



Model poptávky po produktech dlouhodobé spotřeby

Bakalářská práce

Brno 2009

Lenka Potůčková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně za odborného vedení doc. RNDr. Zdeňka Pospíšila, Dr. a výhradně s použitím citované literatury.

V Brně dne 22. května 2008

Lenka Potůčková

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu doc. RNDr. Zdeňku Pospíšilovi, Dr. za odborné vedení bakalářské práce, cenné rady, připomínky a především čas, který mi věnoval.

Jméno a příjmení autora:

Lenka Potůčková

Název bakalářské práce:

Model poptávky po produktech dlouhodobé spotřeby

Studijní program:

Aplikovaná matematika

Studijní obor:

Finanční a pojistná matematika

Vedoucí bakalářské práce:

doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je shrnout základní poznatky o modelování dynamických procesů a pak je aplikovat na konkrétní zvolený model. Úkolem práce je model analyzovat matematicky, realizovat ho na počítači v prostředí MATLAB a pomocí tabulového procesoru Excel. Na závěr porovnat všechny tři přístupy a zhodnotit ekonomickou relevanci obdržených výsledků.

Klíčová slova: difference, diferenciál, diferenciální rovnice, diferenční rovnice, diskretizace, nelineární autonomní systémy, stabilita řešení.

Author:

Lenka Potůčková

Title:

Model of demand of long-term consumption products

Educational programme:

Applied mathematics

Educational field:

Mathematics of Finance and Insurance

Supervisor:

doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to summarize basic knowledge about dynamic modeling and then apply them to a specific model. The thesis aims to analyze the model mathematically as well as by using the PC applications MATLAB and Excel. Conclusion of the thesis is the comparison of these three options and review of the economic relevance of the results.

Keywords: difference, differential gear, differential equation, difference equation, discretization, nonlinear autonomous systems, stability of the solution.

Obsah

Úvod	7
I Teoretická část	8
1 Základy diferenciálního počtu více proměnných	9
1.1 Pojem diferenciál a diferencovatelnost funkce	9
1.2 Diferenciální rovnice 1. řádu	11
1.2.1 Základní pojmy	11
1.2.2 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	12
1.2.3 Homogenní diferenciální rovnice	13
1.2.4 Lineární diferenciální rovnice	13
1.3 Systémy diferenciálních rovnic	15
1.3.1 Systémy lineárních diferenciálních rovnic	15
1.3.2 Homogenní systém rovnic	16
1.3.3 Nehomogenní systém rovnic	17
1.3.4 Systémy nelineárních diferenciálních rovnic	17
1.3.5 Autonomní systémy	18
1.4 Stabilita řešení	22
2 Základy diferenčního počtu	24
2.1 Pojem difference	24
2.2 Diferenční rovnice 1. řádu	25
2.2.1 Diferenční rovnice 1. typu	25
2.2.2 Diferenční rovnice 2. typu	25
2.2.3 Lineární diferenční rovnice	26
2.3 Stabilita řešení	27
3 Diskretizace	29
3.1 Základní pojmy	29
3.2 Řešený příklad	30
3.2.1 Postup řešení	30
3.2.2 Simulace v Excelu	31

3.2.3	Simulace v MATLABu	31
II	Praktická část	32
4	Ekonomický úvod	33
5	Řešený problém	34
5.1	Řešení	34
5.2	Diskretizace	37
5.3	Výsledky simulací v Excelu a MATLABu	37
5.3.1	Symetrický případ pro $p > q$	37
5.3.2	Zmenšení parametru reklamy pro $p > q$	39
5.3.3	Zvětšení parametru reklamy pro $p > q$	41
5.3.4	Zmenšení parametru kvality pro $p > q$	42
5.3.5	Zvětšení parametru kvality $p > q$	44
5.3.6	Zmenšení parametru ceny pro $p > q$	45
5.3.7	Zvětšení parametru ceny pro $p > q$	47
5.3.8	Symetrický případ pro $p < q$	48
5.3.9	Zmenšení parametru reklamy pro $p < q$	50
5.3.10	Zvětšení parametru reklamy pro $p < q$	51
5.3.11	Zmenšení parametru kvality pro $p < q$	53
5.3.12	Zvětšení parametru kvality $p < q$	54
5.3.13	Zmenšení parametru ceny pro $p < q$	56
5.3.14	Zvětšení parametru ceny pro $p < q$	57
5.4	Shrnutí výsledků simulací	59
	Závěr	60
	Seznam obrázků	62
	Literatura	63

Úvod

Následující text se zabývá problematikou modelování dynamických procesů, která je následně aplikována na konkrétním ekonomickém problému. Jako výchozí literaturu pro teoretický základ jsme použili zdroj [5] a poté jsme tyto znalosti aplikovali na konkrétní model ze článku [8]. Jedná se o model popsáný soustavou diferenciálních rovnic, jejichž řešení aproximujeme pomocí diferenčních rovnic procesem zvaným diskretizace. K výpočtu aproximací byly použity programy MATLAB a Excel.

Práce je rozdělena do dvou kapitol a ty se dále člení na podkapitoly. První kapitola se věnuje teoretickému výkladu a dělí se na tři podkapitoly. První podkapitola se věnuje diferenciálnímu počtu více proměnných. Obsahuje definice základních pojmů, výčet základních typů rovnic i systémů a v neposlední řadě stabilitu řešení. Druhá podkapitola se věnuje diferenčnímu počtu a obsahuje fakticky stejnou strukturu teorie jako podkapitola předešlá s tím rozdílem, že se jedná o rovnice diferenční. Třetí a poslední podkapitola obsahuje teorii diskretizace, tedy postup převodu diferenciálních rovnic na rovnice diferenční. V této podkapitole rovněž nalezneme řešený vzorový příklad, podle kterého budeme postupovat v praktické části. Zároveň byly provedeny vzorové simulace v programech MATLAB a Excel, které jsou následně vyhodnoceny. Druhá kapitola je zaměřena na aplikaci teorie z první kapitoly na daný ekonomický problém, na jehož základě celá bakalářská práce vznikla. Tato kapitola se dělí na dvě podkapitoly. První obsahuje ekonomickou teorii, následující se zabývá popisem vybraného ekonomického problému a jeho následným řešením. Řešení je realizováno opět třemi způsoby - matematicky a na počítači v programech MATLAB a Excel. Na závěr je rovněž zhodnocena ekonomická relevance obdržených výsledků.

V první kapitole čerpáme ze zdrojů [2], [6], [3] a [9], v druhé ze zdrojů [10] a [4]. Třetí kapitola obsahuje teorii ze zdroje [11]. Čtvrtá vychází ze zdroje [7] a poslední ze zdrojů [8] a [5].

Předpokládá se, že čtenář má základní znalosti diferenciálního a diferenčního počtu. Bakalářská práce je sázena programem PDF $\LaTeX$.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Základy diferenciálního počtu více proměnných

V této kapitole zmíníme základní pojmy diferenciálního počtu více proměnných. Vzhledem k obsahu praktické části se omezíme na diferenciální počet funkcí dvou proměnných.

1.1 Pojem diferenciál a diferencovatelnost funkce

Diferenciálem funkce f dvou proměnných rozumíme přírůstek funkce na tečné nadrovině vedené ke grafu funkce bodem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definice 1.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (1.1)$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $df(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $df(x_0, y_0)$.

Věta 1.2. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: viz [2], str. 38. □

Věta 1.3. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace a platí $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, tj.

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k. \quad (1.2)$$

Důkaz: viz [2], str. 39. □

Věta 1.4. Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak je v tomto bodě také diferencovatelná.

Důkaz: viz [2], str. 41. □

Definice 1.5. Nechť funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu m včetně. Diferenciálem m -tého řádu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme homogenní funkci m -tého stupně

$$d^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{(\partial x)^j (\partial y)^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}. \quad (1.3)$$

Definice 1.6. Taylorovým polynomem stupně $n \in \mathbb{N}$ funkce f se středem v bodě $[x_0, y_0]$ nazýváme polynom

$$\begin{aligned} T_n(f, x_0, y_0, x, y) &= \\ &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{(\partial x)^j (\partial y)^{n-j}}(x_0, y_0) (x - x_0)^j (y - y_0)^{n-j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pokud je z kontextu dána funkce f a střed $[x_0, y_0]$, píšeme stručně $T_n(x, y)$.

Věta 1.7. Nechť funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y), \quad (1.5)$$

kde $T_n(x, y)$ je Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{(\partial x)^j (\partial y)^{n+1-j}}(x^*, y^*) (x - x_0)^j (y - y_0)^{n+1-j}, \quad (1.6)$$

kde $x^* = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, $y^* = y_0 + \vartheta(y - y_0)$ pro vhodné $\vartheta \in (0, 1)$.

Důkaz: viz [2], str. 43. □

1.2 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.2.1 Základní pojmy

Definice 1.8. Nechť F je funkce, jejíž definiční obor G je podmnožinou trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovnice

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \text{nebo stručněji} \quad F(x, y, y') = 0, \quad (1.7)$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu. Partikulárním řešením této rovnice rozumíme funkci y , která je definovaná v nějakém intervalu $J \in \mathbb{R}$ a splňuje pro všechna $x \in J$ tyto podmínky:

$$\begin{aligned} [x, y(x), y'(x)] &\in G, \\ F(x, y(x), y'(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Definice 1.9. Nechť y_1 je řešení rovnice (1.7) definované na intervalu J_1 a y_2 je řešení téže rovnice definované na intervalu J_2 . Je-li $J_1 \subset J_2$ a $y_1(x) = y_2(x)$ na intervalu J_1 , říkáme, že řešení y_1 je zúžením řešení y_2 na interval J_1 .

Definice 1.10. Nechť f je funkce, jejíž definiční obor G je podmnožinou dvojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^2$. Rovnice

$$y' = f(x, y), \quad (1.9)$$

která je zvláštním případem rovnice (1.7), se nazývá diferenciální rovnice rozřešená vzhledem k y' .

Dále se budeme zabývat výhradně rovnicemi (a soustavami rovnic) tohoto typu.

Věta 1.11. *Nechť funkce f je spojitá na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Potom ke každému bodu $[x_0, y_0] \in G$ existuje alespoň jedno řešení y rovnice (1.9) definované v jistém okolí bodu x_0 takové, že $y(x_0) = y_0$.*

Důkaz: viz [6], str. 1. □

Problém určit funkci y takovou, že

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.10)$$

se nazývá počáteční (Cauchyho) problém. Číslo y_0 se nazývá počáteční hodnota řešení y v bodě x_0 .

Definice 1.12. Řekneme, že počáteční problém (1.10) má právě jedno řešení, když existuje řešení y (tzv. úplné řešení) takové, že každé jiné řešení je jeho zúžením.

Definice 1.13. Obecným řešením diferenciální rovnice (1.9) rozumíme každé její řešení $y(x, c)$, z něhož lze vhodnou volbou konstanty c obdržet libovolné řešení této rovnice.

Řešení rovnice (1.9) lze interpretovat geometricky. Tato rovnice přiřazuje každému bodu $[x, y]$ definičního oboru G funkce f právě jednu hodnotu $y'(x)$, kterou lze chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tato přímka se znázorňuje obvykle krátkou úsečkou, která má střed v bodě $[x, y]$ a směrnici $y'(x)$. Tato úsečka se nazývá lineární element. Množina všech lineárních elementů dané diferenciální rovnice se nazývá směrové pole. Funkce y je zřejmě řešením rovnice (1.9) právě tehdy, když tečna v každém bodě $[x, y(x)]$ jejího grafu obsahuje příslušný lineární element. Křivky, v jejichž bodech mají lineární elementy tentýž směr, nazýváme izokliny. Jsou určeny rovnicí

$$k = f(x, y), \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

1.2.2 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice 1.14. Diferenciální rovnici se separovanými proměnnými nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí tvaru

$$y' = f(x)g(y), \quad (1.12)$$

kde f a g jsou spojitě funkce na nějakých otevřených intervalech I resp. J , a $g(y) \neq 0$ pro $y \in J$.

Věta 1.15. *Budte $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě funkce a $g(y) \neq 0$ na (c, d) . Pak je funkce y řešením počátečního problému*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \quad y_0 \in (c, d) \quad (1.13)$$

na intervalu I právě tehdy, když

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s)ds \quad \text{pro každé } x \in I. \quad (1.14)$$

Důkaz: viz [6], str. 3. □

Řešitelnost diferenciální rovnice se separovanými proměnnými zaručuje následující věta.

Věta 1.16. Budte $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, spojité funkce, $g(y) \neq 0$ na (a, b) . Pak má počáteční problém (1.13) právě jedno řešení, které je určeno implicitně vzorcem (1.14).

Důkaz: viz [6], str. 4. □

1.2.3 Homogenní diferenciální rovnice

Definice 1.17. Funkce $g(x, y)$ dvou proměnných definovaná na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se nazývá homogenní (řádu nula), jestliže pro každé $t > 0$ platí

$$g(tx, ty) = g(x, y). \quad (1.15)$$

Homogenní diferenciální rovnici nazveme takovou diferenciální rovnici tvaru (1.9), kde f je homogenní funkce.

Předpokládejme, že funkce f je spojitá na nějakém intervalu J . Když položíme $u = y/x$ pro $x \neq 0$, platí $y' = u'x + u$ a rovnice $y' = f(x, y)$ se transformuje na rovnici $u'x + u = f(1, u)$, kterou lze upravit do tvaru $u' = 1/x(f(1, u) - u)$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Řešení původní rovnice potom dostaneme z řešení této rovnice vztahem $y = ux$.

1.2.4 Lineární diferenciální rovnice

Definice 1.18. Lineární diferenciální rovnici (1. řádu) nazveme obyčejnou diferenciální rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (1.16)$$

Pokud je funkce $b(x)$ identicky nulová, potom tuto rovnici nazýváme homogenní, v opačném případě nehomogenní.

Rovnici

$$y' = a(x)y. \quad (1.17)$$

nazýváme homogenní diferenciální rovnice přidružená k rovnici (1.16).

Věta 1.19. *Nechť y_1, y_2 jsou řešení rovnice (1.17) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením této rovnice. Množina všech řešení této rovnice tedy tvoří vektorový prostor.*

Důkaz: viz [3], str. 21. □

Věta 1.20. *Nechť y_1, y_2 jsou řešení rovnice (1.16) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že $c_1 + c_2 = 1$. Pak také funkce $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením rovnice (1.16) a $y_1 - y_2$ je řešením rovnice (1.17). Množina všech řešení rovnice (1.16) tedy tvoří afinní prostor, jehož zaměření je množina všech řešení rovnice (1.17). Platí tedy*

$$y_O = y_P + y^*, \quad (1.18)$$

kde y_O je obecné řešení rovnice (1.16), y_P je libovolné partikulární řešení rovnice (1.16) a y^ je obecné řešení rovnice (1.17).*

Důkaz: viz [3], str. 22. □

Věta 1.21. *Nechť funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce na intervalu I . Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak počáteční problém (1.10), kde $f(x, y) = a(x)y + b(x)$, má právě jedno řešení, a to existuje na celém intervalu I .*

Důkaz: viz [3], str. 20. □

Dále budeme předpokládat, že funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce definované na intervalu I a ukážeme postup řešení těchto rovnic. Podle věty 1.20 stačí najít obecné řešení rovnice (1.17) a libovolné partikulární řešení rovnice (1.16).

Obecné řešení homogenní rovnice

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, takže podle věty 1.16 má každý počáteční problém

$$y' = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

právě jedno řešení definované na celém intervalu I , které obdržíme ze vztahu (1.14) integrací a jednoduchými úpravami, a dostaneme

$$y = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}. \quad (1.20)$$

Obecné řešení lze potom zapsat ve tvaru

$$y = C \cdot e^{\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

kde $\int a(x) dx$ značí libovolnou, ale pevnou primitivní funkci k $a(x)$.

Partikulární řešení

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y = C(x) \cdot e^{\int a(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (1.22)$$

tj. ve vzorci pro obecné řešení nahradíme konstantu C neznámou funkcí $C(x)$, proto se tato metoda nazývá metoda variace konstanty. Dosazením vztahu (1.22) do rovnice (1.16) dostaneme podmínku

$$C'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}, \quad (1.23)$$

takže $C(x)$ bude libovolná primitivní funkce k $b(x)e^{-\int a(x)dx}$.

