MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

Elipsa

Bakalářská práce

Brno 2018

Vedoucí práce: **Mgr. Vojtěch Žádník, Ph.D.**

Vypracovala: **Aneta Králová**

Bibliografický záznam

KRÁLOVÁ, Aneta. *Elipsa, bakalářská práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2018. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Vojtěch Žádník, Ph.D.

Anotace

Bakalářská práce představuje elipsu různými ekvivalentními definicemi z hlediska geometrie. Předmětem práce je přehled základních poznatků o elipse, které jsou vždy doplněné jejími konstrukcemi. První kapitola nahlíží na elipsu jako na množinu bodů a popisuje její základní vlastnosti. Stěžejní a zároveň nejobsáhlejší kapitola je druhá, kde je elipsa brána jako afinní obraz kružnice. Ve třetí kapitole se elipsa představí jako kuželosečka a v závěrečné čtvrté jako řešení algebraické rovnice. Text je doplněn vlastnoručně vytvořenými obrázky a rysy, které ilustrují danou problematiku.

Annotation

Bachelor thesis presents an ellipse with different equivalent definitions in terms of geometry. The subject of the thesis is an overview of the basic knowledge of the ellipse, which is always accompanied by its constructions. The first chapter looks at the ellipse as a set of points and describes its basic properties. The main and the most comprehensive chapter is the second chapter, where the ellipse is taken as the affine picture of the circle. In the third chapter, the ellipse is presented as a conic and in the final, fourth chapter as a solution to the algebraic equation. The text is complemented by self-made pictures and features that illustrate the issue.

Klíčová slova: elipsa, afinita, konstrukce elipsy, Quételetova-Dandelinova věta

Keywords: ellipse, affinity, construction of ellipses, Quetelet-Dandelin's theory

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Vojtěchu Žádníkovi, Ph.D. za poskytnutý čas, za zapůjčení odborné literatury a za cenné připomínky. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a svému příteli za trpělivost a psychickou podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 30. března 2018 Aneta Králová

OBSAH

OBSAH 4

ÚVOD 6

1 ELIPSA JAKO MNOŽINA BODŮ S VLASTNOSTMI 8

1.1 Základní pojmy 8

1.1.1 Bodová konstrukce elipsy 10

1.1.2 Zahradnická konstrukce elipsy 11

1.2 Vzájemná poloha elipsy a přímky 12

1.3 Tečna a ohniskové vlastnosti elipsy 13

2 ELIPSA JAKO AFINNÍ OBRAZ KRUŽNICE 16

2.1 Konstrukce vycházející z afinity 16

2.1.1 Afinní transformace kružnice 16

2.1.2 Trojúhelníková konstrukce elipsy 18

2.1.3 Proužková konstrukce elipsy 18

2.1.4 Obraz kružnice v osové afinitě 23

2.2 Konstrukce pomocí sdružených průměrů 24

2.2.1 Sdružené průměry 24

2.2.2 Příčková konstrukce 26

2.2.3 Rytzova konstrukce elipsy 28

2.2.4 Frézierova konstrukce elipsy 30

3 ELIPSA JAKO KUŽELOSEČKA 32

3.1 Elipsa jako řez rotační kuželové plochy 32

3.1.1 Quételetova – Dandelinova věta pro kuželovou plochu 33

3.2 Elipsa jako řez rotační válcové plochy 36

3.2.1 Quételetova – Dandelinova věta pro válcovou plochu 37

3.3 Důsledek Quételetovy – Dandelinovy věty 38

3.4 Konstrukce pomocí řídící přímky 40

3.4.1 Konstrukce paraboly pomocí řídící přímky 40
3.4.2 Konstrukce elipsy pomocí řídící přímky 41
4 ELIPSA JAKO ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÉ ROVNICE 42
4.1 Rovnice elipsy 42
4.1.1 Rovnice odvozena z definice 1 42
4.1.2 Rovnice odvozena ze speciální afinity 43
4.2 Oskulační kružnice 44
4.2.1 Konstrukce oskulačních kružnic 45
ZÁVĚR 46
SEZNAM OBRÁZKŮ 48

ÚVOD

Pod pojmem **elipsa** si můžeme představit různé spojitosti, a to nejen s matematikou. Slovo elipsa pochází z řeckého *élleipsis* – vynechání. Proto se např. v lingvistice označují pojmem elipsa prázdná místa ve větě, ze kterých byl jeden nebo více jejích větných členů vypuštěn. Vybaví se nám také pohyby planet kolem Slunce po elipsách nebo elipsoidní tvary různých věcí, které nás obklopují. Většina z nás má však spojen pojem elipsa s matematikou. Ať už jsou to výpočty příkladů ze střední školy, tzv. „rozšlápnutá“ kružnice nebo konstrukce elipsy pomocí dvou špendlíků a provázku. Způsobů, jak se dívat na elipsu je opravdu mnoho. Tato bakalářská práce objasní elipsu z hlediska geometrie.

Cílem bakalářské práce je seznámení čtenáře s vlastnostmi a konstrukcemi elipsy. Jedná se především o ucelený přehled možností, jak elipsu zkonstruovat.

Celá práce je rozdělena do čtyř kapitol. V každé kapitole se na elipsu pohlíží z jiného úhlu. První z nich definuje a popisuje elipsu jako množinu bodů. Definice elipsy je využita při bodové a zahradnické konstrukci. Dále je zde zařazena tečna a ohniskové vlastnosti elipsy, které jsou považovány za základní znalosti o elipse.

Druhá kapitola představí elipsu jako afinní obraz kružnice. Tato kapitola obsahuje mnoho konstrukcí, které vycházejí z afinních vlastností. Osovou afinitou se zachovává také sdruženost průměrů, kterým je věnovaná část kapitoly doplněná konstrukcemi.

Třetí kapitola nahlíží na elipsu jako na řez válcové, respektive kuželové plochy, a tím vysvětluje zařazení mezi kuželosečky. Okrajově jsou představeny také ostatní kuželosečky, jako je parabola a hyperbola.

Mezi základní znalosti o elipse je zařazena také rovnice o elipse, která je uvedena v závěrečné kapitole. S rovnicí elipsy se setkávají studenti na některých středních školách, kde jsou seznámeni zejména s analytickými výpočty. Práce je zaměřena na konstrukce, proto zde těmto otázkám nevěnuje pozornost.

Definice, věty a ostatní přehled poznatků jsou obecně známé a jsou převzaty z literatury, která je uvedena v závěru práce.

Všechny kapitoly jsou doplněny naskenovanými vlastnoručně narýsovanými konstrukcemi a obrázky. Výjimkou jsou obrázky, které jsou vždy ocitované. Jako stěžejní literatura je používaná URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie. I.*, 1965, ŘÍHA, Ota. *Konstrukční geometrie*, 1999 a další, která je citována v závěru práce.

1 ELIPSA JAKO MNOŽINA BODŮ S VLASTNOSTMI

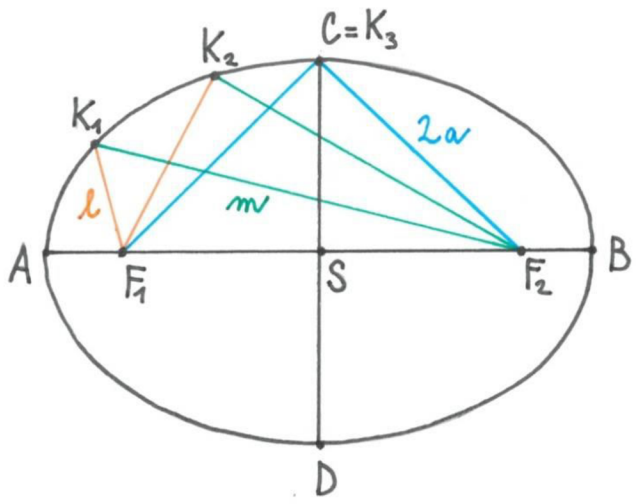
V první kapitole se budeme zabývat elipsou jako množinou bodů. Nejprve se seznámíme se základními pojmy a vlastnostmi elipsy, které využijeme při konstrukcích. Dále si vymezíme tečnu elipsy a ohniskové vlastnosti, které jsou nedílnou součástí základních znalostí o elipse.

1.1 Základní pojmy

Definice: *Elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost pevných bodů.*

Na obrázku 1 je vzdálenost F_1K_1 značena písmenem l a vzdálenost F_2K_1 písmenem m.

$l + m = 2a$ (konstanta) $\rightarrow l + m > F_1F_2$



Obrázek 1: Definice 1

Oba pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska** elipsy. Vzdálenost libovolného bodu elipsy od ohniska (F_1K, F_2K) nazýváme **průvodič** a značíme r.

Pokud by v definici bylo napsáno místo „různých bodů“ pouze „bodů“, potom bychom připouštěli, že body F_1, F_2 mohou splynout v jeden bod. V tomhle případě by se již nejednalo o elipsu, ale o kružnici.

Body A, B, C, D nazýváme **vrcholy elipsy**, přičemž A, B jsou **hlavní vrcholy** a C, D **vedlejší vrcholy**. Pro vrcholy C, D platí:

$CF_1 = CF_2 = DF_1 = DF_2 = a$

Úsečka AB se nazývá **hlavní osa** a označíme ji $2a$. Úsečka CD je **vedlejší osa** a značíme ji $2b$.

$SA = SB = a =$ **délka hlavní poloosy**

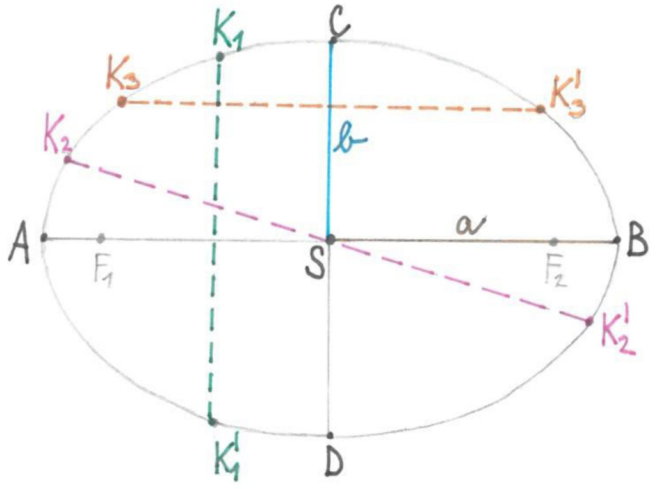
$SC = SD = b =$ **délka vedlejší poloosy**

Pro body A, B platí:

$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = AB = 2a$

Průsečík hlavní osy elipsy a vedlejší osy elipsy je **střed elipsy *S*.**

Elipsa je souměrná podle dvou k sobě kolmých os a středově souměrná podle svého středu.



Obrázek 2: Souměrnost elipsy, hlavní a vedlejší osy elipsy

Excentricita

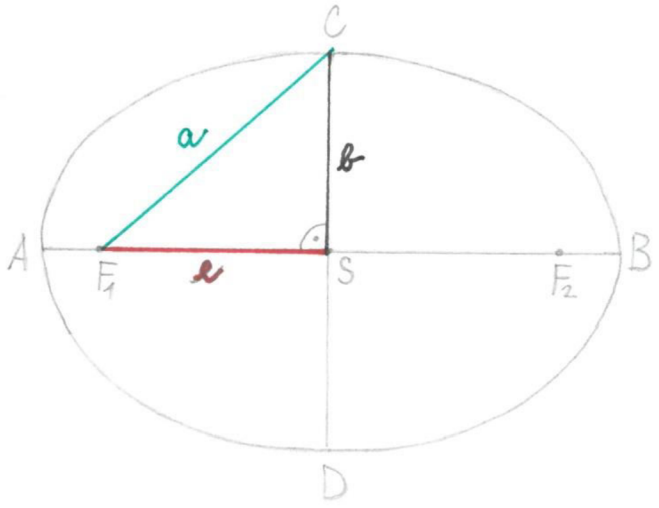
Vzdálenost ohniska ke středu elipsy nazýváme **lineární** (délková) **výstřednost**– excentricita a značíme ji e. (z latiny ex = mimo, centrum = střed).

$$e = F_1S = F_2S$$

Jelikož jde o pravoúhlý trojúhelník F_1SC, můžeme excentricitu elipsy vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$a^2 = b^2 + e^2 \rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Na obrázku 3 značíme úsečku F_1C jako přeponu a. Odvěsna CS má délku b. Odvěsnu F_1S značíme e (excentricita). Pravoúhlý trojúhelník F_1SC s odvěsnami e, b a přeponou a nazýváme **charakteristický trojúhelník** elipsy.



Obrázek 3: Charakteristický trojúhelník elipsy

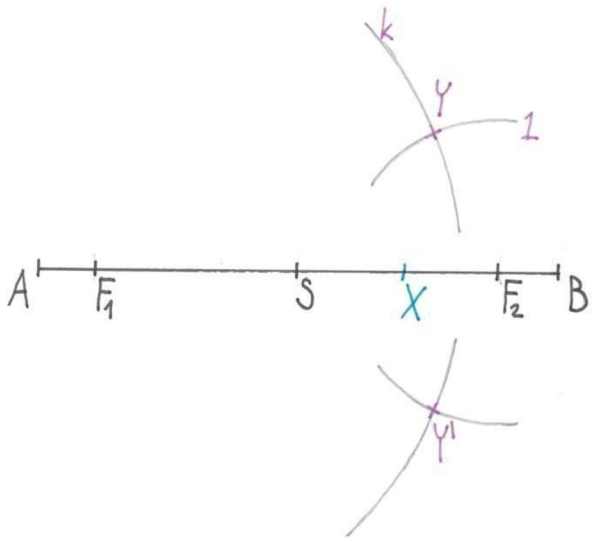
1.1.1 Bodová konstrukce elipsy

Z definice elipsy víme, že pro každý bod Y, ležící na elipse, platí: $F_1Y + F_2Y = AB$. Díky dané vlastnosti můžeme pro sestrojení elipsy využít **bodové konstrukce**. Pomocí téhle konstrukce můžeme sestrojit libovolný počet bodů elipsy.

