pouze atmosférický tlak, tj. 1 013,25 hPa. Jdeme-li pak hlouběji do vody, každých 10 metrů celkový tlak vzroste o dalších 1 000 hPa.

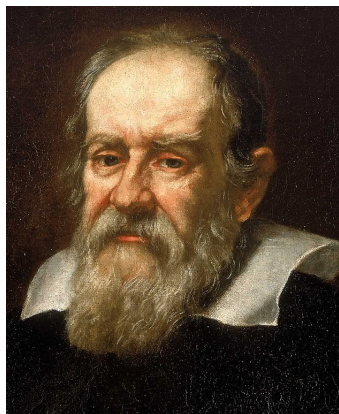
- Napište první 4 členy aritmetické posloupnosti, kterou tvoří tlak pod vodou v závislosti na hloubce.
- Na jaký tlak je třeba dimenzovat sklo akvária hloubky 300 m a 600 m?

Dlážďení dvorku

Obrázek 3.14

Dvorek za domem má přibližný tvar rovnoramenného lichoběžníku. Tento prostor chceme vydláždit cihlovou dlažbou, kde jedna dlaždice má rozměry 200x200 mm a výšku 30 mm.

Kolik cihlových dlaždic budeme k vydlážďení dvorku potřebovat?

Galileův objev

Obrázek 3.15

Galileo Galilei byl první, který popsal spojitost mezi dráhou volně padajícího objektu a uplynulým časem. Při monitorování jistého padajícího objektu bylo zjištěno, že za první vteřinu pádu urazí 5 m, ve druhé vteřině 15 m, ve třetí 25 m atd. Zároveň známý vzorec z fyziky říká, že výška volného pádu je určena vzorcem

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2.$$

Ukažte, že vyjádřením součtu pro prvních n členů aritmetické posloupnosti s prvními členy 5, 15, 25, ... dostaneme stejný vzorec.

3.2 Geometrická posloupnost

K čemu jsou aritmetické posloupnosti?

Podobně jako u aritmetických posloupností, i zde je nejprve uvedeno několik aplikací, ve kterých můžeme geometrickou posloupnost nalézt a které by mohly inspirovat žáky pro zvládnutí kapitoly. K těmto aplikacím patří:

- bankovní půjčky,
- radioaktivní rozpad,
- frekvence tónů klaviatury,
- spoření s úrokem,
- dělení buněk.

Věděli jste, že...?



Obrázek 3.16

Kruhová pavučina je nejznámějším druhem pavučin, který jsme určitě již všichni někde viděli. Tento druh pavučin staví např. křížák obecný. Svou kořist chytá v lepkavém středu, zatímco okolní části pavučiny jsou sušší. Takováto pavoučí síť má svou přesnou strukturu. Pavouci ji začínají stavět z okrajů a postupně se tvorbou těch stejných struktur v menším a menším měřítku dostávají do jejího středu. Toto měřítko přitom tvoří geometrickou posloupnost.

Úvodní úloha



Obrázek 3.17

Máte-li u sebe v peněžence minci, zkuste ji vytáhnout a hodit s ní. . .

- Kolik možných výsledků bude tento hod mít?
- Přidejte k minci ještě jednu a oběma naráz hod'te. Kolik možných výsledků bude mít tento hod?

- Doplňte tabulku zaznamenávající počet možných výsledků hodu 1, 2, 3, 4 a více mincemi.

počet hodů	1	2	3	4	5	6	7
počet výsledků							

- Vytvořte vzorec, podle kterého bychom dokázali předpovědět počet možných výsledků házení libovolným počtem mincí.
- Zjistěte pomocí tohoto vzorce počet možných výsledků pro házení 10 a 25 mincemi.

Definice geometrické posloupnosti

Při hodu mincemi tvořil počet možných výsledků posloupnost. Takovou posloupnost, kde každý další člen je k -násobkem předchozího, nazýváme **geometrickou**.

Definice 3.2.1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové číslo q , že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Příklad 1 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou geometrické.

- | | |
|---|---|
| 1. $1, 4, 9, 16, 25, \dots$, | 5. $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, |
| 2. $a_n = a_{n-1} + 3$, | 6. $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$, |
| 3. $7, -3, -13, -23, \dots$, | 7. $3, -3, 3, -3, 3, \dots$, |
| 4. $a_2 = 27 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, | 8. $\left(\frac{2}{(-2)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$. |

Vzorec pro n -tý člen

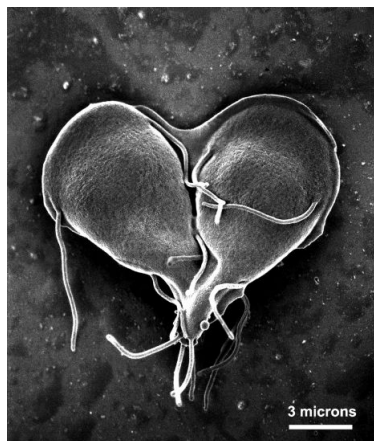
Už v úvodní úloze jsme si naznačili, jakým způsobem dojdeme k n -tému členu geometrické posloupnosti. Začneme-li od prvního členu, musíme jej tolikrát vynásobit kvocientem q , než dojdeme k členu n -tému:

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 0$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Příklady

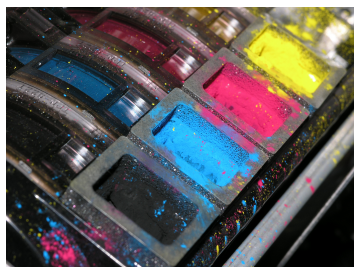
Příklad 2



Obrázek 3.18

V přírodě se mnoho jednobuněčných organismů, jako třeba bakterie, rozmnožuje dělením. To probíhá tak, že na počátku se buňka rozdělí na dvě stejné dceřiné buňky, každá z nich pak opět na dvě dceřiné atd. Předpokládejme, že v laboratorním vzorku se nachází 10 bakterií, které se začínají dělit.

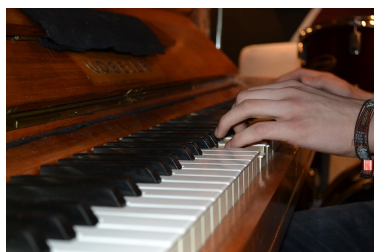
1. Zapište geometrickou posloupnost popisující množství buněk v závislosti na počtu dělení.
2. Najděte vzorec pro n -tý člen této posloupnosti.
3. Určete, kolik bude v laboratorním vzorku buněk po 5 děleních.