Obecné řešení

Podle věty 1.20 tedy dostaneme, že obecné řešení rovnice (1.16) je

$$y = C \cdot e^{\int a(x)dx} + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

1.3 Systémy diferenciálních rovnic

1.3.1 Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Definice 1.22. Systémem lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu nazveme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\dots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou neznámé funkce proměnné t , $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou spojité a reálné funkce na nějakém intervalu I a $'$ značí derivaci podle t . Tuto soustavu můžeme zapsat pomocí matic jako

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (1.26)$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ a $\mathbf{b}(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)]^T$. Řešením budeme rozumět n -vektorovou funkci $\mathbf{x}$, která je diferencovatelná na nějakém podintervalu J intervalu I a splňuje zde rovnici (1.26) (resp. soustavu rovnic (1.25)). Je-li $\mathbf{b}(t) = 0$ pro každé $t \in I$, nazýváme soustavu (1.25) homogenní, v opačném případě nehomogenní.

O soustavě

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (1.27)$$

říkáme, že je homogenní přidružená k soustavě (1.25).

Pojem zúžení řešení soustavy diferenciálních rovnic definujeme analogicky jako u jedné diferenciální rovnice.

Definice 1.23. Řešení soustavy (1.25) se nazývá úplné řešení, když není zúžením žádného jiného řešení rovnice (1.25).

Problém určit řešení (x) soustavy (1.25) splňující podmínku $x(t_0) = x_0$ se analogicky jako u jedné diferenciální rovnice nazývá počáteční (Cauchyho) problém. Stručně ho budeme zapisovat ve tvaru

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.28)$$

Věta 1.24. Necht' $x, A(t), b(t)$ jsou stejné jako v definici 1.22 a necht' dále $t_0 \in I$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje právě jedno x splňující

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.29)$$

které je definované na celém intervalu I . Toto x je limitou tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 0 \\ \varphi_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)]ds, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Důkaz: viz [6], str. 21. □

1.3.2 Homogenní systém rovnic

Věta 1.25. Necht' x_1, x_2 jsou řešení soustavy (1.27) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Potom také $c_1x_1 + c_2x_2$ je řešením této soustavy, tj. množina všech řešení soustavy (1.27) tvoří vektorový prostor.

Důkaz: viz [3], str. 53. □

Definice 1.26. Řešení $x_1, x_2, \dots, x_k$ soustavy (1.27) se nazývají lineárně závislá, když existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_k$, které nejsou všechny rovny nule, a platí

$$c_1x_1(t) + \dots + c_kx_k(t) = 0 \quad (1.31)$$

pro všechna $t \in I$. V opačném případě se nazývají lineárně nezávislá.

Věta 1.27. Množina všech řešení soustavy (1.27) tvoří vektorový prostor dimenze n .

Důkaz: viz [6], str. 25. □

Definice 1.28. Libovolnou bázi vektorového prostoru všech řešení rovnice (1.27) nazýváme fundamentální systém řešení rovnice (1.27).

1.3.3 Nehomogenní systém rovnic

Věta 1.29. *Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jsou řešení rovnice (1.25) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že $c_1 + c_2 = 1$. Pak také funkce $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ je řešením rovnice (1.25) a $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ je řešením rovnice (1.27). Množina všech řešení rovnice (1.25) tedy tvoří afinní prostor, jehož zaměření je množina všech řešení rovnice (1.27). Platí tedy*

$$\mathbf{x}_O = \mathbf{x}_P + \mathbf{x}^*, \quad (1.32)$$

kde $\mathbf{x}_O$ je obecné řešení rovnice (1.25), $\mathbf{x}_P$ je libovolné partikulární řešení rovnice (1.25) a $\mathbf{x}^*$ je obecné řešení rovnice (1.27).

Důkaz: viz [3], str. 60. □

1.3.4 Systémy nelineárních diferenciálních rovnic

Definice 1.30. Systémem nelineárních diferenciálních rovnic 1. řádu nazveme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.33)$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou neznámé funkce proměnné t , $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou funkce definované na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a $'$ značí derivaci podle t . Tuto soustavu můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1.34)$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [f_1(t, x_1, \dots, x_n), f_2(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)]$.

Řešením budeme rozumět n -vektorovou funkci $\mathbf{x}$, která je diferencovatelná na nějakém podintervalu J intervalu I a splňuje zde rovnici (1.34) (resp. soustavu rovnic (1.33)).

Pojem úplného řešení definujeme analogicky jako u systémů lineárních diferenciálních rovnic. Buď nyní $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $[t_0, \mathbf{x}_0] \in G$. Problém určit řešení rovnice (1.34), které splňuje počáteční podmínku

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.35)$$

se nazývá počáteční (Cauchyho) problém. Říkáme, že počáteční problém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.36)$$

je jednoznačný, jestliže ke každým dvěma řešením $\mathbf{x}_1(t)$, $t \in J_1$, $\mathbf{x}_2(t)$, $t \in J_2$ problému (1.36) existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ pro každé $t \in J_1 \cap J_2 \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

1.3.5 Autonomní systémy

Definice 1.31. Autonomním systémem obyčejných diferenciálních rovnic nazveme systém rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.37)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Množina Ω se nazývá fázový prostor.

V celé kapitole budeme předpokládat, že $\mathbf{f}$ je spojitá funkce taková, že počáteční problém (1.37) s podmínkou

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.38)$$

má jediné řešení pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

Trajektorie, stacionární body

Věta 1.32. *Je-li*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (1.39)$$

řešením úlohy (1.37),(1.38), pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + \tau) \quad (1.40)$$

řešením rovnice (1.37) s počáteční podmínkou

$$\mathbf{y}(t_0 - \tau) = \mathbf{x}_0. \quad (1.41)$$

Je-li $\mathbf{x}$ definováno na intervalu (t_1, t_2) , je $\mathbf{y}$ definováno na intervalu $(t_1 - \tau, t_2 - \tau)$.

Důkaz: viz [9], str. 35. □

Tato věta ukazuje, že autonomní systémy popisují děje invariantní vzhledem k posunutí v čase. Bez újmy na obecnosti se tedy u autonomních systémů můžeme omezit na počáteční problémy s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.42)$$

Řešení

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (1.43)$$

problému (1.37),(1.42) lze interpretovat buďto jako graf zobrazení $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, nebo jako křivku v prostoru Ω zadanou parametricky. Tuto křivku nazveme trajektorií řešení $\mathbf{x}$.

Věta 1.33. *Jsou-li*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \quad (1.44)$$

řešení systému (1.37), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají žádný společný bod.

Důkaz: viz [9], str. 36.

□

Definice 1.34. Bod $x^* \in \Omega$ se nazývá stacionární bod (singulární bod) rovnice (1.37), jestliže $f(x^*) = 0$.
Trajektorie řešení rovnice (1.37) se nazývá cyklus, je-li uzavřenou křivkou.

Věta 1.35. Trajektorie řešení autonomního systému (1.37) jsou jednoho z typů:

- *stacionární body (odpovídají konstantním řešením)*
- *cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením)*
- *trajektorie, které samy sebe neprotínají.*

Důkaz: viz [9], str. 36.

□

Dále se budeme zabývat autonomními systémy dvou rovnic, tj. systémy tvaru

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}\tag{1.45}$$

Definice 1.36. (Typy stacionárních bodů v rovině) Stacionární bod $[x^*, y^*]$ systému (1.45) se nazývá

- bod rotace, jestliže v jeho libovolném okolí leží cyklus, obsahující $[x^*, y^*]$ ve svém vnitřku;
- střed, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že každá trajektorie s $[x(0), y(0)] \in U$ je cyklem obsahujícím $[x^*, y^*]$ ve svém vnitřku (střed je speciálním případem bodu rotace);
- ohnisko, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $[x(0), y(0)] \in U$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*] \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*] \quad (1.46)$$

a pro orientovaný úhel $\varphi(t)$, který svírá vektor $[x(t), y(t)] - [x^*, y^*]$ s nějakým pevným vektorem platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \pm\infty \quad (1.47)$$

(trajektorie se přibližuje ke stacionárnímu bodu nebo se od něho vzdaluje po spirále);

- uzel, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $[x(0), y(0)] \in U$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*] \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*] \quad (1.48)$$

a pro orientovaný úhel $\varphi(t)$, který svírá vektor $[x(t), y(t)] - [x^*, y^*]$ s nějakým pevným vektorem existuje vlastní $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ nebo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$;

- sedlo, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $[x, y] = [x(t), y(t)]$ takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*] \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} [x(t), y(t)] = [x^*, y^*], \quad (1.49)$$

Stacionární body lineárního autonomního systému

Nechť je dán autonomní systém

$$x' = Ax, \quad (1.50)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = [x, y]. \quad (1.51)$$

Je-li x řešením rovnice (1.50), je též rx , $r \in \mathbb{R}$, řešením této rovnice. Trajektorie odpovídající takovým řešením jsou tedy stejnohlé se středem stejnohllosti v počátku.

Věta 1.37. *Nechť A je stejná jako v (1.51). Označme*

$$\begin{aligned} \Delta &= \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ D &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

takže D je diskriminant charakteristické rovnice matice A . Nechť $\Delta \neq 0$. Bod $[0, 0]$ je potom singulární bod rovnice (1.50) typu

- *ohnisko* $\Leftrightarrow \Delta > 0, D < 0, a_{11} + a_{22} \neq 0$,
- *střed* $\Leftrightarrow \Delta > 0, D < 0, a_{11} + a_{22} = 0$,
- *uzel* $\Leftrightarrow \Delta > 0, D \geq 0$,
- *sedlo* $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

Důkaz: viz [6], str. 105. □

Stacionární body nelineárního autonomního systému

Věta 1.38. *Nechť je dán autonomní systém*

$$x' = ax + by + P(x, y), \quad y' = cx + dy + Q(x, y) \quad (1.53)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a funkce P, Q jsou spojité v okolí bodu $[0, 0]$. Nechť $ad - bc \neq 0$ a nechť existuje $\epsilon > 0$ tak, že

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{|P(x, y)| + |Q(x, y)|}{(|x| + |y|)^{1+\epsilon}} = 0. \quad (1.54)$$

Je-li bod $[0, 0]$ uzlem nebo ohniskem pro systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \quad (1.55)$$

pak je stejného typu i pro systém (1.53). Je-li bod $[0, 0]$ středem pro systém (1.55), pak je bodem rotace nebo ohniskem pro systém (1.53). Je-li bod $[0, 0]$ sedlem pro systém (1.55) a funkce P, Q mají spojité parciální derivace podle obou proměnných v okolí počátku, pak je $[0, 0]$ sedlem i pro systém (1.53).

Důkaz: viz [9], str. 40. □

Věta 1.39. *Nechť funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ takového, že $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Nechť*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Nechť dále $\det \mathbf{J} \neq 0$. Potom je bod $[x_0, y_0]$ izolovaným singulárním bodem systému (1.45). Je-li bod $[0, 0]$ uzel, ohnisko nebo sedlo systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x}, \quad (1.57)$$

potom je bod $[x_0, y_0]$ singulárním bodem systému (1.45) stejného typu. Je-li však bod $[0, 0]$ střed systému (1.57), potom je bod $[x_0, y_0]$ buď bod rotace nebo ohnisko systému (1.45).

Důkaz: viz [9], str. 42. □

1.4 Stabilita řešení

Definice 1.40. Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (1.37) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\mathbf{x}_0$ se nazývá *stejněměrně stabilní*, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (1.37) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \epsilon$. *Není-li řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ systému (1.37) stejněměrně stabilní, nazývá se nestabilní.*

Definice 1.41. Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ je řešení systému (1.37) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\mathbf{x}_0$ se nazývá *stejněměrně asymptoticky stabilní*, je-li stejněměrně stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (1.37) splňující podmínku $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| = 0. \quad (1.58)$$

Věta 1.42. *Nechť $\mathbf{A}$ je konstantní matice. Jestliže všechny kořeny její charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ (vlastní čísla matice $\mathbf{A}$) mají nekladnou reálnou část a ty s nulovou reálnou částí jsou jednoduché, pak řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního autonomního systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.59)$$

je stejněměrně stabilní.

Důkaz: viz [9], str. 41. □

Věta 1.43. Řešení $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního autonomního systému (1.59) je stejnoměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ má zápornou reálnou část.

Důkaz: viz [9], str. 41. □

Definice 1.44. Nechť $[x_0, y_0]$ je stacionární bod systému (1.37) a nechť existují parciální derivace funkcí f a g v tomto bodě. Matice $\mathbf{J}$ z rovnice (1.56) se nazývá Jacobiho matice (nebo též variační matice) zobrazení (f, g) v bodě $[x_0, y_0]$ a systém (1.57) se nazývá variační rovnice systému (1.37) v bodě $[x_0, y_0]$.

Věta 1.45. Nechť $[x_0, y_0]$ je stacionární bod systému (1.37) a nechť zobrazení f a g je spojitě diferencovatelné. Mají-li všechna vlastní čísla variační matice $\mathbf{J}$ v bodě $[x_0, y_0]$ záporné reálné části, pak konstantní řešení $\mathbf{x}(t) \equiv [x_0, y_0]^T$ systému (1.37) je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Pokud existuje vlastní číslo této matice s kladnou reálnou částí, pak je konstantní řešení $\mathbf{x}(t) \equiv [x_0, y_0]^T$ systému (1.37) nestabilní.

Důkaz: viz [9], str. 42. □

Kapitola 2

Základy diferenčního počtu

V této kapitole zmíníme základní pojmy diferenčního počtu. Vzhledem k obsahu praktické části se omezíme na diferenční rovnice prvního řádu.

2.1 Pojem difference

Definice 2.1. Nechť je dáno $x_0 \in \mathbb{R}$ a $h > 0$. Nechť dále funkce $f(x)$ je definována v bodech x_0 a $x_0 + h$. Diferencí funkce $f(x)$ v bodě x_0 rozumíme číslo

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (2.1)$$

Číslo h nazýváme difference argumentu nebo diferenční krok. Bod x_0 nazýváme počáteční bod difference.

Definice 2.2. Nechť je dáno $h > 0$ a funkce $f(x)$ je definována na neprázdné množině M takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x \in M \Rightarrow x + h \in M$. Diferencí funkce $f(x)$ potom rozumíme funkci, které každému číslu $x \in M$ přiřazuje číslo $\Delta f(x)$, tedy

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in M \quad (2.2)$$

Množinu M nazýváme definiční obor difference.

Definice 2.3. Nechť je dáno $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále funkce $f(x)$ je definována v bodech $x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh$. Diferencí řádu n funkce $f(x)$ v bodě x_0 rozumíme číslo $\Delta^n f(x_0)$ definované rekurentně vztahem

$$\Delta^n f(x_0) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x_0)), \quad (2.3)$$

kde $\Delta^1 f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Definice 2.4. Nechť je dáno $h > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále funkce $f(x)$ je definována na neprázdné množině M takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x \in M \Rightarrow x + h \in M$. Diferencí řádu n funkce $f(x)$ potom rozumíme funkci, které každému číslu $x \in M$ přiřazuje číslo $\Delta^n f(x)$.

Příkladem množiny M splňující podmínku $x \in M \Rightarrow x + h \in M$ je každá množina tvaru $\{x_0 + nh, n \in \mathbb{N}_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sumací rozumíme řešení opačného problému než hledání difference. Máme danu diferencí a hledáme funkci, kterou jsme diferencovali.

Definice 2.5. Je dána funkce $f(x)$ definovaná na neprázdné množině M takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x \in M \Rightarrow x + h \in M$. Nechť funkce $F(x)$ je taková, že pro každé $x \in M$ je $\Delta F(x) = f(x)$. Funkci $F(x)$ potom nazýváme sumací funkce $f(x)$ v M a značíme ji $\Delta^{-1} f(x)$.

2.2 Diferenční rovnice 1. řádu

2.2.1 Diferenční rovnice 1. typu

Definice 2.6. Nechť je funkce $f(x, y, \Delta y)$ definována pro všechna $x \in M$, kde M je množina taková, že $x \in M \Rightarrow x + h \in M$. Rovnici tvaru

$$f(x, y, \Delta y) = 0, \quad (2.4)$$

ve které je neznámou funkce $y(x)$, nazýváme diferenční rovnicí 1. řádu a 1. typu definovanou na M . Partikulárním řešením této rovnice v M nazýváme každou funkci $y(x)$, která pro všechna $x \in M$ splňuje danou rovnici. Obecným řešením nazýváme řešení tvaru $y(x, c)$, z něhož lze vhodnou volbou konstanty c obdržet všechna partikulární řešení.

Předchozí definice je analogická definici diferenciální rovnice, jestliže diferencí dané funkce nahradíme její derivací.

