

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2018

NAĎA HORÁKOVÁ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Rischův algoritmus pro výpočet primitivní funkce

Diplomová práce

Nad'a Horáková

Vedoucí práce: Mgr. Michal Bulant, PhD. Brno 2018

Bibliografický záznam

Autor:	Nad'a Horáková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Rischův algoritmus pro výpočet primitivní funkce
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy
Vedoucí práce:	Mgr. Michal Bulant, PhD.
Akademický rok:	2017/2018
Počet stran:	viii + 59
Klíčová slova:	Rischův algoritmus, Integrace, Elementární funkce, Logaritmický prvek, Exponenciální prvek, Hermiteova metoda, Rothstein-Tragerova metoda

Bibliographic Entry

Author:	Nad'a Horáková Faculty of Science, Masaryk University Department of mathematic and statistic
Title of Thesis:	Risch integration algorithm
Degree Programme:	Mathematic
Field of Study:	Upper Secondary School Teacher Training in Mathematic
Supervisor:	Mgr. Michal Bulant, PhD.
Academic Year:	2017/2018
Number of Pages:	viii + 59
Keywords:	Risch algorithm, Integration, Elementary Function, Logarithmic element, Exponential element, Hermite method, Rothstein-Trager method

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje Rischovu algoritmu pro výpočet primitivní funkce. Cílem práce je tento algoritmus popsat, uvést historické souvislosti s jeho vznikem a zda je implementován ve známých systémech počítačové algebry. V práci jsou také uvedeny konkrétní příklady integrace pomocí Rischova algoritmu.

Abstract

This master thesis is devoted to the Risch integration algorithm. The aim is to describe this algorithm and the historical background and whether it is implemented in computer algebra systems. The thesis includes examples for integration using the Risch integration algorithm.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

Ústav: Ústav matematiky a statistiky
Studentka: Bc. Naďa Horáková
Program: Matematika
Obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství informatiky pro střední školy

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce: Rischův algoritmus pro výpočet primitivní funkce

Název práce anglicky: Risch integration algorithm

Oficiální zadání:

Cílem práce je popsat Rischův algoritmus pro symbolickou integraci. Kromě samotného popisu a vysvětlení algoritmu studentka uvede též příslušné souvislosti - historické okolnosti, způsoby implementace v systémech počítačové algebry apod.

Literatura:

GEDDES, K. O., S. R. CZAPOR a G. LABAHN. *Algorithms for computer algebra*. Boston: Kluwer Academic, 1993. 585 s. ISBN 0792392590.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. Michal Bulant, Ph.D.

Datum zadání práce: 30. 9. 2016

V Brně dne: 2. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

 15. 11. 2016

Bc. Naďa Horáková
studentka



Mgr. Michal Bulant, Ph.D.
vedoucí práce



prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a
statistiky

Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat Mgr. Michalovi Bulantovi, PhD. za jeho odborné vedení, cenné rady, připomínky a také za čas, který mi věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 15. května 2018

.....
Naďa Horáková

Obsah

Úvod	viii
Kapitola 1. Historie a využití Rischova algoritmu v systémech počítačové algebry	1
Kapitola 2. Elementární funkce	2
2.1 Základní pojmy diferenciální algebry	2
2.2 Elementární funkce	4
2.3 Derivace elementárních funkcí	6
Kapitola 3. Integrace racionálních funkcí	10
3.1 Hermiteova metoda – integrace racionální části	13
3.2 Rothstein-Tragerova metoda – integrace logaritmické části	15
Kapitola 4. Liouvillův princip	19
4.1 Jednoduché transcendentní logaritmické rozšíření	19
4.2 Jednoduché transcendentní exponenciální rozšíření	20
4.3 Důkaz Liouvillovy věty	21
Kapitola 5. Rischův algoritmus pro transcendentní elementární funkce	24
5.1 Rischův algoritmus pro logaritmické rozšíření	24
5.1.1 Integrace racionální části	25
5.1.2 Integrace polynomiální části	31
5.2 Rischův algoritmus pro exponenciální rozšíření	35
5.2.1 Integrace racionální části	37
5.2.2 Integrace polynomiální části	43
Závěr	46
Příloha	47
Seznam použité literatury	58
Rejstřík	59

Úvod

V této diplomové práci se zabýváme problémem integrace v konečném počtu kroků, což znamená, že chceme rozhodnout, zda má zadaná elementární funkce elementární integrál, a pakliže má, tak jej chceme spočítat.

Cílem práce je popsat Rischův algoritmus pro výpočet primitivní funkce, historii tohoto algoritmu a také určit, zda se tento algoritmus využívá v nejznámějších systémech počítačové algebry – tedy v systémech Maple, Maxima a Wolfram Mathematica. Celá práce obsahuje vzorové příklady pro snadnější pochopení předkládaných algoritmů.

Práce je rozdělena do pěti částí. V první uvádíme historické souvislosti vzniku Rischova algoritmu a jeho implementaci v některých systémech počítačové algebry. Ve druhé kapitole čtenáře seznámíme se základními pojmy diferenciální algebry, definujeme logaritmický a exponenciální prvek, na jejichž základě následně definujeme elementární funkce a jejich derivace. Třetí kapitola se zabývá integrací racionálních funkcí pomocí Hermiteovy a Rothstein-Tragerovy metody. Ačkoli popis integrace racionálních funkcí není cílem této práce, zařadili jsme tuto kapitolu z toho důvodu, že část Rischova algoritmu je na integraci racionálních funkcí založena. Ve čtvrté části práce uvádíme Liouvillův princip, který předkládá, jakým způsobem lze vyjádřit každý elementární integrál. Konečně, v poslední kapitole popisujeme Rischův algoritmus pro transcendentní elementární funkce, který je rozdělen na dvě části – první část se zabývá algoritmem pro logaritmické rozšíření, druhá pro exponenciální rozšíření. Algoritmus pro integraci algebraických funkcí zde neuvádíme, neboť je tento algoritmus rozsáhlý a složitý. Práce čerpá převážně z [3] a dále z [1] a [8].

Součástí práce je také příloha, v níž se čtenář může seznámit se složitějšími příklady vztahujícími se k integraci racionálních funkcí a Rischovu algoritmu.

Kapitola 1

Historie a využití Rischova algoritmu v systémech počítačové algebry

Problémem integrace v konečném počtu kroků, tedy rozhodnutím (v konečném počtu kroků), zda má daná elementární funkce elementární neurčitý integrál, a pokud ano, tak jej spočítat, se zabývali významní matematikové Niels Henrik Abel (1802–1829) a Joseph Liouville (1809–1882). Avšak integrace algebraických funkcí představovala takové obtíže, že britský matematik Godfrey Harold Hardy (1877–1947) prohlásil, že se lze odůvodněně domnívat, že neexistuje metoda, která by spočítala neurčitý integrál algebraické funkce. Toto tvrzení však bylo vyvráceno Robertem Henry Rischem (*1939), americkým matematikem zabývajícím se počítačovou algebrou. V roce 1969 publikoval článek navazující na práci Josepha Liouvillea s názvem *The Problem of Integration in Finite Terms*, ve kterém popisuje algoritmus, který umí určit, zda má daná elementární funkce elementární integrál, a pokud ano, tak jej spočítá. V posledních letech je tento algoritmus zlepšován a rozšiřován a je standardem ve většině nejpoužívanějších systémů počítačové algebry [1].

Příkladem takového systému může být například *Macsyma*, předchůdce systému *Maxima*, jehož počátky se datují k počátku 60. let. Do systému *Macsyma* byl Rischův algoritmus implementován, přesněji jen jeho část, neboť implementace části algoritmu, která se zabývá integrací algebraických funkcí, je netriviální [6]. Současná verze systému *Maxima* používá Rischův algoritmus pro neurčitou integraci v případě, kdy selžou heuristické metody, přičemž využívá pouze transcendentní případ Rischova algoritmu, jelikož algebraická část stále nebyla implementována [9].

Dalším známým systémem, který využívá Rischův algoritmus, je systém *Mathematica* společnosti Wolfram Research. Algoritmus byl do tohoto systému implementován v lednu 1991, kdy byla vydána verze *Mathematica* 2.0 [10]. Rozšířená verze Rischova algoritmu je využita tehdy, když je možné jak integrand, tak integrál, vyjádřit pomocí elementárních funkcí, případně pomocí funkcí $\text{Li}_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$ nebo $E_i(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ apod. [11]

V systému *MAPLE* se nesetkáme s Rischovým algoritmem představeným v této práci, ale s jeho modifikací nazývanou *Risch-Normanova integrační metoda*. Narozdíl od Rischova algoritmu pro integraci transcendentních elementárních funkcí, nepracuje tato metoda rekurzivně a navíc pracuje s tělesy rozšířenými nejen logaritmickými či exponenciálními funkcemi, ale také funkcemi tangens [4].

Kapitola 2

Elementární funkce

V této kapitole čtenáře nejdříve seznámíme se základními pojmy diferenciální algebry, které budeme v textu dále užívat. V další části definujeme elementární funkce a v poslední sekci kapitoly uvedeme jejich derivace.

2.1 Základní pojmy diferenciální algebry

Před tím, než se budeme zabývat pojmy diferenciální algebry, uvedeme definici rozšíření tělesa a pojmy k němu se vztahující.

Definice 2.1. Nechť G je těleso. Libovolný podokruh F tělesa G takový, že pro každé $a \in F$, $a \neq 0$ platí $a^{-1} \in F$, nazýváme *podtělesem tělesa G* . Říkáme též, že G je *rozšířením tělesa F* .

Jinak řečeno: Podokruh F tělesa G je podtělesem, jestliže F je těleso.

Poznámka. Tělesem budeme mít nadále na mysli komutativní těleso.

Věta 2.2. Nechť $I \neq \emptyset$ je libovolná množina taková, že pro každé $i \in I$ je dáno podtěleso F_i tělesa G . Pak $\bigcap_{i \in I} F_i$ je podtěleso tělesa G .

Důkaz. Zřejmý. □

Definice 2.3. Nechť G je těleso. Předchozí věta nám umožňuje definovat *podtěleso tělesa G generované množinou $M \subseteq G$* jako průnik všech podtěles této množinu obsahujících. Je to tedy nejmenší podtěleso tělesa G obsahující M .

Je-li $M = F \cup \{c_1, \dots, c_n\}$, kde F je podtěleso tělesa G a $c_1, \dots, c_n \in G$, pak podtěleso generované množinou $F \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ značíme $F(c_1, \dots, c_n)$.

Dále definujeme pojmy derivace a diferenciální těleso a následně uvedeme vlastnosti derivace.

Definice 2.4. *Diferenciální těleso* je těleso F charakteristiky 0, na kterém je definováno zobrazení $D: F \rightarrow F$ takové, že pro každé $f, g \in F$ platí

$$\begin{aligned} D(f + g) &= D(f) + D(g), \\ D(f \cdot g) &= f \cdot D(g) + g \cdot D(f). \end{aligned}$$

Zobrazení D se nazývá *derivace* nebo *diferenciální operátor* a derivaci $D(f)$ můžeme také značit jako f' .

Poznámka. Neurčitou integrací rozumíme výpočet inverzního zobrazení D^{-1} diferenciálního operátoru D , které nazýváme neurčitým integrálem. Neurčitý integrál $D^{-1}(f)$ též značíme jako $\int f$.

Věta 2.5. *Diferenciální operátor D na diferenciálním tělese F má následující vlastnosti:*

- (i) $D(0) = D(1) = 0$;
- (ii) $D(-f) = -D(f)$ pro všechna $f \in F$;
- (iii) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot D(f) - f \cdot D(g)}{g^2}$ pro všechna $f, g \in F, g \neq 0$;
- (iv) $D(f^n) = n f^{n-1} D(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}, f \in F, f \neq 0$.