Příklad 3

Obrázek 3.19

Většina kopírek má dnes již funkci pro zvětšení nebo zmenšení dané kopie. Představme si, že chceme nakopírovat fotku o původní délce 25 cm. Největší zmenšení, které naše kopírka nabízí, je 67 % původní velikosti. Jaká je nejkratší možná délka, kterou bychom získali 5krát zmenšením na 67 %? Svoji odpověď vyjádřete v celých milimetrech.

Příklad 4 Třetí člen geometrické posloupnosti je 54, šestý člen -1458 . Určete hodnotu prvního členu a_1 a kvocientu q .

Příklad 5

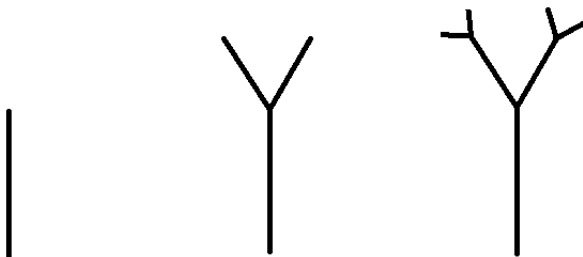
Obrázek 3.20

Téměř všechny současné klavíry mají 88 kláves. Frekvence jejich jednotlivých kláves se pohybují od A_0 , nejnižšího tónu o frekvenci 27,5 Hz, až po C_8 , který je nejvyšším tónem s frekvencí 4 186,009 Hz. Frekvence těchto tónů přibližně tvoří členy geometrické posloupnosti.

1. Určete kvocient geometrické posloupnosti, kterou tvoří frekvence jednotlivých tónů víte-li, že čtvrtý nejhlubší tón C_1 má frekvenci 32,7 Hz.
2. Ověřte hodnotu kvocientu i ze vztahu mezi frekvencemi tónů A_0 a C_8 .

Příklad 6 Fraktální strom je fraktální vzor, který svým vzhledem připomíná skutečný strom. Zkuste si takový strom nakreslit.

1. Začněte úplně odspodu. Ke spodnímu okraji stránky doprostřed zakreslete svislou čáru délky přibližně 4 cm.
2. Ze špičky této úsečky nakreslete další dvě čárky, které se z ní větví. Každá z nich by měla mít délku asi 2 cm.
3. Pokračujte tímto způsobem dále, jak je vidět na obrázku. Zakreslete takto prvních 5 fází fraktálního stromu.



Obrázek 3.21

Máte-li fraktální strom zakreslen, pojdte se zamyslet nad tím, jak budou jeho větve pokračovat.

Doplňte několik prvních hodnot do tabulky:

fáze stromu	1	2	3	4	5
počet větví	1				

Zkuste spočítat, kolik větví bude strom mít ve všech prvních 5 fázích dohromady. Kolik větví to bude v prvních 10 fázích?

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

Posledním úkolem příkladu 6 bylo spočítat součet prvních několika členů geometrické posloupnosti. Pojďme si tento vztah nejprve ukázat a pak dokázat, že opravdu platí.

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí:

a) je-li $q = 1$, pak

$$s_n = n \cdot a_1;$$

b) je-li $q \neq 1$, pak

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Odvození vztahu: Pro $q = 1$ si vztah lehce představíme. Nyní si ukážeme, jak jsme dospěli ke vzorci v části b). Nejprve запиšme, jak vlastně vypadá součet prvních n členů:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Každý člen v tomto vztahu si rozepíšeme podle vzorce pro n -tý člen:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Obě strany této rovnice teď vynásobíme kvocientem q :

$$\begin{aligned} s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q \cdot q + a_1 \cdot q^2 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \\ s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

Po odečtení rovnic

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ s_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

získáváme

$$s_n \cdot q - s_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n.$$

Po úpravě pak

$$s_n \cdot (q - 1) = -a_1 + a_1 \cdot q^n$$

a po vyjádření s_n

$$s_n = \frac{-a_1 + a_1 \cdot q^n}{q - 1} = \frac{a_1(-1 + q^n)}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Příklad 7 Určete součet prvních 10 členů geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 5$, $q = 0,5$.

Příklad 8

Obrázek 3.22

Western Scrabble Network je organizace jejíž cílem je propagovat hru Scrabble. Každoročně pořádá internetové turnaje, jichž se členové organizace účastní.

Turnaje fungují tak, že výherce postupuje do dalšího kola, zatímco poražený vypadává. Vítězové pokračují ve hře až do posledního zápasu, který rozhodne o šampionovi pro daný rok.

Pokud se do turnaje přihlásí 256 účastníků, jaký bude celkový počet her, než se rozhodne o vítězi?

Příklady z praxe**Populace Kanady**

Obrázek 3.23

V roce 1990 měla Kanada přibližně 26,6 milionů obyvatel. V té době byl předpovězen počet obyvatel 38,4 milionů pro rok 2025. Pokud by do té doby populace narůstala geometrickou posloupností, jaký by byl roční přírůstek?

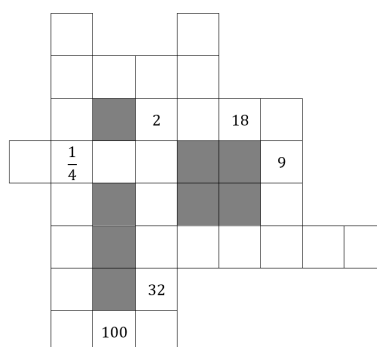
Matrjoška

Obrázek 3.24

Matrjoška je tradiční ruská dřevěná malovaná panenka, která se vyrábí už od roku 1890. Je unikátní v tom, že každá panenka uvnitř skrývá svoji přesnou zmenšenou kopii. Takto můžeme uvnitř matrjošky najít až několik panenek, jak je vidět na obrázku.

V sadě je 50 panenek, kde největší matrjoška má výšku 60 cm a nejmenší výšku 1 cm. Určete kvocient geometrické posloupnosti, se kterou se mění měřítko pro jednotlivé panenky.

Matematická křížovka Vyplňte následující matematickou křížovku kladnými reálnými čísly tak, aby v každém řádku i každém sloupci tvořila čísla geometrickou posloupnost. Čísla vepisujte pouze do bílých políček.