2.2.2 Diferenční rovnice 2. typu

Definice 2.7. Nechť je funkce $f(x, y(x), y(x + 1))$ definována pro všechna $x \in M$, kde M je množina taková, že $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$. Rovnici tvaru

$$f(x, y(x), y(x + 1)) = 0, \quad (2.5)$$

nazýváme diferenční rovnicí 1. řádu 2. typu definovanou na M . Partikulární a obecné řešení této rovnice definujeme analogicky jako u diferenčních rovnic prvního typu.

Je-li $M = \{x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0\}$ pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$, potom je hledaná funkce y vlastně posloupnost a používáme zápis y_x místo $y(x)$.

2.2.3 Lineární diferenční rovnice

Definice 2.8. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $M = \{x_0 + n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Diferenční rovnici tvaru

$$a_1(x)y_{x+1} + a_0(x)y_x = f(x), \quad (2.6)$$

kde $f(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$ jsou libovolné funkce proměnné x definované na M , přičemž $a_0(x) \neq 0$ a $a_1(x) \neq 0$ pro $x \in M$, nazýváme lineární diferenční rovnici 1. řádu. Funkce $a_0(x)$ a $a_1(x)$ nazýváme koeficienty a funkci $f(x)$ nazýváme pravou stranou. Jsou-li funkce $a_0(x)$ a $a_1(x)$ konstantní, potom říkáme, že rovnice (2.6) je s konstantními koeficienty.

Je-li $f(x) = 0$ pro $x \in M$, potom říkáme, že rovnice (2.6) je homogenní. V opačném případě říkáme, že je nehomogenní.

Rovnici

$$a_1(x)y_{x+1} + a_0(x)y_x = 0, \quad (2.7)$$

nazýváme homogenní rovnici přidruženou k rovnici (2.6).

Věta 2.9. Nechť je dáno $c \in M$ a $y \in \mathbb{R}$, kde M je stejné jako v definici 2.8. Potom existuje právě jedno řešení rovnice (2.6) takové, že $y_c = y$.

Důkaz: viz [10], str. 8. □

Věta 2.10. Nechť y_1, y_2 jsou řešení rovnice (2.7) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením této rovnice. Množina všech řešení této rovnice tedy tvoří vektorový prostor.

Důkaz: viz [10], str. 8. □

Věta 2.11. Nechť y_1, y_2 jsou řešení rovnice (2.6) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že $c_1 + c_2 = 1$. Pak také funkce $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením rovnice (2.6) a $y_1 - y_2$ je řešením rovnice (2.7). Množina všech řešení rovnice (2.6) tedy tvoří afinní prostor, jehož zaměření je množina všech řešení rovnice (2.7). Platí tedy

$$y_O = y_P + y^*, \quad (2.8)$$

kde y_O je obecné řešení rovnice (2.6), y_P je libovolné partikulární řešení rovnice (2.6) a y^* je obecné řešení rovnice (2.7).

Důkaz: viz [10], str. 2. □

Ukážeme si postup řešení lineární diferenční rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty a s konstantní pravou stranou. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $M = \mathbb{N}_0$. Takovou diferenční rovnici potom můžeme bez újmy na obecnosti upravit do tvaru

$$y_{x+1} = Ay_x + B, \quad (2.9)$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ a $x \in \mathbb{N}_0$. Podle věty 2.11 stačí najít libovolné partikulární řešení této rovnice a obecné řešení příslušné homogenní rovnice.

Příslušná homogenní rovnice je

$$y_{x+1} = Ay_x \quad (2.10)$$

Z tohoto vztahu zřejmě plyne, že pro každé $x \in \mathbb{N}_0$ platí

$$y_x = A^x y_0, \quad (2.11)$$

takže obecné řešení je $y_x = CA^x$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení rovnice (2.9) je např.

$$y_x = \begin{cases} xB & \text{pro } A = 1 \\ \frac{B}{1-A} & \text{pro } A \neq 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

takže obecné řešení rovnice (2.9) je

$$y_x = \begin{cases} C + xB & \text{pro } A = 1 \\ CA^x + \frac{B}{1-A} & \text{pro } A \neq 1, \end{cases} \quad (2.13)$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

2.3 Stabilita řešení

Definice 2.12. Necht $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je funkce spojitá ve druhé složce, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ a $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Bod $y^* \in \mathbb{R}^k$ nazýváme stacionární bod (equilibrium) soustavy

$$y(n+1) = f(n, y(n)), \quad y(n_0) = y_0, \quad (2.14)$$

pokud $f(n, y^*) = y^*$ pro všechna $n \geq n_0$.

Definice 2.13. Stacionární bod y^* rovnice (2.14) nazýváme

- stabilní, pokud pro každé $\epsilon > 0$ a $n_0 \geq 0$ existuje $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$ takové, že pokud $\|y_0 - y^*\| < \delta$, potom $\|y(n, n_0, y_0) - y^*\| < \epsilon$ pro všechny $n \geq n_0$. Pokud δ nezávisí na n_0 , říkáme, že je tento bod stejnoměrně stabilní. Stacionární bod nazveme nestabilním, pokud není stabilní.
- přitahující, pokud existuje $\mu = \mu(n_0)$ takové, že pokud $\|y_0 - y^*\| < \mu$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n, n_0, y_0) = y^*$. Pokud μ nezávisí na n_0 , říkáme, že je tento bod stejnoměrně přitahující.
- asymptoticky stabilní, pokud je stabilní a přitahující, a stejnoměrně asymptoticky stabilní, pokud je stejnoměrně stabilní stejnoměrně přitahující.
- exponenciálně stabilní, pokud existuje $\delta > 0$, $M > 0$, a $\eta \in (0, 1)$ takové, že pokud $\|y_0 - y^*\| < \delta$, potom $\|y(n, n_0, y_0) - y^*\| \leq M\|y_0 - y^*\|\eta^{(n-n_0)}$.

Vyšetřování stability nelineárních diferenčních rovnic je obecně složitější problém, než vyšetřování stability rovnic diferenciálních. Studium této otázky by vedlo k překročení rozumného rozsahu práce, proto se jím nebudeme zabývat. Navíc diferenční rovnice studované v praktické části práce budou představovat diskretizaci rovnic diferenciálních (podrobnosti v následující kapitole), budou tedy sloužit jako pomocné objekty pro počítačovou simulaci, nikoliv pro teoretickou analýzu.

Kapitola 3

Diskretizace

Diskretizace je numerickou metodou řešení diferenciálních rovnic, která převádí danou diferenciální rovnici na rovnici diferenční. Přibližné řešení obyčejné diferenciální rovnice se tedy nekonstruuje jako spojitá funkce, ale postupně se utváří posloupnost uzlů $x_0, x_1, x_2, \dots$ a pro ně se stanoví čísla $y_0, y_1, y_2, \dots$, která aproximují hodnoty přesného řešení $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$. Výpočty lze provést v tabulkovém procesoru (MS Excel) nebo v systému pro numerické výpočty MATLAB. Postup výpočtu lze sledovat v Excelových sešitech nebo m-filech na příloženém CD. V tištěné verzi práce jsou uvedeny pouze výsledky.

3.1 Základní pojmy

Úkolem je najít aproximaci řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = c \quad (3.1)$$

na intervalu $[a, b]$. Nejprve si zvolíme dělení $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ intervalu $[a, b]$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že uzly jsou ekvidistantní, tj. $x_i = a + ih$ pro $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, kde $h = (b - a)/n$. Při odvozování hodnot $y_0, y_1, \dots, y_n$, které jsou aproximacemi funkčních hodnot skutečného řešení rovnice (3.1) budeme postupovat tak, že v této diferenciální rovnici při dosazení $x = x_i$ nahradíme přesnou hodnotu $y(x_i)$ její aproximací y_i a derivaci $y'(x_i)$ výrazem $(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i) = (y_{i+1} - y_i)/h$, tj. směrnici přímky procházející body $[x_i, y_i]$ a $[x_{i+1}, y_{i+1}]$. Dostáváme tedy

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad (3.2)$$

přičemž vždy předpokládáme, že body $[x_i, y_i]$ leží v definičním oboru funkce $f(x, y)$. Z tohoto vztahu po snadné úpravě dostáváme

$$y_{i+1} = hf(x_i, y_i) + y_i, \quad y_0 = c, \quad (3.3)$$

což je rekurentní vztah pro posloupnost $\{y_i\}_{i=0}^n$ (tj. diferenční rovnice 2. typu), z něhož již snadno vypočteme hledané aproximace.

3.2 Řešený příklad

Odvodte obecný vzorec pro hodnotu C Kč úročených roční úrokovou mírou $100r\%$ po dobu n let. Použijte tento vzorec k nalezení hodnoty vkladu 100 Kč při zúročení 10% po dobu 10 let. Řešení aproximujte pomocí diskretizace s diskretizačním krokem 3 měsíce (což odpovídá čtvrtletnímu úročení s mírou 10%).

3.2.1 Postup řešení

Nechť $y(t)$ je hodnota vkladu v čase t . Potom při spojitém úročení s roční úrokovou mírou r musí funkce $y(t)$ splňovat vztah

$$y'(t) = ry(t) \quad (3.4)$$

a platí, že $y(0) = C$, kde C je výše původního vkladu. Jedná se tedy o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými s počáteční podmínkou.

$$\begin{aligned} y'(t) &= ry(t) \\ \frac{dy}{dt} &= ry \\ \frac{dy}{y} &= rdt \\ \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{y} &= \int_0^t rdt \\ \ln \frac{y(t)}{y(0)} &= rt \\ \frac{y(t)}{y(0)} &= e^{rt} \\ y(t) &= Ce^{rt} \end{aligned}$$

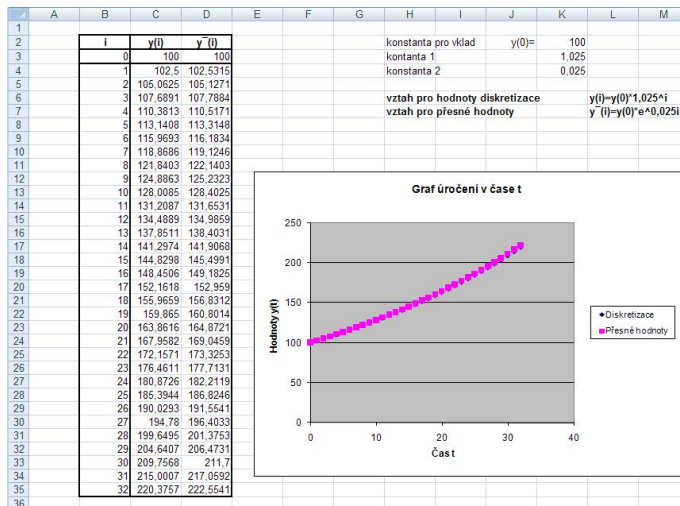
Výpočtem jsme dostali obecný vztah pro hledanou hodnotu $y(t)$.

Nyní provedeme diskretizaci. Nejprve si vypočítáme uzly. Veličina x bude značit uplynulý čas v letech. V našem případě je $a = 0$, $b = 10$ a $n = 40$, dostáváme tedy $x_i = i/4$, kde $i \in \{0, 1, \dots, 40\}$. Po dosazení do (3.3) obdržíme vztah

$$y_{i+1} = \frac{1}{4} \cdot 0.1y_i + y_i = 1.025y_i, \quad y_0 = 100. \quad (3.5)$$

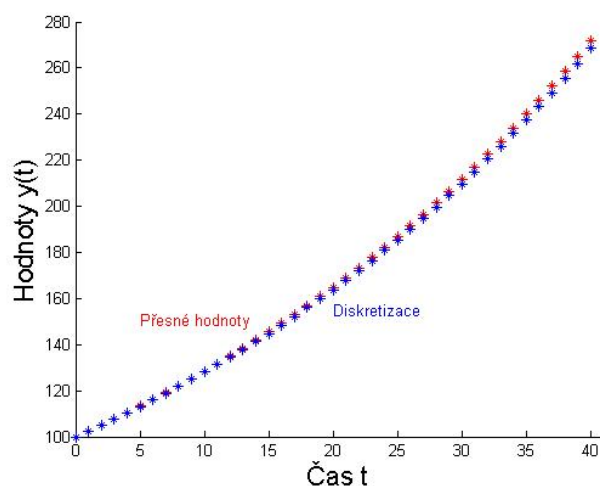
Z tohoto vztahu zřejmě plyne $y_i = 100 \cdot 1.025^i$. Pro srovnání přesná hodnota $y(x_i)$ je podle výše odvozeného vztahu rovna $100 \cdot e^{0.025i}$.

3.2.2 Simulace v Excelu



Obrázek 3.1: Simulace v Excelu

3.2.3 Simulace v MATLABu



Obrázek 3.2: Simulace v MATLABu

Z grafů vidíme, že při námi zvoleném $h = 0.1$ dává tato metoda velmi přesné výsledky a časová náročnost výpočtu je při použití výše uvedených matematických programů poměrně malá, tento diskretizační krok proto budeme používat v praktické části při simulaci řešení zkoumaného problému.

Část II

Praktická část

Kapitola 4

Ekonomický úvod

Z ekonomické teorie víme, že se na trhu střetávají dvě strany - nabídka a poptávka. Na jejich vzájemných vztazích je ve skutečnosti založen trh i tržní mechanismus. Poptávka představuje souhrn zamýšlených koupí a je určována poptávaným množstvím a cenou, za kterou jsou kupující ochotni kupovat. V různých kontextech můžeme rozlišovat poptávku celkovou, individuální a tržní. Pro poptávkovou křivku je charakteristické, že s rostoucí cenou klesá poptávané množství a naopak. Hovoříme o zákonu klesající poptávky. Poptávající tedy na trhu kupuje ekonomické statky (v našem případě produkty) a služby ke spotřebě. Rozlišujeme produkty každodenní a dlouhodobé spotřeby. Produkty každodenní spotřeby jsou nakupovány stále, zatímco produkty dlouhodobé spotřeby jsou nakupovány v dlouhých (obvykle několikaletých) intervalech, až když se opotřebují. Do první skupiny řadíme např. potraviny, bydlení, benzín, oblečení, atd. a do druhé auto, pračku, ledničku nebo televizor.

Kapitola 5

Řešený problém

Zkoumáme situaci, kdy si na společném trhu konkurují dvě firmy, které prodávají produkty dlouhodobé spotřeby. Označíme si S celkovou kapacitu trhu, $x(t)$ resp. $y(t)$ poptávky po výrobcích první resp. druhé firmy v čase t , p_1 a p_2 ceny jejich výrobků, q_1 a q_2 kvality výrobků a a_1 a a_2 ceny reklam na výrobky. Přitom předpokládáme, že firmy vyrábějí právě poptávané množství svých výrobků. Stejně jako v [8] budeme vycházet z toho, že poptávky $x(t)$ a $y(t)$ jsou řešením nelineárního autonomního systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) = (S - x - y)[(q_1 - p_1)x + a_1] \\y' &= g(x, y) = (S - x - y)[(q_2 - p_2)y + a_2]\end{aligned}\tag{5.1}$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $p_i \neq q_i$, $a_i > 0$ pro $i \in \{1, 2\}$.

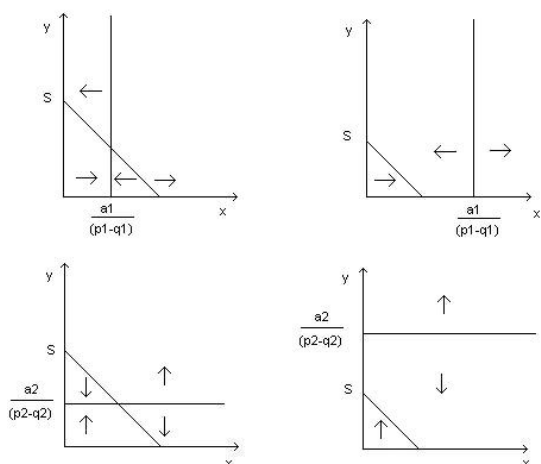
5.1 Řešení

Najdeme x a y nulkliny systému (5.1), tj. hledáme řešení rovnic x nulkliny:

$$\begin{aligned}x + y &= S \\x &= \frac{a_1}{p_1 - q_1}\end{aligned}$$

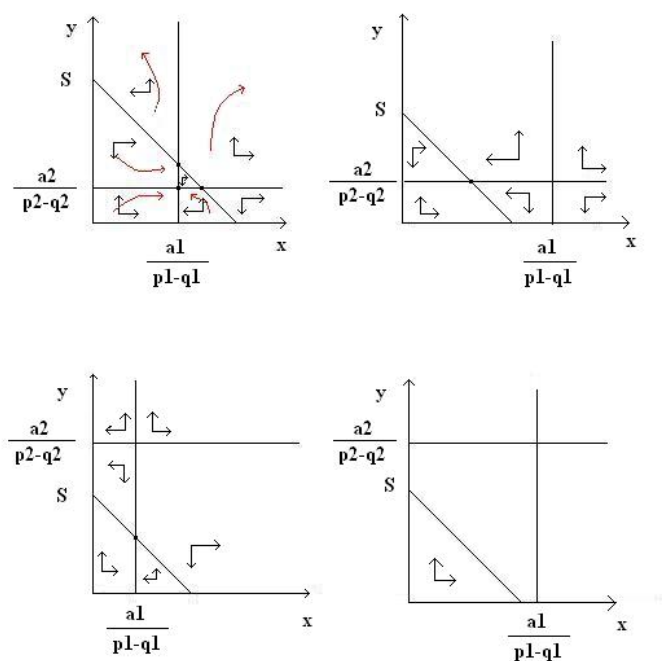
y nulkliny:

$$\begin{aligned}x + y &= S \\y &= \frac{a_2}{p_2 - q_2}\end{aligned}$$



Obrázek 5.1: Nukliny systému (5.1) pro $p_i > q_i$, $i \in \{1, 2\}$. Nahoře x-nukliny pro $x_0 < S$ a $x_0 > S$, dole y-nukliny pro $y_0 < S$ a $y_0 > S$

Spojením grafického řešení pro x a y nukliny obdržíme čtyři následující případy.