Předpokládáme, že jsou dány hlavní vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2. Sestrojíme střed S, přičemž $AS = SB = a$, S je střed úsečky F_1, F_2. Následně si zvolíme libovolný bod $X \in F_1, F_2$, který rozdělí úsečku AB na dvě části. Bod Y získáme jako průsečík kružnic k, l, pro které platí: $k = (F_1; AX)$, $l = (F_2; BX)$. Je patrné, že $AX = F_1Y$, $BX = F_2Y$. Nyní můžeme říci, že bod Y je bodem elipsy, protože:

$$F_1Y + F_2Y = XA + XB = AB = 2a$$

Další body získáme stejným způsobem. Na úsečce F_1, F_2 volíme libovolně body, s jejichž pomocí získáme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.

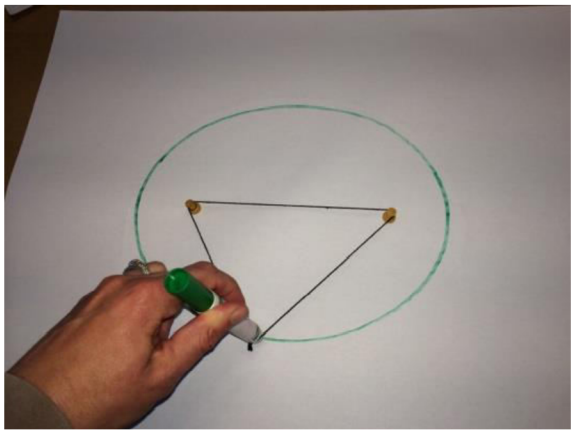


Obrázek 4: Bodová konstrukce

1.1.2 Zahradnická konstrukce elipsy

Zahradnickou konstrukci nelze považovat za zcela přesnou. Přesto je využívána, a to zejména pro její jednoduché provedení a rychlost. Pomocí zahradnické konstrukce si lze například na zahrádce vytyčit záhonek ve tvaru elipsy. My si to však popíšeme pomocí papíru, tužky, provázku a dvou špendlíků.

Oba konce provázku připevníme na špendlíky, které nám udávají ohniska F_1 a F_2. Tužkou napneme tento provázek a opíšeme elipsu.



Obrázek 5: Zahradnická konstrukce (Hollymath, 2014)

Zahradnická konstrukce vychází z vlastnosti konstantního součtu vzdáleností bodů od obou ohnisek elipsy. Ramena provázku nám dávají vzdálenost $2a$.

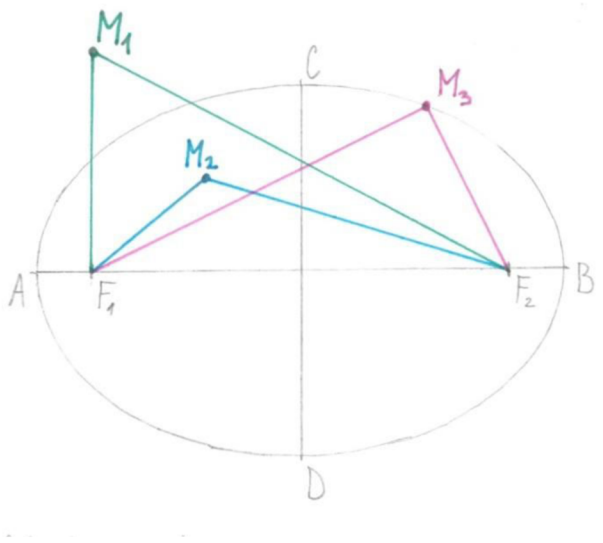
1.2 Vzájemná poloha elipsy a přímky

V následující podkapitole se zaměříme na vzájemnou polohu elipsy a bodu a s tím úzce spojenou vzájemnou polohu elipsy a přímky.

Pro MF_1, MF_2 libovolného bodu M mohou nastat následující situace:

a) $MF_1 + MF_2 > 2a$ ….. vnější body elipsy
b) $MF_1 + MF_2 = 2a$ ….. M $\in$ elipse
c) $MF_1 + MF_2 < 2a$ ….. vnitřní body elipsy

Na obrázku 6 jsou zakresleny zmíněné případy. Bod M_1 je vnější bod elipsy, M_2 je vnitřní bod elipsy a M_3 leží přímo na elipse.

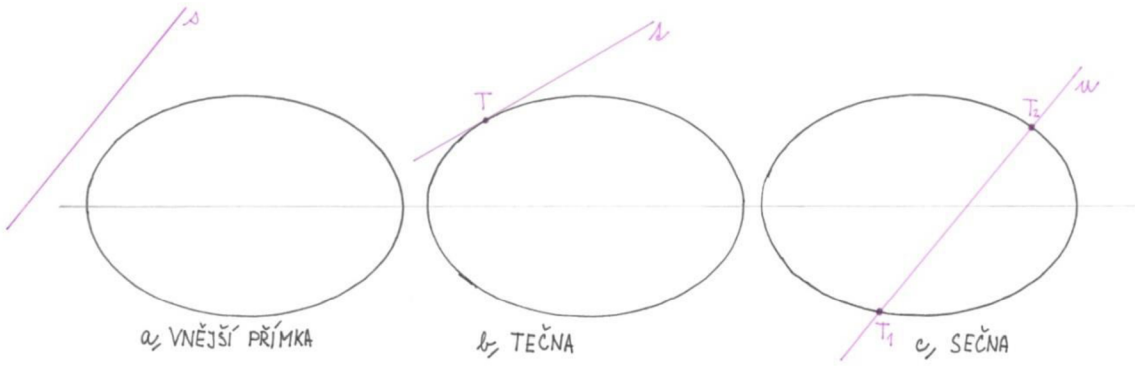


Obrázek 6: Vzájemná poloha elipsy a bodu

Uvedené označení nám pomůže s názornou představou rozdělení roviny na vnitřní a vnější část elipsy.

Následující část ukáže, jaké vzájemné polohy přímky a elipsy mohou nastat. Elipsa může mít s přímkou tři různé vzájemné polohy:

a) vnější přímka
b) tečna
c) sečna



Obrázek 7: Vzájemná poloha elipsy a přímky

Jestliže přímka nemá s elipsou žádný společný bod, všechny její body jsou vnějšími body elipsy, potom se jedná o **vnější přímku** (někdy nazývaná nesečna). Přímka mající společný právě jeden bod, kdy všechny ostatní body přímky jsou vnější, se nazývá **tečna elipsy**. Pokud má elipsa s přímkou právě dva různé společné body, jedná se o **sečnu**. Hlavní a vedlejší osa je tedy sečnou elipsy.

1.3 Tečna a ohniskové vlastnosti elipsy

Tečnu a ohniskové vlastnosti řadíme mezi základní znalosti o elipse, proto považuji za nezbytné, alespoň okrajově, je na tomhle místě uvést.

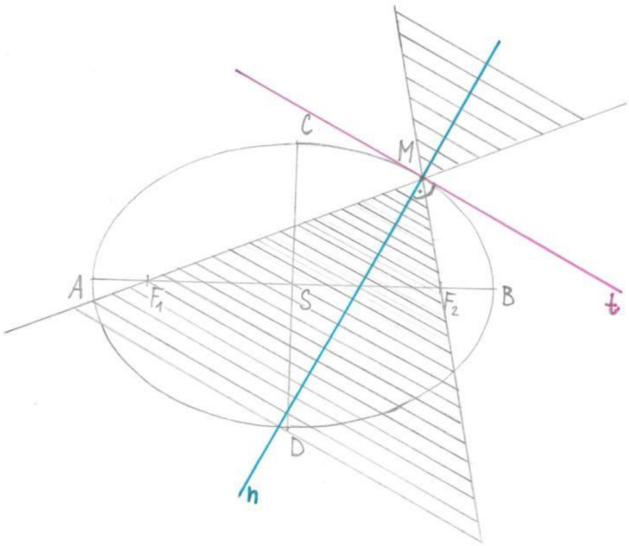
Tečna elipsy je přímka, která má s elipsou společný právě jeden bod. Společný bod elipsy a tečny nazýváme **dotykový bod**. V každém bodě elipsy existuje právě jedna tečna.

Tečny ve vrcholech *A, B, C, D* se jmenují **vrcholové tečn**y a tvoří obdélník, do něhož je elipsa vepsána.

Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče bodu *M* elipsy, vždy jeden obsahuje střed elipsy. Úhel tvořený polopřímkami MF_1, MF_2, který obsahuje střed elipsy, a příslušný vrcholový úhel, se nazývají **vnitřní úhly průvodičů**. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům jsou **vnější úhly průvodičů** bodů elipsy. Na obrázku 8 jsou vnitřní body průvodičů bodu *M* znázorněny vyšrafovanou oblastí.

Tečna elipsy půlí vnější úhly průvodičů dotykového bodu. Kolmice k tečně elipsy v jejím dotykovém bodě se nazývá **normála elipsy**.

Na obrázku 8 jsou mimo jiné zaznačeny vnitřní a vnější úhly průvodičů, tečna *t* a normála *n* elipsy v bodě *M*.



Obrázek 8: Vnitřní a vnější úhly průvodičů bodů elipsy

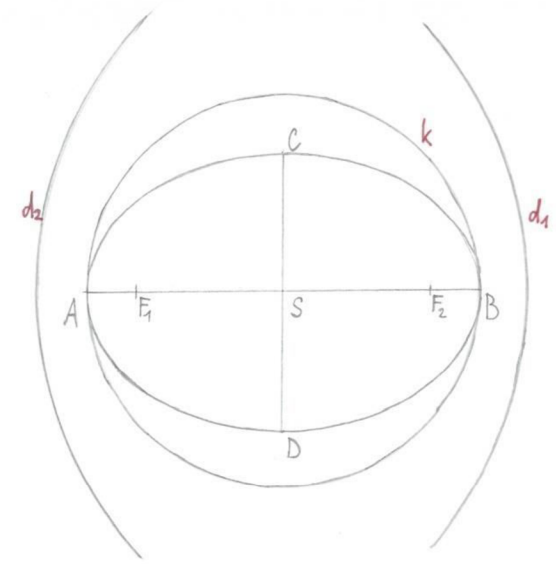
Mezi ohniskové vlastnosti elipsy se řadí dvě nejvýznamnější, které popisují řídící a vrcholovou kružnici. Seznámí nás s nimi následující věty, které výhradně plynou z definice o elipse jako množině bodů.

Věta: *Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je kružnice se středem v ohnisku druhém o poloměru rovném velikosti hlavní osy elipsy.*

Tato kružnice se nazývá **řídící kružnice**. Elipsa má tedy dvě řídící kružnice. Na obrázku 9 jsou označené jako d_1, d_2.

Věta: *Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice opsaná okolo středu elipsy poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy.*

Kružnice *k,* zakreslena na obrázku 9, je tzv. **vrcholová kružnice**.



Obrázek 9: Řídící a vrcholová kružnice

2 ELIPSA JAKO AFINNÍ OBRAZ KRUŽNICE

V následující kapitole se budeme zabývat, jak již název napovídá, afinitou mezi kružnicí a elipsou. Seznámíme se s trojúhelníkovou a proužkovou konstrukcí, které vycházejí z afinních vlastností. Dále si přiblížíme sdružené průměry elipsy, které jsou odvozeny z afinity kružnice, a uvedeme konstrukce pomocí sdružených průměrů.

2.1 Konstrukce vycházející z afinity

2.1.1 Afinní transformace kružnice

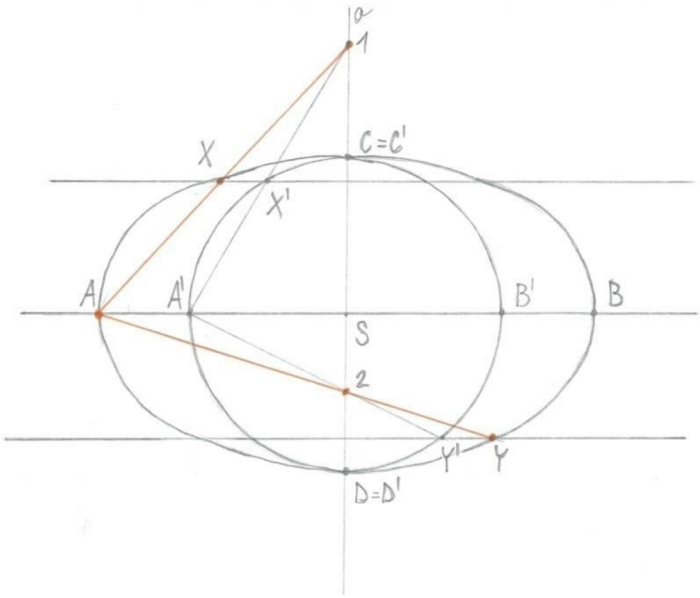
Elipsu lze chápat jako „zploštělou“ kružnici. Roztáhneme-li kružnici vodorovně či svisle, získáme elipsu. Děje se tak díky osové afinitě mezi kružnicí a elipsou. Představíme si dvě speciální možnosti zadání osové afinity. Využívá se zde pravoúhlá osová afinita mezi kružnicí a elipsou, kdy směr s je kolmý k ose o.

Speciální zadání mezi kružnicí a elipsou 1

Nechť osa afinity o je totožná s vedlejší osou elipsy a směr s je kolmý k ose o.

Vedlejší vrcholy C, D, ležící na ose afinity, jsou samodružné body, tudíž jsou rovny jejich obrazům C', D'. Budeme-li hledat obraz kružnice k' musí být afinita dourčena obrazem jednoho bodu kružnice k', který nesmí ležet na ose o. Tedy jedním bodem, jenž leží na hledané elipse. Nechť je to dvojice $A' \rightarrow A$.

Ostatní body elipsy následně dohledáme. Zvolíme si libovolný bod $X' \in k'$ a najdeme jeho obraz X. Sestrojíme pomocný bod 1, pro který platí: $1 = A'X' \cap o$. Bod X je průsečíkem přímky rovnoběžné se směrem s, procházejícím bodem X', a přímky $1A$. Ostatní body elipsy dohledáme stejným způsobem.