Důkaz. Viz [3, s. 475–476]. □

Definice 2.6. Nechť F , respektive G , je diferenciální těleso s diferenciálním operátorem D_F , respektive D_G . Je-li G rozšířením tělesa F a pro všechna $f \in F$ platí

$$D_F(f) = D_G(f),$$

pak G nazýváme *diferenciální rozšíření tělesa F* .

Definice 2.7. Nechť F je diferenciální těleso s diferenciálním operátorem D . *Těleso konstant* tělesa F je podtěleso tělesa F definované jako

$$K = \{c \in F \mid D(c) = 0\}.$$

Příklad. Těleso $\mathbb{Q}(x)$ racionálních funkcí v proměnné x s diferenciálním operátorem D takovým, že $D(x) = 1$, je diferenciální těleso.

Věta 2.8. *Je-li $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, pak $p'(x) \in \mathbb{Q}[x]$, přičemž platí $x' = 1$. Zapišeme-li polynom $p(x)$ následovně*

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{Q}[x], \quad a_n \neq 0,$$

pak je jeho derivace tvaru

$$p'(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } \text{st}(p(x)) = n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot a_{k+1} x^k, & \text{je-li } \text{st}(p(x)) = n > 0. \end{cases}$$

Navíc platí, že pokud je polynom $p(x)$ kladného stupně, pak $\text{st}(p'(x)) = \text{st}(p(x)) - 1$.

Důkaz. Viz [3, s. 477]. □

Věta 2.9. *Diferenciální těleso $\mathbb{Q}(x)$ s diferenciálním operátorem D splňujícím $D(x) = 1$ má těleso konstant $\mathbb{Q}$.*

Důkaz. Viz [3, s. 478]. □

Věta 2.10. *Je-li F diferenciální těleso s diferenciálním operátorem D , pak pro libovolné prvky $u, v \in F$ platí*

$$\int u \cdot D(v) = u \cdot v - \int v \cdot D(u). \quad (2.1)$$

Důkaz. Z definice derivace platí, že

$$D\left(u \cdot v - \int v \cdot D(u)\right) = u \cdot D(v) + v \cdot D(u) - v \cdot D(u) = u \cdot D(v),$$

a je tedy zřejmé, že rovnost (2.1) platí. □

Poznámka. Vztah (2.1) se nazývá integrace per partes.

2.2 Elementární funkce

Mezi elementární funkce řadíme racionální funkce, exponenciální funkce, logaritmy, algebraické funkce, goniometrické a hyperbolické funkce a jejich inverze. Elementární funkcí je také každá funkce, která vznikne jako výsledek konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí zmíněných výše. Nicméně pro integrační algoritmy uvedené dále je vhodnější nepoužívat notaci pro goniometrické a hyperbolické funkce a jejich inverze, ale raději je vyjádřit pouze užitím exponenciálních funkcí, logaritmů a odmocnin.

Příklad 2.11. Funkci $\sin x$ můžeme vyjádřit jako

$$\sin x = \frac{1}{2}ie^{-ix} - \frac{1}{2}ie^{ix},$$

funkci $\arcsin x$ vyjádříme jako

$$\arcsin x = -i \ln(\sqrt{1-x^2} + ix).$$

Definice 2.12. Nechť F je diferenciální těleso a nechť G je jeho diferenciální rozšíření.

- (i) Prvek $\theta \in G$ se nazývá *logaritmický nad F* (píšeme $\theta = \ln u$), jestliže existuje prvek $u \in F$ takový, že

$$\theta' = \frac{u'}{u}.$$

- (ii) Prvek $\theta \in G$ se nazývá *exponenciální nad F* (píšeme $\theta = \exp u$), jestliže existuje prvek $u \in F$ takový, že

$$\frac{\theta'}{\theta} = u'.$$

Definice 2.13. Nechť F je těleso a nechť G je rozšířením tělesa F .

- (i) Prvek $\theta \in G$ se nazývá *algebraický nad F* , jestliže existuje polynom $p(x) \in F[x]$ takový, že

$$p(\theta) = 0.$$

- (ii) Prvek $\theta \in G$ se nazývá *transcendentní nad F* , jestliže θ není algebraickým prvkem nad F .

Poznámka. Uvědomme si, že $\theta \in G$ může být současně jak logaritmický (resp. exponenciální) nad F , tak algebraický – uvažujme například, že $\theta \in F$, pak je zřejmé, že je nad F také algebraický.

Definice 2.14. Nechť F je diferenciální těleso a nechť G je diferenciální rozšíření tělesa F . G nazýváme *transcendentním elementárním rozšířením tělesa F* , jestliže je tvaru

$$G = F(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

kde pro každé $i = 1, \dots, n$ je θ_i transcendentní a buď logaritmický, nebo exponenciální prvek nad tělesem $F_{i-1} = F(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$, kde $F_0 = F$.

G nazýváme *elementárním rozšířením tělesa F* , je-li tvaru

$$G = F(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

kde pro každé $i = 1, \dots, n$ je θ_i buď logaritmický, exponenciální, nebo algebraický prvek nad tělesem $F_{i-1} = F(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$, kde $F_0 = F$.

Definice 2.15. Nechť $K(x)$ je diferenciální těleso racionálních funkcí nad tělesem konstant K , které je podtělesem tělesa komplexních čísel. Je-li F transcendentním elementárním rozšířením tělesa $K(x)$, pak se F nazývá *těleso transcendentních elementárních funkcí*. Podobně, je-li F elementárním rozšířením tělesa $K(x)$, pak se F nazývá *těleso elementárních funkcí*.

Definice 2.16. Prvek θ se nazývá *monomiální nad diferenciálním tělesem F* , jestliže

- (i) $F(\theta)$ a F mají stejné těleso konstant,
- (ii) θ je transcendentní nad F ,
- (iii) θ je buď exponenciální, nebo logaritmický nad F .

Elementární rozšíření využijeme k vyjadřování libovolné funkce jako racionální funkce jedné proměnné: Mějme zadán integrand $f(x)$. Integrační algoritmus nejprve zkonstruuje těleso konstant K obsahující veškeré konstanty, které jsou potřeba k vyjádření $f(x)$, následně „vytvoří“ diferenciální těleso racionálních funkcí $K(x)$ a nakonec určí elementární rozšíření $F = K(x)(\theta_1, \dots, \theta_n)$ potřebné k vyjádření integrandu $f(x)$.

Uvědomme si, že toto rozšíření není určeno jednoznačně. Navíc:

- rozšiřujeme-li těleso logaritmickým prvkem, je možné, že ve skutečnosti rozšiřujeme pouze novou konstantou

$$\text{– např.: } \mathbb{Q}(x)(\ln x, \ln 2x) = \mathbb{Q}(\ln 2)(x)(\ln x) \text{ nebo}$$

- exponenciální prvek, kterým rozšiřujeme, může být i algebraický

$$\text{– např.: } \mathbb{Q}(x)(\exp(\frac{\ln x}{2})) = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{x}).$$

K určení, zda je prvek, kterým rozšiřujeme, monomiální, existuje několik algoritmů, které zde nebudeme uvádět, ale odkážeme čtenáře na [7].

2.3 Derivace elementárních funkcí

V této sekci uvedeme základní vlastnosti derivace elementárních funkcí, konkrétně se budeme zabývat derivací logaritmických a exponenciálních polynomů a algebraických funkcí.

Věta 2.17 (Derivace logaritmických polynomů). *Nechť F je diferenciální těleso a necht' $F(\theta)$ je diferenciální rozšíření tělesa F mající stejné těleso konstant. Předpokládejme, že θ je transcendentní a logaritmický prvek nad F . Pro libovolný polynom $a(\theta) \in F[\theta]$ kladného stupně pak platí následující tvrzení:*

- (i) $a'(\theta) \in F[\theta]$,
- (ii) je-li vedoucí koeficient polynomu $a(\theta)$ konstanta, pak $\text{st}(a'(\theta)) = \text{st}(a(\theta)) - 1$,
- (iii) není-li vedoucí koeficient polynomu $a(\theta)$ konstanta, pak $\text{st}(a'(\theta)) = \text{st}(a(\theta))$.

Důkaz. Polynom $a(\theta)$ zapíšeme ve tvaru

$$a(\theta) = \sum_{i=0}^n a_i \theta^i,$$

kde $a_n \neq 0$ a $n > 0$. Pak podle Věty 2.8 je

$$a'(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} (a'_i + (i+1)a_{i+1}\theta')\theta^i + a'_n\theta^n.$$

Protože $\theta' = \frac{u'}{u} \in F$, je tvrzení (i) zřejmé. Je-li $a'_n \neq 0$ (tedy a_n není konstanta), pak

$$\text{st}(a'(\theta)) = n = \text{st}(a(\theta)),$$

čímž je dokázáno tvrzení (iii). Pokud $a'_n = 0$, pak vidíme, že $\text{st}(a'(\theta)) < n$. Abychom dokázali že $\text{st}(a'(\theta)) = \text{st}(a(\theta)) - 1$, předpokládejme, že koeficient stupně $n-1$ je nulový, tedy

$$a'_{n-1} + na_n\theta' = 0.$$

Z toho vyplývá, že

$$(na_n\theta + a_{n-1})' = na'_n\theta + na_n\theta' + a'_{n-1} = 0,$$

$na_n\theta + a_{n-1}$ je tedy konstanta v $F(\theta)$, a proto $na_n\theta + a_{n-1} \in F$. Avšak to je spor s předpokladem, že θ je transcendentní prvek nad F , čímž je tvrzení (ii) dokázáno. $\square$

Věta 2.18 (Derivace exponenciálních polynomů). *Nechť F je diferenciální těleso a necht' $F(\theta)$ je diferenciální rozšíření tělesa F mající stejné těleso konstant. Předpokládejme, že θ je transcendentní a exponenciální prvek nad F . Pro libovolný polynom $a(\theta) \in F[\theta]$ kladného stupně pak platí:*

- (i) jestliže $h \in F \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, pak $(h\theta^n)' = \bar{h}\theta^n$ pro nějaké $\bar{h} \in F \setminus \{0\}$,

(ii) $a'(\theta) \in F[\theta]$ a $\text{st}(a'(\theta)) = \text{st}(a(\theta))$,

(iii) $a(\theta)$ dělí $a'(\theta)$ právě tehdy, když $a(\theta)$ je monom (tj. $a(\theta) = h\theta^n$ pro některé $h \in F$, $n \in \mathbb{Z}$).

Důkaz. Jelikož platí, že

$$(h\theta^n)' = h'\theta^n + nh\theta^{n-1}\theta' = \left(h' + nh\frac{\theta'}{\theta}\right)\theta^n = (h' + nh u')\theta^n,$$

musíme ukázat, že je-li $h \neq 0$ a $n \neq 0$, pak $\bar{h} = h' + nh u' \neq 0$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\bar{h} = 0$, pak $(h\theta^n)' = 0$, tj. $h\theta^n$ je konstanta v $F(\theta)$, tudíž $h\theta^n \in F$. To je však spor s předpokladem, že θ je transcendentní nad F . Tím je dokázána (i).

Abychom dokázali (ii), zapíšeme polynom $a(\theta)$ ve tvaru

$$a(\theta) = \sum_{i=0}^n a_i \theta^i,$$

kde $a_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, $a_n \neq 0$ a $n > 0$. Pak derivaci tohoto polynomu zapíšeme pomocí tvrzení (i) jako

$$a'(\theta) = \sum_{i=0}^n (a_i \theta^i)' = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i \theta^i$$

pro $\bar{a}_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, a $\bar{a}_n \neq 0$. Vidíme, že $\text{st}(a(\theta)) = \text{st}(a'(\theta))$.

Nakonec dokážeme vlastnost (iii). Předpokládejme, že $a(\theta)$ je monom, tj. $a(\theta) = h\theta^n$, $h \in F$, $n > 0$. Pak díky tvrzení (i) platí, že $a'(\theta) = \bar{h}\theta^n$ pro nějaké $\bar{h} \in F$ takové, že $\bar{h} \neq 0$, a je zřejmé, že $a(\theta)$ dělí $a'(\theta)$.