Obrázek 5.2: Fázové portréty systému (5.1) pro $p_i > q_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Šipky na obrázcích vyznačují znaménka derivací funkcí $x(t)$, $y(t)$, tj. zda jsou tyto funkce v daných oblastech rostoucí nebo klesající. Obrázky se vztahují k případu, kdy $q_1 > p_1$, $q_2 > p_2$ (níže uvidíme, že nás bude zajímat především tento případ).

Odtud vidíme, že zkoumaný systém má přímku stacionárních bodů $x + y = S$ a izolovaný stacionární bod

$$[x_0, y_0] = \left[\frac{a_1}{p_1 - q_1}, \frac{a_2}{p_2 - q_2} \right], \quad (5.2)$$

pokud tento bod neleží na této přímce.

Dále pravé strany systému (5.1) postupně derivujeme podle x a y a dostáváme tyto rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -((q_1 - p_1)x + a_1) + (S - x - y)(q_1 - p_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -((q_1 - p_1)x - a_1) \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -((q_2 - p_2)y + a_2) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -((q_2 - p_2)y + a_2) + (S - x - y)(q_2 - p_2). \end{aligned}$$

Do takto vzniklých rovnic dosadíme stacionární body x_0 a y_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= (S - \frac{a_1}{p_1 - q_1} - \frac{a_2}{p_2 - q_2})(q_1 - p_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= (S - \frac{a_1}{p_1 - q_1} - \frac{a_2}{p_2 - q_2})(q_2 - p_2). \end{aligned}$$

Dosazením do vztahů (1.52) dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta = \det J &= (S - \frac{a_1}{p_1 - q_1} - \frac{a_2}{p_2 - q_2})^2 (q_1 - p_1)(q_2 - p_2) \\ D &= (S - \frac{a_1}{p_1 - q_1} - \frac{a_2}{p_2 - q_2})^2 (q_1 - p_1 - q_2 + p_2)^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Odtud vidíme, že bude vždy $D > 0$ a znaménko Δ bude záviset na znaménkách $q_1 - p_1$ a $q_2 - p_2$. Pokud bude $q_1 < p_1$, $q_2 < p_2$ nebo $q_1 > p_1$, $q_2 > p_2$, potom podle věty 1.39 bude stacionární bod $[x_0, y_0]$ uzal. Ve druhém z těchto případů ale bude $[x(t), y(t)]$ konvergovat k $[x_0, y_0]$ pouze pro $t \rightarrow -\infty$, takže řešení našeho modelu k tomuto bodu konvergovat nebudou (pro $t \rightarrow \infty$).

Pokud bude $q_1 > p_1$, $q_2 < p_2$ nebo $q_1 < p_1$, $q_2 > p_2$, potom podle věty 1.39 bude stacionární bod $[x_0, y_0]$ sedlo a $[x(t), y(t)]$ bude konvergovat k $[x_0, y_0]$ pouze pokud některá z funkcí $x(t)$, $y(t)$ bude konstantní, tyto případy uvažovat nebudeme.

V případech, kdy $p_1 < q_1$ nebo $p_2 < q_2$, tedy nelze použít uvedenou teorii (protože $[x(t), y(t)]$ nebude konvergovat k izolovanému stacionárnímu bodu). Uvedení potřebné teorie by dalece přesáhlo rozsah této práce, jsme tedy odkázáni pouze na simulace. Za důvěryhodné je můžeme považovat proto, že v analyzovaném případě ($q_i > p_i$ pro $i \in \{1, 2\}$) dávaly výsledky v souhlasu s teorií.

5.2 Diskretizace

Zadaný systém diskretizujeme a dostaneme nový systém rovnic

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + (t_{n+1} - t_n)(S - x_n - y_n)[(q_1 - p_1)x_n + a_1] \\y_{n+1} &= y_n + (t_{n+1} - t_n)(S - x_n - y_n)[(q_2 - p_2)y_n + a_2],\end{aligned}$$

kde $t_{n+1} - t_n$ značí diskretizační krok h .

Diskretizací dostáváme systém nelineárních diferenčních rovnic. Analytické studium jejich stability vyžaduje teorii, jejíž uvedení by způsobilo neúměrné zvětšení rozsahu bakalářské práce. Avšak výsledky simulací (diferenčních rovnic) souhlasí s výsledky analýzy stability diferenciálních rovnic (v případě $p_i > q_i$).

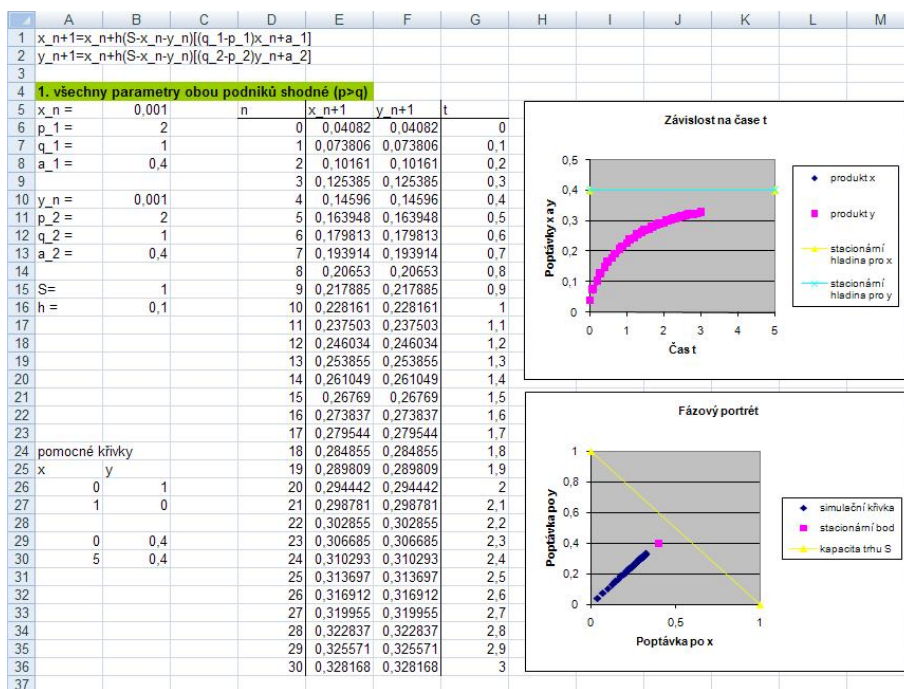
Nyní si vhodně dosadíme za proměnné a obdržené výsledky vyhodnotíme v numerických programech Excelu a MATLABu.

5.3 Výsledky simulací v Excelu a MATLABu

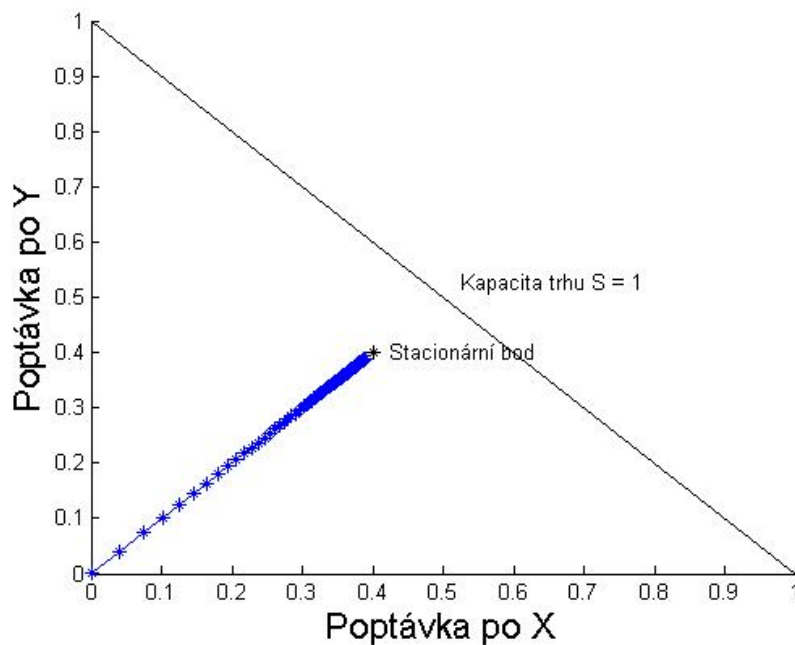
Nyní provedeme simulace pro různé hodnoty vstupních parametrů a pokusíme se analyzovat výsledky. Ve všech simulacích budeme volit $S = 1$ a $h = 0.1$. Přitom rozlišujeme případ, kdy $p > q$ a $p < q$.

5.3.1 Symetrický případ pro $p > q$

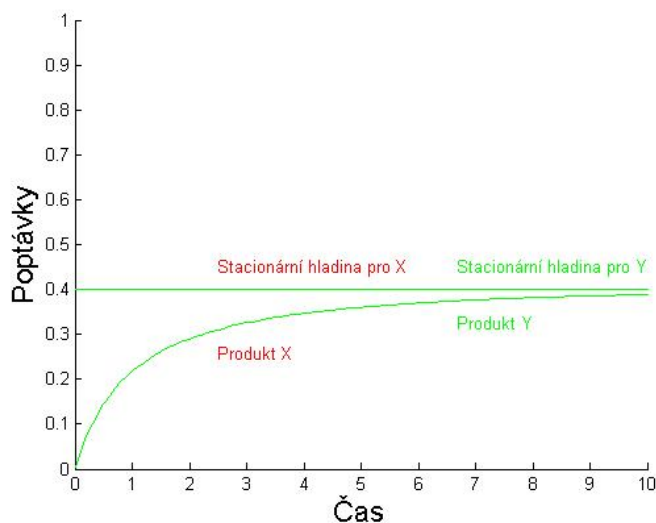
V tomto případě uvažujeme, že obě firmy na trhu mají stejně velkou poptávku po svých výrobcích. To znamená, že se hodnoty parametrů ceny, kvality i reklamy obou firem rovnají a nabývají hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 0.4]$.



Obrázek 5.3: Simulace symetrického případu v Excelu



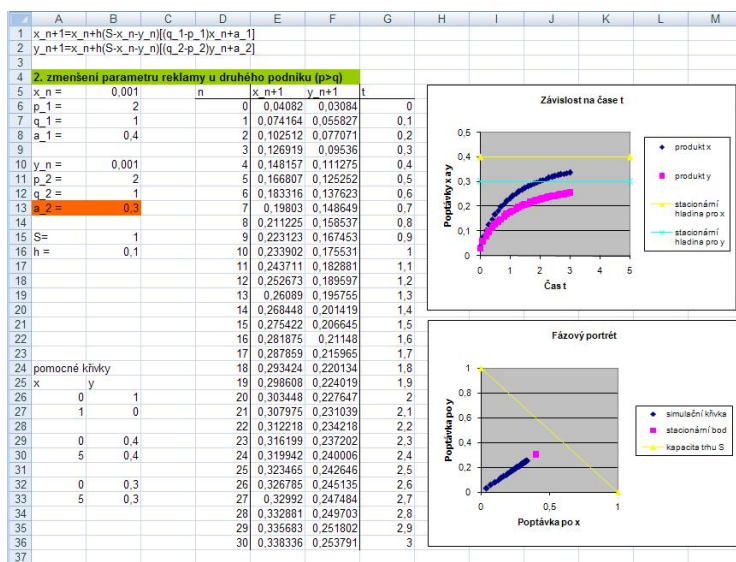
Obrázek 5.4: Fázový portrét v MATLABu pro symetrický případ



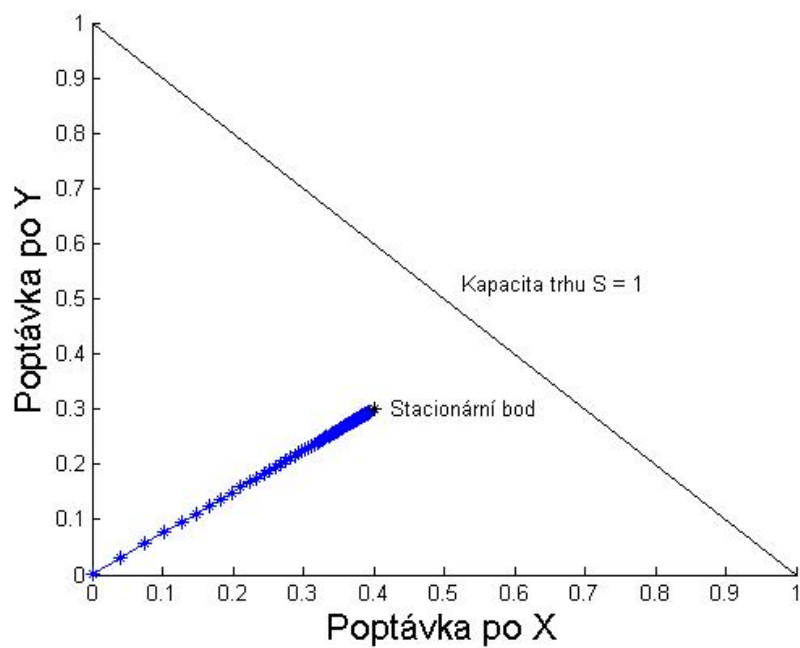
Obrázek 5.5: Závislost poptávek na čase t v MATLABu pro symetrický případ

5.3.2 Zmenšení parametru reklamy pro $p > q$

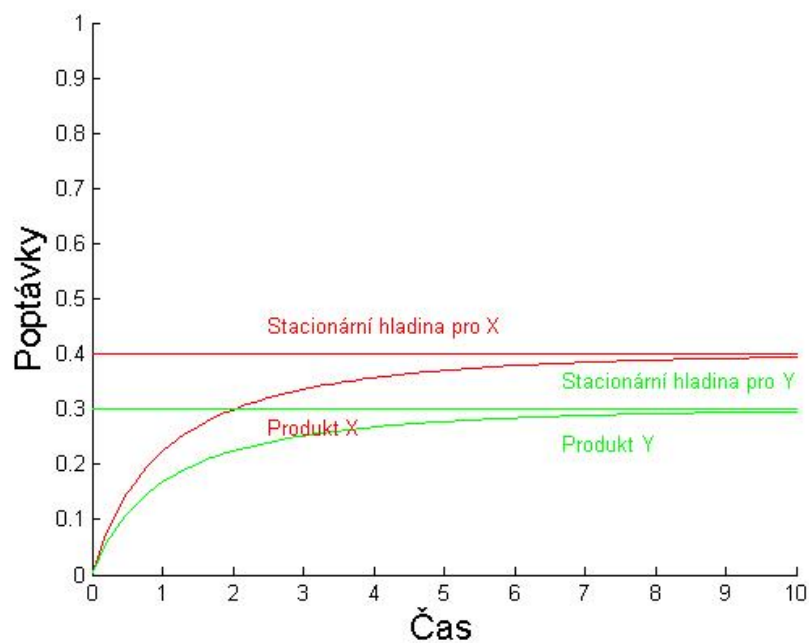
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení nákladů na reklamu. Dojde ke změně parametru a_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 0.3]$.