Obrázek 3.25

Líhnutí motýlů

Obrázek 3.26

Monarcha stěhovavý, motýl rozšířený především v Severní a Jižní Americe, naklade průměrně 400 vajíček. Žák biologické třídy se rozhodl odhadnout, jakým způsobem bude růst populace těchto motýlů pokračovat.

Předpokládal, že jediný motýl na počátku zplodí 400 dalších motýlů, každý z nich dalších 400 atd. Pro odhad, kolik motýlů by takto vzniklo po 5 generacích, použil vzorec

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$s_5 = 1 \cdot \frac{400^5 - 1}{400 - 1},$$

$$s_5 \doteq 2,566 \cdot 10^{10}.$$

- Z jakých předpokladů vycházel žák biologické třídy při svých výpočtech?
- Souhlasíte s metodou, kterou žák použil, aby zjistil velikost populace v 5. generaci? Proč (ne)?
- Jakým způsobem byste uvažovali při odhadu populace v 5. generaci vy? Vysvětlete svůj postup.

Složené úročení

Obrázek 3.27

Suma 200 000 Kč byla vložena na spořicí účet s úrokem 6 %. Určete zúročení této sumy po 10 letech, je-li úrok započítáván

- | | |
|--------------|----------------|
| a) ročně, | c) čtvrtletně, |
| b) půlročně, | d) měsíčně. |

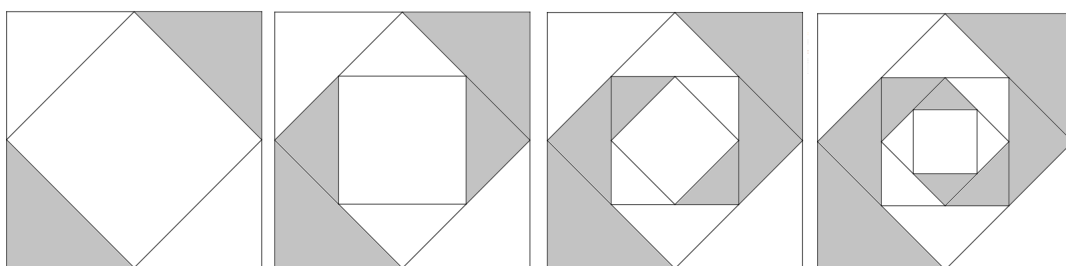
Pokles hodnoty

Obrázek 3.28

Průmyslová dílna nakupuje nové stroje, každý v hodnotě 1 milion korun. Hodnota těchto strojů klesá kvůli opotřebení každý rok o 30 %. Určete, na jakou hodnotu by spadla cena stroje, kdyby se ho dílna rozhodla po 5 letech prodat.

Geometrické vzory Čtvercová dlaždice geometrického vzoru s rozměry 40x40 cm je tvořena tak, že do středu stran čtverce jsou umístěny vrcholy čtverce menšího. Vzniknou tak vždy 4 shodné trojúhelníky, z nichž 2 jsou vyplněny tmavší a 2 světlejší barvou.

Spočítejte celkový obsah tmavých částí pro dlaždici, ve které se tento vzor ještě 5x opakuje.



Obrázek 3.29

Poznámka pro učitele: Z finanční matematiky materiály záměrně obsahují pouze minimum příkladů. Pro získání zadání takových úloh již existuje dostatek zdrojů, oproti tomu ostatní příklady z praxe obsahující geometrické posloupnosti nejsou natolik časté.

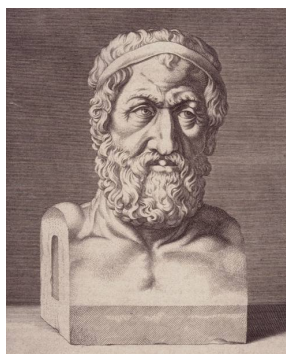
Kapitola 4

Nekonečná geometrická řada

K čemu je nekonečná geometrická řada?

- součet nekonečně mnoha členů geometrické posloupnosti,
- nekonečný pohyb.

Úvodní úloha



Obrázek 4.1

Ve starověkém Řecku formuloval Zénón z Eleje celkem čtyři paradoxy, kterými dokazoval nemožnost nebo zdánlivost pohybu.

Jedním z těchto paradoxů je paradox půlení. Ten spočívá v úvaze, že pokud se budeme chtít dostat např. z jednoho konce chodby dlouhé 10 m na druhý, budeme nejprve muset ujít polovinu této vzdálenosti, pak čtvrtinu, osminu, šestnáctinu, . . . Tyto vzdálenosti se budou stále zmenšovat, ale budou pokračovat do nekonečna. Proto podle Zénóna nemůže pohyb vůbec existovat, neboť by se musel skládat z nekonečně mnoha dílčích pohybů.

Kde je v Zénónových předpokladech chyba? Zkuste spočítat nekonečný součet

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

- a) Sčítance nekonečného součtu tvoří členy posloupnosti. Určete, o jaký typ posloupnosti se jedná.
- b) Určete první člen této posloupnosti a její diferenci/kvociient.
- c) Sestavte vzorec pro součet prvních n členů této posloupnosti.
- d) Zakreslete graf funkce $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Jak se tento graf chová pro větší a větší x , tj. blíží-li se x nekonečnu? Protne někdy křivka grafu osu x , tj. existuje bod $[x, 0]$?
- e) Jak se skutečnosti zjištěné z grafu funkce $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ projeví na vzorci pro součet prvních n členů posloupnosti?
- f) Představte si nyní podobný nekonečný součet, v němž by sčítance tvořily geometrickou posloupnost s kvociientem větším než 1.
Zakreslete nejprve graf funkce $g : y = 2^x$, určete jak se chová pro x jdoucí k nekonečnu a nakonec rozhodněte, co se změní ve vzorci pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

Definice nekonečné geometrické řady

Definice 4.0.1. Nekonečná geometrická řada je nekonečný součet čísel

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots,$$

kde $a \neq 0$ a q je kvocient geometrické posloupnosti.

Součet s nekonečné geometrické řady, kde pro kvocient q platí $|q| < 1$, je vyjádřen vztahem

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

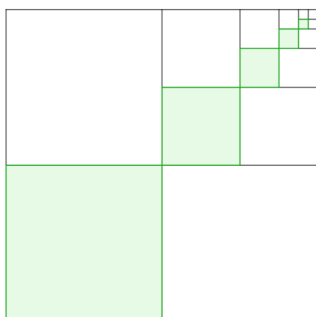
Příklady

Příklad 1 Spočítejte sumu následujících nekonečných řad, pokud existuje.

1. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots,$

2. $2 - 4 + 8 - \dots$

Příklad 2



Vzor vlevo vznikl rozdělením čtverce strany 4 cm na 4 stejné části, z nichž jedna byla vybarvena zeleně. Jeden z těchto čtverců byl opět rozdělen na 4 stejně velké čtverce a jedna část vybarvena. . .

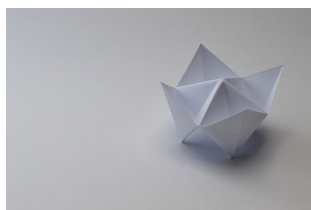
Za předpokladu, že by vzor pokračoval do nekonečna, jaká bude celková plocha zelených čtverců ve vzoru?

Obrázek 4.2

Příklad 3 Součet nekonečné geometrické řady je 81, kvocient $\frac{2}{3}$. Jaká je hodnota prvního členu této řady? Napište první tři členy geometrické posloupnosti, která řadu tvoří.

Příklad 4 Součet nekonečné geometrické řady $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots$ je 4. Určete hodnotu neznámé x a запиšte první 4 členy geometrické posloupnosti, která řadu tvoří.

Příklad 5



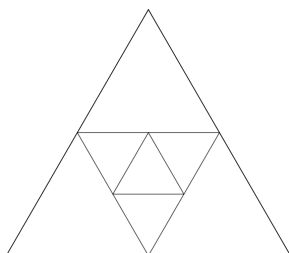
Tloušťka jednoho listu papíru je 0,1 mm. Představte si, že bychom tento list přehnuli napůl, poté znovu napůl atd. Jaká by byla tloušťka 30x přeloženého papíru? Kolikrát musíme papír přeložit, aby jeho tloušťka odpovídala vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem?

Zdůvodněte, proč není možné takto papír přehýbat do nekonečna.

Obrázek 4.3

Příklady z praxe

Nekonečné trojúhelníky



Obrázek 4.4

Strana největšího rovnostranného trojúhelníku na obrázku má 1 cm. Vrcholy menšího trojúhelníku vepsaného do původního leží ve středu jeho stran a vrcholy nejmenšího z trojúhelníků pak ve středu stran prostředního. Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, jaký by byl součet obvodů všech trojúhelníků v obrazci?

Kyvadlo



Obrázek 4.5

Délka prvního kmitu kyvadla je 50 cm. Každý následující kmit dosahuje pouze tři čtvrtě délky toho předchozího. Pokud by na kyvadlo nepůsobily už žádné další síly, jaká by byla výsledná celková dráha, kterou by kyvadlo za dobu svého pohybu urazilo?

Let balonem



Obrázek 4.6

Horkovzdušný balon stoupne v první minutě letu o 25 metrů. Za předpokladu, že v každé další minutě stoupne pouze o 80 % předchozího zvýšení a tento proces nebude nikým regulován, jaká je maximální výška, které balon dosáhne?

Kapitola 5

Pilotování interaktivních materiálů na vybraných SŠ

Po vytvoření byly interaktivní materiály otestovány přímo ve výuce. Za tímto účelem byly vybrány dvě třídy dvou různých brněnských gymnázií, kde žáci dostali příležitost si práci s materiály vyzkoušet a následně je hodnotit. Autorka by na tomto místě opět ráda poděkovala Zdeňku Kadeřábkovi z Gymnázia Křenová a Janu Kadlecovi z Gymnázia Slovanské náměstí, a to za vstřícnost, čas, spolupráci i korektury jednotlivých materiálů.

Výše zmínění učitelé byli nejprve osloveni s žádostí o spolupráci. Následně prošli úvodním školením k používání programu Prowise Presenter a vytvořených interaktivních materiálů (viz Kapitola 1). V průběhu celého školního roku 2018/2019 měli učitelé interaktivní materiály k dispozici a do své výuky je zařazovali dle svého uvážení. Autorka rovněž v rámci několika následků mapovala aplikaci materiálů do výuky. Cílem bylo zjistit, jakým způsobem učitelé materiály do vyučovací jednotky zakomponují, zda jim práce s nimi vyhovuje a v neposlední řadě jak zařazení interaktivních materiálů do výuky hodnotí samotní žáci. Žáci obou tříd také online odpovídali na otázky dotazníkového šetření, s učiteli autorka realizovala semistrukturované rozhovory.

Následky v hodinách matematiky

Oba zapojení učitelé pojali práci s interaktivními materiály odlišně, spolupráce s více než jednou středoškolskou třídou měla tedy velký přínos.

Na Gymnáziu Křenová měli žáci 4. A možnost využívat materiály především doma. V hodině pak byly materiály z technických důvodů využity pouze ve formě prezentace, kde tvořily strukturu vyučované hodiny při probírání nového učiva. Učitel některé slidy prezentace podle potřeby prokládal vlastními příklady a úkoly. Na konci každého materiálu žáci za účelem shrnutí učiva vyplňovali kvíz pomocí funkce ProConnect.

Během následků v těchto hodinách se ukázalo hned několik nedostatků, které souvisely především s technickou stránkou projektu. Největším nedostatkem se ukázala absence interaktivní tabule, jelikož nebylo možné využít plný potenciál materiálů. Ztratila se tím většina jejich primárních cílů, kterými byly interaktivita a spolupráce žáků v hodinách matematiky. Další problém představovalo poměrně časově náročné připojování ke kvízu, jelikož některé třídy měly problémy se stálostí Wi-Fi připojení.

Využití materiálů ve 2. A na Gymnáziu Slovanské náměstí probíhalo zcela jiným způsobem. Učitel využil materiály vždy pouze pro účely opakování dříve probraného učiva. Výuka matematiky byla v těchto hodinách přesunuta do počítačové učebny, kde žáci ve dvojicích pracovali na vyplnění jednotlivých úkolů a příkladů v materiálech.