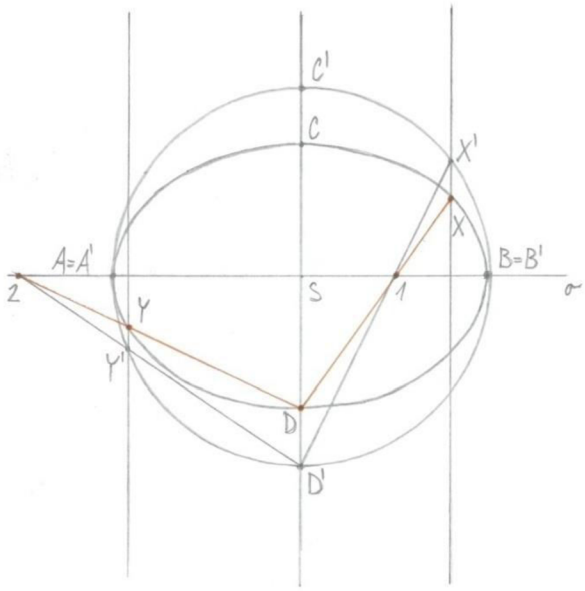


Obrázek 10: Speciální zadání mezi elipsou a kružnicí 1

Speciální zadání mezi kružnicí a elipsou 2

Nechť osa afinity *o* je totožná s hlavní osou elipsy a směr *s* je kolmý k ose *o*. Budeme-li hledat obraz kružnice *k'* musí být opět afinita dourčena obrazem jednoho bodu kružnice *k'*, který nesmí ležet na ose *o*. Nechť je to dvojice *C'* → *C*. Hlavní vrcholy *A, B* ležící na ose afinity, jsou samodružné body, tudíž jsou rovny jejich obrazům *A', B'*.

Další body elipsy dohledáme stejně jako v prvním případě.



Obrázek 11: Speciální zadání mezi elipsou a kružnicí 2

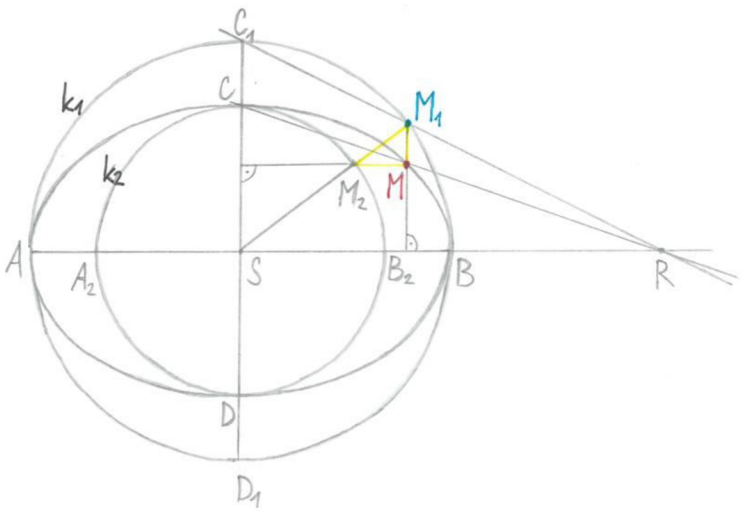
2.1.2 Trojúhelníková konstrukce elipsy

Trojúhelníkovou konstrukci můžeme považovat za jednu z nejpřesnějších. Využívá se zde pravoúhlá osová afinita mezi kružnicí a elipsou. Osou této afinity je hlavní osa *AB*.

Trojúhelníková konstrukce elipsy je daná osami. Narýsujeme hlavní a vedlejší osu a zaznačíme hlavní a vedlejší vrcholy. Sestrojíme kružnici $k_1 = (S; a)$ nad hlavní osou *AB* elipsy a kružnici $k_2 = (S; b)$ nad její vedlejší osou *CD*. Osou této afinity je hlavní osa *AB*. Nyní zvolíme bod M_1 na kružnici k_1 různý od bodů A, B, C_1, D_1 a sestrojíme jeho obraz $M \in$ elipsa.

Pro sestrojení bodu *M* použijeme přímku C_1M_1, která se protíná se svým obrazem *CM* na ose afinity v bodě *R*. Úsečka M_1M je kolmá na hlavní osu *AB* a zároveň úsečka M_2M je kolmá na vedlejší osu *CD*. Vzniklý bod *M* je bodem elipsy.

Opakováním tohoto postupu získáme dostatečný počet bodů, který nám poslouží k vykreslení elipsy. Konstrukce se jmenuje trojúhelníková podle toho, že body M, M_1, M_2 jsou vrcholy pravoúhlých trojúhelníků. Elipsa pomocí trojúhelníkové konstrukce je narýsovaná na obrázku 12.

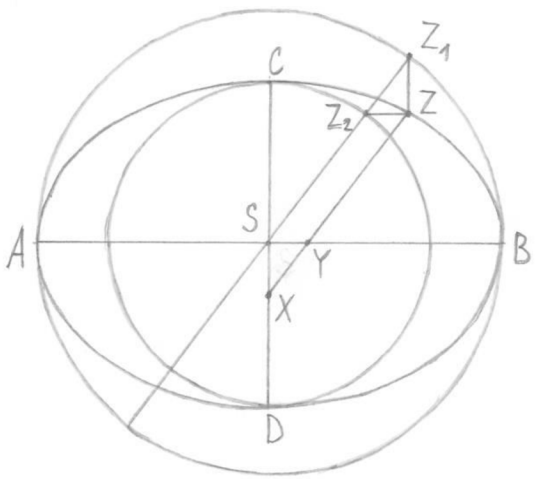


Obrázek 12: Trojúhelníková konstrukce

2.1.3 Proužková konstrukce elipsy

Při odvozování proužkové konstrukce budeme vycházet z trojúhelníkové konstrukce, která byla představena v předchozí podkapitole. Opět se tedy jedná o konstrukci využívající afinní vlastnosti.

Na obrázku 13 je sestrojen bod elipsy *Z* pomocí trojúhelníkové konstrukce.



Obrázek 13: Proužková konstrukce elipsy

Bodem *Z* elipsy *k,* který je sestrojen trojúhelníkovou konstrukcí z kružnic *k', k''*, vedeme rovnoběžku s přímkou SZ_1, která protíná hlavní osu v bodě *Y* a vedlejší osu v bodě *X*. Z trojúhelníkové konstrukce již víme, že přímka Z_1Z je kolmá na hlavní osu *AB*, tudíž musí být rovnoběžná s vedlejší osou *CD* a přímka Z_2Z je rovnoběžná s hlavní osou. Z uvedeného tvrzení vyplývá, že vzniklé čtyřúhelníky SZ_1ZX a SZ_2ZY jsou rovnoběžníky. Protější strany rovnoběžníků jsou shodné a v našem případě platí:

$XZ = SZ_1 = a$ (délka hlavní poloosy)

$YZ = SZ_2 = b$ (délka vedlejší poloosy)

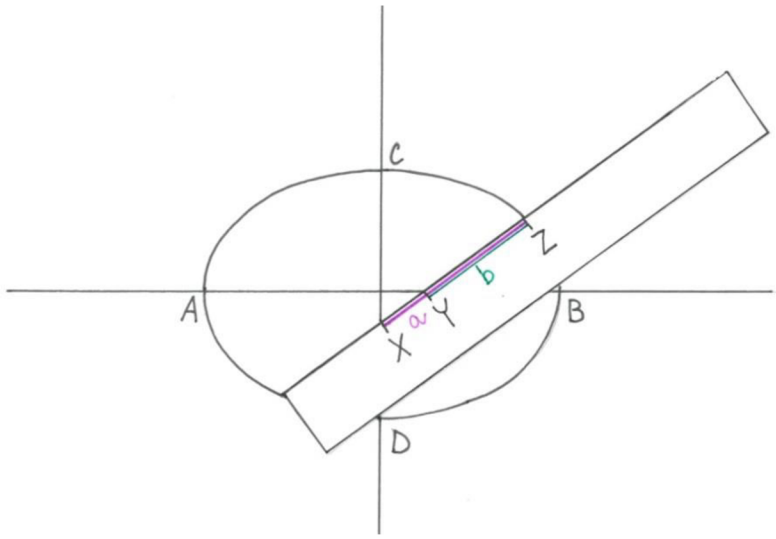
Velikost úsečky *XY* je tedy $a - b$. Z provedené úvahy lze odvodit tzv. proužkovou konstrukci rozdílovou, kterou si nyní předvedeme.

2.1.3.1 Proužková konstrukce rozdílová

Body elipsy nalezneme pomocí proužku papíru, na který si přeneseme délku hlavní poloosy *a* a délku vedlejší poloosy *b* tak, že $a = XY$, $b = YZ$.

Proužkem pohybujeme tak, aby bod *X* zůstával na vedlejší ose a bod *Y* na hlavní ose. Pohybujeme-li proužkem papíru, bod *Z* vykreslí elipsu.

Uvedené proužkové konstrukci říkáme proužková konstrukce rozdílová, protože velikost úsečky *XY* je rovna rozdílu velikosti poloos: $XY = a - b$

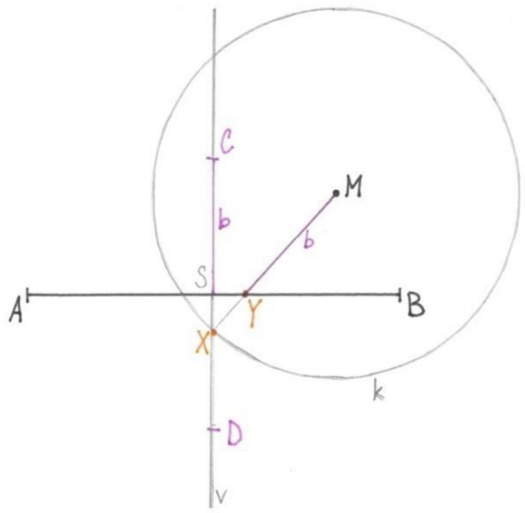


Obrázek 14: Rozdílová konstrukce elipsy pomocí ustřiženého proužku

S využitím znalostí o proužkové konstrukci rozdílové umíme dohledat velikost vedlejší poloosy, je-li určena velikost hlavní osy a libovolný bod *M*, ležící na elipse.

Bod *M* představuje bod *Z* z proužkové konstrukce součtové. Určíme střed *S* elipsy a jím vedeme kolmici *v*, na které bude ležet vedlejší osa *CD*. Sestrojíme kružnici *k = (M; a),* která protne přímku *v* v bodě *X*. Spojíme body *M, X* a nalezneme průsečík *Y* úsečky *XM* s hlavní osou elipsy.

Velikost úsečky *YM* je rovna velikosti vedlejší poloosy *b* elipsy. Naneseme délku *b* od středu *S* na obě strany na přímku *v,* a získáme tak vedlejší vrcholy *C, D.*



Obrázek 15: Hledání vedlejší poloosy pomocí rozdílové konstrukce

2.1.3.2 Proužková konstrukce součtová

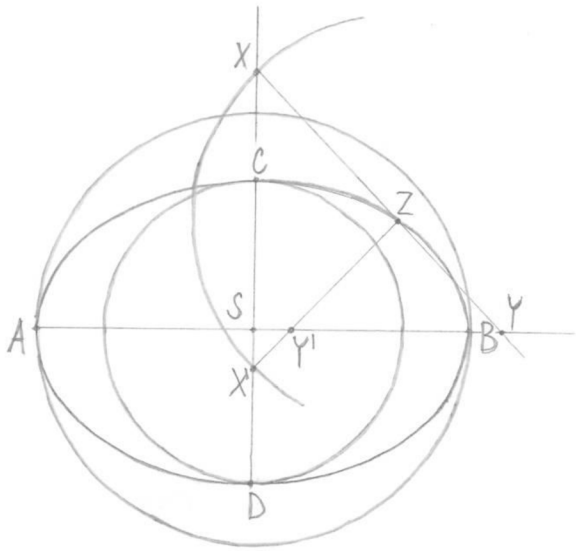
Kromě proužkové konstrukce rozdílové se seznámíme také s proužkovou konstrukcí součtovou, kterou si popíšeme na obrázku 16.

Body *X'Y'Z* splňují podmínky proužkové konstrukce rozdílové, tudíž bod *Z* leží na elipse. Bod *X* je sestrojen průsečíkem vedlejší osy s kruhovým obloukem o poloměru *a* ze středu *M*. Spojnice bodu *X* a *Z* protíná hlavní osu v bodě *Y*.

$X'Z = XZ = a$ (délka hlavní poloosy)

$Y'Z = YZ = b$ (délka vedlejší poloosy)

Velikost úsečky *XY* je tedy $a + b$.

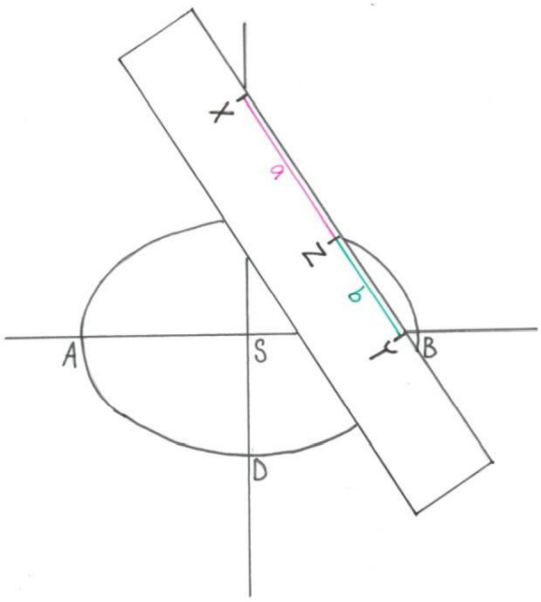


Obrázek 16: Proužková konstrukce součtová

Body elipsy můžeme opět naleznout pomocí proužku papíru, na který si přeneseme délku hlavní poloosy *a* a délku vedlejší poloosy *b* tak, že $a = XZ$, $b = ZY$.

Proužkem pohybujeme tak, aby bod *X* zůstával na vedlejší ose a bod *Y* na hlavní ose. Bod *Z* určuje jednotlivé body křivky. Pohybujeme-li proužkem papíru, bod *Z* vykreslí elipsu.