Obrázek 5.6: Simulace v Excelu po zmenšení a_2



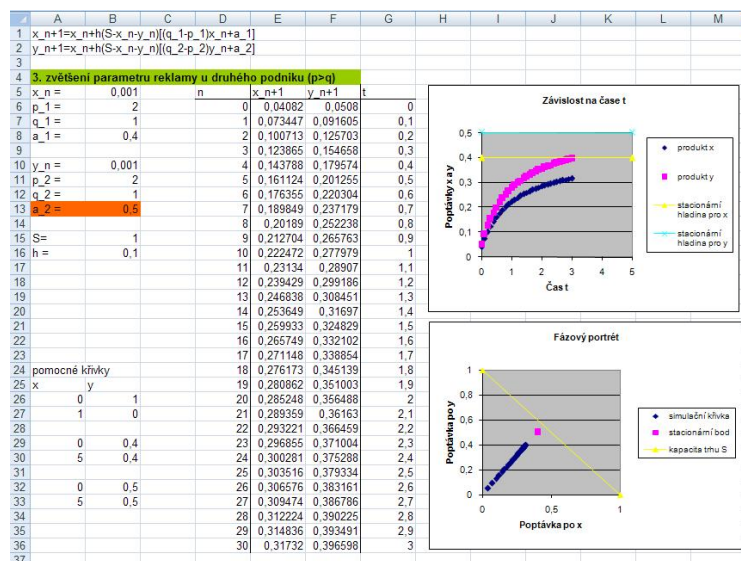
Obrázek 5.7: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení a_2



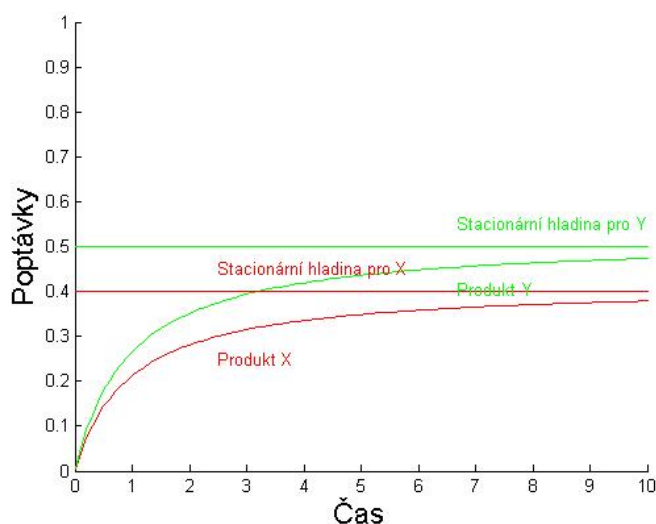
Obrázek 5.8: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení a_2

5.3.3 Zvětšení parametru reklamy pro $p > q$

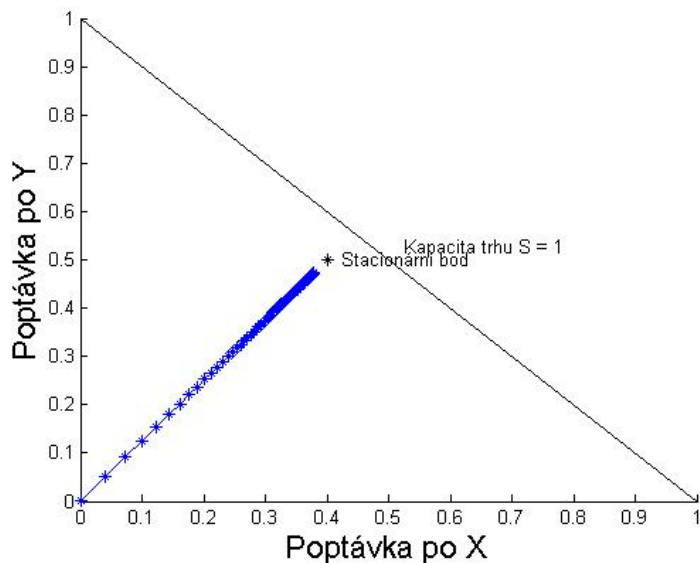
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení nákladů na reklamu. Dojde ke změně parametru a_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.5$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 0.5]$.



Obrázek 5.9: Simulace v Excelu po zvětšení a_2



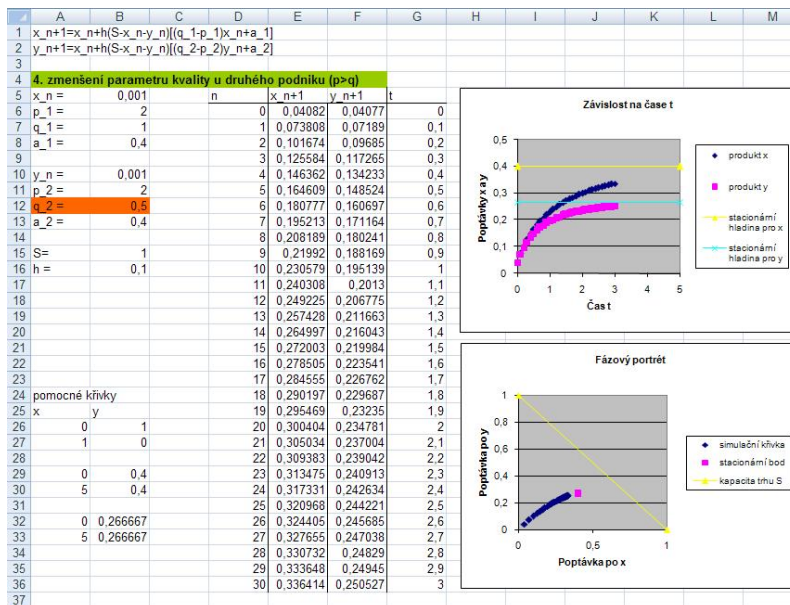
Obrázek 5.10: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení a_2



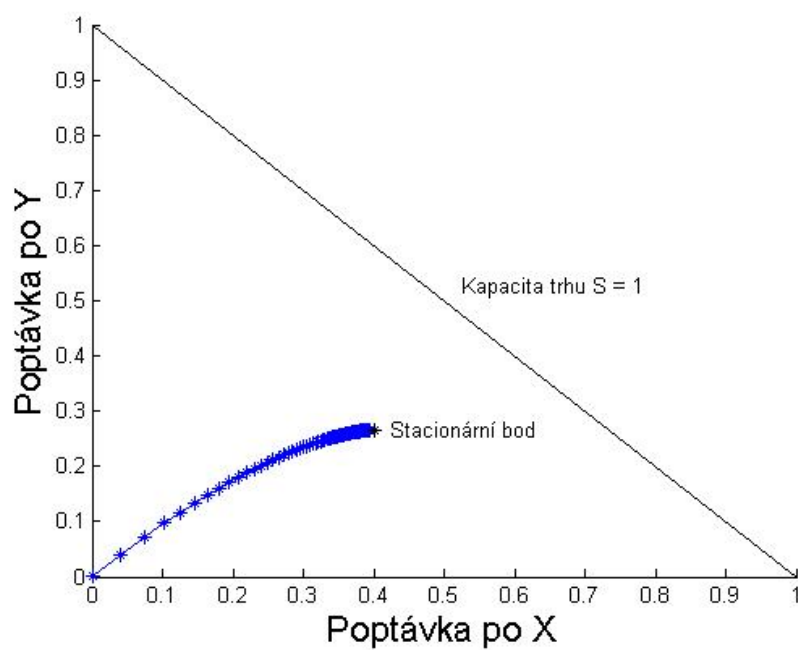
Obrázek 5.11: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení a_2

5.3.4 Zmenšení parametru kvality pro $p > q$

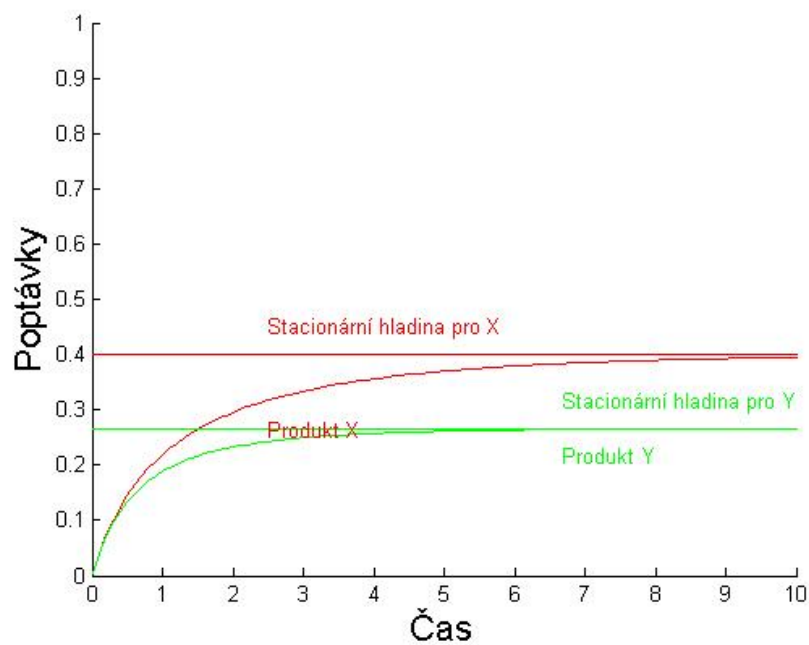
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení kvality výrobků. Dojde ke změně parametru q_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 4/15]$.



Obrázek 5.12: Simulace v Excelu po zmenšení q_2



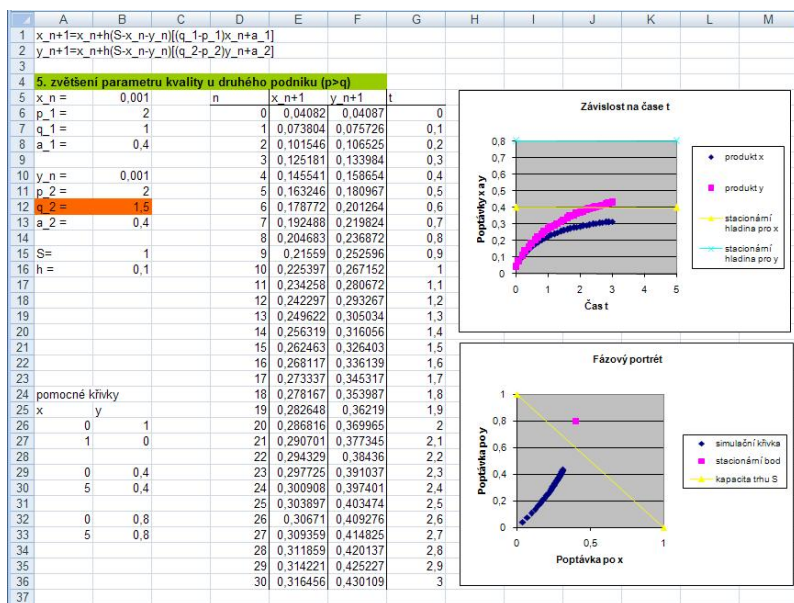
Obrázek 5.13: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení q_2



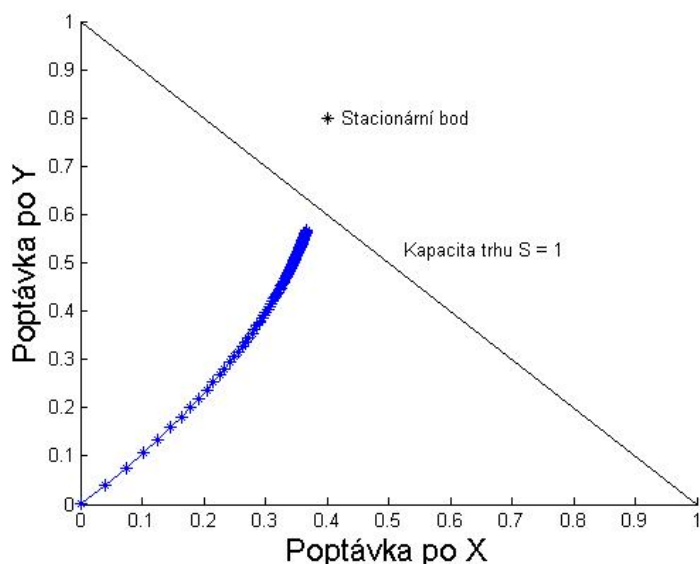
Obrázek 5.14: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení q_2

5.3.5 Zvětšení parametru kvality $p > q$

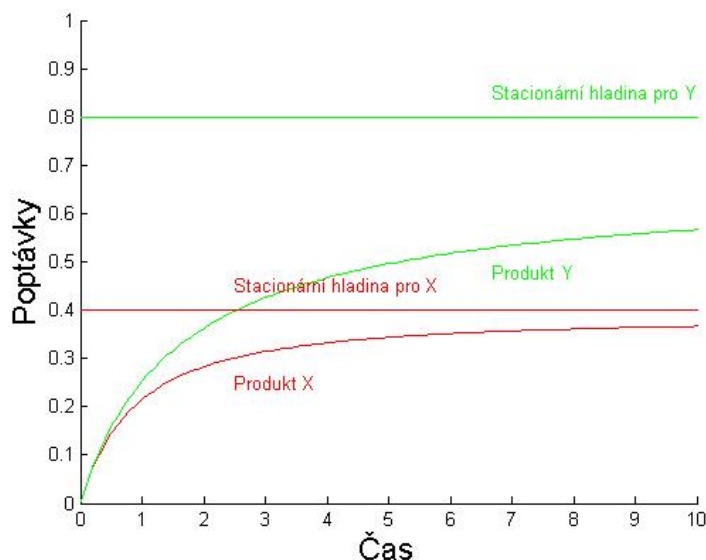
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení kvality výrobků. Dojde ke změně parametru q_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.5$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 0.8]$.



Obrázek 5.15: Simulace v Excelu po zvětšení q_2



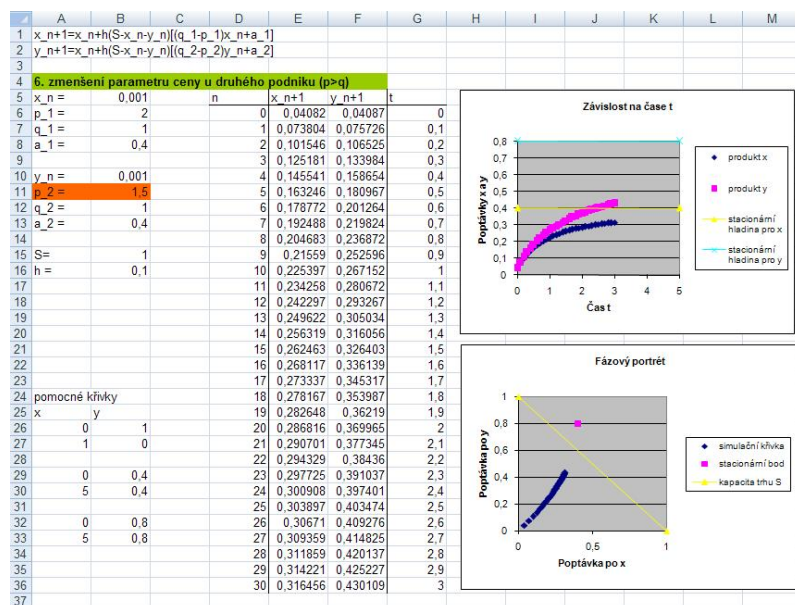
Obrázek 5.16: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení q_2



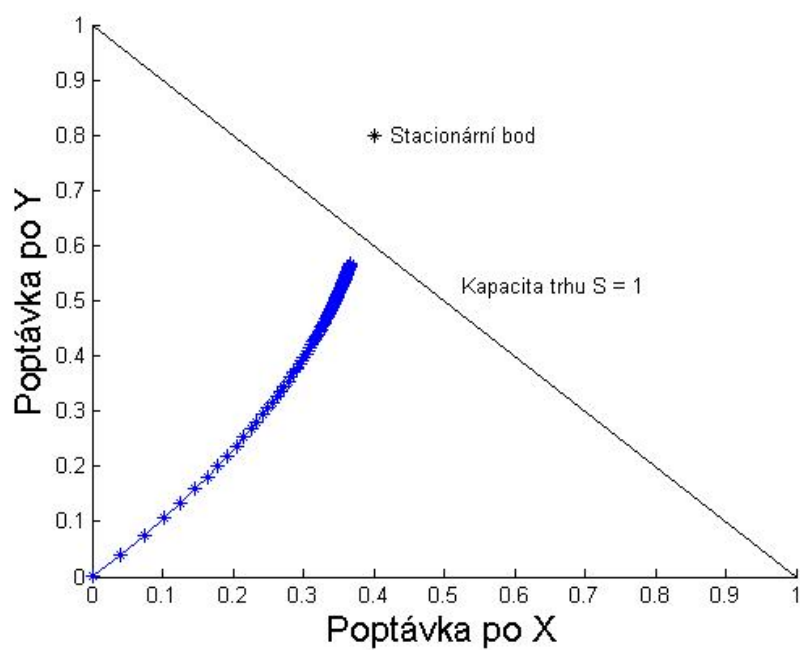
Obrázek 5.17: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení q_2

5.3.6 Zmenšení parametru ceny pro $p > q$

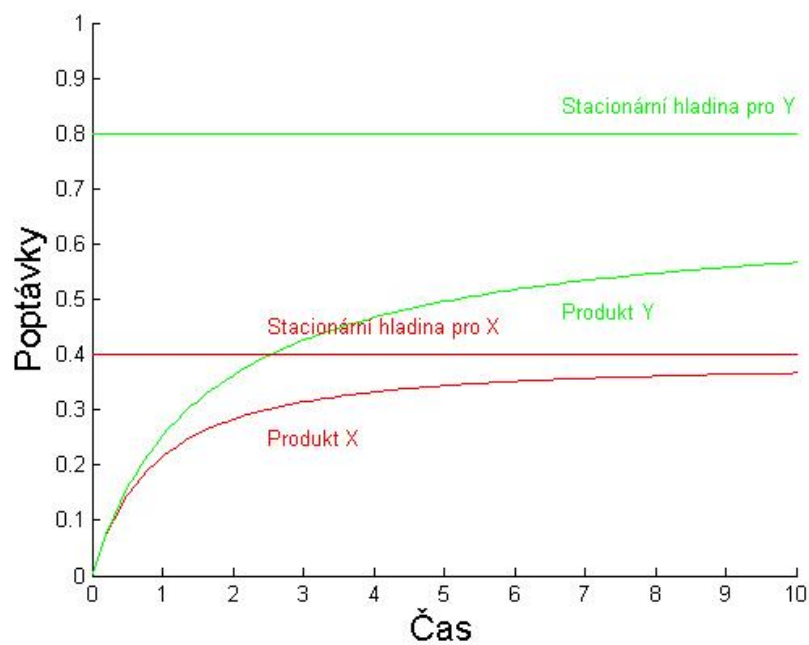
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení ceny výrobků. Dojde ke změně parametru p_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 1.5$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 0.8]$.