Tato metoda vykazovala hned několik pozitiv. Žáci měli možnost pracovat vlastním tempem, materiály si podrobně projít a v případě nejasností si učivo s partnerem ve dvojici dovysvětlit. Asi největší nevýhoda tohoto způsobu využití materiálů se projevila v první hodině, která byla téměř zcela vyplněna registrací všech žáků do programu Prowise Presenter a instruktáží osvětlující práci s programem i materiály. To, že si každý z žáků vytvořil vlastní účet je určitě dobré ve chvíli, kdy by dále s materiály pracovali doma, nicméně pro účely vyučování se samostatné účty neosvědčily. Řešením by mohlo být založení jednoho školního účtu, ke kterému by se všichni přihlásili; tato metoda však nebyla v praxi ověřena.

Rozhovory s učiteli

Při rozhovorech s učiteli byl zjišťován především jejich názor na využitelnost materiálů v běžné výuce, na jejich časovou náročnost i zpracování ve vztahu k učivu, které s žáky probírají.

Z rozhovorů vyplynulo, že učitelé uvítali práci s materiály hlavně díky oživení běžných hodin matematiky, které zároveň přineslo mimo jiné i větší vizualizaci. Oba pozitivně hodnotili motivační i na praxi zaměřené příklady, které byly zahrnuty do všech materiálů, i možnost využití mobilních zařízení žáků během závěrečného opakování. Oproti klasické výuce naopak postrádali klid v hodině a větší soustředění žáků, kteří byli rozptýleni především v té skupině, která navštěvovala počítačovou učebnu. V materiálech jim chybělo i větší množství příkladů, například při kreslení grafů funkcí.

Reakce žáků na materiály byla z pohledu učitelů velmi pozitivní, chválili především zapojení všech žáků, a to jak při práci s materiály na počítačích, tak při testování s mobilními telefony.

Co se týče výběru typů úloh, které byly využity, jedna ze tříd nepoužívala vykreslování grafů pomocí webového softwaru Desmos, a to z důvodu předchozí znalosti a práce s GeoGebrou, která byla v daných příkladech využita namísto něj. Funkce ProConnect byla v jedné ze tříd využita na konci každého materiálu k vyplnění minikvízů, ve druhé skupině funkci učitel vůbec nevyužil z důvodu nedostatečné znalosti práce s programem. Právě kvůli nedostatečnému proškolení bylo pro jednoho z učitelů také časově náročnější vytváření příprav na výukovou jednotku, v níž byly materiály využívány.

Celkové reakce na časovou náročnost využití materiálů v hodině, náročnost příkladů zahrnutých v materiálech, práci s grafy, přiměřenost příkladů z praxe a ohlasy žáků na ně byly veskrze pozitivní. Oba z oslovených učitelů v rozhovoru uvedli, že by zařazení materiálů do některých částí výuky využili i v budoucnosti a nevylučují ani tvorbu vlastních materiálů v programu Prowise Presenter. Hlavní přínos materiálů spatřují především v atraktivitě pro žáky a množství zajímavých úloh, usnadňujících přípravu na výuku.

Výsledky dotazníkového šetření

Dotazníkového šetření se zúčastnilo celkem 46 respondentů (pouze ti žáci, kteří byli přítomni ve více než polovině hodin, ve kterých byly materiály použity). Dotazník byl mezi žáky rozšířen v elektronické podobě na stránce <https://forms.gle/CYaiwZpQacHg1N3e6> již na začátku

projektu, aby jej mohli vyplňovat průběžně. Plné znění otázek dotazníkového šetření pro žáky se nachází v příloze (5).

Odpovědi žáků v některých otázkách korespondovaly s tím, co bylo zjištěno z rozhovorů s učiteli. Přibližně polovina z nich uvedla využití materiálů jako obyčejnou prezentaci a využití funkce ProConnect v mobilních telefonech. Dá se tedy očekávat rovnoměrné rozložení odpovědí mezi žáky obou oslovených škol.

Z pozitivních přínosů materiálů žáci zdůrazňovali zábavnější a kreativnější přístup k výuce matematiky, možnost práce ve dvojicích, možnost pracovat na úlohách vlastním tempem, příklady z praxe i závěrečné minikvízy. Pouze 3 z celkového počtu 46 respondentů hodnotili hodinu s využitím materiálů negativně.

Mezi záporné stránky podle žáků patřily především technické problémy a zvládnutí základní práce s programem Prowise, nedostatečné množství příkladů k procvičení, někteří také zmiňovali preferenci učebního stylu bez využití techniky.

Mezi oblíbené typy úloh téměř 70 % zařadilo vykreslování grafů s nástrojem Desmos Graphing Calculator, více než 65 % žáků minikvíz a přibližně 60 % přesouvání grafu v souřadné soustavě v příkladech na transformace grafů. Přes 60 % dále označilo za přínosné příklady z praxe, o něco více než polovina respondentů kladně ohodnotila i cvičení s přetahováním odpovědí a řešení úloh s nápovědou.

Co se týče náročnosti materiálů, 37 % žáků označilo příklady za přiměřené, 54 % hodnotilo některé příklady jako lehké, zatímco jiné jako těžké. Pouze necelým 9 % respondentů nevyhovovaly materiály kvůli jejich přílišné náročnosti.

Práci s grafy v materiálech označilo 33 % žáků za jednodušší než na tabuli nebo v sešitě, 30 % připadaly přibližně na stejné úrovni a 24 % žáků označilo práci s grafy v materiálech za těžší než v běžných hodinách. Příklady z praxe se celkem líbily více než 90 % respondentů, pouze 35 % z nich by však zaujaly pro bližší studium dané látky.

Celkově by podobné materiály do hodin matematiky zařadilo 80 % respondentů, z toho 53 % připadají vhodné především pro opakování již dříve naučené látky, zbytku by nevadilo jejich využití ani při samotné běžné výuce.

Závěrečné hodnocení

Pilotování interaktivních materiálů na gymnáziích bylo pro diplomovou práci klíčové především díky propojení s praxí a možnosti učitelů pomáhat s korekturami a úpravami materiálů tak, aby vyhovovaly běžným středoškolským standardům a byly tak maximálně využitelné v klasických hodinách matematiky.

Původní záměr materiály splnily. Byly vytvořeny jako podpůrný materiál k výuce, který ji má ozvláštnit, přinést nové metody a motivační, atraktivnější příklady. Tyto cíle byly podle slov učitelů i podle odpovědí žáků v dotazníkovém šetření naplněny. Většina problematických stránek pramenila z technické vybavenosti dané školy a zkušeností žáků i učitele s programem. Jak se vyhnout některým z těchto problémů bylo uvedeno už v Kapitole 1, ostatní lze na dobře technicky vybavených školách snadno překonat pravidelným využíváním ať už těchto či jiných materiálů. Celý proces je pak zautomatizován jak žáky, tak učitelem a klesá jeho časová náročnost.