Uvedené proužkové konstrukci říkáme proužková konstrukce součtová, protože velikost úsečky *XY* je rovna součtu velikosti poloos: $XY = a + b$

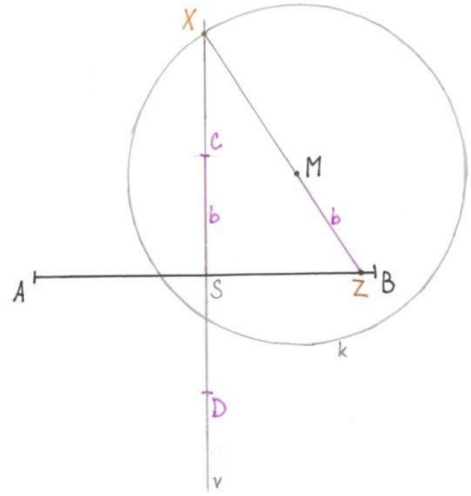


Obrázek 17: Součtová konstrukce elipsy pomocí ustřiženého proužku

Opět můžeme nalézt vedlejší osu elipsy, jestliže je zadaná hlavní osa elipsy a bod *M* ležící na této elipse. K sestrojení vedlejší osy elipsy využijeme součtovou proužkovou konstrukci.

Postupovat budeme stejně jako u rozdílové konstrukce elipsy. Sestrojíme kružnici $k = (M;\ a)$, která protne přímku *v* v bodě *X*. Spojíme body *M, X* a nalezneme průsečík *Z* úsečky *XM* s hlavní osou elipsy. Při porovnání obrázků 15 a 18 vidíme, že kružnice *k* protíná vedlejší osu ve dvou bodech. V prvním i v druhém případě uvažujeme každý průsečík zvlášť.

Velikost úsečky *MZ* je rovna velikosti vedlejší poloosy *b* elipsy. Naneseme délku *b* od středu *S* na obě strany na přímku *v,* a získáme tak vedlejší vrcholy *C, D.*



Obrázek 18: Hledání vedlejší poloosy pomocí součtová konstrukce

2.1.4 Obraz kružnice v osové afinitě

Rovnoběžným průmětem kružnice *k* mezi dvěma rovinami je v obecném případě elipsa. Speciálním případem může být zobrazení do kružnice či úsečky, nicméně tenhle případ nyní uvažovat nebudeme. Daná kružnice *k* a její rovnoběžný průmět elipsa *k'* si odpovídají v osové afinitě mezi rovinami obou křivek.

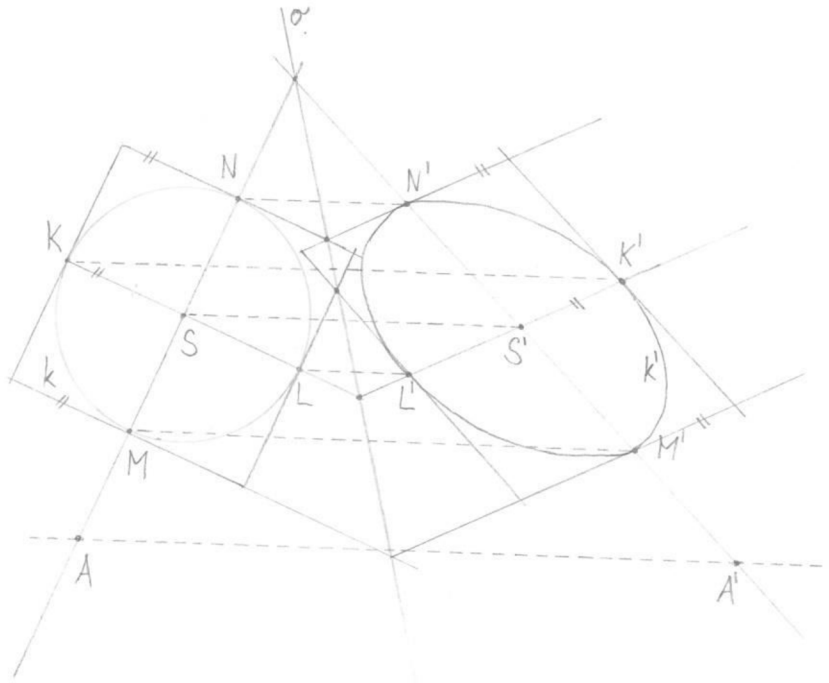
V osové afinitě mezi dvěma rovinami se rovnoběžně promítají body jedné roviny do roviny druhé. Odpovídající si body leží na rovnoběžkách se směrem *s*. Odpovídající si přímky se protínají na ose *o* v tzv. samodružných bodech. Zachovává se incidence, rovnoběžnost a střed úsečky. Osová afinita mezi dvěma rovinami je nejčastěji dána směrem *s,* osou *o* a dvojicí odpovídajících si bodů.

V osové afinitě sestrojíme obraz *k'* kružnice *k.* Nejdříve pomocí afinity přeneseme střed *S* na střed elipsy *S'*. Sestrojíme dva kolmé, ale jinak libovolné průměry *KL* a *MN* kružnice *k.* V dané afinitě jim odpovídají obrazy *K'L'* a *M'N'* procházející středem *S'* elipsy *k'*. *K'L'* a *M'N'* jsou sdružené průměry elipsy a zároveň značí vedlejší a hlavní osu elipsy. (Více o sdružených průměrech elipsy se dozvíme v zápětí v podkapitole 2.3.)

Jestliže je obrazem kružnice v osové afinitě elipsa, pak vzhledem k tomu, že sdružené průměry jsou definovány pomocí vlastností, které se v osové afinitě zachovávají, musí platit následující věta.

Věta: *Je-li v osové afinitě obrazem kružnice elipsa, jsou obrazem kterýchkoliv sdružených průměrů kružnice sdružené průměry elipsy.*

Na obrázku 19 si můžeme povšimnout, že čtverec opsaný kružnici *k,* se zobrazí jako rovnoběžník opsaný elipse *k'*.



Obrázek 19: Afinita mezi kružnicí a elipsou

Vzhledem k poznatku, že je elipsa považována za afinní obraz kružnice, lze všechny vlastnosti kružnice, které jsou neměnné při afinní transformaci nebo při rovnoběžném promítání, přímo přenést na elipsu. Konstrukce na elipse jsou složitější než na kružnici. Proto jsou často nejdříve zkonstruovány na kružnici a následně afinitou převedeny na elipsu

2.2 Konstrukce pomocí sdružených průměrů

Nadále si ukážeme některé konstrukce elipsy pomocí sdružených průměrů. Pro správné pochopení konstrukcí se v prvé řadě seznámíme se sdruženými průměry elipsy.

2.2.1 Sdružené průměry

V následující části budeme používat pojmy průměr a sdružený průměr elipsy, proto si nejdříve oba termíny objasníme.

Věta: *Průměrem elipsy se rozumí každá přímka procházející jejím středem S.*

Průměrem elipsy není úsečka, ale celá přímka. Ovšem, je-li uvedena délka průměru elipsy, je myšlena pouze úsečka ležící ve vnitřní části elipsy procházející středem *S*.

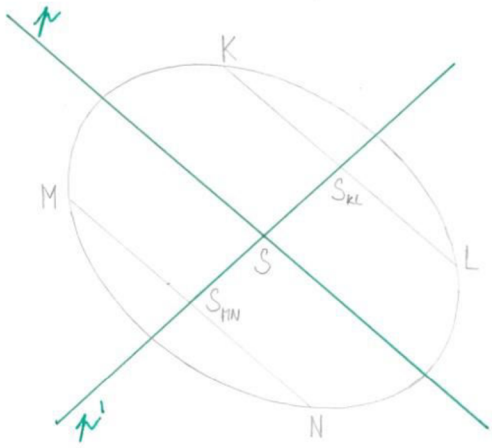
Věta: *Dva průměry elipsy se nazývají* ***sdružené****, jsou-li tečny v krajních bodech jednoho průměru rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.*

Všechny sdružené průměry kružnice jsou navzájem kolmé, zatímco u elipsy existuje právě jedna dvojice sdružených a zároveň kolmých průměrů. Jedná se o hlavní a vedlejší osu.

Jelikož jsou sdružené průměry definovány pomocí vlastností, které se v osové afinitě zachovávají, musí platit následující tvrzení:

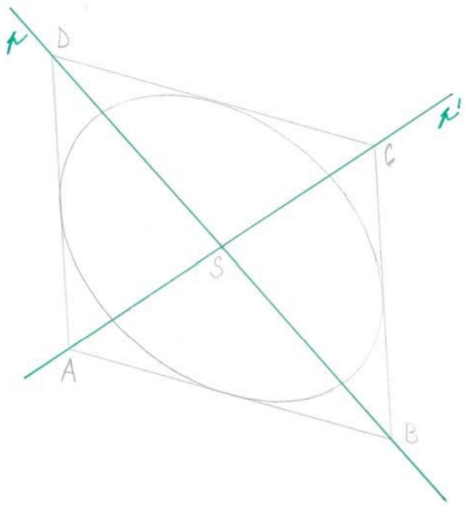
<u>Tvrzení 1:</u> *Každý ze dvou sdružených průměrů elipsy půlí její tětivy rovnoběžné s druhým průměrem.*

Sdružené průměry jsou na obrázcích 20, 21 a 22 vždy označeny jako *p* a *p'*.



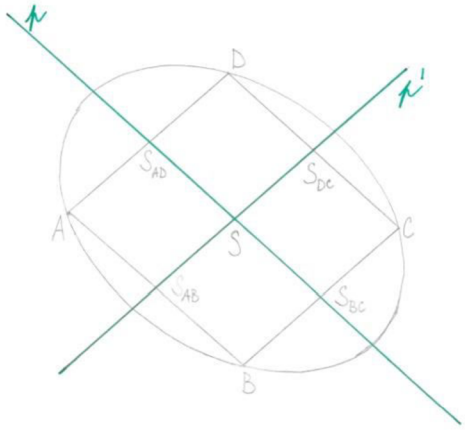
Obrázek 20: Tvrzení 1

Tvrzení 2: *Úhlopříčky rovnoběžníka elipse opsaného jsou její sdružené průměry.*



Obrázek 21: Tvrzení 2

Tvrzení 3: *Střední příčky rovnoběžníka elipse vepsaného jsou její sdružené průměry.*



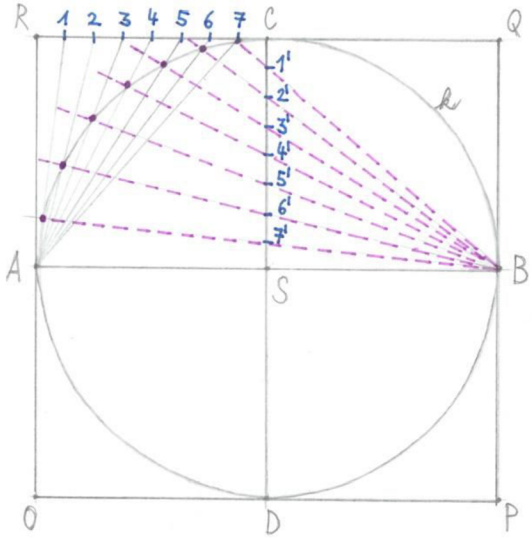
Obrázek 22: Tvrzení 3

2.2.2 Příčková konstrukce

Příčkovou konstrukci elipsy používáme v případech, kdy máme zadané sdružené průměry. Nepotřebujeme znát hlavní ani vedlejší osu elipsy. Příčková konstrukce je důkazem věty, že v afinitě kružnici odpovídá elipsa. Konstrukci si nejprve vysvětlíme na kružnici, aby pro nás poté byla jednodušší u elipsy.

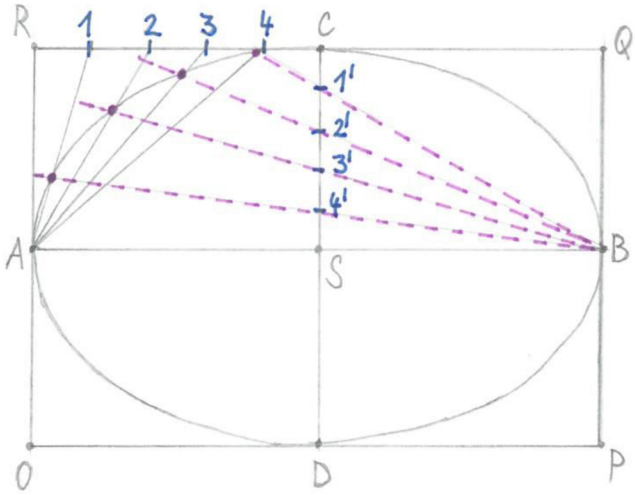
V dané kružnici *k* máme dva k sobě kolmé průměry *AB* a *CD*. Tečny v krajních bodech *A, B, C, D* nám dávají čtverec *OPQR*. Čtverec je opsaný kružnici *k* tak, že *AB, CD* jsou jeho střední příčky a S je jeho středem *(S = AB ∩ CD)*.

Nejdříve pracujeme ve čtverci *ASCR*, kde získáme body čtvrtkružnice *AC*. Pro sestrojení bodů si rozdělíme úsečky *SC* a *RC* na libovolný počet stejně velkých dílků a ty očíslujeme. V našem případě číslujeme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (obr. 24). Čím více dílků, tím získáme větší počet bodů a konstrukce bude přesnější. Vedeme přímky procházející bodem *A* a dělícími body úsečky *RC* a bodem *B* a dělícími body úsečky *SC*. Přímky, které vycházejí z bodů s odpovídajícími si čísly, se protínají v bodech elipsy. Podobným způsobem sestrojíme body i pro zbylé části. Pomocí naleznutých bodů dokreslíme kružnici.