Obrázek 5.18: Simulace v Excelu po zmenšení p_2



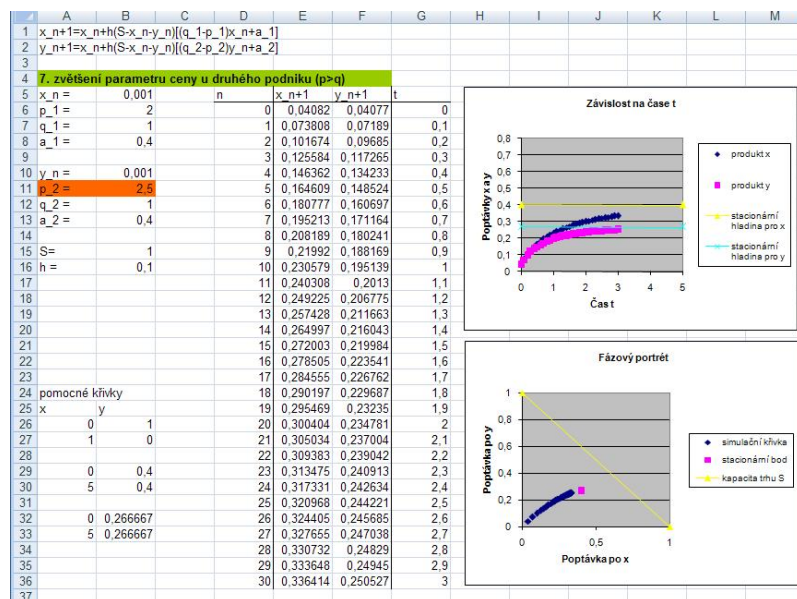
Obrázek 5.19: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení p_2



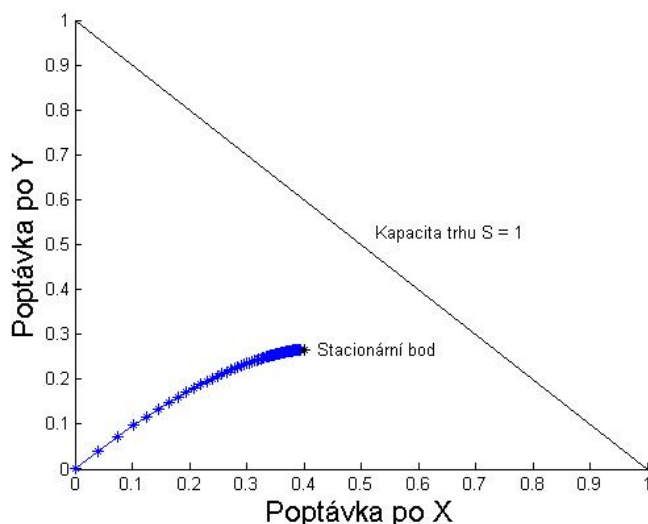
Obrázek 5.20: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení p_2

5.3.7 Zvětšení parametru ceny pro $p > q$

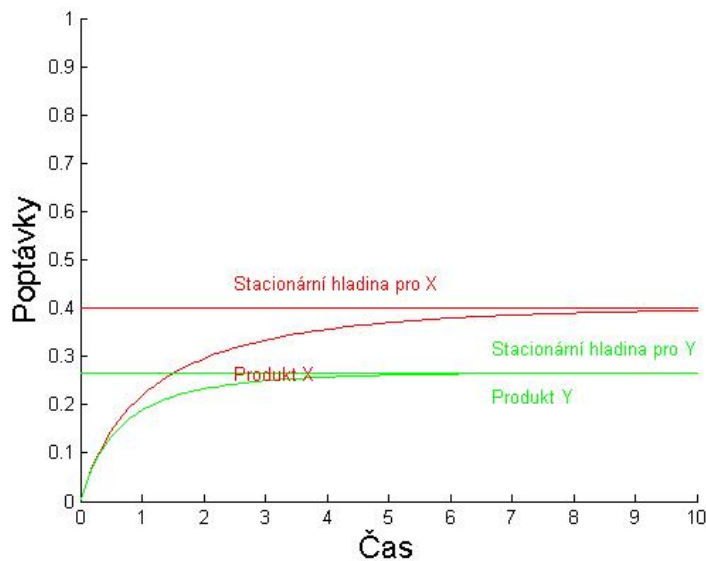
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení ceny výrobků. Dojde ke změně parametru p_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 2$, $p_2 = 1.5$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. $p_1 = 2$, $p_2 = 2.5$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [0.4, 4/15]$.



Obrázek 5.21: Simulace v Excelu po zvětšení p_2



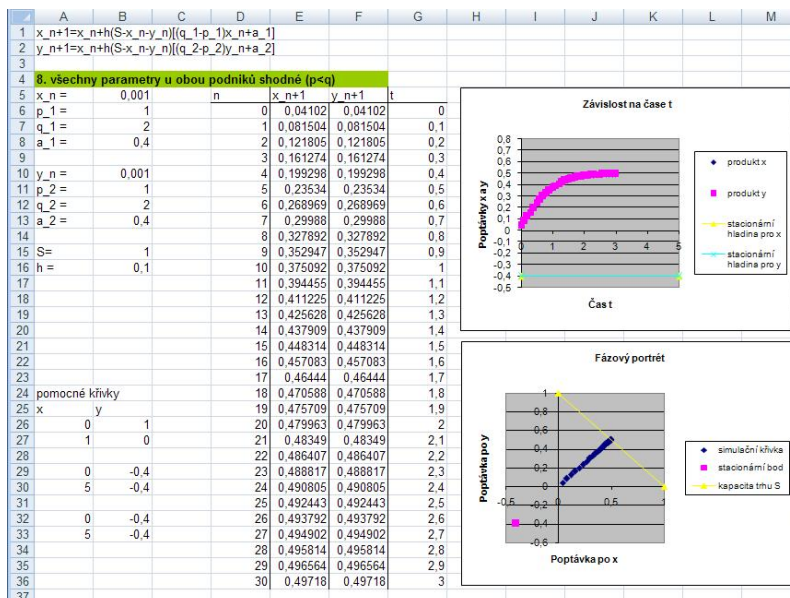
Obrázek 5.22: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení p_2



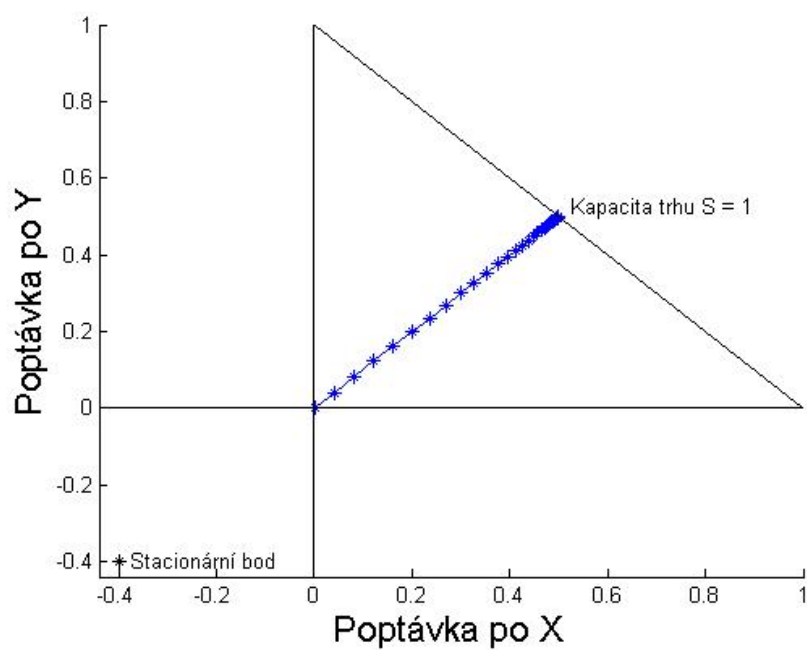
Obrázek 5.23: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení p_2

5.3.8 Symetrický případ pro $p < q$

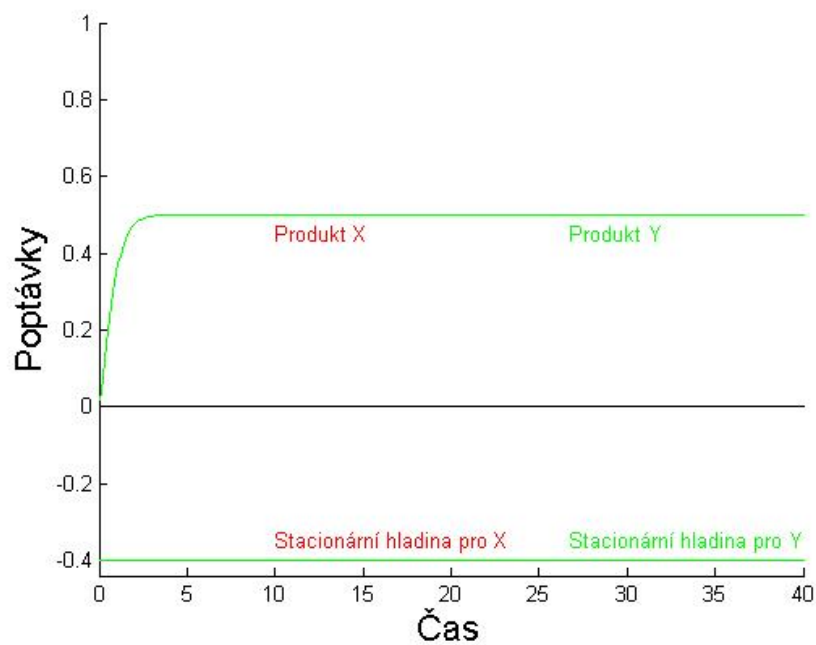
V tomto případě uvažujeme, že obě firmy na trhu mají stejně velkou poptávku po svých výrobcích. To znamená, že se hodnoty parametrů ceny, kvality i reklamy obou firem rovnají a nabývají hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -0.4]$.



Obrázek 5.24: Simulace symetrického případu v Excelu



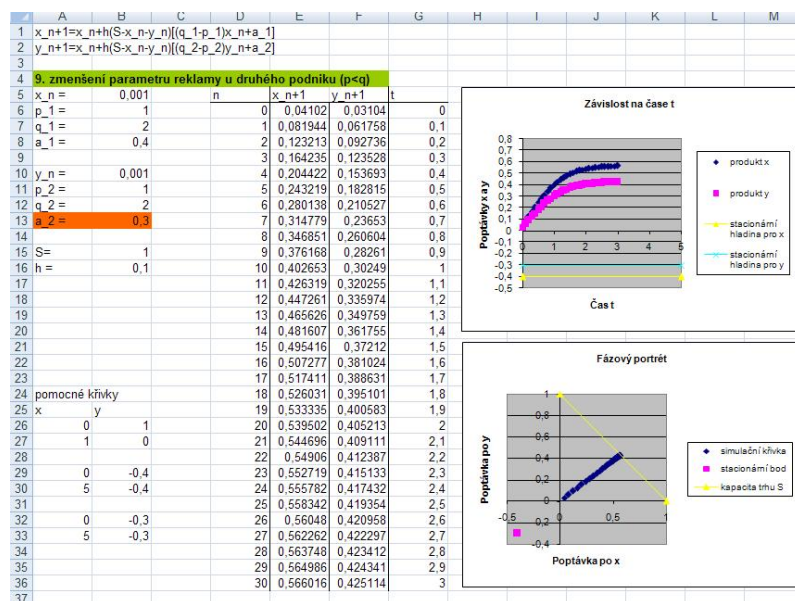
Obrázek 5.25: Fázový portrét v MATLABu pro symetrický případ



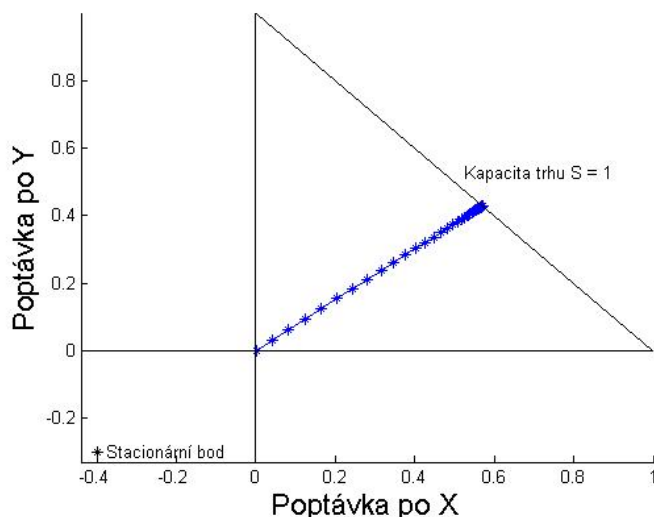
Obrázek 5.26: Závislost poptávek na čase t v MATLABu pro symetrický případ

5.3.9 Zmenšení parametru reklamy pro $p < q$

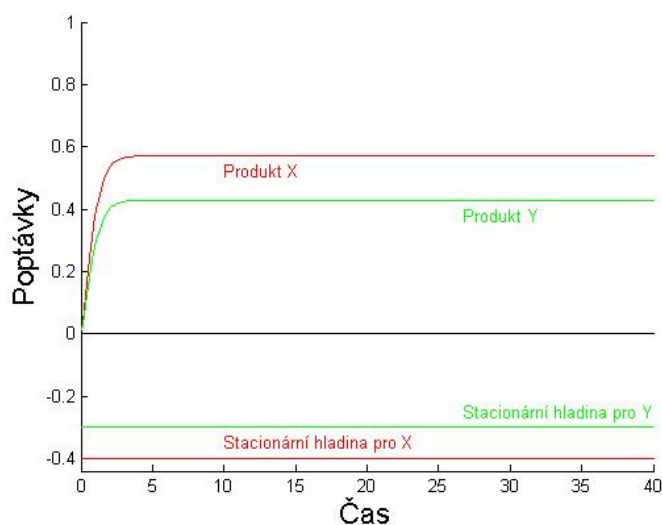
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení nákladů na reklamu. Dojde ke změně parametru a_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -0.3]$.