Předpokládejme nyní, že $a(\theta)$ není monom a $a(\theta)$ dělí $a'(\theta)$. Pak tedy platí, že $a'(\theta) = g \cdot a(\theta)$ pro nějaké $g \in F[\theta]$. Z vlastnosti (ii) víme, že $\text{st}(a(\theta)) = \text{st}(a'(\theta))$, tudíž musí platit, že $g \in F$. Polynom $a(\theta)$, mající alespoň dva členy, zapíšeme takto

$$a(\theta) = a_n \theta^n + a_m \theta^m + b(\theta),$$

kde $n, m \in \mathbb{Z}$, $n > m \geq 0$, $a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$ a buď $b(\theta) = 0$, nebo $\text{st}(b(\theta)) < m$. Díky tvrzením (i) a (ii) platí, že

$$a'(\theta) = \bar{a}_n \theta^n + \bar{a}_m \theta^m + b'(\theta),$$

kde $\bar{a}_n \neq 0$, $\bar{a}_m \neq 0$ a buď $b'(\theta) = 0$, nebo $\text{st}(b'(\theta)) < m$.

Všimněme si případu, kdy $m = 0$. Potom

$$a(\theta) = a_n \theta^n + a_0 \quad \text{a} \quad a'(\theta) = \bar{a}_n \theta^n + a'_0,$$

kde sice $\bar{a}_n \neq 0$, ale je možné, že $a'_0 = 0$. To však za daných okolností nastat nemůže, neboť by platilo

$$a'(\theta) = \bar{a}_n \theta^n = g \cdot a(\theta) = g a_n \theta^n + g a_0,$$

kde $n > 0$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $\bar{a}_n \neq 0$. Porovnáním koeficientů zjistíme, že $a(\theta) = a_n \theta^n$, tedy že $a(\theta)$ je monom, a to nelze.

Rozepsáním vztahu $a'(\theta) = g \cdot a(\theta)$ dostáváme

$$(a'_n + n a_n \theta^{-1} \theta') \theta^n + (a'_m + m a_m \theta^{-1} \theta') \theta^m + b'(\theta) = g a_n \theta^n + g a_m \theta^m + g b(\theta).$$

Protože $\theta^{-1} \theta' = u'$, dostáváme tak porovnáním koeficientů následující rovnice

$$\begin{aligned} a'_n + n a_n u' &= g a_n, \\ a'_m + m a_m u' &= g a_m. \end{aligned}$$

Vydělíme-li první rovnici výrazem a_n a druhou rovnici a_m a odečteme-li následně druhou rovnici od první, dostaneme tak

$$\frac{a'_n}{a_n} - \frac{a'_m}{a_m} + (n - m)u' = 0.$$

Pak díky tomu, že $\theta^{-1} \theta' = u'$, platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{a_m} \theta^{n-m} \right)' &= \left(\frac{a'_n}{a_m} - \frac{a_n a'_m}{a_m^2} \right) \theta^{n-m} + \frac{a_n}{a_m} (n - m) u' \theta^{n-m} = \\ &= \frac{a_n}{a_m} \theta^{n-m} \left(\frac{a'_n}{a_n} - \frac{a'_m}{a_m} + (n - m) u' \right) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Z rovnosti (2.2) pak plyne, že $\frac{a_n}{a_m} \theta^{n-m}$ je konstanta v $F(\theta)$, tedy $\frac{a_n}{a_m} \theta^{n-m} \in F$. To je ale spor s předpokladem, že θ je transcendentní prvek nad F . Tím jsme dokázali vlastnost (iii). $\square$

Definice 2.19. Nechť F je těleso, G je jeho rozšíření, $\theta \in G$, $F[x]$ je okruh polynomů v proměnné x nad F . *Minimální polynom* prvku θ je normovaný polynom nejmenšího stupně ze všech polynomů v $F[x]$ takových, že mají θ za kořen.

Věta 2.20 (Derivace algebraických funkcí). *Nechť F je diferenciální těleso a nechť $F(\theta)$ je diferenciální rozšíření tělesa F . Předpokládejme, že θ je algebraický prvek nad F s minimálním polynomem*

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N+1} p_i z^i \in F[z],$$

kde $p_{N+1} = 1$. Pak derivace prvku θ může být vyjádřena ve tvaru

$$\theta' = -\frac{d(\theta)}{e(\theta)} \in F(\theta),$$

kde $d(z), e(z) \in F[z]$ jsou polynomy tvaru

$$d(z) = \sum_{i=0}^N p'_i z^i, \quad e(z) = \sum_{i=0}^N (i+1) p_{i+1} z^i.$$

Důkaz. Položíme-li $p(\theta) = 0$ a následně tuto identitu zderivujeme, pak dostaneme

$$\sum_{i=0}^{N+1} p'_i \theta^i + \sum_{i=1}^{N+1} i p_i \theta^{i-1} \theta' = 0.$$

Protože $p_{N+1} = 1$, tak je zřejmé, že $p'_{N+1} = 0$. Z rovnosti výše vyjádříme θ' , čímž obdržíme

$$\theta' = - \frac{\sum_{i=0}^N p'_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N (i+1) p_{i+1} \theta^i},$$

což jsme chtěli dokázat. Uvědomme si dále, že jmenovatel $e(\theta) \neq 0$, neboť jeho stupeň je N . Tento fakt plyne z toho, že polynom $p(z)$ je minimální polynom prvku θ . $\square$

Dále se budeme zabývat integrací racionálních funkcí a transcendentních elementárních funkcí.

- Pro integraci racionálních funkcí využijeme Hermiteovu metodu uvedenou v Kapitole 3 v sekci 3.1, případně pro racionální lomené funkce s bezčtvercovým jmenovatelem, jehož stupeň je větší než stupeň čitatele, a čítec se jmenovatelem jsou nesoudělné, využijeme Rothstein-Tragerovu metodu uvedenou v sekci 3.2 ve Větech 3.10 a 3.11.
- Pro integraci transcendentních elementárních funkcí využijeme Rischův algoritmus popsaný v Kapitole 5; v závislosti na rozšíření, ve kterém daný integrand vyjadřujeme, dělíme Rischův algoritmus na
 - Rischův algoritmus pro logaritmické rozšíření, který je uveden v sekci 5.1.
 - * Pro integraci racionální lomené funkce využijeme Hermiteovu metodu pro logaritmické rozšíření, viz 5.1.1; případně pro racionální lomenou funkci s bezčtvercovým jmenovatelem, jehož stupeň je větší než stupeň čitatele, a čítec se jmenovatelem jsou nesoudělné, použijeme Rothstein-Tragerovu metodu pro logaritmický případ uvedenou v části 5.1.1 ve Větě 5.3.
 - * Integrací polynomu se zabývá část 5.1.2.
 - Rischův algoritmus pro exponenciální rozšíření, který je uveden v sekci 5.2.
 - * Pro integraci racionální lomené funkce využijeme Hermiteovu metodu pro exponenciální rozšíření uvedenou v části 5.2.1; případně pro racionální lomenou funkce s bezčtvercovým jmenovatelem, jehož stupeň je větší než stupeň čitatele, a čítec se jmenovatelem jsou nesoudělné, použijeme Rothstein-Tragerovu metodu pro exponenciální případ uvedenou v části 5.2.1 ve Větě 5.10.
 - * Integraci polynomu lze nalézt v části 5.2.2.

Kapitola 3

Integrace racionálních funkcí

V této kapitole se budeme zabývat integrací racionálních funkcí, čtenáři představíme Hermiteovu metodu a Rothstein-Tragerovu metodu, které využijeme i později v rámci Rischova algoritmu. Nejdříve uvedeme několik pojmů, které budeme při integraci potřebovat.

Poznámka. Obory integrity, v nichž lze provádět dělení se zbytkem, nazýváme *euklidovské okruhy*, přičemž největšího společného dělitele můžeme v takových oborech integrity nalézt pomocí Euklidova algoritmu. Navíc platí, že každý okruh nad tělesem je euklidovským okruhem [3].

Věta 3.1. *Nechť $F[x]$ je okruh polynomů jedné proměnné nad tělesem F . Nechť $a(x), b(x) \in F[x]$ jsou dané nenulové polynomy a nechť $g(x) = (a(x), b(x)) \in F[x]$. Pak pro libovolný polynom $c(x) \in F[x]$ takový, že $g(x) \mid c(x)$, existují jednoznačně určené polynomy $\sigma(x), \tau(x) \in F[x]$ takové, že*

$$\sigma(x)a(x) + \tau(x)b(x) = c(x), \quad (3.1)$$

$$\text{st}(\sigma(x)) < \text{st}(b(x)) - \text{st}(g(x)). \quad (3.2)$$

Navíc, platí-li, že

$$\text{st}(c(x)) < \text{st}(a(x)) + \text{st}(b(x)) - \text{st}(g(x)),$$

pak

$$\text{st}(\tau(x)) < \text{st}(a(x)) - \text{st}(g(x)). \quad (3.3)$$

Důkaz této věty je dělen do tří částí, my zde provedeme pouze důkaz existence polynomů $\sigma(x), \tau(x)$, zbylé dvě části (důkaz jednoznačnosti a důkaz platnosti (3.3)) lze nalézt v [3, s. 44–45].

Navíc tento důkaz využijeme ke konstrukci polynomů $\sigma(x), \tau(x)$ v rámci integrace pomocí Hermiteovy metody.

Důkaz. Použitím rozšířeného Euklidova algoritmu obdržíme polynomy $s(x), t(x) \in F[x]$ takové, že platí rovnice

$$s(x)a(x) + t(x)b(x) = g(x).$$

Jelikož $g(x) \mid c(x)$, tak vidíme, že

$$\left(s(x)\frac{c(x)}{g(x)}\right)a(x) + \left(t(x)\frac{c(x)}{g(x)}\right)b(x) = c(x). \quad (3.4)$$

Tím jsme sice získali řešení rovnice (3.1), označme

$$\tilde{\sigma}(x) = s(x) \frac{c(x)}{g(x)}, \quad \tilde{\tau}(x) = t(x) \frac{c(x)}{g(x)},$$

podmínka ohledně stupňů polynomů však splněna není. Zapišme nyní rovnost (3.4) ve tvaru

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{a(x)}{g(x)} + \tilde{\tau}(x) \frac{b(x)}{g(x)} = \frac{c(x)}{g(x)}. \quad (3.5)$$

Nyní vydělíme se zbytkem polynom $\tilde{\sigma}(x)$ polynomem $\frac{b(x)}{g(x)}$, čímž obdržíme polynomy $q(x), r(x) \in F[x]$ takové, že

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{b(x)}{g(x)} q(x) + r(x), \quad (3.6)$$

kde $\text{st}(r(x)) < \text{st}\left(\frac{b(x)}{g(x)}\right) = \text{st}(b(x)) - \text{st}(g(x))$. Nyní definujeme

$$\sigma(x) = r(x),$$

přičemž podmínka (3.2) je splněna. Také definujeme

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + q(x) \frac{a(x)}{g(x)}.$$

Pomocí (3.5) a (3.6) lze snadno ověřit, že

$$\sigma(x) \frac{a(x)}{g(x)} + \tau(x) \frac{b(x)}{g(x)} = \frac{c(x)}{g(x)}.$$

Vynásobením této rovnosti polynomem $g(x)$ ihned obdržíme vztah (3.1). $\square$

Definice 3.2. Nechť R je obor integrity s jednoznačným rozkladem a nechť $a(x), b(x) \in R[x]$ jsou nenulové polynomy takové, že

$$a(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad b(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, \quad a_m \neq 0, b_n \neq 0.$$

Sylvesterova matice polynomů $a(x)$ a $b(x)$ je matice typu $(m+n)/(m+n)$

$$M = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & a_m & \cdots & \cdots & a_0 & \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & b_n & \cdots & \cdots & b_0 & \end{pmatrix},$$

jejíž horní část obsahuje n řádků koeficientů polynomu $a(x)$ a dolní část m řádků koeficientů polynomu $b(x)$. Prázdná místa představují nuly.