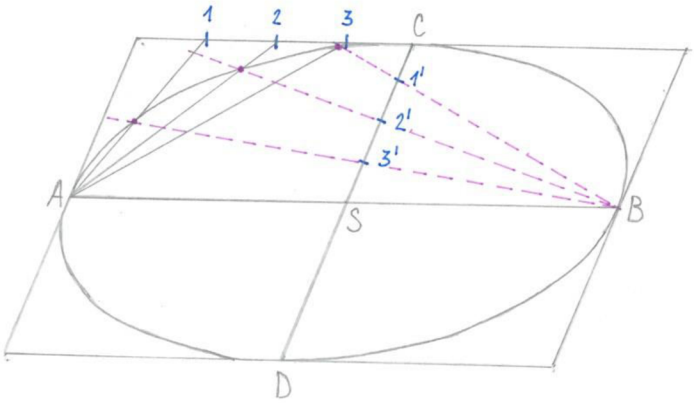
Obrázek 24: Příčková konstrukce kružnice

Jak již bylo řečeno, mezi kružnicí a elipsou je vztah osové afinity. Pokud na čtverec *k* použijeme afinní transformaci, získáme rovnoběžník *OPQR* opsaný elipse. Díky zachování vlastností incidence, rovnoběžnosti a dělícího poměru, můžeme konstrukci elipsy vytvořit příčkovou konstrukcí z rovnoběžníka. Postup je stejný jako u konstrukce kružnice.



Obrázek 25: Příčková konstrukce elipsy – zadány jsou hlavní a vedlejší vrcholy

Na obrázku 25 je sestrojená elipsa příčkovou konstrukcí se zadanými hlavními a vedlejšími vrcholy. Na obrázku 26 jsou pro konstrukci zadány sdružené průměry.



Obrázek 26: Příčková konstrukce elipsy – zadány jsou sdružené průměry

2.2.3 Rytzova konstrukce elipsy

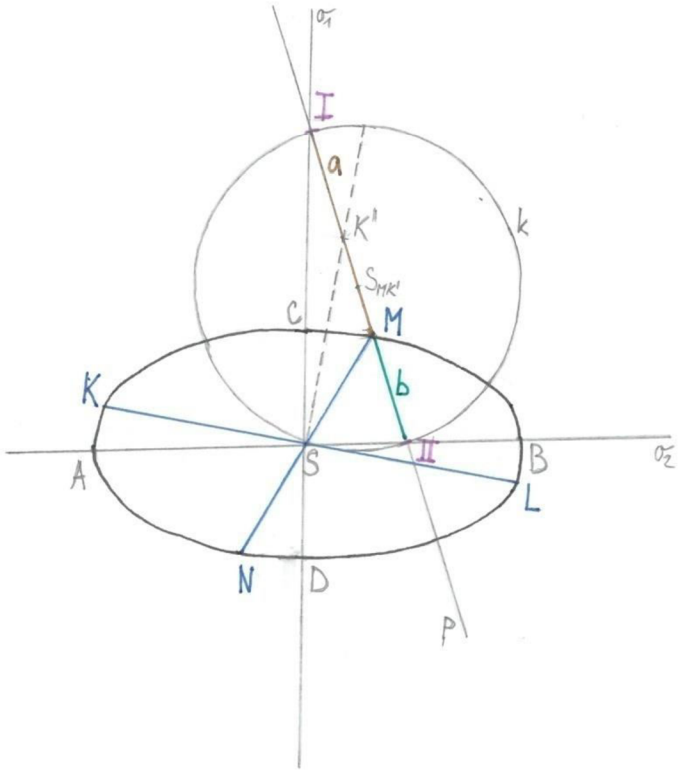
Rytzovu konstrukci použijeme v případě, máme-li zadané sdružené průměry a potřebujeme dohledat hlavní a vedlejší osu elipsy.

Jde o jednu z nejpoužívanějších konstrukcí, která je pojmenovaná podle švýcarského matematika Davida Rytze (1801-1868). Nejdříve si ukážeme postup konstrukce a následně její důkaz.

Máme dány sdružené průměry KL a MN. Jejich průnik nám určuje střed elipsy S. Jeden z koncových bodů otočíme okolo středu S o 90°. V našem případě jde o bod K a otočením vzniká bod K'.

Následně vedeme přímku p, která prochází vzniklým bodem K' a koncovým bodem M. Nalezneme střed $S_{MK'}$ a sestrojíme kružnici k se středem $S_{MK'}$ a poloměrem $SS_{MK'}$. Průsečíky kružnice s přímkou $K'M$ označíme I, II. Jsou to body, jimiž prochází osy elipsy. Nyní již nalezneme na přímce p délku hlavní a vedlejší poloosy.

Platí: $IM = AS = a$; $IIM = CS = b$



Obrázek 27: Rytzova konstrukce

Odvození Rytzovy konstrukce:

Nechť je dána elipsa svými hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D. Sestrojme kružnice $k_1 = (S, a)$ a $k_2 = (S, b)$, kde S je střed elipsy. Jak již bylo řečeno, daná elipsa je afinním obrazem kružnice k_1 a zároveň k_2.

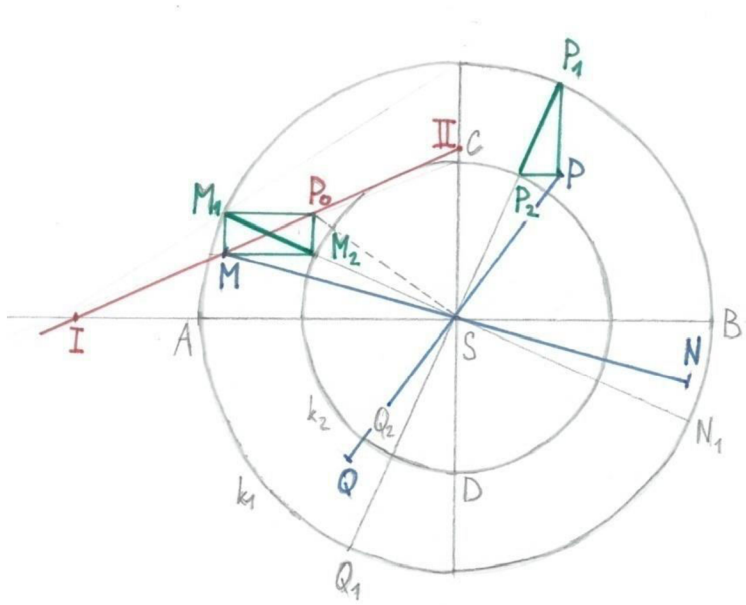
V kružnici k_1 zvolíme libovolnou dvojici sdružených průměrů M_1N_1, P_1,Q_1, které jsou na sebe kolmé. V osové afinitě s osou AB, ve které je obrazem kružnice k_1 elipsa, jsou obrazem sdružených průměrů M_1N_1, P_1,Q_1 kružnice k_1, sdružené průměry MN, PQ. Tyhle sdružené průměry sestrojíme již vysvětlenou trojúhelníkovou konstrukcí. Průsečíky polopřímek SM_1, SP_1 s kružnicí k_2 označíme M_2, P_2.

Otočíme-li trojúhelník P_1, P, P_2 okolo středu S o 90°, pak platí: $M_1 = P_1$, $M_2 = P_2$, $P = P_0$ a zároveň P_0 je čtvrtým vrcholem obdélníku M, M_2, P_0, M_1.

Průsečíky úhlopříčky MP_0 zmíněného obdélníku s hlavní a vedlejší osou označíme jako I a II. Z rovnoběžnosti $MM_2 \parallel M_1P_0 \parallel AS \wedge M_1M \parallel P_0M_2 \parallel CS$ plyne rovnost úseček:

$SM_2 = IM = P_0II = b$ (délka vedlejší poloosy)

$SM_1 = IP_0 = MII = a$ (délka hlavní poloosy)



Obrázek 28: Důkaz Rytzovy konstrukce

2.2.4 Frézierova konstrukce elipsy

Frézierova konstrukce je o více jak sto let starší než Rytzova konstukce, pochází z roku 1737. Dá se považovat za zvláštní způsob Rytzovy konstrukce.

Konstrukce se jmenuje podle francouzského matematika Amédée-François Frézier (1682-1773), který patřil mezi nejpozoruhodnější vědce 18. století. Mnozí ho považují za zakladatele deskriptivní geometrie. Působil ve francouzském městě Savoie, ale původem pocházel ze Skotska.

Nyní přejdeme k samotné konstrukci. Máme dány sdružené průměry KL a MN. Jejich průnik S je zároveň střed hledané elipsy. Sestrojíme kolmici v k úsečce SL, která prochází bodem N. Na kolmici v najdeme bod X takový, že platí: $NX = KS = SL$

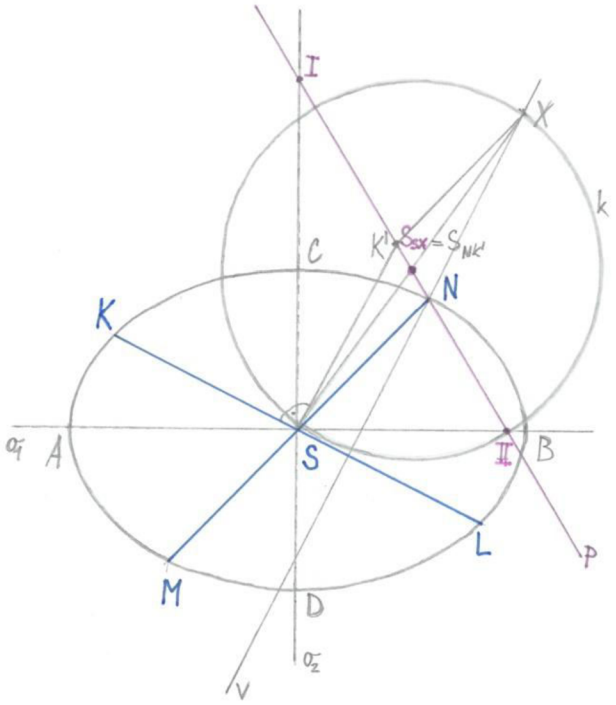
Sestrojíme střed S_{SX} úsečky SX. Střed S_{SX} je totožný se středem $S_{NK'}$ z Rytzovy konstrukce.

Následující postup bude stejný jako u Rytzovy konstrukce. Sestrojíme kružnici k se středem S_{SX} a poloměrem $S_{SX}S$. Průsečíky kružnice k s přímkou NS_{SX} označíme I, II. Jsou to body, jimiž prochází osy elipsy. Nyní nalezneme na přímce p, která prochází body NS_{SX}, délku hlavní a vedlejší poloosy.

Platí: $IN = AS = a$; $IIN = CS = b$

Tvrzení, že střed S_{SX} je totožný se středem $S_{NK'}$ z Rytzovy konstrukce, dokážeme následujícím způsobem.

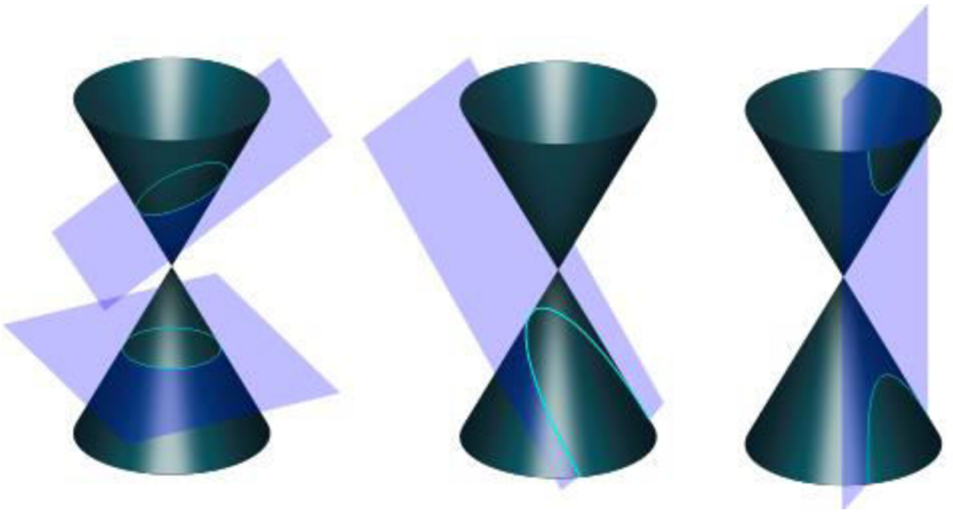
Pokud obě konstrukce narýsujeme dohromady, vznikne čtyřúhelník $SNXK'$. Úsečky NX a SK' jsou rovnoběžné, protože obě mají kolmý směr na úsečku KL. Zároveň pro tyto úsečky platí: $NX = SK' = SK$. Z uvedených vlastností plyne rovnoběžnost a shodnost délek úseček SN a $K'X$. Můžeme tedy s jistotou říct, že středy S_{SX} a $S_{NK'}$ jsou shodné.



Obrázek 30: Porovnání Frézierovy a Rytzovy konstrukce

3 ELIPSA JAKO KUŽELOSEČKA

Elipsu spolu s parabolou a hyperbolou řadíme mezi kuželosečky. Jak již název napovídá, kuželosečky jsou křivky, které vznikají „seknutím“ do kužele. Na obrázku 31 vidíme křivky, které mohou vzniknout.



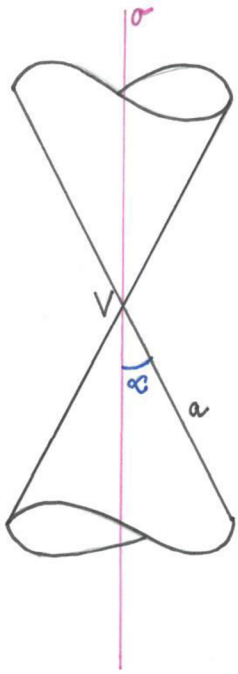
Obrázek 31: Klasifikace řezů - elipsa, parabola, hyperbola (Zdroj: Matematika.cz)

Protíná-li rovina všechny povrchové přímky pláště kužele, jedná se o elipsu. Protne-li kužel rovina rovnoběžná právě s jednou z povrchových přímek pláště kuželu, vzniklá křivka je parabola. Je-li rovina protínající kužel rovnoběžná právě s dvěma povrchovými přímkami kuželu, výslednou kuželosečkou je parabola. Roviny procházející vrcholem, se nazývají vrcholové. Těmi se však zabývat nebudeme.

3.1 Elipsa jako řez rotační kuželové plochy

Nyní si představíme elipsu jako řez rotační kuželové plochy a vzápětí jako řez rotační válcové plochy.