Obrázek 5.27: Simulace v Excelu po zmenšení a_2



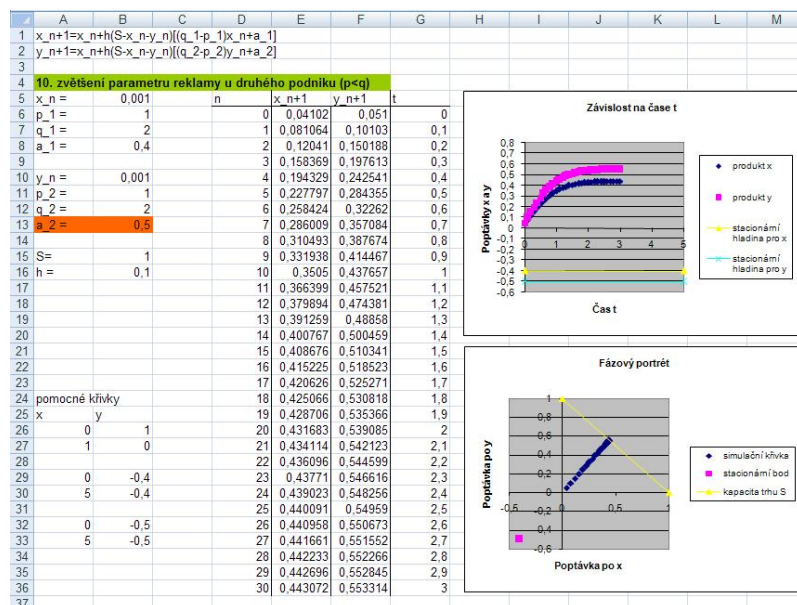
Obrázek 5.28: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení a_2



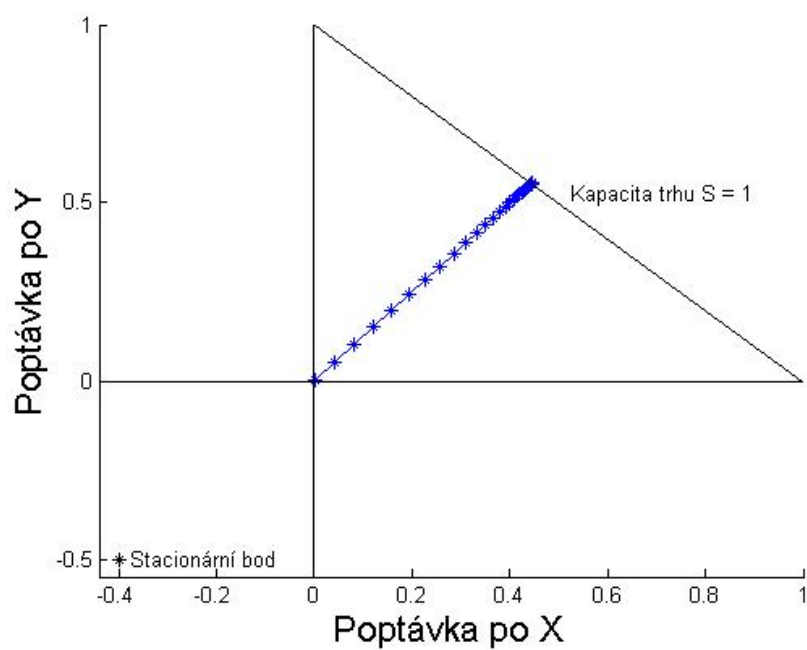
Obrázek 5.29: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení a_2

5.3.10 Zvětšení parametru reklamy pro $p < q$

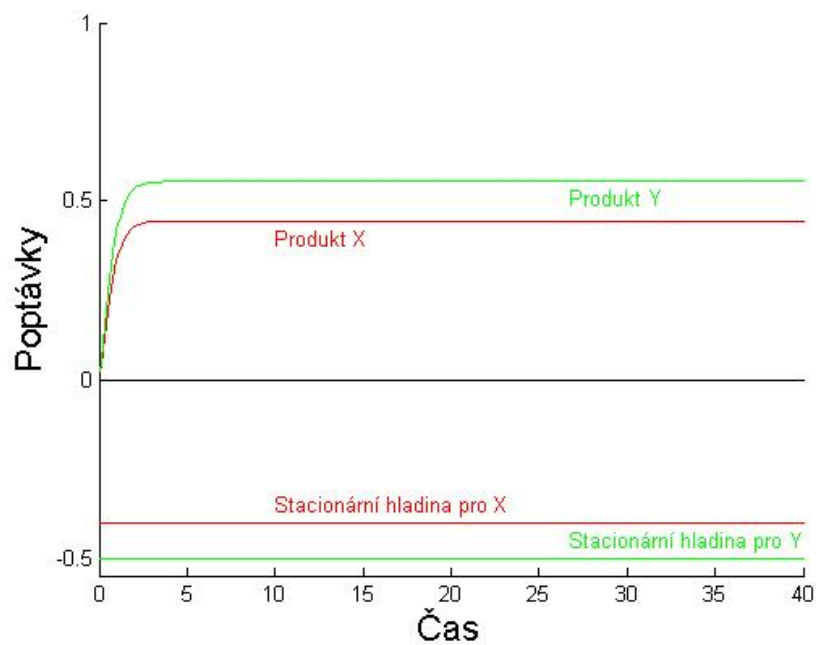
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení nákladů na reklamu. Dojde ke změně parametru a_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.5$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -0.5]$.



Obrázek 5.30: Simulace v Excelu po zvětšení a_2



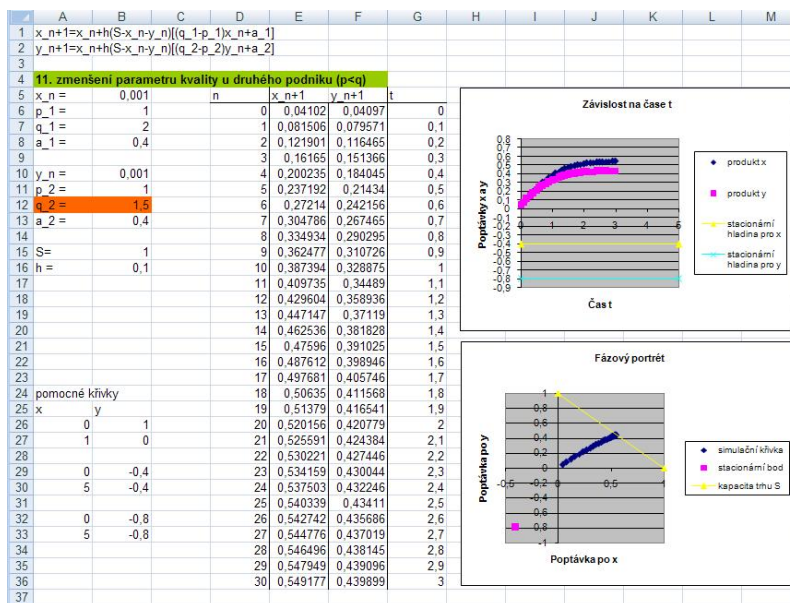
Obrázek 5.31: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení a_2



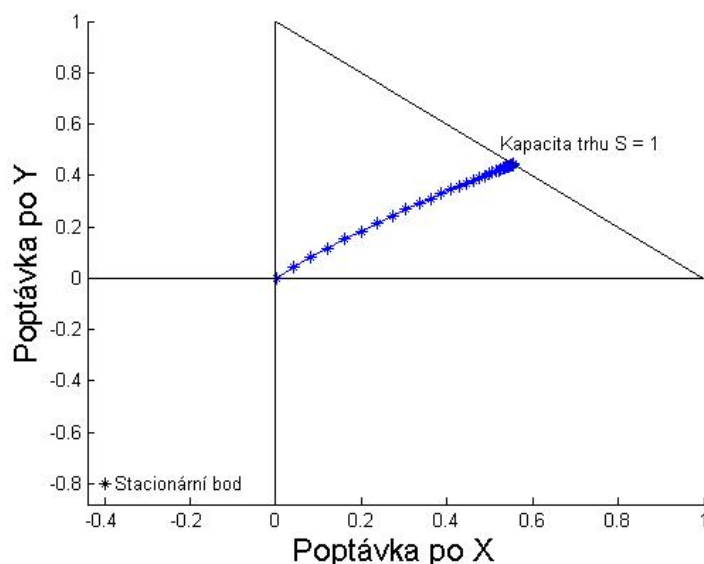
Obrázek 5.32: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení a_2

5.3.11 Zmenšení parametru kvality pro $p < q$

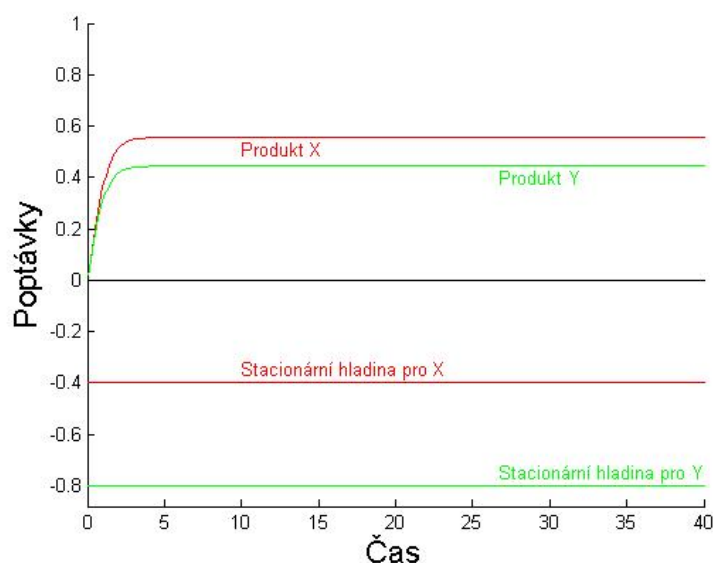
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení kvality výrobků. Dojde ke změně parametru q_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1.5$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -0.8]$.



Obrázek 5.33: Simulace v Excelu po zmenšení q_2



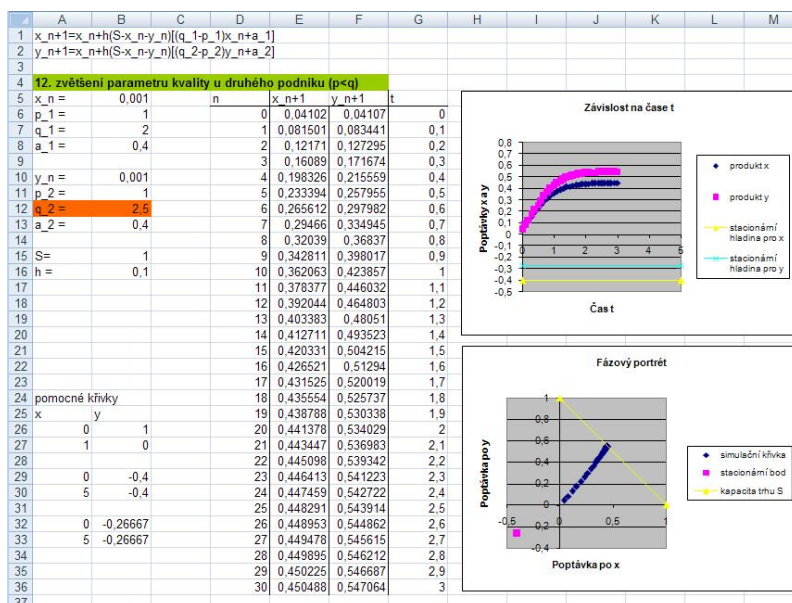
Obrázek 5.34: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení q_2



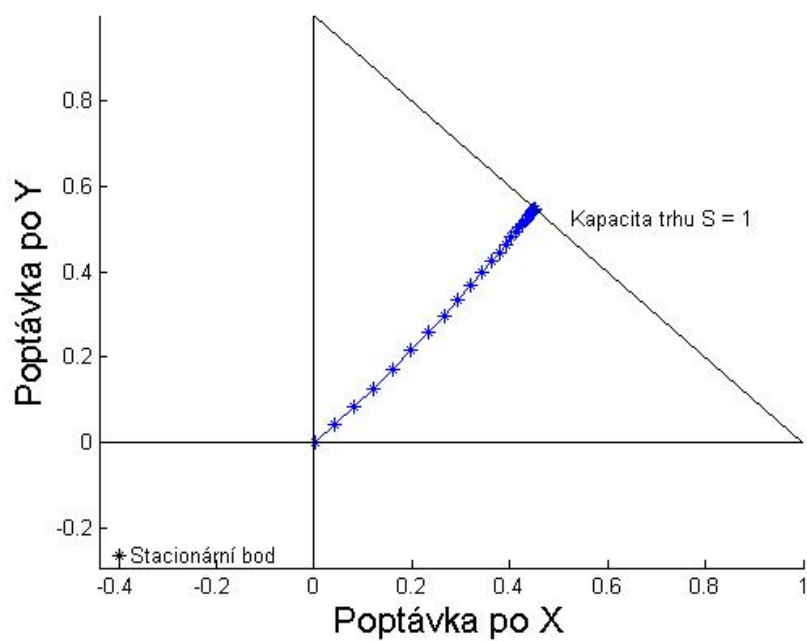
Obrázek 5.35: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení q_2

5.3.12 Zvětšení parametru kvality $p < q$

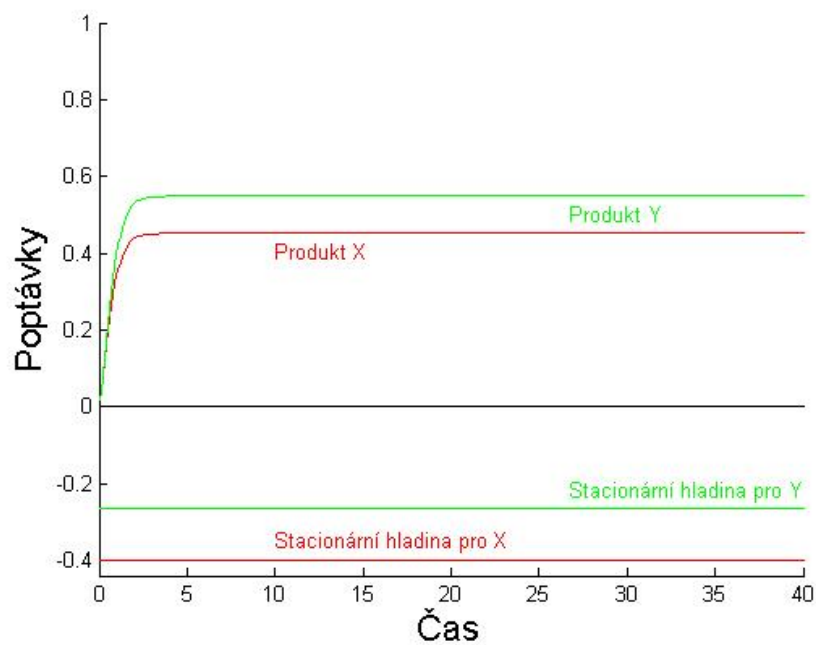
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení kvality výrobků. Dojde ke změně parametru q_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2.5$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -4/15]$.