Definice 3.3. *Rezultant polynomů $a(x), b(x) \in R[x]$, píšeme $\text{res}(a, b)$, je determinant Sylvesterovy matice polynomů $a(x), b(x)$. Definujeme také $\text{res}(0, b) = 0$ pro nenulový polynom $b(x) \in R[x]$ a $\text{res}(a, b) = 1$ pro nenulové konstanty $a, b \in R$. Pokud chceme zahrnout proměnnou polynomů, tak píšeme $\text{res}_x(a, b)$, což je důležité v případě, kdy je obor koeficientů jiný okruh polynomů, např. $\mathbb{Z}[y]$.*

Definice 3.4. *Nechť R je obor integrality s jednoznačným rozkladem. Polynom $a(x) \in R[x]$ nazýváme *bezčtvercový*, pokud $a(x)$ není dělitelný druhou mocninou nějakého polynomu, který není konstantní. *Bezčtvercovým rozkladem* polynomu $a(x)$ je*

$$a(x) = \prod_{i=1}^k a_i(x)^{i_i},$$

kde $a_i(x)$ jsou bezčtvercové, po dvou nesoudělné polynomy.

Věta 3.5. *Polynom $a(x) \in R[x]$ je bezčtvercový, právě když $(a(x), a'(x)) = 1$.*

Důkaz. Viz [3, s. 339]. □

Věta 3.6. *Nechť $a(x), b(x) \in R[x]$, kde R je obor integrality s jednoznačným rozkladem. Pak $a(x), b(x)$ mají netriviálního společného dělitele právě tehdy, když $\text{res}(a, b) = 0$.*

Důkaz. Viz [3, s. 288]. □

Poznámka. Uveďme nyní jeden z algoritmů pro bezčtvercový rozklad:

Nechť F je těleso a nechť je dán normovaný polynom $f(x) \in F[x]$. V prvním kroku spočteme $g_1(x) = (f(x), f'(x))$, $h_1(x) = \frac{f(x)}{g_1(x)}$, $i = 1$. Následně budeme počítat $g_{i+1}(x) = (g_i(x), g'_i(x))$, $h_{i+1}(x) = \frac{g_i(x)}{g_{i+1}(x)}$, $m_i(x) = \frac{h_i(x)}{h_{i+1}(x)}$ dokud je $h_i(x) \neq 1$, přičemž po každém cyklu zvýšíme i o jedna. Nakonec obdržíme bezčtvercový rozklad polynomu $f(x) = m_1(x) \cdot m_2^2(x) \cdots m_k^k(x)$.

Věta 3.7. *Nechť F je těleso, $a(x) \in F[x]$ je polynom, který není konstantní. Pak existuje rozšíření G tělesa F takové, že $a(x)$ se v $G[x]$ rozkládá na součin lineárních činitelů.*

Důkaz. Viz [3]. □

Definice 3.8. *Nechť F je těleso. Pro libovolný polynom $a(x) \in F[x]$, který není konstantní, existuje podle předchozího tvrzení rozšíření G tělesa F takové, že*

$$a(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

kde $c \in F$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in G$. Těleso $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pak nazýváme *rozkladové těleso* polynomu $a(x)$ nad tělesem F .

3.1 Hermiteova metoda – integrace racionální části

V této části se budeme zabývat integrací racionální funkce pomocí Hermiteovy metody z 19. století.

V rámci celé sekce předpokládejme, že je dáno diferenciální těleso racionálních funkcí $K(x)$ nad libovolným tělesem konstant K charakteristiky 0 s derivací splňující $x' = 1$. Proto může být K například $\mathbb{Q}$, nebo $\mathbb{C}$, nebo těleso racionálních funkcí $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)(y_1, \dots, y_v)$, kde α_i , $1 \leq i \leq k$, jsou algebraická čísla a y_i , $1 \leq i \leq v$, ostatní proměnné nezávislé na x .

Hermiteova metoda upravuje problém integrace racionální funkce na součet racionální funkce a integrálu ryze racionální funkce

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c(x)}{d(x)} + \int \frac{a(x)}{b(x)}, \quad (3.7)$$

kde $p(x), q(x), a(x), b(x), c(x), d(x) \in K[x]$, $\text{st}(a(x)) < \text{st}(b(x))$ a $b(x)$ je normovaný a bezčtvercový. V tomto tvaru se zlomek $\frac{c(x)}{d(x)}$ nazývá *racionální část* integrálu a integrál $\int \frac{a(x)}{b(x)}$ se nazývá *logaritmická část* (neboť tento integrál lze vyjádřit pouze pomocí logaritmického rozšíření).

Nechť je tedy dána racionální funkce $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$ taková, že polynom $q(x)$ je normovaný. Dále dělíme se zbytkem polynom $p(x)$ polynomem $q(x)$, čímž získáme polynomy $s(x), r(x) \in K[x]$ takové, že $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$, kde $r(x)$ je buď nulový polynom, nebo $\text{st}(r(x)) < \text{st}(q(x))$. Pak je možné integrál funkce $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapsat jako

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int s(x) + \int \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Integrál polynomu $s(x)$, který je součástí výrazu $\frac{c(x)}{d(x)}$ ve vztahu (3.7), se nazývá *polynomiální část* a jeho integrace je triviální. Dále se budeme zabývat integrací zlomku $\frac{r(x)}{q(x)}$. Nejdříve vypočítáme bezčtvercový rozklad jmenovatele

$$q(x) = \prod_{i=1}^k q_i(x)^i,$$

ve kterém je každý polynom $q_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, normovaný a bezčtvercový, každé dva různé polynomy $q_i(x)$ jsou nesoudělné a $\text{st}(q_k(x)) > 0$. Poté rozložíme integrand $\frac{r(x)}{q(x)} \in K(x)$ na parciální zlomky, tedy

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \frac{r_{ij}(x)}{q_i(x)^j},$$

kde $r_{ij}(x) \in K[x]$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq i$ a

$$\text{st}(r_{ij}(x)) < \text{st}(q_i(x)), \text{ je-li } \text{st}(q_i(x)) > 0, \quad r_{ij}(x) = 0, \text{ je-li } q_i(x) = 1. \quad (3.8)$$

Integrál zlomku $\frac{r(x)}{q(x)}$ tedy vyjádříme ve tvaru

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \int \frac{r_{ij}(x)}{q_i(x)^j}.$$

Jednotlivé zlomky v rozkladu můžeme dělit na dva druhy:

- (i) je-li $j = 1$, pak je tento integrál logaritmickou částí, jejímž řešením se budeme zabývat v další sekci,
- (ii) je-li $j > 1$, pak tento integrál řešíme následujícím způsobem.

Uvažujme konkrétní nenulový integrand $\frac{r_{ij}(x)}{q_i(x)^j}$, kde $j > 1$. Jelikož jsou polynomy $q_i(x)$ bezčtvercové, tak platí, že $q_i(x)$ a jeho derivace $q_i'(x)$ jsou nesoudělné. Proto můžeme využít Větu 3.1 k výpočtu polynomů $s(x), t(x) \in K[x]$ takových, že

$$s(x)q_i(x) + t(x)q_i'(x) = r_{ij}(x), \quad (3.9)$$

kde $\text{st}(s(x)) < \text{st}(q_i(x)) - 1$ a $\text{st}(t(x)) < \text{st}(q_i(x))$, což plyne z nerovnosti v (3.8). Vydělíme-li obě strany rovnosti (3.9) polynomem $q_i(x)^j$ a poté obě strany rovnosti zintegrujeme, tak dostaneme

$$\int \frac{r_{ij}(x)}{q_i(x)^j} = \int \frac{s(x)}{q_i(x)^{j-1}} + \int \frac{t(x)q_i'(x)}{q_i(x)^j}. \quad (3.10)$$

Druhý integrál na pravé straně vztahu (3.10) spočteme metodou *per partes*, kterou jsme uvedli ve Větě 2.10, a to následovně:

Označme nejprve

$$u(x) = t(x), \quad v(x) = \frac{-1}{(j-1)q_i(x)^{j-1}}.$$

Dle příslušného vzorce ve Větě 2.5 spočteme derivaci $v(x)$

$$v'(x) = \frac{[(j-1)q_i(x)^{j-1}]'}{[(j-1)q_i(x)^{j-1}]^2} = \frac{(j-1)^2 q_i(x)^{j-2} q_i'(x)}{(j-1)^2 q_i(x)^{2j-2}} = \frac{q_i'(x)}{q_i(x)^j}$$

a dle vzorce (2.1) dostáváme

$$\int \frac{t(x)q_i'(x)}{q_i(x)^j} = \frac{-t(x)}{(j-1)q_i(x)^{j-1}} + \int \frac{t'(x)}{(j-1)q_i(x)^{j-1}}.$$

Dosadíme-li tento výpočet do rovnosti (3.10), pak obdržíme

$$\int \frac{r_{ij}(x)}{q_i(x)^j} = \int \frac{s(x)}{q_i(x)^{j-1}} + \frac{-t(x)}{(j-1)q_i(x)^{j-1}} + \int \frac{t'(x)}{(j-1)q_i(x)^{j-1}} = \frac{\frac{-t(x)}{j-1}}{q_i(x)^{j-1}} + \int \frac{s(x) + \frac{t'(x)}{j-1}}{q_i(x)^{j-1}}.$$

Uvědomme si, že jsme obdrželi racionální funkci a integrál s mocninou ve jmenovateli zmenšenou o jedna. Je-li čítec tohoto nového integrálu nulový, tak se proces uvedený výše ukončí. Pokud však $j-1 = 1$, pak je tento integrál logaritmickou částí. Poslední možností je, že $j-1 > 1$, v tomto případě provedeme stejný proces znovu. Předtím se ale musíme ujistit, že je stále splněna podmínka (3.8). Platí, že

$$\text{st}\left(s(x) + \frac{t'(x)}{j-1}\right) \leq \max\{\text{st}(s(x)), \text{st}(t'(x))\} < \text{st}(q_i(x)) - 1,$$

z čehož je zřejmé, že podmínka splněna je. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, než budou všechny jmenovatele zbývajících integrandů bezčtvercové.

3.2 Rothstein-Tragerova metoda – integrace logaritmické části

V této sekci budeme předpokládat, že je dán integrand $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, kde $b(x)$ je normovaný a bezčtvercový a $\text{st}(a(x)) < \text{st}(b(x))$. Pro integraci takové funkce využijeme Rothstein-Tragerovu metodu, kterou nezávisle na sobě představili matematici Rothstein (v r. 1976) a Trager (v r. 1977).

Lemma 3.9. *Nechť $K(x)$ je diferenciální těleso nad nějakým tělesem konstant K . Nechť $a(x), b(x) \in K[x]$ jsou nesoudělné polynomy, $b(x)$ je normovaný a bezčtvercový, $\text{st}(a(x)) < \text{st}(b(x))$. Předpokládejme, že*

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \ln(v_i(x)), \quad (3.11)$$

kde $c_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, jsou různé nenulové konstanty a $v_i(x) \in K[x]$, $1 \leq i \leq n$, jsou normované, bezčtvercové, po dvou nesoudělné polynomy kladného stupně. Pak

$$b(x) = \prod_{j=1}^n v_j(x) \quad \text{a} \quad a(x) = \sum_{i=1}^n c_i v'_i(x) u_i(x),$$

kde $u_i(x) = \prod_{j \neq i}^n v_j(x)$.