Závěr

Hlavním přínosem této práce je otevřenost a využití moderních technologií, které by určitě neměly nahrazovat tradiční výuku, ale při správném využití ji mohou do značné míry podpořit, vytvořit vztah žáků k matematice a podnítit jejich touhu dozvědět se více, nebo se dokonce věnovat tomuto předmětu i ve volném čase. Zároveň obsahuje pro každé téma množství příkladů z praxe, které mohou ozvláštnit hodiny matematiky, ale i trénovat žáky ve slovních úlohách, které jsou ve výuce spíše na ústupu.

Velkým kladem práce je i zařazení materiálů do hodin matematiky na dvou brněnských gymnáziích. Během výuky bylo nalezeno hned několik technických nedostatků, které je třeba překonat na cestě ke zvýšení atraktivity a interaktivity vyučování. Dosažení stanovených cílů je přesto nesporné.

Program Prowise Presenter je v českém prostředí užitečným, avšak méně známým nástrojem, který by mohl učitelům dopomoci k využití plného potenciálů technické vybavenosti své školy nebo jen k přípravě několika zajímavých hodin pro své žáky.

Tato diplomová práce neposkytuje komplexní řešení problému vyučování matematiky na středních školách, představuje však krok a inspiraci pro učitele ke zvýšení motivace a zaujetí jejich žáků, propojení konceptů matematiky s praktickými příklady a větší atraktivitu vyučování díky moderním technologiím.

Příloha 1: Odkazy na zpracované interaktivní výukové materiály

Elementární funkce

Úvod do funkcí, Lineární funkce:

https://presenter.prowise.com/share_fC5Lh52fBYUhfjRK9dsw5XUTwsVnxWhcjlyRq172ZbiFK0aSnSPr1uKwmpkjMRM6

Funkce s absolutní hodnotou:

https://presenter.prowise.com/share_Ppf4huUhwDsVUii5067gPJJaGln2vHnSgd8kL3E3zRuUwcC1lH8ShR4yCqz98nboR

Kvadratické funkce:

https://presenter.prowise.com/share_UKPbcFmFd6vNMovtNrzenZfvEh87srvNCKypZ15CrzaDoV8CN8qBgV8vCE267xSI

Lineární lomené funkce:

https://presenter.prowise.com/share_C3DoFtHD4Z7UMXqt1dhqekwUN04Wj0QwRdlgW3tab15xXvrXYNDIJigSlDC0d0a

Mocninné funkce:

https://presenter.prowise.com/share_Z5jUqHAQNiU4CjWNjrF2p3Kfk57v8jphoZCfqM7E6aHIJng4ev6UxPAiTHEb2TJp

Exponenciální funkce:

https://presenter.prowise.com/share_74HGF0Q9KkUy6X6B0108rF8MTcbSyLN50fLeolm0WG8bnDmCDvJ5BRRe43830U8n

Logaritmické funkce:

https://presenter.prowise.com/share_ShY02Jrwk3sw2cAgHDGCcVYSNX1LUm3wUbKVuCSfFLcGxmWE1DRdiz76WsR2eUx0

Posloupnosti

Úvod do posloupností, Aritmetická posloupnost:

https://presenter.prowise.com/share_yx9dlEju3Lc4txbuMSqDjpX0caWqgcqeZzILD2FFNrJHpuBCN2P8rxGTynKEPBsz

Geometrická posloupnost:

https://presenter.prowise.com/share_hwgTXmmpiTWnhwJ0dBm2lQk6lvEkqJDYGt3ngoc0I9C16V0ihwkTMVZ9RnsH86qN

Nekonečná geometrická řada

https://presenter.prowise.com/share_VYw3a0kkIJU8fHuuxCgVjqBwCRMzHs8mQ5p2DalVtFdZXXTVjA1S2BPDdlCueKg6

Příloha 2: Seznam převzatých obrázků

- Obrázek 2.2: http://farleymath.weebly.com/uploads/2/2/6/7/22677964/wonderball_orig.png
- Obrázek 2.7: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e2/Skoda_Superb_Combi_2.0_TDI_H%C3%A4meenlinna%2C_taxi.jpg/800px-Skoda_Superb_Combi_2.0_TDI_H%C3%A4meenlinna%2C_taxi.jpg
- Obrázek 2.14: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Atmosphere-Blue-Cumulus-Clouds-Cloudy-Sky-3699588.jpg>
- Obrázek 2.15: https://cdn.pixabay.com/photo/2018/11/24/12/58/climate-change-3835518_960_720.png
- Obrázek 2.16: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fe/Prozac-pills.jpg/800px-Prozac-pills.jpg>
- Obrázek 2.17: <https://i.pinimg.com/564x/4d/f6/40/4df640f6b381cfc4f6112f612528b45d.jpg>
- Obrázek 2.18: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/%27IKEA%27%2C_Belfast_-_geograph.org.uk_-_1274232.jpg
- Obrázek 2.19: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2f/Hubble_ultra_deep_field.jpg/220px-Hubble_ultra_deep_field.jpg
- Obrázek 2.20: <https://flic.kr/p/dxNBXx>
- Obrázek 2.28: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/About-Road-Sign-Traffic-Sign-Traffic-Shield-Red-2906961.jpg>
- Obrázek 2.33: https://c.pxhere.com/photos/f5/9c/circuit_circuit_board_resistor_computer_technology_chip_hardware_electronic-609052.jpg!d
- Obrázek 2.34: http://tapolitika.cz/wp-content/uploads/2016/10/Schuze_senatu_02-1170x780.jpg
- Obrázek 2.35: https://c.pxhere.com/photos/0a/24/test_testing_bubble_form_test_form_exam_exam_form_bubble_sheet_pencil-685238.jpg!d
- Obrázek 2.36: https://cdn.pixabay.com/photo/2018/06/07/13/25/tapered-roller-bearing-3460125_960_720.jpg
- Obrázek 2.39: https://farm6.static.flickr.com/5731/31090638462_274d0ebb87_m.jpg