Obrázek 5.36: Simulace v Excelu po zvětšení q_2



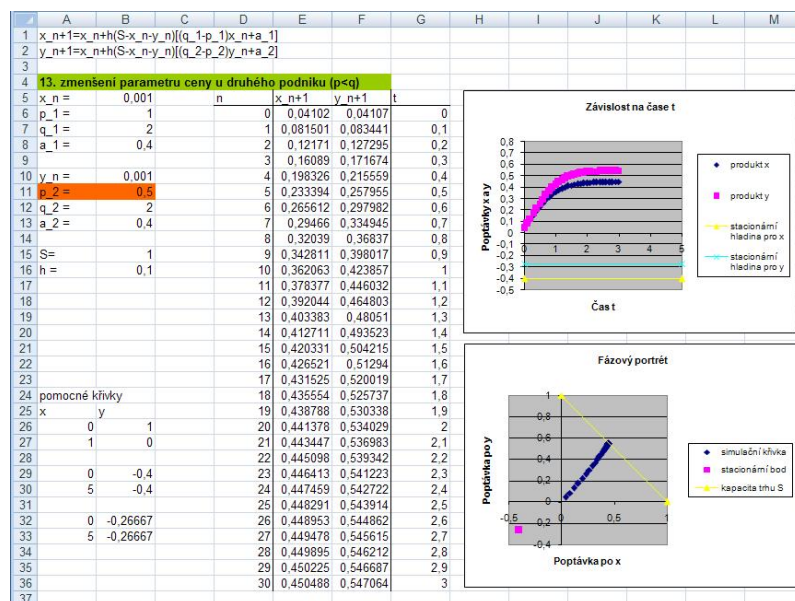
Obrázek 5.37: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení q_2



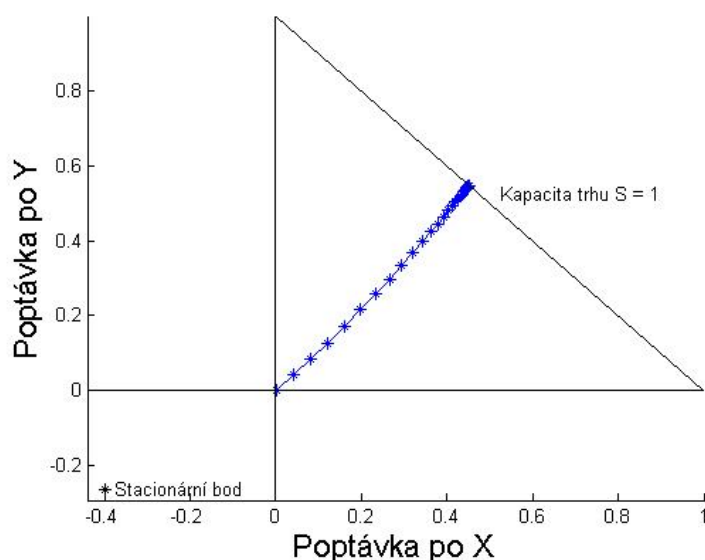
Obrázek 5.38: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení q_2

5.3.13 Zmenšení parametru ceny pro $p < q$

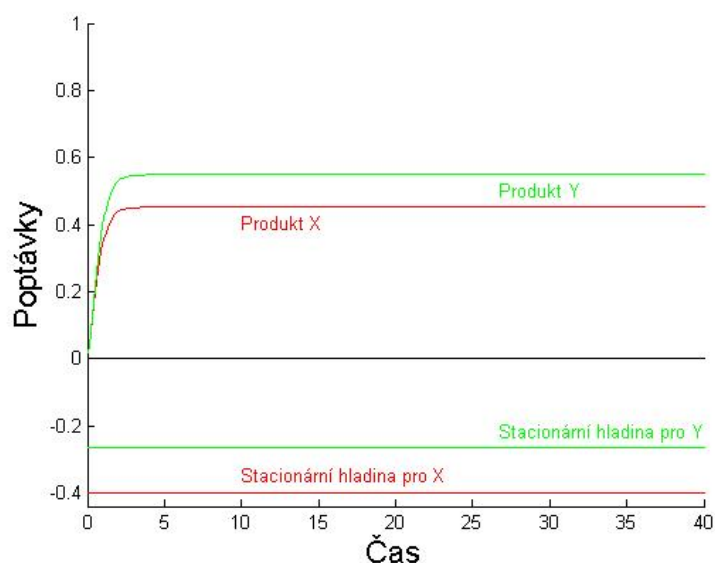
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro snížení ceny výrobků. Dojde ke změně parametru p_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 0.5$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -4/15]$.



Obrázek 5.39: Simulace v Excelu po zmenšení p_2



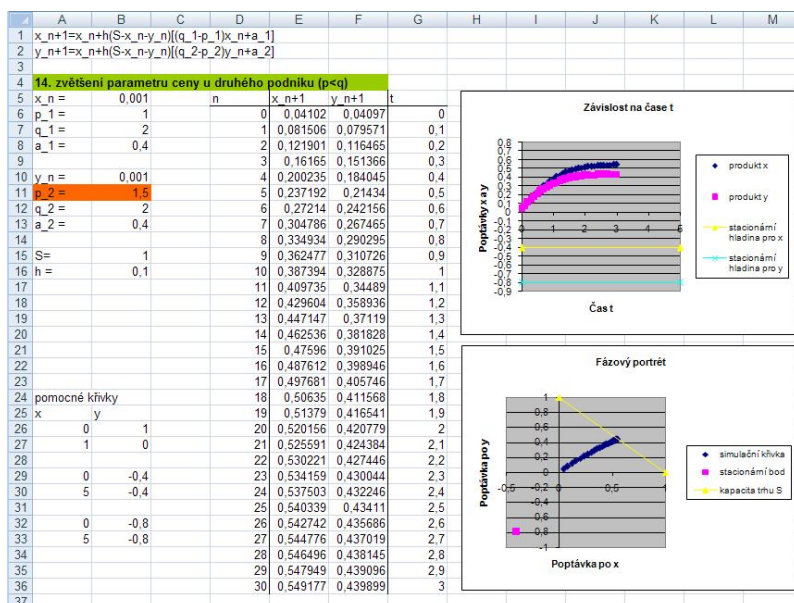
Obrázek 5.40: Fázový portrét v MATLABu po zmenšení p_2



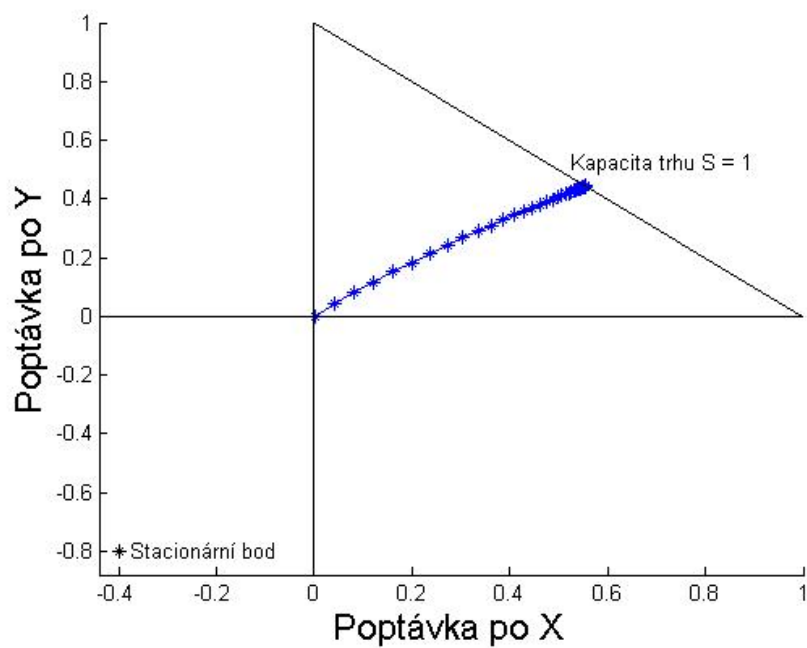
Obrázek 5.41: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení p_2

5.3.14 Zvětšení parametru ceny pro $p < q$

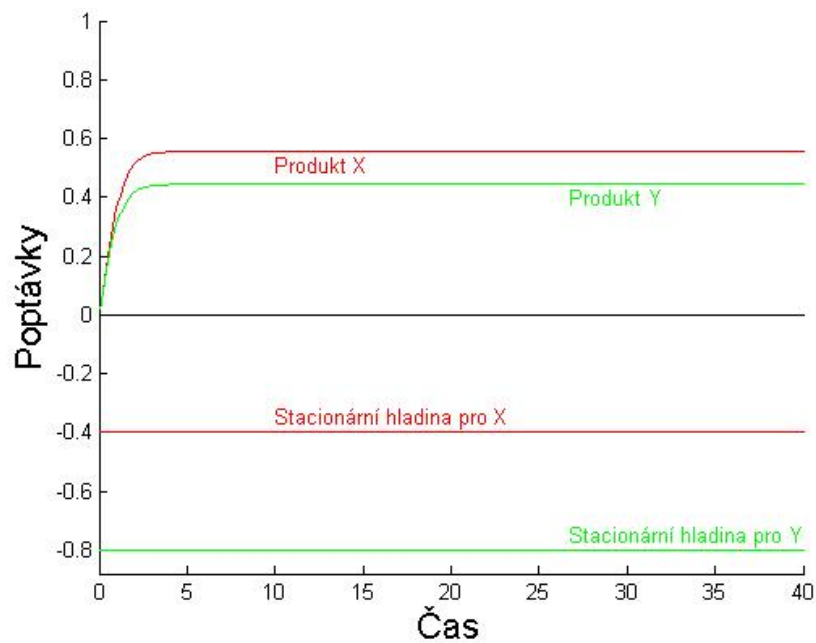
V tomto případě uvažujeme, že při nezměněných podmínkách první firma zachovává původní hodnoty parametrů, zatímco druhá firma se rozhodne pro zvýšení ceny výrobků. Dojde ke změně parametru p_2 . Tedy parametry nabývají následujících hodnot $p_1 = 1$, $p_2 = 1.5$, $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.4$. Potom bude $[x_0, y_0] = [-0.4, -0.8]$.



Obrázek 5.42: Simulace v Excelu po zvětšení p_2



Obrázek 5.43: Fázový portrét v MATLABu po zvětšení p_2



Obrázek 5.44: Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení p_2

5.4 Shrnutí výsledků simulací

V prvních sedmi případech ($p > q$) simulace ukazuje, že poptávky konvergují ke stacionárnímu bodu $[x_0, y_0]$, v druhých sedmi případech ($p < q$) poptávky konvergují ke stacionárnímu bodu, který leží na přímce $x + y = S$. Dále vidíme, že poptávka firmy vzroste, pokud tato firma zvýší kvalitu svých výrobků a náklady na reklamu a klesne, když zvýší cenu výrobku. Naopak poptávka firmy klesne, pokud druhá z firem zvýší kvalitu svých výrobků a náklady na reklamu a vzroste, když druhá z firem zvýší cenu výrobku. Pokud $p > q$, potom stacionární hladina firmy nezáleží na parametrech druhé z firem, rozdíly mezi jejími poptávkami tedy budou konvergovat k nule pro $t \rightarrow \infty$. Naopak, pokud $p < q$, potom stacionární hladina, ke které poptávka firmy konverguje, závisí i na parametrech druhé z firem.

Všechny tyto výsledky jsou v souladu s teoretickými závěry.

Nyní se pokusíme tyto výsledky interpretovat ekonomicky. Poptávka firmy závisí přímo úměrně na kvalitě jejího výrobku a nákladech na reklamu, a nepřímo na ceně jejího výrobku, což je v souladu s reálným očekáváním. Pro $p > q$ nejsou firmy schopny (krátkodobě ani dlouhodobě) vyčerpat celou kapacitu trhu, protože nízká kvalita výrobků vzhledem k cenám limituje růst poptávek. Poptávka firmy krátkodobě závisí na chování druhé z firem, dlouhodobě ovšem ne. Pro $p < q$ obě firmy dohromady v delším časovém horizontu nasytí celou kapacitu trhu. Poptávka firmy závisí krátkodobě i dlouhodobě na chování druhé z firem.

Výsledky všech simulací shrnuje následující tabulka, kde x^* a y^* jsou přibližné hodnoty posledních aproximací při simulaci v Excelu.

č.	p_1	p_2	q_1	q_2	a_1	a_2	x_0	y_0	x^*	y^*
1	2	2	1	1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.33	0.33
2	2	2	1	1	0.4	0.3	0.4	0.3	0.34	0.25
3	2	2	1	1	0.4	0.5	0.4	0.5	0.32	0.40
4	2	2	1	0.5	0.4	0.4	0.4	0.27	0.34	0.25
5	2	2	1	1.5	0.4	0.4	0.4	0.8	0.32	0.43
6	2	1.5	1	1	0.4	0.4	0.4	0.8	0.32	0.43
7	2	2.5	1	1	0.4	0.4	0.4	0.27	0.34	0.25
8	1	1	2	2	0.4	0.4	-0.4	-0.4	0.50	0.50
9	1	1	2	2	0.4	0.3	-0.4	-0.3	0.57	0.43
10	1	1	2	2	0.4	0.5	-0.4	-0.5	0.44	0.55
11	1	1	2	1.5	0.4	0.4	-0.4	-0.8	0.55	0.44
12	1	1	2	2.5	0.4	0.4	-0.4	-0.27	0.45	0.55
13	1	0.5	2	2	0.4	0.4	-0.4	-0.27	0.45	0.55
14	1	1.5	2	2	0.4	0.4	-0.4	-0.8	0.55	0.44

Závěr

Bakalářská práce naplnila svůj cíl, kterým bylo vyšetřování vlastností modelu poptávky po produktech dlouhodobé spotřeby a nasimulovat jeho přibližné řešení. Ukázalo se, že vlastnosti zkoumaného modelu závisí především na vztahu mezi cenami a kvalitami produktů, v každém z obou případů jsme obdrželi kvantitativně i kvalitativně odlišné výsledky. Oba případy jsou ovšem relevantní při popisu reálné ekonomické situace. Aproximace řešení spočítané pomocí MATLABu a Excelu byly v podstatě identické a byly ve shodě s teoretickými závěry, tyto aproximace lze tedy považovat za dostatečně přesné. Závislost řešení modelu na vstupních parametrech je v souladu s ekonomickou teorií, můžeme tedy konstatovat, že zkoumaný model je vhodný k popisu daného problému.

Seznam obrázků

3.1	Simulace v Excelu	31
3.2	Simulace v MATLABu	31
5.1	Nukliny systému (5.1) pro $p_i > q_i$, $i \in \{1, 2\}$. Nahoře x-nukliny pro $x_0 < S$ a $x_0 > S$, dole y-nukliny pro $y_0 < S$ a $y_0 > S$	35
5.2	Fázové portréty systému (5.1) pro $p_i > q_i$, $i \in \{1, 2\}$	35
5.3	Simulace symetrického případu v Excelu	38
5.4	Fázový portrét v MATLABu pro symetrický případ	38
5.5	Závislost poptávek na čase t v MATLABu pro symetrický případ	39
5.6	Simulace v Excelu po zmenšení a_2	39
5.7	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení a_2	40
5.8	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení a_2	40
5.9	Simulace v Excelu po zvětšení a_2	41
5.10	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení a_2	41
5.11	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení a_2	42
5.12	Simulace v Excelu po zmenšení q_2	42
5.13	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení q_2	43
5.14	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení q_2	43
5.15	Simulace v Excelu po zvětšení q_2	44
5.16	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení q_2	44
5.17	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení q_2	45
5.18	Simulace v Excelu po zmenšení p_2	45
5.19	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení p_2	46
5.20	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení p_2	46
5.21	Simulace v Excelu po zvětšení p_2	47
5.22	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení p_2	47
5.23	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení p_2	48
5.24	Simulace symetrického případu v Excelu	48
5.25	Fázový portrét v MATLABu pro symetrický případ	49
5.26	Závislost poptávek na čase t v MATLABu pro symetrický případ	49
5.27	Simulace v Excelu po zmenšení a_2	50
5.28	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení a_2	50
5.29	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení a_2	51

5.30	Simulace v Excelu po zvětšení a_2	51
5.31	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení a_2	52
5.32	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení a_2	52
5.33	Simulace v Excelu po zmenšení q_2	53
5.34	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení q_2	53
5.35	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení q_2	54
5.36	Simulace v Excelu po zvětšení q_2	54
5.37	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení q_2	55
5.38	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení q_2	55
5.39	Simulace v Excelu po zmenšení p_2	56
5.40	Fázový portrét v MATLABu po zmenšení p_2	56
5.41	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zmenšení p_2	57
5.42	Simulace v Excelu po zvětšení p_2	57
5.43	Fázový portrét v MATLABu po zvětšení p_2	58
5.44	Závislost poptávek na čase t v MATLABu po zvětšení p_2	58

Literatura

- [1] Rybička Jiří. *Latex pro začátečníky*. Brno: Konvoj, 2003. 238 s.
- [2] Došlá, Zuzana — Došlý, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 144 s. ISBN 80-210-1328-1
- [3] Kuben Jaromír. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Vojenská akademie, 2000. 124 s. 80-730-2049-1
- [4] Elaydi, Seber N. *An introduction to difference equations*. New York: Springer. c2005. 539 s. ISBN 0-387-23059-9
- [5] Kreith, Kurt — Chakerian, Don. *Iterative algebra and dynamic modeling : a curriculum for the third millennium*. New York: Springer-Verlag, 1999. 325 s. ISBN 0-387-98758-4
- [6] Kalas Josef — Ráb Miloš. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita Brno, 1995. 207 s. ISBN 80-210-1130-0
- [7] Musil Petr, Fuchs Kamil, Franc Aleš, Grigarčíková Šárka. *Ekonomie*. Plzeň: Aleš Čeněk, 2008. 412 s. ISBN 978-80-7380-126-7
- [8] Dávid, Arnold. *Model dopytu po produktech dlhodobé spotřeby*. In KOVÁČOVÁ, M. (ed.) 7th International Conference Aplimat 2008. Bratislava: Slovak University of Technology, 2008, p. 441-446.
- [9] Studijní materiály předmětu M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I
- [10] <http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/difrov.pdf>
- [11] <http://homel.vsb.cz/kuc14/textyNM/kap7.pdf>