Důkaz. Derivací obou stran rovnosti (3.11) a následným vynásobením výrazem $b(x) \cdot \prod_{j=1}^n v_j(x)$ obdržíme

$$a(x) \cdot \prod_{j=1}^n v_j(x) = b(x) \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot u_i(x) \cdot v'_i(x). \quad (3.12)$$

Jelikož z předpokladu víme, že polynomy $a(x), b(x)$ jsou nesoudělné, tak zřejmě $b(x)$ dělí $\prod_{j=1}^n v_j(x)$. Z rovnosti (3.12) plyne, že

$$v_j(x) \left| b(x) \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot u_i(x) \cdot v'_i(x) \right.$$

Z předpokladu je $v_j(x)$ bezčtvercový, a tudíž $(v_j(x), v'_j(x)) = 1$, z čehož dále plyne $v_j(x) \mid b(x) \cdot u_j(x)$. Z předpokladu víme, že $v_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, jsou po dvou nesoudělné, a proto $v_j(x) \mid b(x)$ pro každé $j = 1, \dots, n$, z čehož je již zřejmé, že $\prod_{j=1}^n v_j(x) \mid b(x)$. Polynomy $v_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, a $b(x)$ jsou navíc normované, proto je

$$b(x) = \prod_{j=1}^n v_j(x). \quad (3.13)$$

Díky rovnostem (3.12) a (3.13) můžeme $a(x)$ vyjádřit jako

$$a(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot v'_i(x) \cdot u_i(x),$$

a tím je důkaz hotov. □

Věta 3.10 (Rothstein-Tragerova). *Nechť $K(x)$ je diferenciální těleso nad nějakým tělesem konstant K . Nechť $a(x), b(x) \in K[x]$ jsou nesoudělné polynomy, $b(x)$ je normovaný a bezčtvercový, $\text{st}(a(x)) < \text{st}(b(x))$. Předpokládejme, že*

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \ln(v_i(x)),$$

kde $c_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, jsou různé nenulové konstanty a $v_i(x) \in K[x]$, $1 \leq i \leq n$, jsou normované, bezčtvercové, po dvou nesoudělné polynomy kladného stupně. Pak c_i , $1 \leq i \leq n$, jsou různé kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_x(a(x) - zb'(x), b(x)) \in K[z]$$

a $v_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, jsou polynomy $v_i(x) = (a(x) - c_i b'(x), b(x)) \in K[x]$.

Důkaz. Nejdříve budeme dokazovat, že $v_i(x) = (a(x) - c_i b'(x), b(x))$. Prvně ukážeme, že pro každé $j = 1, \dots, n$ platí, že

$$v_j(x) \mid (a(x) - c_j \cdot b'(x)). \quad (3.14)$$

Zderivováním obou stran rovnosti (3.13) dostáváme $b'(x) = \prod_{i=1}^n v_i'(x) \cdot u_i(x)$, odkud plyne

$$\begin{aligned} a(x) - c_j \cdot b'(x) &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot v_i'(x) \cdot u_i(x) - c_j \cdot \prod_{i=1}^n v_i'(x) \cdot u_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i - c_j) v_i'(x) \cdot u_i(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pro $i = j$ je $c_i - c_j = 0$, a proto je v tomto případě člen součtu nulový, jinak pro každé $i \neq j$ platí $v_j \mid u_i$, proto vztah (3.14) platí.

Ze vztahů (3.13) a (3.14) plyne, že $v_j(x)$ je společný dělitel $a(x) - c_j \cdot b'(x)$ a $b(x)$ a nyní dokážeme, že je jejich největším společným dělitelem. K tomu nám však stačí dokázat, že pro $h \neq j$ platí $(a(x) - c_j \cdot b'(x), v_h(x)) = 1$. To plyne z faktu, že největší společný dělitel $a(x) - c_j \cdot b'(x)$ a $b(x)$ musí dělit $b(x)$, tedy musí dělit $\prod_{j=1}^n v_j(x)$. Pokud ukážeme, že $b(x)$ je nesoudělný s $v_h(x)$ pro $h \neq j$, pak je jisté, že $v_j(x)$ je největším společným dělitelem $a(x) - c_j \cdot b'(x)$ a $b(x)$.

Ze vztahu (3.15) víme, že

$$(a(x) - c_j \cdot b'(x), v_h(x)) = \left(\sum_{i=1}^n (c_i - c_j) v_i'(x) \cdot u_i(x), v_h(x) \right).$$

Platí, že $v_h(x)$ dělí každý $u_i(x)$ pro $i \neq h$, proto

$$(a(x) - c_j \cdot b'(x), v_h(x)) = ((c_h - c_j) v_h'(x) \cdot u_h(x), v_h(x)).$$

Pro $h \neq j$ je tento největší společný dělitel roven jedné, neboť $c_h \neq c_j$, $(v_h(x), v_h'(x)) = 1$ a $(v_h(x), u_h(x)) = 1$. Tím jsme dokázali, že $v_j(x) = (a(x) - c_j \cdot b'(x), b(x))$ pro $j = 1, \dots, n$.

V další části důkazu ukážeme, že konstanty c_i jsou kořeny $\text{res}_x(a(x) - zb'(x), b(x))$. Vzhledem k předchozím výsledkům platí, že $\text{res}_x(a(x) - c_j \cdot b'(x), b(x)) = 0$, neboť polynomy $a(x) - c_j \cdot b'(x)$ a $b(x)$ mají společného netriviálního dělitele. To však znamená,

že c_j je kořenem polynomu $R(z) = \text{res}_x(a(x) - z \cdot b'(x), b(x))$. Předpokládejme nyní naopak, že c je libovolný kořen polynomu $R(z)$. Je také nutné předpokládat, že $c \in K_R$, kde K_R je rozkladové těleso polynomu $R(z)$, jelikož jsme zatím nedokázali, že se polynom $R(z)$ rozkládá nad tělesem K . Pak $\text{res}_x(a(x) - c \cdot b'(x), b(x)) = 0$, což ale znamená, že $(a(x) - c \cdot b'(x), b(x)) = G(x) \in K_R[x]$, přičemž $G(x)$ je polynom kladného stupně. Nechť $g(x)$ je ireducibilní dělitel $G(x)$. Protože $g(x) \mid b(x)$ a navíc platí rovnost (3.13), pak existuje právě jeden $v_j(x)$ (neboť $v_i(x)$ jsou po dvou nesoudělné) takový, že $g(x) \mid v_j(x)$. Jelikož $g(x) \mid (a(x) - c \cdot b'(x))$ a platí (3.15), pak

$$g(x) \mid \sum_{i=1}^n (c_i - c) v_i'(x) \cdot u_i(x).$$

Protože $g(x) \mid u_i(x)$ pro každé $i \neq j$, musí platit $g(x) \mid (c_j - c) v_j'(x) \cdot u_j(x)$, což platí jen tehdy, když $c_j - c = 0$, neboť $(g(x), u_j(x)) = 1$ a $(g(x), v_j'(x)) = 1$, z čehož plyne, že c je jednou z konstant c_j . Tím jsme dokázali, že polynom $R(z) \in K[z]$ se nad K rozkládá (jelikož $c_j \in K$) a že c_j , $1 \leq j \leq n$, jsou různé kořeny $R(z)$. $\square$

Následující věta je zobecněním věty předchozí.

Věta 3.11. *Nechť $K(x)$ je diferenciální těleso nad nějakým tělesem konstant K , nechť $a(x), b(x) \in K[x]$ jsou nesoudělné polynomy, $b(x)$ je normovaný a bezčtvercový, $\text{st}(a(x)) < \text{st}(b(x))$. Nechť L je nejmenší algebraické rozšíření tělesa K takové, že integrál můžeme vyjádřit ve tvaru*

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^n c_i^* \cdot \ln(v_i^*(x)), \quad (3.16)$$

kde $c_i^* \in L$, $v_i^*(x) \in L[x]$. Pak

$$L = K(c_1, \dots, c_n),$$

kde c_i , $1 \leq i \leq n$, jsou různé kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_x(a(x) - z b'(x), b(x)) \in K[z].$$

Jinými slovy, L je rozkladové těleso polynomu $R(z) \in K[z]$. Navíc můžeme k výpočtu integrálu využít vzorce z Věty 3.10.

Důkaz. Nechť je integrál vyjádřen ve tvaru (3.16). Pokud c_i^* a $v_i^*(x)$ nesplňují podmínky Věty 3.10, pak je možné přeformulovat výraz (3.16) následovně:

- Není-li $v_i^*(x)$ pro některé i bezčtvercový, pak provedeme bezčtvercový rozklad

$$v_i^*(x) = \prod_{j=1}^k v_j(x)^j$$

a pomocí pravidla pro počítání s logaritmy nahradíme $\ln(v_i^*(x))$ za $\sum_{j=1}^k j \cdot \ln(v_j(x))$.

Tento postup budeme provádět do té doby, dokud nebudou všechny argumenty logaritmické funkce bezčtvercové.

- Pokud není některý argument logaritmické funkce normovaný, pak jej stačí vydělit vedoucím koeficientem.
- Pokud je $(v_i^*(x), v_j^*(x)) = v(x)$ pro některé $i \neq j$, kde $\text{st}(v(x)) > 1$, pak využijeme pravidla pro počítání s logaritmy a nahradíme

$$\ln(v_i^*(x)) = \ln(v(x)) + \ln\left(\frac{v_i^*(x)}{v(x)}\right), \quad \ln(v_j^*(x)) = \ln(v(x)) + \ln\left(\frac{v_j^*(x)}{v(x)}\right).$$

Opět, tento postup můžeme provádět do té doby, než budou všechny argumenty logaritmické funkce po dvou nesoudělné.

- Je-li $c_i^* = c_j^*$ pro $i \neq j$, pak můžeme využít vlastnosti logaritmu a nahradit

$$c_i^* \cdot \ln(v_i^*(x)) + c_j^* \cdot \ln(v_j^*(x)) = c_i^* (\ln(v_i^*(x)) + \ln(v_j^*(x))) = c_i^* \cdot \ln(v_i^*(x) \cdot v_j^*(x)).$$

To tedy znamená, že výraz (3.16) lze přeformulovat na takový výraz, pro který platí předchozí věta.

Dále z předchozí věty víme, že c_i^* , $1 \leq i \leq n^*$, jsou různé kořeny resultantu $R(z)$ a $v_i^*(x)$, $1 \leq i \leq n^*$, definujeme stejně jako v předchozí větě. Z toho plyne, že L je rozkladové těleso polynomu $R(z) \in K[z]$. □

Kapitola 4

Liouvillův princip

Následující věta byla předstvena Liouvillem v roce 1833 a představuje tvar integrálu elementární funkce za předpokladu, že je tento integrál také elementární.

Věta 4.1 (Liouvillův princip). *Nechť F je diferenciální těleso s tělesem konstant K , nechť $f \in F$. Předpokládejme, že rovnice $g' = f$ (tj. $g = \int f$) má řešení $g \in G$, kde G je elementární rozšíření F mající stejné těleso konstant K . Pak existují $v_0, v_1, \dots, v_m \in F$ a konstanty $c_1, \dots, c_m \in K$ takové, že*

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i'}{v_i}.$$

Jinak řečeno

$$\int f = v_0 + \sum_{i=1}^m c_i \ln v_i.$$

Důkaz. Důkaz Liouvillova principu provedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu elementárních rozšíření potřebných k vyjádření integrálu. Nejdříve se však budeme zabývat pouze případy, kdy bude vyžadováno pouze jedno elementární rozšíření θ , kde θ bude buď transcendentní logaritmický, nebo transcendentní exponenciální prvek, a v poslední sekci této kapitoly uvedeme obecný důkaz Liouvillova principu. Budeme předpokládat, že těleso konstant K je dostatečně velké na to, aby k vyjádření integrálu dále nebyla vyžadována nová algebraická čísla.

4.1 Jednoduché transcendentní logaritmické rozšíření

V rámci této sekce budeme předpokládat, že θ je transcendentní a logaritmický prvek nad tělesem F . Nechť $F = K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ je těleso elementárních funkcí s tělesem konstant K a nechť $f \in F$. Předpokládejme, že $\int f \in G$, kde G je elementární rozšíření F takové, že $G = F(\theta)$, $\theta = \ln u$ pro některé $u \in F$ a předpokládejme dále, že G má stejné těleso konstant K .