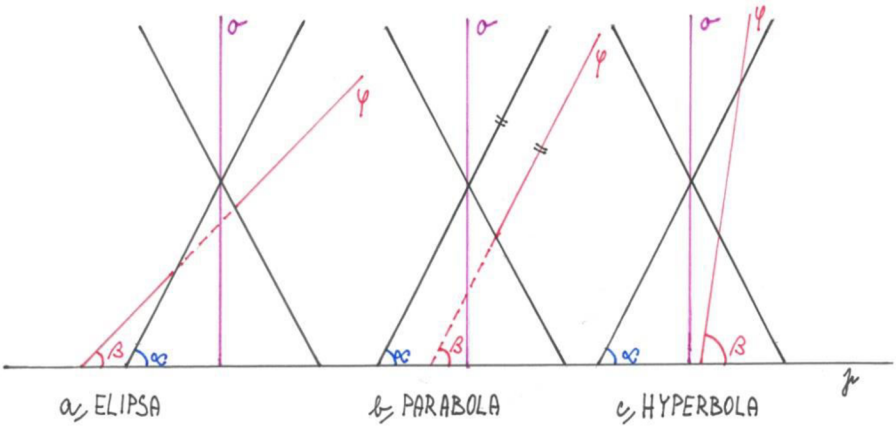
Nejprve definujeme pojem rotační kuželová plocha. V euklidovském prostoru je dán pevný bod V, pevná přímka o, procházející bodem V, a libovolná přímka a, která prochází bodem V a s osou o svírá úhel α. Bod V se nazývá vrchol kuželové plochy. Množina všech přímek (povrchových přímek) procházejících bodem V, které svírají s přímkou o (osou kuželové plochy) úhel o velikosti α, se nazývá rotační kuželová plocha.



Obrázek 32: Kuželová plocha

Podle polohy roviny φ řezu vzhledem ke kuželové ploše a dle počtu nevlastních bodů vzniklé křivky můžeme rozlišit různé druhy kuželoseček:

a) **elipsa** (α > β; žádný nevlastní bod)
b) **parabola** (α = β; jeden nevlastní bod)
c) **hyperbola** (α < β; dva nevlastní body)



Obrázek 33: Klasifikace řezů rotační kuželové plochy

3.1.1 Quételetova – Dandelinova věta pro kuželovou plochu

Věta: *Řezem rotační kuželové plochy rovinou je kuželosečka, jejíž ohniska jsou body dotyku této roviny a kulových ploch vepsaných do kuželové plochy.*

Quételetovu – Dandelinovu větu odůvodníme pouze pro elipsu. Ukážeme, že řezem je elipsa, která má ohniska v bodech F', F'' a hlavní osu AB. Věta je ilustrovaná na obrázku 34.

Do kuželové plochy vepíšeme pomocné kulové plochy κ‘, κ‘‘ se středy na o tak, aby se dotýkaly roviny řezu φ. Dotykové body s rovinou řezu označíme F', F''. Nyní sestrojíme dotykové kružnice kulových ploch a kuželové plochy κ‘, κ‘‘. Průnikem jejich přímek k_2' a k_2'' s dvojicí povrchových přímek označíme A', A'', B', B''.

Ukážeme, že řezem je elipsa, která má ohniska v bodech F', F''. Každý bod řezu je bodem elipsy a každý bod elipsy je bodem řezu.

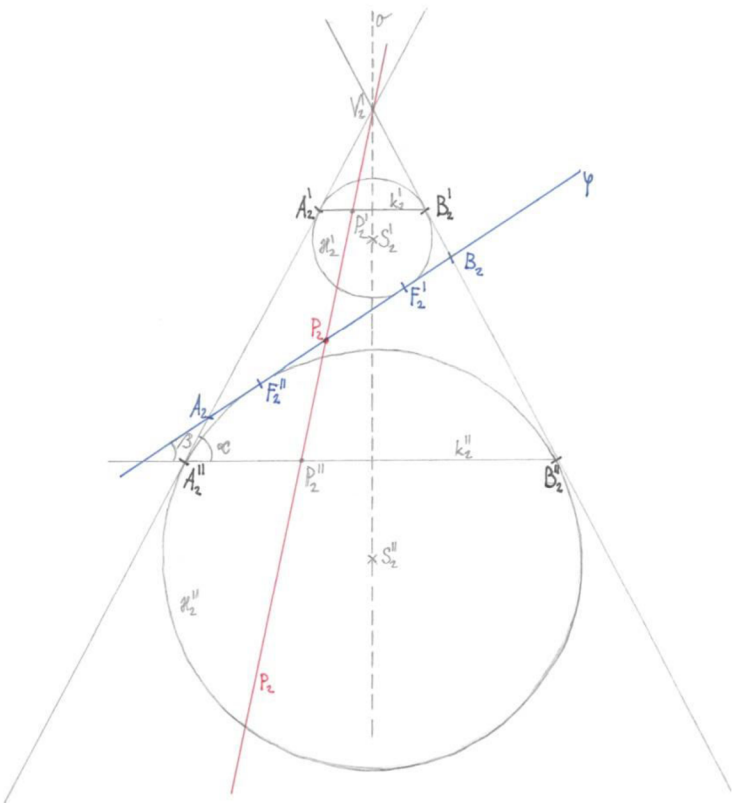
Na křivce řezu zvolíme libovolný bod P a sestrojíme povrchovou přímku p, která jím prochází. Přímka p se dotýká kulových ploch κ', κ'' na jejich dotykových kružnicích s kuželovou plochou k', k''. Body dotyku označíme P', P''.

Délky všech tečen vedených z libovolného bodu ke kulové ploše jsou stejně veliké. Platí tedy $PF' = PP'$, $PF'' = PP''$. Sečtením dostáváme: $PF' + PF'' = P'P''$

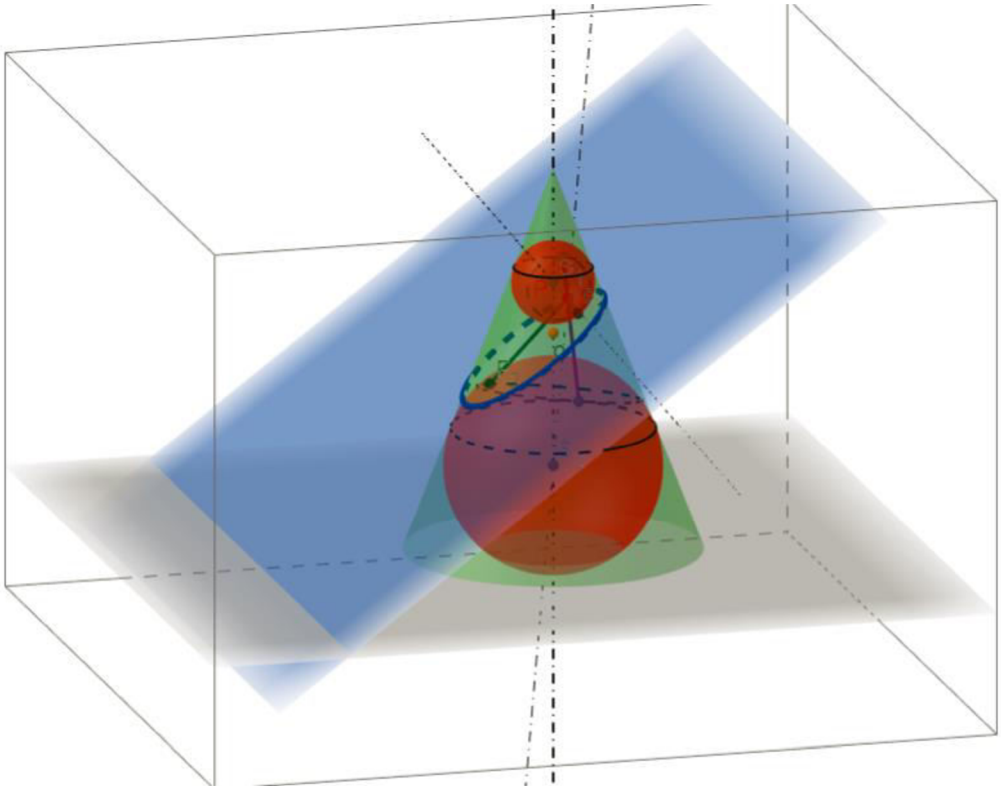
Úsečka $P'P''$ je strana rotačního kolmého kužele s podstavnými hranami k', k'', a proto $P'P'' = A'A'' = B'B''$. Z toho vyplývá, že součet vzdáleností libovolného bodu na řezu od bodů F‘ a F‘‘ je konstantní. Podle definice o elipse jako množině bodů můžeme vyslovit, že se v našem případě jedná o elipsu.

<u>Poznámka</u>: Na obrázku 35 je znázorněn prostorový pohled na Quételetovu – Dandelinovu větu a je ekvivalentní s obrázkem 34. Tudíž přímka AB znázorňuje elipsu s hlavními vrcholy A, B.

Na obrázku 34 jsou objekty s 2 v dolním indexu, jelikož jde o zobrazení na nárysnu.



Obrázek 34: Ilustrace Quételetovy – Dandelinovy věty pro kuželovou plochu



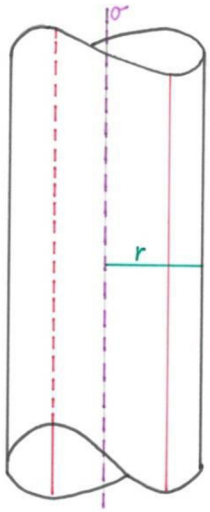
Obrázek 35: Prostorový pohled na Quételetovu–Dandelinovu větu pro kuželovou plochu (Zdroj: Hašek, 2018)

3.2 Elipsa jako řez rotační válcové plochy

Stejně jako tomu bylo u řezů rotační kuželové plochy, tak i v případě rotační válcové plochy dostáváme kuželosečky.

Na rotační válcovou plochu se lze dívat jako na rotační kuželovou plochu, která má vrchol V v nekonečnu. Povrchové přímky nemají společný vlastní bod, avšak mají společný směr – jsou navzájem rovnoběžné.

Rotační válcovou plochou budeme rozumět množinu všech povrchových přímek rovnoběžných s osou o mající od osy o vzdálenost r. Pohybujeme se v eukleidovském prostoru E_3 a osa o (osa rotační válcové plochy) je daná pevná přímka.



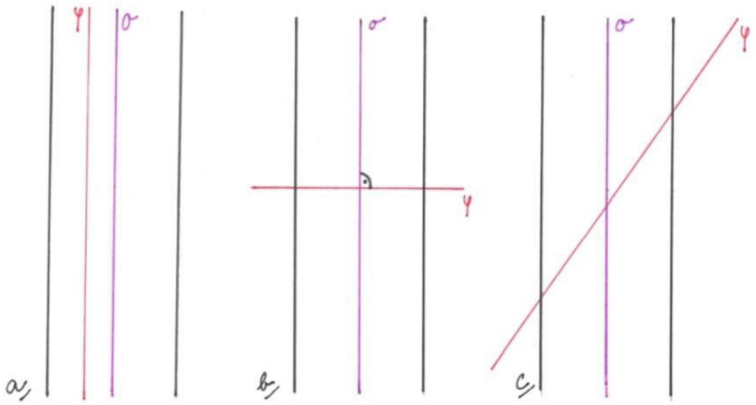
Obrázek 36: Rotační válcová plocha

Klasifikace rovinných řezů rotační válcové plochy:

a) rovina řezu je rovnoběžná s osou válcové plochy – **přímky**
   - žádná přímka - rovina leží mimo válec
   - 1 přímka - rovina je tečnou válce
   - 2 přímky - rovina prochází skrz válec (obr. 37a)

b) rovina řezu je kolmá k ose válcové plochy – **kružnice**

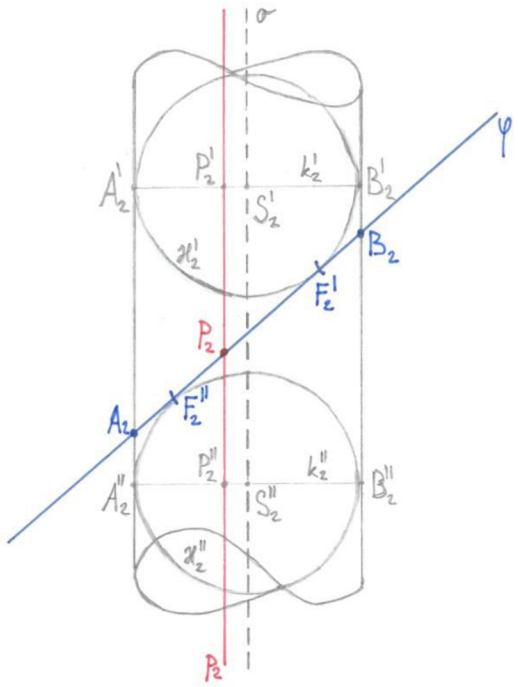
c) rovina řezu je šikmá k ose válcové plochy – **elipsa**



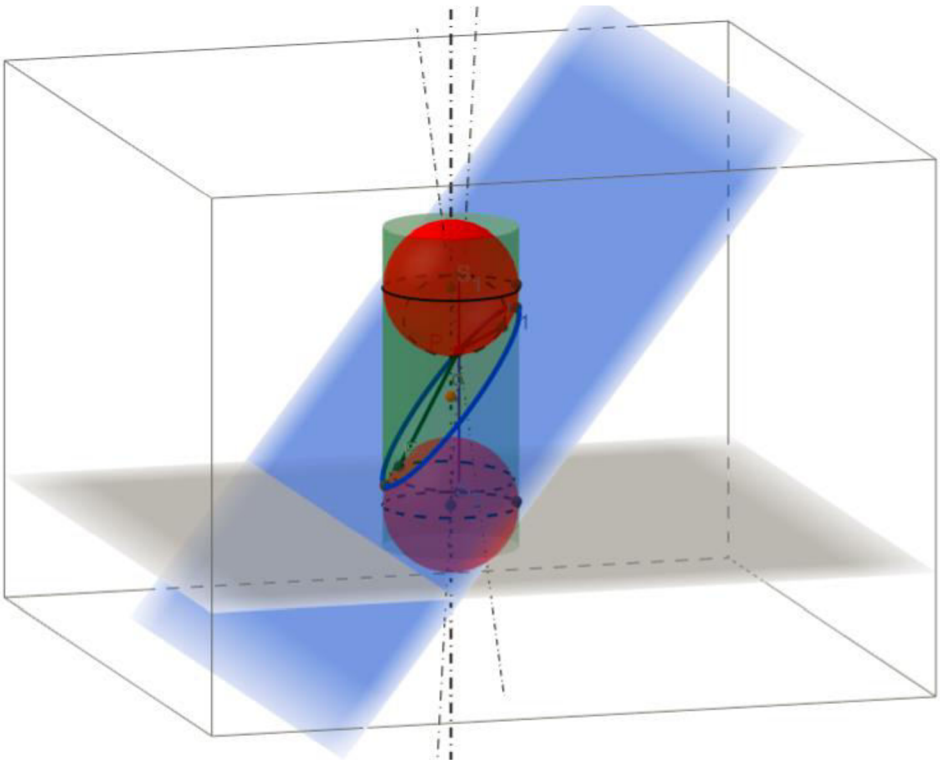
Obrázek 37: Klasifikace řezů rotační válcové plochy

3.2.1 Quételetova – Dandelinova věta pro válcovou plochu

Quételetovu – Dandelinovu větu lze praktikovat také na řez rotační válcové plochy. Střed elipsy leží na ose válcové plochy a délka její vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy. Argument bychom provedli obdobně jako pro rotační kuželovou plochu.