- Obrázek 2.39: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/64/L%27Oceanografic%2C-Valencia%2C-Spain_1_-_Jan_07.jpg/800px-L%27Oceanografic%2C-Valencia%2C-Spain_1_-_Jan_07.jpg
- Obrázek 2.39: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c4/Celler_de_Sant_Cugat_lateral.JPG/800px-Celler_de_Sant_Cugat_lateral.JPG
- Obrázek 2.39: <https://flic.kr/p/deTYJ1>
- Obrázek 2.42: <http://n.sinaimg.cn/front/2/w640h962/20190109/WkLM-hrkkweh1474447.jpg>
- Obrázek 2.43: <https://www.sickchirpse.com/wp-content/uploads/2019/01/McDonalds-Cheeseburger.png>
- Obrázek 2.44: https://uslog.files.wordpress.com/2015/10/101715_0357_rrroleandre2.jpg?w=768
- Obrázek 2.45: <https://i0.wp.com/jogjastory.online/wp-content/uploads/2018/10/euro-currency-converter-best-of-how-to-get-the-best-currency-exchange-rates-savingadvice-blog-of-euro-currency-converter.jpg?w=2000>
- Obrázek 2.49: https://c.pxhere.com/photos/d1/c1/pendulum_brass-12311.jpg!d
- Obrázek 2.50: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Underwater-Divers-Historically-Helmet-Diver-378216.jpg>
- Obrázek 2.51: https://c.pxhere.com/photos/59/d3/speakers_devil_sound_music_multimedia_audio_recording_beschallung-1382809.jpg!d
- Obrázek 2.52: <http://smashingweb.info/wp-content/uploads/2013/04/Sanibel-Gulls.jpg>
- Obrázek 2.60: [https://raja.scene7.com/is/image/Raja/products/verstevigde-a4-dekseldoos-met-variabele-vulhoogte-bruin-of-wit-enkelgolfkarton_0FF_BE_0525.jpg?image=M_B0C60_0_L3_025\\$default\\$](https://raja.scene7.com/is/image/Raja/products/verstevigde-a4-dekseldoos-met-variabele-vulhoogte-bruin-of-wit-enkelgolfkarton_0FF_BE_0525.jpg?image=M_B0C60_0_L3_025$default$)
- Obrázek 2.61: <https://iconfree.net/231x231/2011/2/7/casino-dice-icon-6737-231x253.png>
- Obrázek 2.62: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Grayscale-Scan-Pencil-Drawing-Tin-Can-961665.jpg>
- Obrázek 2.66: <http://happeningbkk.com/media/upload/2018/11/56cb6eca5c8b9jf7af6hk10.jpg>
- Obrázek 2.67: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Explosion-Mushroom-Atomic-Bomb-Nuclear-Weapons-2621291.jpg>
- Obrázek 2.68: https://c.pxhere.com/photos/d1/27/bridge_california_golden_gate_bridge_landmark_san_francisco-994742.jpg!d

- Obrázek 2.69: <https://cdn1.pegasas.io/2ca7/img/wp-content/uploads/2018/03/Mesothelioma-Immunotherapy-Drug-CRS-207-Shows-Encouraging-Results.jpg>
- Obrázek 2.70: https://i1.wp.com/forestsnews.cifor.org/wp-content/uploads/2016/05/17096832777_811449864e_k-1.jpg?resize=832%2C415&ssl=1
- Obrázek 2.73: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/John_Napier_%28Neper%29.jpg
- Obrázek 2.74: <http://www.cresa.cat/blogs/sociedad/wp-content/uploads/2018/01/human-brain-300x240.jpg>
- Obrázek 2.75: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Audio-Mixer-Red-Sound-Intensity-Analogue-Console-3429933.jpg>
- Obrázek 2.76: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0f/Grosser_Panda.JPG/800px-Grosser_Panda.JPG
- Obrázek 2.77: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/75/Aftermath_of_the_2017_Chiapas_earthquake.jpg/800px-Aftermath_of_the_2017_Chiapas_earthquake.jpg
- Obrázek 3.1: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b2/Ulita_%282%29.jpg/800px-Ulita_%282%29.jpg
- Obrázek 3.1: https://c.pxhere.com/photos/16/0d/patterns_zebra_nature_stripped-1405111.jpg!d
- Obrázek 3.1: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c4/Aloe_polyphylla_spiral.jpg/760px-Aloe_polyphylla_spiral.jpg
- Obrázek 3.2: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b7/Comet_Halley.jpg/782px-Comet_Halley.jpg
- Obrázek 3.3: https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/12/18/30/stairs-153417_960_720.png
- Obrázek 3.4: https://c.pxhere.com/photos/fc/94/baby_sleeping_small_child_infant_newborn-669870.jpg!d
- Obrázek 3.5: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/66/Musk_ox_pair_%286565982995%29.jpg/800px-Musk_ox_pair_%286565982995%29.jpg
- Obrázek 3.6: <https://media.treehugger.com/assets/images/2012/02/Coca-Cola-Compost.png>
- Obrázek 3.7: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/14/Can_Minion_by_FortisBC_%287045072359%29.jpg/450px-Can_Minion_by_FortisBC_%287045072359%29.jpg
- Obrázek 3.7: <https://pbs.twimg.com/media/DqefEtRXcAEsvdc.jpg>
- Obrázek 3.7: http://canstructionmiami.org/wp-content/uploads/2017/10/11539088_1002953883083447_760095267330567597_o.jpg