Protože θ je transcendentní nad F , můžeme $\int f$ vyjádřit jako racionální funkci v proměnné θ , tedy jako

$$\int f = \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$$

kde $a(\theta)$, $b(\theta) \in F[\theta]$ jsou nesoudělné a $b(\theta)$ je normovaný. Polynom $b(\theta)$ můžeme rozložit na součin

$$b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i},$$

kde $b_i(\theta)$, $1 \leq i \leq \mu$, jsou různé normované ireducibilní polynomy v $F[\theta]$. Rozkladem na parciální zlomky pak dostáváme

$$\int f = \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j},$$

kde $a_0(\theta)$, $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta) \in F[\theta]$ a $\text{st}(a_{ij}(\theta)) < \text{st}(b_i(\theta))$. Zderivováním obou stran vzhledem k x dostáváme

$$f = \left(\frac{a(\theta)}{b(\theta)} \right)' = a_0'(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}'(\theta)}{b_i(\theta)^j} - \frac{j a_{ij}(\theta) b_i'(\theta)}{b_i(\theta)^{j+1}} \right), \quad (4.1)$$

přičemž jsme použili pravidlo (iii) z Věty 2.5.

Dále provedeme důkaz sporem. Nechť $b_i(\theta) \in F[\theta]$ je konkrétní normovaný ireducibilní polynom kladného stupně, který se objevuje ve jmenovateli na pravé straně rovnosti (4.1). Díky Větě 2.17 víme, že $b_i'(\theta) \in F[\theta]$, $\text{st}(b_i'(\theta)) < \text{st}(b_i(\theta))$, z čehož plyne, že $b_i(\theta)$ nedělí $b_i'(\theta)$ a navíc platí, že $b_i(\theta)$ nemá žádného vlastního dělitele, neboť je ireducibilní. Z toho plyne, že na pravé straně rovnosti (4.1) je právě jeden výraz se jmenovatelem $b_i(\theta)^{r_i+1}$. Jelikož není možné tento výraz z pravé strany rovnosti (4.1) nijak odečíst, musí se nutně vyskytovat i na levé straně této rovnosti, což je však spor s tím, že $f \in F$. Tím dospíváme k závěru, že ve vztahu (4.1) nemohou být žádné výrazy se jmenovateli obsahujícími θ . Rovnost (4.1) proto nabývá tvaru

$$f = a_0'(\theta), \quad \text{kde } a_0 \in F[\theta],$$

odkud plyne, že $a_0'(\theta) \in F$, což dle Věty 2.17, části (ii) nastane právě tehdy, když

$$a_0(\theta) = c\theta + d \in F[\theta]$$

pro libovolnou konstantu $c \in K$ a nějakou funkci $d \in F$. Tím jsme dokázali, že

$$\int f = d + c \ln u,$$

kde $c \in K$, $d, u \in F$, což je kýžená podoba Liouvillova principu v případě, kdy θ je transcendentní a logaritmický prvek nad F .

4.2 Jednoduché transcendentní exponenciální rozšíření

V další části budeme uvažovat, že θ je transcendentní a exponenciální prvek nad tělesem F . Předpokládejme, že $G = F(\theta)$, $\theta = \exp u$ pro některé $u \in F$ a předpokládejme dále, že G má stejné těleso konstant K .

Protože θ je transcendentní nad F , stejným postupem jako v předchozí části obdržíme rovnost (4.1), kde $b_i(\theta)$ jsou po dvou různé normované a ireducibilní polynomy v $F[\theta]$ a také platí, že $f \in F$.

Nechť $b_i(\theta) \in F[\theta]$ je konkrétní normovaný ireducibilní polynom kladného stupně. Není-li $b_i(\theta)$ monom (tj. výraz tvaru $h\theta^k$), pak z Věty 2.18 vyplývá, že $b_i(\theta)$ nedělí $b_i'(\theta)$. Stejně jako dříve docházíme k závěru, že v rovnosti nemohou být výrazy se jmenovateli obsahujícími θ a tedy $f = a_0'(\theta)$, kde $\text{st}(f(\theta)) = 0$, a proto i $\text{st}(a_0'(\theta)) = 0$. Z Věty 2.18, části (ii) poté plyne, že $\text{st}(a_0(\theta)) = 0$, a proto $a_0(\theta) \in F$.

Dále předpokládejme, že $b_i(\theta)$ je monom. Jak už jsme uvedli dříve, $b_i(\theta)$ je normovaný a ireducibilní, a proto musí být $b_i(\theta) = \theta$. To tedy znamená, že rovnost (4.1) je tvaru

$$f = \left(\sum_{j=-k}^{\ell} h_j \theta^j \right)',$$

kde $h_j \in F$, $-k \leq j \leq \ell$. Zderivujeme-li každý výraz $h_j \theta^j$ na pravé straně rovnosti, pak z Věty 2.18, části (i) plyne, že

$$f = \sum_{j=-k}^{\ell} \bar{h}_j \theta^j,$$

kde $\bar{h}_j \in F$ a pro $j \neq 0$ je $\bar{h}_j \neq 0$, pokud $h_j \neq 0$. Jelikož je $f \in F$, tak se v rovnosti může objevit pouze výraz pro $j = 0$. Proto je $f = h_0'$, neboli $\int f = h_0$, kde $h_0 \in F$. Tak jsme ukázali, že se ve vyjádření integrálu nový exponenciální prvek vůbec nevyskytuje, a tím je také Liouvillov princip pro tento speciální případ dokázán.

4.3 Důkaz Liouvilovy věty

V závěrečné sekci této kapitoly uvedeme důkaz Liouvilovy věty v obecném případě. Předpokládejme, že existují prvky $\theta_1, \dots, \theta_N$ takové, že $G = F(\theta_1, \dots, \theta_N)$, kde každý θ_i , $1 \leq i \leq N$, je buďto logaritmický, exponenciální, nebo algebraický prvek nad $F_{i-1} = F(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$, všechna rozšíření $F(\theta_1, \dots, \theta_i)$ mají stejné těleso konstant K a existuje $g \in G$ splňující vztah $g' = f$. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k počtu elementárních rozšíření.

Bázový krok: Příklad, kdy $N = 0$, je triviální, neboť tím pádem máme $g \in F$ splňující $g' = f$, odkud plyne, že $m = 0$, viz Větu 4.1, a je tedy $f = v_0'$, kde $v_0 = g$.

Indukční předpoklad: Předpokládejme, že věta platí pro libovolný počet rozšíření menší než N . Větu dokážeme pro N rozšíření. Pro případ N rozšíření můžeme těleso $F(\theta_1, \dots, \theta_N)$ zapsat jako $F(\theta_1)(\theta_2, \dots, \theta_N)$. Jelikož $f \in F(\theta_1)$ a $g \in F(\theta_1)(\theta_2, \dots, \theta_N)$ splňují vztah $g' = f$, tak využijeme indukční předpoklad k tomu, abychom vyvodili, že existují $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $0 \leq i \leq m$, a konstanty $c_i \in K$, $1 \leq i \leq m$, takové, že

$$f = v_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i(\theta_1)'}{v_i(\theta_1)}. \quad (4.2)$$

Ukážeme, že $v_i(\theta_1) \in F$, $0 \leq i \leq m$. Pro přehlednost označme $\theta_1 = \theta$.

Uvažujme nejdříve případ, kdy θ je transcendentní a logaritmický prvek nad F . V důkazu budeme dále postupovat stejně jako v dříve uvedeném případě jednoduchého transcendentního logaritmického rozšíření.

Díky logaritmickému pravidlu $\ln(v_i \cdot v_j) = \ln v_i + \ln v_j$, $i \neq j$, můžeme předpokládat, že $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou ireducibilní polynomy v $F[\theta]$. Není-li $v_i(\theta)$ normovaný, můžeme vytknout vedoucí koeficient. Navíc, jsou-li si dva logaritmy rovny, pak je můžeme zapsat jako jediný výraz. Proto budeme dále předpokládat, že $v_i(\theta)$ jsou po dvou různé ireducibilní polynomy a koeficienty c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou nenulové. Vyjádříme $v_0(\theta) \in F(\theta)$ ve tvaru

$$v_0(\theta) = \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$$

kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$ jsou nesoudělné polynomy a $b(\theta)$ je navíc normovaný. Rozložíme jmenovatele $b(\theta)$ na součin

$$b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i},$$

kde $b_i(\theta) \in F[\theta]$, $1 \leq i \leq \mu$, jsou po dvou různé normované ireducibilní polynomy a $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_i > 0$. Dále rozložíme $v_0(\theta)$ na parciální zlomky, tj.

$$v_0(\theta) = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}, \quad (4.3)$$

kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$ a $\text{st}(a_{ij}(\theta)) < \text{st}(b_i(\theta))$. Vztah (4.2) tak můžeme přepsat do tvaru

$$f = a'_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a'_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j} - \frac{j a_{ij}(\theta) b'_i(\theta)}{b_i(\theta)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)}. \quad (4.4)$$

Protože θ je logaritmický prvek nad F , existuje $u \in F$ takové, že $\theta' = \frac{u'}{u}$. Nechť $p(\theta) \in F[\theta]$ je libovolný ireducibilní polynom kladného stupně. Pak dle Věty 2.17 platí, že $p'(\theta) \in F[\theta]$, $\text{st}(p'(\theta)) < \text{st}(p(\theta))$, z čehož vyplývá, že $p(\theta)$ nedělí $p'(\theta)$. Pokud je $p(\theta)$ roven jednomu z polynomů $b_i(\theta)$ z rovnosti (4.4) s nejvyšší mocninou r_i , pak pravá strana rovnosti (4.4) obsahuje právě jeden výraz, jehož jmenovatel je $p(\theta)^{r_i+1}$ (všimněme si, že $r_i + 1 > 1$). Protože už neexistuje žádný jiný výraz v rovnosti, se kterým by se mohl zmíněný výraz odečíst, musí se tedy výraz se jmenovatelem $p(\theta)^{r_i+1}$ nutně objevit i na levé straně rovnosti (4.4). To je však spor s tím, že $f \in F$, z čehož dále vyplývá, že se součty uprostřed rovnosti nemohou v rovnosti vůbec objevit.

Pokud budeme nyní předpokládat, že $p(\theta)$ je roven jednomu z polynomů $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, na pravé straně rovnosti (4.4), pak zjistíme, že právě jeden výraz má ve jmenovateli polynom $p(\theta)$. To je ovšem spor (opět s předpokladem, že $f \in F$). Tím pádem vztah (4.4) nabývá tvaru

$$f = a'_0(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i}{v_i},$$

kde $a_0 \in F[\theta]$, $v_i \in F$, $1 \leq i \leq m$, a $c_i \in K$, $1 \leq i \leq m$. Protože $f, v_i \in F$, $1 \leq i \leq m$, musí být i $a'_0(\theta) \in F$, což dle Věty 2.17, části (ii) nastane právě tehdy, když $a_0(\theta) = c\theta + d \in F[\theta]$

pro nějakou konstantu $c \in K$ a nějakou funkci $d \in F$. Proto

$$f = d' + c \frac{u'}{u} + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i}{v_i},$$

kde $d, u, v_i \in F$ a $c, c_i \in K$, $1 \leq i \leq m$, což je požadovaný výsledek.

Stejným způsobem jako výše si může čtenář snadno ověřit, že argumenty užívané v případě jednoduchého transcendentního exponenciálního rozšíření lze převést na obecný případ. Tím je důkaz hotov. □

Kapitola 5

Rischův algoritmus pro transcendentní elementární funkce

V této kapitole se věnujeme Rischovu algoritmu pro integraci transcendentních elementárních funkcí. Tento algoritmus určí, zda existuje elementární integrál zadané elementární funkce, a pokud existuje, tak jej spočítá.