Obrázek 38: Ilustrace Quételetovy – Dandelinovy věty pro válcovou plochu



Obrázek 39: Prostorový pohled na Quételetovu – Dandelinovu větu pro válcovou plochu (Hašek, 2018)

3.3 Důsledek Quételetovy – Dandelinovy věty

Užitím řezu rotační kuželové plochy snadno dokážeme, že pro elipsu platí následující věta:

Elipsa je množina všech bodů roviny, které mají poměr vzdáleností od bodu F a přímky d, která jím neprochází, rovný danému kladnému číslu $\varepsilon < 1$.

Číslo ε se nazývá **číselná výstřednost elipsy**, přímka d je **řídící přímka elipsy** příslušná ohnisku F.

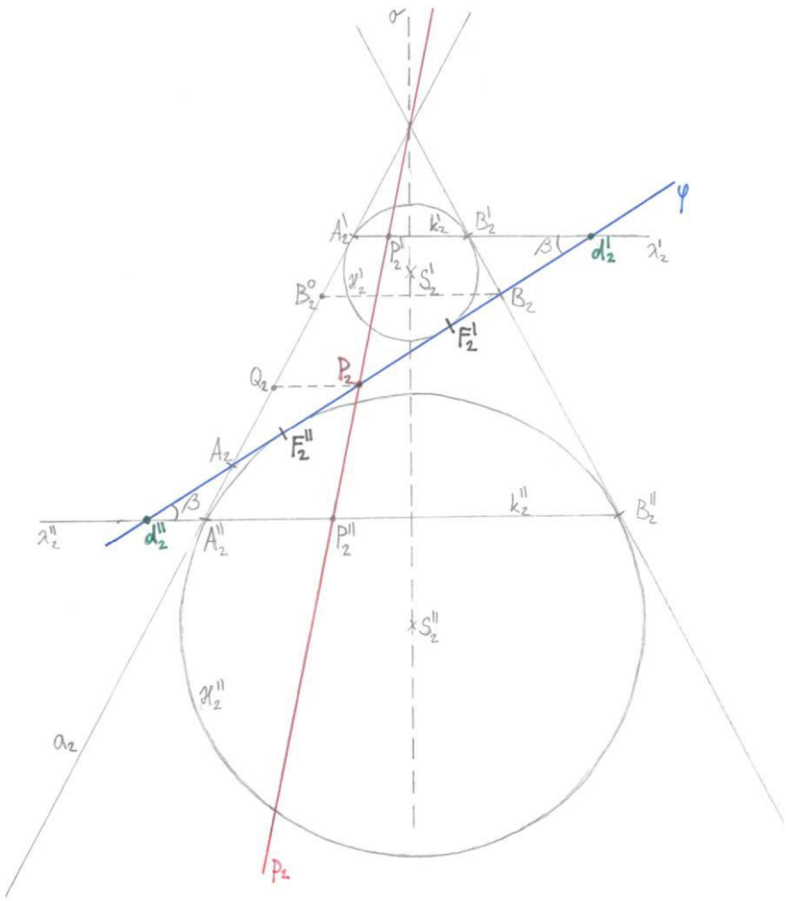
Na základě Quételetovy – Dandelinovy ukážeme, že platí uvedená věta. Značení bodů odpovídá bodům z podkapitoly „Quételetova – Dandelinova věta pro elipsu“. Vše je ilustrováno na obrázku 40.

Roviny proložené body B, P kolmo k ose kuželové plochy protínají povrchovou přímku a v bodech, které označíme B^0Q.

Průsečnici rovin λ a φ označíme jako d' (d''). Poměr vzdáleností bodu P od bodu F' a přímky d' postupně odvodíme. Z Quételetovy – Dandelinovy věty je zřejmé, že $PF' : Pd' = PP' : Pd'$. Skutečná velikost úsečky PP' udává úsečka QA', proto po dosazení dostáváme: $PP' : Pd' = QA' : Pd'$.

Na obrázku 40 vidíme podobnost tří trojúhelníků APQ, ABB^0, $Ad'A'$. Z této podobnosti plyne vtah: $QA' : Pd' = AB^0 : AB$

Již víme, že $AB = 2a$. Postupným odvozením bychom zjistili, že $AB^0 = 2e$. Po dosazení do $AB^0 : AB$ získáme $\boldsymbol{e : a < 1}$.

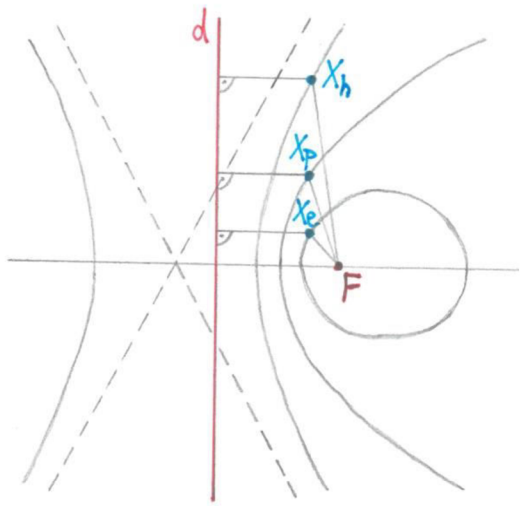


Obrázek 40: Ilustrace důsledku Quételetovy - Dandelinovy věty

<u>Poznámka:</u> Uvážíme-li případ, že číselná výstřednost elipsy ε není menší než 1, pak daná křivka není elipsou.

Kuželosečku lze chápat jako množinu všech bodů X v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností FX : Xd roven ε. Zda se jedná o elipsu, hyperbolu či parabolu určuje tedy konstanta *ε:*

- Pro $\varepsilon \in (0; 1)$ …. **elipsa**.
- Pro $\varepsilon = 1$…. **parabola**.
- Pro $\varepsilon \in (1; +\infty)$ …. **hyperbola**.



Obrázek 41: Kuželosečky

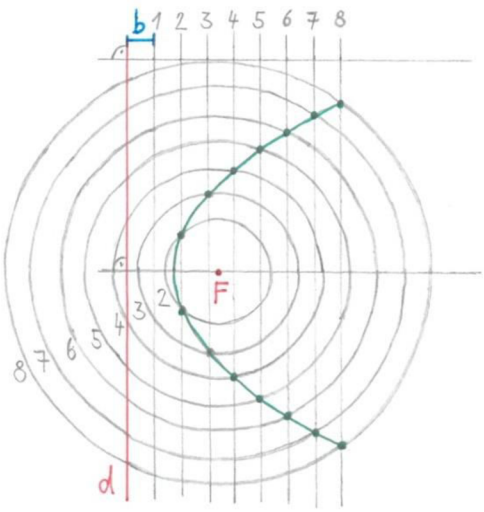
3.4 Konstrukce pomocí řídící přímky

Na závěr si ukážeme konstrukci elipsy s využitím znalostí předcházející podkapitoly. Pro jednodušší pochopení nejdříve popíšeme konstrukci paraboly, z které následně vyvodíme konstrukci elipsy.

3.4.1 Konstrukce paraboly pomocí řídící přímky

Je zadána řídící přímka *d* a ohnisko *F*. Číselná výstřednost paraboly je $\varepsilon = 1$, tudíž vzdálenost bodu paraboly od ohniska a řídící přímky je v poměru 1:1 ($a : b = 1$).

Sestrojíme si několik rovnoběžných přímek s řídící přímkou *d* vzdálené od sebe vždy o jednotku *b*, kterou si libovolně zvolíme. Pro nalezení bodů paraboly vytvoříme několik kružnic se středem v ohnisku *F*. Poloměr kružnic roste o jednotku *b*, protože musí být zachován poměr délek 1:1. Vzniklé kružnice a přímky očíslujeme od 1 do 8 tak, jak je zaznačeno na obrázku 42. Průsečíky přímek a kružnic, které mají stejné číselné označení, jsou body hledané paraboly.

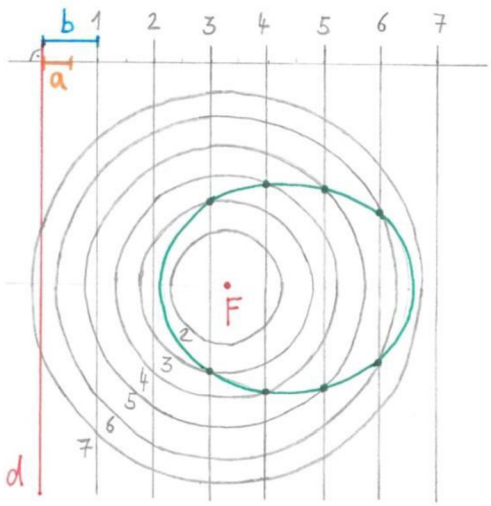


Obrázek 42: Konstrukce paraboly

3.4.2 Konstrukce elipsy pomocí řídící přímky

Máme-li pro sestrojené elipsy zadanou řídící přímku *d* ohnisko *F*, pouze modifikujeme konstrukci paraboly. Číselná výstřednost elipsy je menší než 1. V našem případě si zvolíme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vzdálenost bodu elipsy od řídící přímky a od ohniska tedy bude v poměru 1:2 ($a : b < 1$).

Vytvoříme rovnoběžné přímky s řídící přímkou *d* a kružnice se středem *F* stejně jako u konstrukce paraboly. Poloměr kružnice však poroste pouze o polovinu jednotky *b*, jelikož musí být zachován poměr délek 1:2. Průsečíky přímek a kružnic, které mají stejné číselné označení, jsou body hledané elipsy.



Obrázek 43: Konstrukce elipsy

4 ELIPSA JAKO ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Na závěr se podíváme na elipsu z analytického hlediska. Elipsu zavedeme do soustavy souřadnic a vymezíme její rovnici. Analytické vyjádření elipsy aplikujeme na oskulačních kružnicích a předvedeme jejich konstrukce.

4.1 Rovnice elipsy

Nejdříve vyjádříme rovnici odvozenou z definice o elipse jako množině bodů a následně se budeme zabývat její transformací z rovnice kružnice.

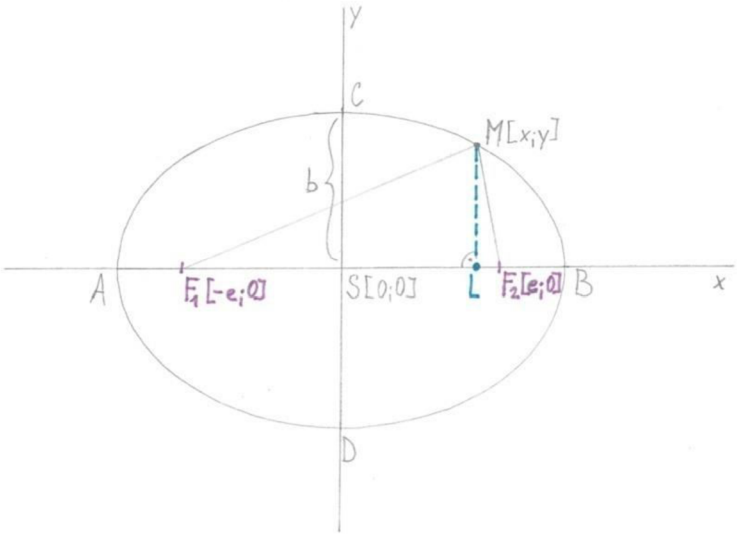
4.1.1 Rovnice odvozena z definice 1

Věta: *Elipsa o poloosách a, b má v pravoúhlé souřadnicové soustavě, jejíž osa x (y) leží v hlavní (vedlejší) ose elipsy, rovnici:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Odvození:

Zvolíme libovolný bod M ležící na elipse. Pro vyjádření délky úseček MF_1, MF_2 dokreslíme do elipsy bod L a přímku LM tak, aby vznikly 2 pravoúhlé trojúhelníky F_1LM a MLF_2. V kartézské soustavě souřadnic mají ohniska souřadnice: $F_1 = [-e; 0]$, F_2 $[e; 0]$. Bod M má souřadnice $[x, y]$, tudíž délka úsečky LM je rovna souřadnici y. Velikost délky F_1L se rovná $x + e$ a délka LF_2 je rovna $x - e$.



Obrázek 44: Elipsa se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a hlavní osou totožnou s x

Pro vzdálenost MF_1, MF_2 dle Pythagorovy věty platí:

$MF_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$; $MF_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$

Z definice elipsy již víme, že $MF_1 + MF_2 = 2a$. Výraz dosadíme do rovnice a získáváme rovnost:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

Po několika úpravách bychom dostali následující rovnici:

$$x^2 (a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Nyní využijeme rovnosti pro excentricitu: $e^2 = a^2 - b^2$ a z té jednoduše odvodíme: $b^2 = a^2 - e^2$

Dosazením vztahu $b^2 = a^2 - e^2$ do rovnice získáme:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vyjádřili jsme rovnici elipsy o středu v počátku *[0;0]*.