- Obrázek 3.9: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ec/Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg/705px-Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg
- Obrázek 3.10: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f1/Photinus_pyralis_Firefly_4.jpg/708px-Photinus_pyralis_Firefly_4.jpg
- Obrázek 3.11: https://cdn-s-www.dna.fr/images/D2532FDB-63A9-4303-9B82-D1D2430D184D/DNA_03/1a-duree-des-saisons-differe-selon-l-itineraire-en-forme-d-ellipse-que-va-parcourir-la-terre-autour-du-soleil-photo-d-illustration-pixabay-domaine-public-1521468516.jpg
- Obrázek 3.13: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/eb/Beluga_premier.gov.ru-1.jpeg/800px-Beluga_premier.gov.ru-1.jpeg
- Obrázek 3.15: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cc/Galileo_arp.300pix.jpg/488px-Galileo_arp.300pix.jpg
- Obrázek 3.16: https://c.pxhere.com/photos/bd/67/cobweb_wheel_spider_network_orb_web_dewdrop_drip_drop_of_water_lined-1092766.jpg!d
- Obrázek 3.17: https://c.pxhere.com/photos/70/68/business_cash_coin_czech_crown_currency_czech_economy_europe-1141033.jpg!d
- Obrázek 3.18: <https://pixnio.com/science/microscopy-images/giardia-muris-protozoan/caught-in-a-late-stage-of-cell-division-producing-a-heart-shaped-form>
- Obrázek 3.19: https://c.pxhere.com/photos/90/bb/toner_color_ink_copier_xerox_cmyk_powder_photo_copy_powder-767873.jpg!d
- Obrázek 3.20: <https://www.maxpixel.net/static/photo/1x/Music-Piano-Keys-Piano-Hands-Instrument-2498670.jpg%C2%A8>
- Obrázek 3.22: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5d/Scrabble_game_in_progress.jpg/800px-Scrabble_game_in_progress.jpg
- Obrázek 3.23: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a3/Flag_map_of_Greater_Canada.png/800px-Flag_map_of_Greater_Canada.png
- Obrázek 3.24: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d2/Russian-Matroska_no_bg.jpg/750px-Russian-Matroska_no_bg.jpg
- Obrázek 3.26: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/63/Monarch_In_May.jpg/800px-Monarch_In_May.jpg
- Obrázek 3.27: https://www.percivaleast.com/uploads/5/7/7/1/57711193/financial-service_orig.jpg
- Obrázek 3.28: https://c.pxhere.com/photos/5b/40/industrial_workshop_worker-717698.jpg!d
- Obrázek 4.1: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/Diogenes_Laertii_De_Vitis_%281627%29_-_Zenon_of_Elea_or_Zenon_of_Citium.jpg

- Obrázek 4.3: <https://images.pexels.com/photos/877020/pexels-photo-877020.jpeg?auto=compress&cs=tinysrgb&dpr=2&h=650&w=940>
- Obrázek 4.5: <http://up.8desk.com/5/pic/5a/8a/cc/5a8accacb3070848f85cc2c2a00c7756.jpg>
- Obrázek 4.6: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f3/Hot_Air_Balloon_in_flight-01_%285677571874%29.jpg/412px-Hot_Air_Balloon_in_flight-01_%285677571874%29.jpg

Příloha 3: Dotazníkové šetření mezi žáky

Práce s interaktivními materiály Prowise Presenter

Dotazník k interaktivním výukovým materiálům vytvořeným v Prowise Presenteru



Celkový dojem z materiálů

1. Jakým způsobem jste ve škole pracovali s materiály?
 - Na interaktivní tabuli,
 - na počítačích nebo tabletech,
 - využili jsme ProConnect v mobilech,
 - jako s obyčejnou prezentací,
 - dostali jsme materiály domů.
2. V čem byla matematika s interaktivními materiály lepší?
3. V čem byla matematika s interaktivními materiály horší?
4. Ohodnoť prosím jednotlivé příklady a aktivity z materiálů na stupnici od 1 (nejhorší) do 5 (nejlepší). Pokud jste v hodině aktivitu nedělali, otázku nech nevyplněnou.
 - Řešení úloh s nápovědou,
 - zakreslování grafu rukou/tužkou,
 - vykreslování grafů s nástrojem Desmos Graphing Calculator,
 - vyznačení grafů na fotkách,
 - přesouvání grafu v souřadné soustavě,

- práce s interaktivní souřadnou soustavou,
- cvičení s přetahováním odpovědí,
- vybírání správných odpovědí s okamžitou kontrolou,
- řešení příkladů z praxe,
- minikvíz.

Doplňující otázky

5. Materiály používal

- pouze učitel/učitelka,
- já sám/sama na interaktivní tabuli,
- já sám/sama na mobilu/tabletu/počítači.

6. Příklady v materiálech se mi zdály

- příliš lehké,
- příliš těžké,
- přiměřené,
- některé lehké, některé těžké.

7. Příklady z praxe a ukázky, kde se dají funkce využít se mi

- moc líbily a zaujaly mě,
- líbily, ale nezaujaly mě,
- nelíbily,
- příklady z praxe jsme v hodině nedělali.

8. Práce s grafy v materiálech mi přišla

- jednodušší než na tabuli/v sešitě,
- těžší než na tabuli/v sešitě,
- stejně těžká jako na tabuli/v sešitě,
- práci s grafy jsme v hodině nedělali.

9. Učitel

- dobře vysvětlil, jak s materiálem pracovat,
- nevysvětlil jak s materiálem pracovat, ale nechal nás objevovat samotné,
- vůbec nevysvětlil, jak s materiálem pracovat.

10. Podobné materiály bych do hodin zařadil/a

- jen občas, jako opakování,
- často, i když probíráme něco nového,
- vůbec, byla to ztráta času,
- jen jako opakování na doma.

Seznam použité literatury

- [1] CIZLEROVÁ, Michaela, Marek ZAHRADNÍČEK a Alena ZAHRADNÍČKOVÁ. *Matematika pro střední školy. učebnice*. Vydání první. Brno: Didaktis, 2014. 88 stran. ISBN 9788073582142.
- [2] COLLINGWOOD, David H., K. David PRINCE a Matthew M. CONROY. *Precalculus*. 2003. GNU Free Documentation License.
- [3] ČŠI. Využívání digitálních technologií v mateřských, základních, středních a vyšších odborných školách. Tematická zpráva. Praha, září 2017. http://www.csicr.cz/html/tz_digitechnologie/html5/index.html?&locale=CSY
- [4] KOPEČEK, Tomáš. *Prowise Presenter – open source software pro interaktivní tabule*. Brno, 2017. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Roman PLCH.
- [5] LARSON, Ron a Robert HOSTETLER. *Precalculus*. 7th ed. Boston: Houghton Mifflin Company, 2007. ISBN 978-0-618-64346-2.
- [6] MCASKILL, Bruce et. all. *Pre-Calculus 11*. Canada: McGraw-Hill Ryerson, 2011. ISBN 978-0-07-073873-7.
- [7] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2002. 168 s. ISBN 8071961647.
- [8] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: posloupnosti a řady*. 2. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2002. 126 s. ISBN 8071961957.
- [9] RICE UNIVERSITY. *Precalculus*. Houston: OpenStax College, 2014. ISBN 978-1-938168-34-5.
- [10] ZEMEK, Václav. *Matematika pro střední školy. učebnice*. Vydání první. Brno: Didaktis, 2014. 96 stran. ISBN 9788073582173.