Věta 5.1. *Nechť $f \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$, kde těleso konstant K je podtělesem tělesa komplexních čísel a každý prvek θ_i , $1 \leq i \leq n$, je transcendentní a buď logaritmický, nebo exponenciální nad tělesem $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{i-1})$. Pak existuje algoritmus, který buď dokáže, že $\int f$ není nad tělesem $K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ elementární, nebo v případě, kdy tento integrál elementární je, jej spočítá.*

Poznámka. Symbolem $'$ budeme i nadále značit derivaci vzhledem k x . Pro derivaci vzhledem k θ využijeme zápisu $\frac{d}{d\theta}$.

Důkaz Věty 5.1 provedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu transcendentních rozšíření. Bází indukce je případ, kdy $F_0 = K(x)$ – tuto integraci provedeme pomocí Hermiteovy metody a Rothstein-Tragerovy metody popsaných v Kapitole 3. Dále tedy budeme předpokládat, že věta platí pro těleso $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ a ukážeme, že platí i pro těleso $K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$.

Integrand f můžeme považovat za racionální funkci v jeho posledním rozšíření θ_n , pro přehlednost budeme značit $\theta_n = \theta$, tedy

$$f(\theta) = \frac{p(\theta)}{q(\theta)} \in F_{n-1}(\theta),$$

kde $F_{n-1} = K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $p(\theta), q(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, přičemž $q(\theta)$ je normovaný.

Důkaz rozdělíme na dvě části, v první části budeme předpokládat, že θ je logaritmický prvek, ve druhé bude θ exponenciální.

5.1 Rischův algoritmus pro logaritmické rozšíření

V této sekci budeme předpokládat, že θ je logaritmický prvek nad tělesem F_{n-1} , tedy existuje $u \in F_{n-1}$ takové, že $\theta' = \frac{u'}{u}$. Pro integraci funkce $f(\theta)$ budeme sledovat Hermiteovu

metodu uvedenou v Kapitole 3. Nejdříve vydělíme se zbytkem polynom $p(\theta)$ polynomem $q(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, čímž získáme polynomy $s(\theta), r(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$ takové, že

$$p(\theta) = q(\theta) \cdot s(\theta) + r(\theta),$$

kde $r(\theta)$ je buď nulový polynom, nebo $\text{st}(r(\theta)) < \text{st}(q(\theta))$. Vydělením obou stran této rovnosti polynomem $q(\theta)$ a následným zintegrováním obou stran dostáváme, že integrál funkce f je tvaru

$$\int f(\theta) = \int s(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}.$$

Stejně jako v případě integrace racionálních funkcí v Kapitole 3 budeme polynom $s(\theta)$ nazývat polynomiální částí a zlomek $\frac{r(\theta)}{q(\theta)}$ budeme nazývat racionální částí funkce $f(\theta)$.

5.1.1 Integrace racionální části

Abychom mohli integrovat racionální část pomocí Hermiteovy metody, je nutné nejdříve dokázat následující větu.

Věta 5.2. *Nechť F je diferenciální těleso s operátorem derivace $'$, splňující $x' = 1$, přičemž $x \in F$. Nechť $F(\theta)$ je diferenciální rozšíření tělesa F mající stejné těleso konstant, θ je transcendentní a logaritmický prvek nad F , tj. existuje $u \in F$ takové, že $\theta' = \frac{u'}{u}$. Nechť $a(\theta) \in F[\theta]$ je normovaný polynom kladného stupně a platí $(a(\theta), \frac{d}{d\theta}a(\theta)) = 1$, tedy $a(\theta)$ je bezčtvercový polynom v $F[\theta]$. Pak platí, že $(a(\theta), a'(\theta)) = 1$.*

Důkaz. Z Věty 2.17 víme, že $a'(\theta) \in F[\theta]$. Rozložíme normovaný polynom $a(\theta) \in F[\theta]$ nad jeho rozkladovým tělesem F_a na tvar

$$a(\theta) = \prod_{i=1}^N (\theta - a_i),$$

kde $a_i \in F_a$, $1 \leq i \leq N$, jsou navzájem různé (jelikož $a(\theta)$ je bezčtvercový v $F[\theta]$). Pak

$$a'(\theta) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{u'}{u} - a'_i \right) \prod_{j \neq i} (\theta - a_j).$$

Připusťme nejdříve, že existuje i , $1 \leq i \leq N$, takové, že $\frac{u'}{u} - a'_i = 0$, tedy $a'_i = \frac{u'}{u}$. To ale znamená, že a_i je logaritmus prvku $u \in F$, a proto $(\theta - a_i)' = 0$. Z toho však vyplývá, že $\theta - a_i$ je v tělese $F_a(\theta)$ konstanta, což je spor s předpokladem, že θ je transcendentní prvek nad tělesem F (neboť $F_a(\theta)$ a F_a mají stejné těleso konstant). Odtud plyne, že $\frac{u'}{u} - a'_i \neq 0$ pro každé $i = 1, \dots, N$.

Platí tedy, že

$$\frac{a(\theta)}{a'(\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^N (\theta - a_i)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{u'}{u} - a'_i \right) \prod_{j \neq i} (\theta - a_j)}.$$

Jak vidíme, $a'(\theta)$ je součet N součinů, přičemž $N - 1$ těchto sčítanců je vždy dělitelných výrazem $\theta - a_i$ a jeden sčítanec jím dělitelný není. Z toho je zřejmé, že $a(\theta)$ a $a'(\theta)$ nemají žádné společné dělitele, čímž jsme dokázali tvrzení věty. $\square$

Zabývejme se nyní integrací racionální částí integrálu $\int f(\theta)$, tedy integrálem $\int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $\text{st}(r(\theta)) < \text{st}(q(\theta))$. Stejně jako u racionálních funkcí nejdříve vypočteme bezčtvercový rozklad jmenovatele $q(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, tedy

$$q(\theta) = \prod_{i=1}^k q_i(\theta)^i,$$

kde každý polynom $q_i(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, $1 \leq i \leq k$, je normovaný a bezčtvercový, polynomy $q_i(\theta)$ jsou po dvou nesoudělné a $\text{st}(q_k(\theta)) > 0$.

Pomocí tohoto rozkladu dále rozložíme integrand $\frac{r(\theta)}{q(\theta)}$ na parciální zlomky, tedy

$$\frac{r(\theta)}{q(\theta)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j},$$

kde pro $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq i$ je $r_{ij} \in F_{n-1}[\theta]$ a navíc platí

$$\text{st}(r_{ij}(\theta)) < \text{st}(q_i(\theta)), \text{ je-li } \text{st}(q_i(\theta)) > 0, \quad r_{ij}(\theta) = 0, \text{ je-li } q_i(\theta) = 1. \quad (5.1)$$

Pak je možné integrál zlomku $\frac{r(\theta)}{q(\theta)}$ vyjádřit ve tvaru

$$\int \frac{r(\theta)}{q(\theta)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}. \quad (5.2)$$

Dané integrandy dělíme do dvou skupin podle toho, zda buď $j = 1$, nebo $j > 1$. Prvním případem se budeme zabývat v sekci Integrace logaritmické části 5.1.1, řešení druhého případu následuje.

Uvažujme konkrétní nenulový integrand $\frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $j > 1$. Dle Věty 5.2 víme, že $q_i(\theta)$ a $q_i'(\theta)$ jsou nesoudělné, proto využijeme Větu 3.1 k výpočtu polynomů $s(\theta), t(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$ takových, že

$$s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i'(\theta) = r_{ij}(\theta), \quad (5.3)$$

kde $\text{st}(s(\theta)) < \text{st}(q_i'(\theta))$. Navíc víme, že $\text{st}(r_{ij}(\theta)) < \text{st}(q_i(\theta))$, odkud dle Věty 3.1 je $\text{st}(t(\theta)) < \text{st}(q_i(\theta))$. Vydělením obou stran rovnosti (5.3) výrazem $q_i(\theta)^j$ a následnou integrací obou stran dostáváme

$$\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta) \cdot q_i'(\theta)}{q_i(\theta)^j}.$$

Stejným způsobem jako v Kapitole 3 zintegrujeme pomocí metody per partes druhý výraz na pravé straně rovnosti, a tím obdržíme

$$\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \frac{\frac{-t(\theta)}{j-1}}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{t'(\theta)}{j-1}}{q_i(\theta)^{j-1}}.$$

V případě, že je čítec integrálu na pravé straně rovnosti nenulový a $j - 1 > 1$, pak provedeme stejný proces pro integrál na pravé straně rovnosti znovu. Abychom tento proces mohli provést, je nutné ověřit, že stále platí podmínka (5.1), tedy že

$$\text{st}\left(s(\theta) + \frac{t'(\theta)}{j-1}\right) \leq \max\{\text{st}(s(\theta)), \text{st}(t'(\theta))\} < \text{st}(q_i(\theta)).$$

Jelikož platí, že $\text{st}(s(\theta)) < \text{st}(q_i(\theta))$ a $\text{st}(t(\theta)) < \text{st}(q_i(\theta))$ a navíc z Věty 2.17 víme, že derivací logaritmického polynomu se stupeň buď nezmění, nebo se sníží, tak je zřejmé, že podmínka platí.

Proces uvedený výše opakujeme do té doby, dokud jmenovatele zbývajících integrandů nejsou bezčtvercové. Tak se vztah (5.2) zredukuje na následující tvar

$$\int \frac{r(\theta)}{q(\theta)} = \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$$

kde $a(\theta), b(\theta), c(\theta), d(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$ a $b(\theta)$ je normovaný a bezčtvercový.

Integrace logaritmické části

Zbývá spočítat integrál racionální lomené funkce $\frac{a(\theta)}{b(\theta)} \in F_{n-1}(\theta)$, kde $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$ a $b(\theta)$ je bezčtvercový a normovaný. Stejně jako v případě integrování racionální funkce využijeme Rothstein-Tragerovu metodu.

Věta 5.3 (Rothstein-Tragerova metoda – logaritmický případ). *Nechť F je těleso elementárních funkcí s tělesem konstant K . Nechť θ je transcendentní a logaritmický nad F (tj. existuje $u \in F$ takový, že $\theta' = \frac{u'}{u}$) a předpokládejme, že transcendentní elementární rozšíření $F(\theta)$ má stejné těleso konstant K . Nechť $\frac{a(\theta)}{b(\theta)} \in F(\theta)$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$ jsou nesoudělné, $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$ a $b(\theta)$ je normovaný a bezčtvercový. Pak platí:*

- (i) $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární, právě když všechny kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_{\theta}(a(\theta) - z \cdot b'(\theta), b(\theta)) \in F[z]$$

jsou konstanty.

- (ii) Je-li $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ elementární, pak

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}, \quad \text{neboli} \quad \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^m c_i \ln v_i(\theta), \quad (5.4)$$

kde c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny polynomu $R(z)$ a $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou definovány jako

$$v_i(\theta) = (a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta)) \in F(c_1, \dots, c_m)[\theta].$$

- (iii) Nechť E je minimální algebraické rozšíření tělesa F takové, že $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ může být vyjádřeno ve tvaru (5.4) s konstantami $c_i \in E$ a $v_i(\theta) \in E[\theta]$. Pak $E = F(c_1, \dots, c_m)$, kde c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny $R(z)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární. Pak dle Liouvillova principu platí

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = v_0'(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}, \quad \text{neboli} \quad \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = v_0(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \ln v_i(\theta), \quad (5.5)$$

kde $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, a $v_i(\theta) \in E(\theta)$, $0 \leq i \leq m$, přičemž L značí minimální algebraické rozšíření tělesa konstant K nezbytné k vyjádření integrálu a E značí těleso F s jeho tělesem konstant rozšířeným na L . Bez újmy na obecnosti můžeme díky pravidlům pro počítání s logaritmy, která jsme uvedli také v důkazu Věty 3.11, předpokládat, že $v_i(\theta) \in E[\theta]$, $1 \leq i \leq m$, jsou bezčtvercové, po dvou nesoudělné polynomy a že $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, jsou různé nenulové konstanty.