Leží-li střed elipsy jinde než v počátku kartézské soustavy, je posunutý o x-ovou a y-ovou složku. **Obecná rovnice elipsy** s posunutým středem $S = [m; n]$ má tvar:

$$\boldsymbol{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

4.1.2 Rovnice odvozena ze speciální afinity

Rovnici pro elipsu jsme již představili a nyní si ji odvodíme pomocí osové afinity.

Odvození provedeme analyticky pro pravoúhlou afinitu, jejíž osa splývá s hlavní osou elipsy. Elipsa je zavedena do kartézské soustavy souřadnic. Na obrázku 45 se bod X zobrazí do bodu X' a zároveň bod C do C'. Na ose x nedochází k žádné změně, tudíž: $x = x'$

Bod C, který má na kružnici k souřadnice $[0, a]$, se ve směru afinity zobrazí do bodu C' se souřadnicemi $[0, b]$.

Transformací bodu můžeme vyjádřit *y:*

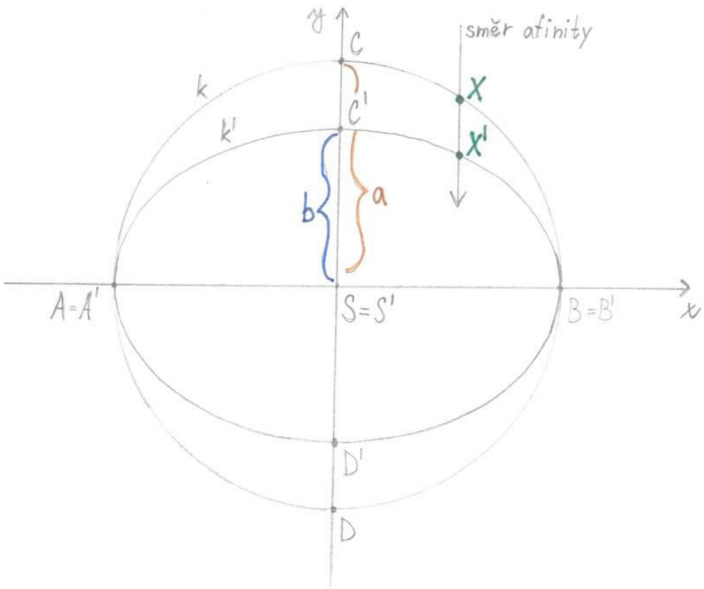
$y = \frac{a}{b} y'$

Do rovnice pro kružnici *k* $\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$ dosadíme vyjádřené soustavy a získáme rovnici obrazu *k':*

$x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2 \qquad /: a^2$

$$\boldsymbol{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1}$$

Obrazem kružnice *k* je elipsa *k'*, vyjádřená poslední rovnicí, s poloosami *a, b.*



Obrázek 45: Transformace kružnice pomocí osové afinity

4.2 Oskulační kružnice

Při rýsování elipsy se využívají různá křivítka nebo se pouze vykreslují rukou. Žádný oblouk elipsy nelze nahradit obloukem kružnice. Při konstrukci elipsy je však nápomocné aproximovat oblouky elipsy v okolí hlavních a vedlejších vrcholů oblouky kružnic. Uvedené kružnice se nazývají **oskulační kružnice** (kružnice křivosti). Ty se k elipse v daných bodech úzce přimykají.

Oskulační kružnice v nějakém bodě křivky tímto bodem prochází a má s danou rovinnou křivkou společnou první derivaci (společnou tečnu v tomto bodě) a rovněž i druhou derivaci (co nejvíce se v okolí tohoto bodu křivce přimyká).

Problémem oskulace křivek se zabývá matematická analýza. Lze odvodit, že pro poloměry r_1, r_2 oskulačních kružnic v hlavních a vedlejších vrcholech elipsy platí:

$$r_1 = \frac{b^2}{a};\ r_2 = \frac{a^2}{b}$$

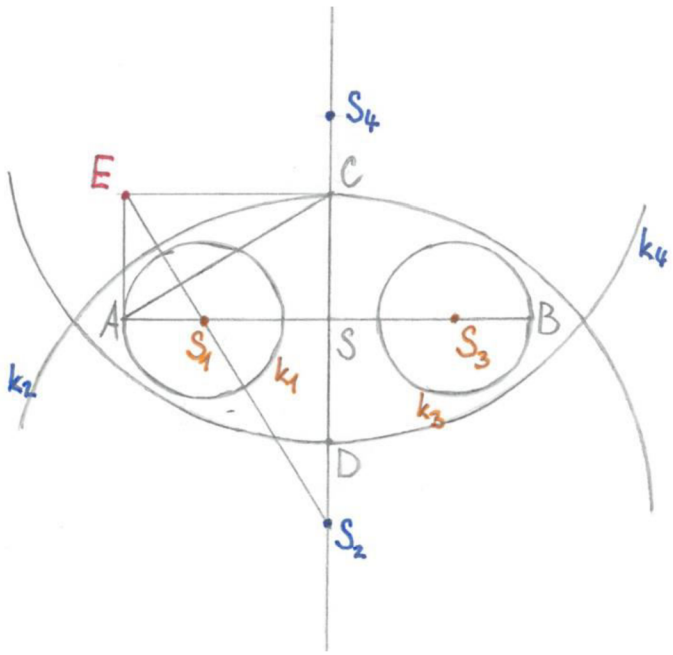
Odvození lze dohledat v knize Zobrazovací metody od E. Kraemera.

Poznámka: Oskulační kružnici je možno sestrojit v každém bodě elipsy. Není-li ten bod vrcholem, má oskulační kružnice s elipsou společný ještě další bod. Oskulační kružnice ve vrcholu elipsy má s ní společný jen vrchol, a proto se jí často říká **superoskulační** nebo **hyperoskulační** kružnice.

4.2.1 Konstrukce oskulačních kružnic

Nechť E je čtvrtý vrchol obdélníku $ASCE$. Sestrojíme přímku p, která prochází bodem E a zároveň je kolmá k přímce AC. Kolmice p protíná hlavní osu ve středu S_1 a vedlejší osu ve středu S_2. V následujícím kroku narýsujeme kružnice k_1 a k_2 tak, že platí: $k_1 = (S_1; A)$, $k_2 = (S_2; C)$. V souměrnosti podle středu S doplníme oskulační kružnice k_3 a k_4 v bodech B a D.

V přechodové části mezi oblouky oskulačních kružnic sestrojíme několik bodů pomocí bodové konstrukce. Pomocí křivítka dokreslíme oblouky elipsy procházející sestrojenými body a oblouky oskulačních kružnic.



Obrázek 46: Konstrukce oskulačních kružnic

ZÁVĚR

Elipsu jako takovou i její konstrukci lze chápat různými způsoby. Pokusila jsem se zkompletovat vlastnosti elipsy a různé druhy její konstrukce. Hlavním poznatkem vyplývajícím z této práce by mělo být, že elipsu lze definovat několika způsoby - jako množinu bodů, jako afinní obraz kružnice, jako kuželosečku a jako řešení algebraické rovnice. Jednotlivé kapitoly se věnují postupně těmto tématům a jsou také z tohoto hlediska pojmenovány.

Po přečtení práce by měl být čtenář schopen zkonstruovat elipsu a mělo by mu být jasné, že ji lze vyjádřit ekvivalentně různými způsoby. Je zde uvedeno 10 způsobů konstrukcí, které vycházejí z vlastností elipsy.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. První z nich popisuje a definuje elipsu jako množinu bodů. Pro mnohé čtenáře může sloužit spíše jako připomenutí termínů a nejzákladnějších vlastností. Ve své práci často odkazuji na tuto definici a uvádím její spojitost s jinými tvrzeními.

Z druhé kapitoly by si měl čtenář odnést poznatek, že elipsa je obrazem kružnice v osové afinitě, a proto má elipsa všechny vlastnosti kružnice, které se v osové afinitě zachovávají. Afinní vlastnosti lze snadno využít při konstrukcích elipsy. V osové afinitě se také zachovávají vlastnosti sdružených průměrů, kterým se v této kapitole věnuji.

Pohledu na elipsu jako kuželosečku se věnuje třetí kapitola. Vzniká řezem do kužele, o čemž hovoří Quételetova – Dandelinova věta, která je zde odvozená a podrobně ilustrovaná. Na konci této kapitoly je znázorněna konstrukce pomocí řídící přímky.

V závěrečné kapitole se na elipsu díváme z analytického hlediska. Je zde uvedena rovnice elipsy, která je odvozena nejdříve z definice elipsy jako množiny bodů, a následně ze speciální afinity.

Práce obsahuje mnoho praktických rysů, které jsem vytvořila bez pomoci počítačového programu, v ruce. Věřím, že moje práce přispěje k ujasnění pojmů týkajících se elipsy a pomůže tak vytvořit ucelený pohled na její konstrukci.

LITERATURA

1. JANYŠKA, Josef a Anna SEKANINOVÁ. *Analytická teorie kuželoseček a kvadratik*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2604-9.
2. PISKA, Rudolf a Václav MEDEK. *Deskriptivní geometrie. I.* Vyd. 1. Praha: SNTL, 1972.
3. ŘÍHA, Ota. *Konstrukční geometrie*. Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2184-5.
4. MENŠÍK, Miroslav. *Deskriptivní geometrie. I. díl.* Praha: SNTL, 1962.
5. URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie. I.* Praha: SNTL, 1965
6. KLAPKA, Jiří. *Deskriptivní geometrie (se zřetelem na její využití v strojní technice).* Praha: Technicko-vědecké nakladatelství, 1951.
7. MEDEK, Václav. *Deskriptívna geometria.* Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatury, 1962.
8. MENŠÍK, Miroslav a Ota SETZER. *Deskriptivní geometrie. I.* Vyd. 3. Praha: SNTL, 1981
9. KRAEMER, Emil. *Zobrazovací metody: (Promítání rovnoběžné).* Díl I. Praha,
10. HOLLYMATH. DrawingConicSectionswithPushPins and String, *Hollymath* [online]. Dostupné z: https://hollymath.com/2014/05/14/drawing-conic-sections-with-push-pin-and-string/
11. MATEMATIKA.CZ. Kuželosečky. *Matematika.cz* [Online]. © 2006-2014 Dostupné z: https://matematika.cz/kuzelosecky
12. DOLEŽAL, Jiří. Afinní vztah kružnice a elipsy. *VŠB-TU Ostrava* [Online]. © 2018. Dostupné z: http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Krivky/Kuzelosecky/AfinitaKruzniceElipsa/AfinitaKruzniceElipsa.html
13. HAŠEK, Roman. Queteletova-Dandelinova věta (důkaz pro válcovou plochu). *Geogebra*[Online]. © 2018. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/cSbsqjgd
14. EFFENBERGER, Věra. Konstrukce. MMF UK [Online]. © 2007. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=konstrukceE&pkonstrukce=1

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Definice 1 8
Obrázek 2: Souměrnost elipsy, hlavní a vedlejší osy elipsy 9
Obrázek 3: Charakteristický trojúhelník elipsy 10
Obrázek 4: Bodová konstrukce 11
Obrázek 5: Zahradnická konstrukce (Hollymath, 2014) 11
Obrázek 6: Vzájemná poloha elipsy a bodu 12
Obrázek 7: Vzájemná poloha elipsy a přímky 13
Obrázek 8: Vnitřní a vnější úhly průvodičů bodů elipsy 14
Obrázek 9: Řídící a vrcholová kružnice 15
Obrázek 10: Speciální zadání mezi elipsou a kružnicí 1 17
Obrázek 11: Speciální zadání mezi elipsou a kružnicí 2 17
Obrázek 12: Trojúhelníková konstrukce 18
Obrázek 13: Proužková konstrukce elipsy 19
Obrázek 14: Rozdílová konstrukce elipsy pomocí ustřiženého proužku 20
Obrázek 15: Hledání vedlejší poloosy pomocí rozdílové konstrukce 20
Obrázek 16: Proužková konstrukce součtová 21
Obrázek 17: Součtová konstrukce elipsy pomocí ustřiženého proužku 22
Obrázek 18: Hledání vedlejší poloosy pomocí součtová konstrukce 23
Obrázek 19: Afinita mezi kružnicí a elipsou 24
Obrázek 20: Tvrzení 1 25
Obrázek 21: Tvrzení 2 26
Obrázek 22: Tvrzení 3 26
Obrázek 24: Příčková konstrukce kružnice 27
Obrázek 25: Příčková konstrukce elipsy – zadány jsou hlavní a vedlejší vrcholy 28
Obrázek 26: Příčková konstrukce elipsy – zadány jsou sdružené průměry 28
Obrázek 27: Rytzova konstrukce 29
Obrázek 28: Důkaz Rytzovy konstrukce 30
Obrázek 30: Porovnání Frézierovy a Rytzovy konstrukce 31
Obrázek 31: Klasifikace řezů - elipsa, parabola, hyperbola (Zdroj: Matematika.cz) 32
Obrázek 32: Kuželová plocha 33
Obrázek 33: Klasifikace řezů rotační kuželové plochy 33
Obrázek 34: Ilustrace Quételetovy – Dandelinovy věty pro kuželovou plochu 35

Obrázek 35: Prostorový pohled na Quételetovu–Dandelinovu větu pro kuželovou plochu (Zdroj: Hašek, 2018) 35
Obrázek 36: Rotační válcová plocha 36
Obrázek 37: Klasifikace řezů rotační válcové plochy 37
Obrázek 38: Ilustrace Quételetovy – Dandelinovy věty pro válcovou plochu 37
Obrázek 39: Prostorový pohled na Quételetovu – Dandelinovu větu pro válcovou plochu (Hašek, 2018) 38
Obrázek 40: Ilustrace důsledku Quételetovy - Dandelinovy věty 39
Obrázek 41: Kuželosečky 40
Obrázek 42: Konstrukce paraboly 41
Obrázek 43: Konstrukce elipsy 41
Obrázek 44: Elipsa se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a hlavní osou totožnou s x 42
Obrázek 45: Transformace kružnice pomocí osové afinity 44
Obrázek 46: Konstrukce oskulačních kružnic 45