Dokážeme, že $v'_0(\theta) = 0$; důkaz povedeme sporem. Je-li $v_0(\theta) \in E(\theta)$ racionální funkcí, tak je možné ji vyjádřit ve tvaru $v_0(\theta) = \frac{p(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta) \in E[\theta]$ jsou nesoudělné a polynom $q(\theta)$ je kladného stupně. Vyjádříme-li $v_0(\theta)$ stejně jako v důkazu Liouvillova principu, tedy jako (4.3), tak je $v'_0(\theta)$ tvaru, který můžeme nalézt v (4.4). Vidíme, že v součtu je jeden zlomek se jmenovatelem umocněným na $r_i + 1$, který se již nemá s čím odečíst. Je zřejmé, že tento zlomek není bezčtvercový. Protože však $b(\theta)$ bezčtvercový je, docházíme ke sporu, ze kterého vyvodíme, že $v_0(\theta) \in E[\theta]$ je polynom. Dle Věty 2.17 platí, že $v'_0(\theta) \in E[\theta]$. Avšak pokud je $v'_0(\theta)$ nenulový polynom, pak bude mít pravá strana rovnosti (5.5) po převedení na společný jmenovatel čítelek stupně většího nebo rovného stupni jmenovatele. Tím se však dostáváme ke sporu, neboť pro levou stranu rovnosti (5.5) platí, že $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$. Z toho tedy plyne, že $v'_0(\theta) = 0$.

Ukázali jsme, že je-li $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ elementární, pak platí vztah (5.4), přičemž $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, jsou různé nenulové konstanty a $v_i(\theta) \in E[\theta]$, $1 \leq i \leq m$, jsou bezčtvercové a po dvou nesoudělné. Z lemmatu 3.9 víme, že platí

$$b(\theta) = \prod_{j=1}^m v_j(\theta).$$

Dále postupujeme stejně jako v důkazu Věty 3.10, tedy zjistíme, že c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny polynomu $R(z)$ definované v části (i) tvrzení věty a $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou definovány v části (ii).

Tak jsme dokázali část (ii) a implikaci „zleva doprava“ části (i). Jelikož jsme předpokládali, že E je minimální algebraické rozšíření, tak jsme dokázali i tvrzení (iii) a také je dokázáno, že se kořeny $R(z)$ musí v rozšíření nutně objevit.

Posledním tvrzením, které jsme zatím nedokázali, je implikace zprava doleva tvrzení (i). Předpokládejme, že všechny kořeny polynomu $R(z)$ jsou konstanty. Nechť c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny $R(z)$ a definujeme $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jako

$$v_i(\theta) = (a(\theta) - c_i \cdot b'(\theta), b(\theta)) \in F(c_1, \dots, c_m)[\theta].$$

Označme $w = (v_i(\theta), v_j(\theta))$ pro $i \neq j$. Pak platí

$$\begin{aligned} w | (a(\theta) - c_i \cdot b'(\theta)), \\ w | (a(\theta) - c_j \cdot b'(\theta)), \end{aligned}$$

z čehož můžeme odvodit, že $w | (c_i - c_j)b'(\theta)$, neboť společný dělitel dvou výrazů dělí i jejich rozdíl. Dále také víme, že $w | b(\theta)$. Pokud by existoval netriviální dělitel w , pak by to byl společný dělitel polynomů $b(\theta)$ a $b'(\theta)$. Jelikož je však $b(\theta)$ bezčtvercový, tak z Věty 3.5 plyne, že $b(\theta)$ a $b'(\theta)$ jsou nesoudělné, a tedy $(v_i(\theta), v_j(\theta)) = 1$ pro $i \neq j$. Označme

$$r(\theta) = \prod_{i=1}^m v_i(\theta).$$

Jelikož pro každé $i = 1, \dots, m$ platí, že $v_i(\theta) | b(\theta)$, pak $r(\theta) | b(\theta)$, neboli $b(\theta) = r(\theta)s(\theta)$ pro některé $s(\theta) \in F(c_1, \dots, c_m)[\theta]$. Sporem dokážeme, že $\text{st}(s(\theta)) = 0$. Předpokládejme, že polynom $s(\theta)$ je kladného stupně. Pak také $\text{res}_\theta(a(\theta) - z \cdot b'(\theta), s(\theta))$ je polynom kladného stupně, označme z_0 jeho kořen. Jelikož $b(\theta)$ je násobkem $s(\theta)$, tak jistě platí, že

$$(a(\theta) - z_0 \cdot b'(\theta), s(\theta)) | (a(\theta) - z_0 \cdot b'(\theta), b(\theta)). \quad (5.6)$$

Z Věty 3.6 plyne, že $(a(\theta) - z_0 \cdot b'(\theta), s(\theta))$ je netriviálním dělitelem polynomu $(a(\theta) - z_0 \cdot b'(\theta), b(\theta))$, a proto (opět díky Větě 3.6) je

$$\text{res}_\theta(a(\theta) - z_0 \cdot b'(\theta), b(\theta)) = 0.$$

Tím pádem je z_0 jedním z kořenů c_i , nechť například $c_1 = z_0$. Avšak pak je pravá strana (5.6) rovna $v_1(\theta)$, čímž jsme našli netriviálního společného dělitele polynomů $s(\theta)$ a $v_1(\theta)$. Proto $(s(\theta), r(\theta)) \neq 1$, což je spor s předpokladem, že $b(\theta)$ je bezčtvercový. Tento spor dokazuje, že $\text{st}(s(\theta)) = 0$.

Nyní již můžeme usoudit, že

$$s(\theta) = 1 \quad \text{a} \quad b(\theta) = \prod_{i=1}^m v_i(\theta),$$

neboť jak $b(\theta)$, tak $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou normované.

Definujme dále

$$\bar{a}(\theta) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot v_i'(\theta) \prod_{j \neq i} v_j(\theta).$$

Protože platí, že

$$b'(\theta) = \sum_{i=1}^m v_i'(\theta) \prod_{j \neq i} v_j(\theta),$$

tak pro každé $k = 1, \dots, m$ je

$$\bar{a}(\theta) - c_k \cdot b'(\theta) = \sum_{i=1}^m (c_i - c_k) \cdot v_i'(\theta) \prod_{j \neq i} v_j(\theta),$$

z čehož dále plyne, že

$$v_k(\theta) | (\bar{a}(\theta) - c_k \cdot b'(\theta)),$$

Z definice platí, že

$$v_k(\theta) | (a(\theta) - c_k \cdot b'(\theta)),$$

a proto

$$v_k(\theta) | (\bar{a}(\theta) - a(\theta)).$$

Jelikož jsou $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, všechny normované, z Věty 2.17 víme, že $\text{st}(v_i'(\theta)) < \text{st}(v_i(\theta))$, $1 \leq i \leq m$, a proto je $\text{st}(\bar{a}(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$. Z předpokladu věty víme, že $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$, a proto je $\text{st}(\bar{a}(\theta) - a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$. Jelikož jsou $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou po dvou nesoudělné, tak platí, že

$$b(\theta) | (\bar{a}(\theta) - a(\theta)).$$

Z toho tedy můžeme vyvodit, že $\bar{a}(\theta) - a(\theta) = 0$, tj. $\bar{a}(\theta) = a(\theta)$, čímž jsme dokázali, že

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i v_i'(\theta) \prod_{j \neq i} v_j(\theta)}{\prod_{i=1}^m v_i(\theta)} = \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}$$

a je zřejmé, že $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je v tomto případě elementární. □

Následují příklady integrace pomocí Rothstein-Tragerovy metody.

Příklad 5.4. Integrujte

$$\int \frac{1}{\ln x}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

Pak můžeme integrand zapsat jako funkci v proměnné θ , tedy jako

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny resultantu $R(z)$ konstanty:

$$R(z) = \text{res}_{\theta}(1 - z \cdot \theta', \theta) = \text{res}_{\theta}\left(1 - \frac{z}{x}, \theta\right) = \left|1 - \frac{z}{x}\right|.$$

Jediným kořenem tohoto polynomu je $c = x \notin \mathbb{Q}$, který není konstanta, a tedy integrál není elementární. ■

Příklad 5.5. Integrujte

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Integrand zapíšeme jako funkci v proměnné θ , tedy jako

$$f(\theta) = \frac{\frac{1}{x}}{\theta} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny resultantu $R(z)$ konstanty:

$$R(z) = \text{res}_{\theta}\left(\frac{1}{x} - z \cdot \frac{1}{x}, \theta\right) = \left|\frac{1}{x} - z \cdot \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} - \frac{z}{x}.$$

Jediným kořenem tohoto polynomu je $c_1 = 1 \in \mathbb{Q}$, který je konstantou, a proto je integrál elementární. Dle Věty 5.3 určíme polynom $v_1(\theta)$:

$$v_1(\theta) = \left(\frac{1}{x} - 1 \cdot \frac{1}{x}, \theta \right) = (0, \theta) = \theta.$$

Integrál je tedy roven

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} = \ln \theta = \ln(\ln x).$$

■

5.1.2 Integrace polynomiální části

Připomeňme, že v úvodu sekce jsme vyjádřili integrál funkce $f(\theta)$ jako

$$\int f(\theta) = \int s(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}, \quad \text{st}(r(\theta)) < \text{st}(q(\theta)).$$

V této sekci se budeme zabývat integrací polynomiální části funkce $f(\theta)$, tedy integrací polynomu $s(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$. Nechť $\ell = \text{st}(s(\theta))$ a nechť

$$s(\theta) = s_\ell \theta^\ell + s_{\ell-1} \theta^{\ell-1} + \cdots + s_0,$$

kde $s_i \in F_{n-1}$, $0 \leq i \leq \ell$. Dle Liouvillové věty platí, že je-li $\int s(\theta)$ elementární, pak

$$s(\theta) = v'_0(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)}, \quad (5.7)$$

kde $c_i \in \bar{K}$, $1 \leq i \leq m$, $\bar{K}$ je algebraický uzávěr tělesa konstant K a $v_i(\theta) \in \bar{F}_{n-1}(\theta)$, $0 \leq i \leq m$, kde $\bar{F}_{n-1}(\theta)$ je těleso $F_{n-1}(\theta)$ s tělesem konstant rozšířeným na $\bar{K}$.

Stejně jako v důkazu Liouvillové věty můžeme $v'_0(\theta)$ vyjádřit následovně

$$v'_0(\theta) = a'_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a'_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j} - \frac{ja_{ij}(\theta)b'_i(\theta)}{b_i(\theta)^{j+1}} \right).$$

Předpokládejme, že $v'_0(\theta)$ není polynom a uvažujme libovolný ireducibilní polynom $p(\theta) \in F[\theta]$ kladného stupně. Pak dle Věty 2.17 platí, že $p'(\theta) \in F[\theta]$, $\text{st}(p'(\theta)) < \text{st}(p(\theta))$, z čehož vyplývá, že $p(\theta)$ nedělí $p'(\theta)$. Pokud je $p(\theta)$ roven jednomu z polynomů $b_i(\theta)$ s nejvyšší mocninou r_i , pak $v'_0(\theta)$ obsahuje právě jeden výraz, jehož jmenovatel je roven $p(\theta)^{r_i+1}$. Tento výraz se na pravé straně rovnosti (5.7) již nemá s čím odečíst, a proto se musí nutně objevit i na levé straně rovnosti. To je však spor, neboť $s(\theta)$ je polynom. Z toho můžeme vyvodit, že $v'_0(\theta)$ je polynom, a tedy $v_0(\theta)$ taktéž (neboť derivováním jmenovatel obsahující θ nezmizí).

Pokud bychom předpokládali, že $p(\theta)$ je roven jednomu z polynomů $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, pak je zřejmé, že právě jeden výraz má ve jmenovateli polynom $p(\theta)$. To je ovšem spor s předpokladem, že $s(\theta)$ je polynom. Tím jsme ukázali, že $v_i(\theta) \in \bar{F}_{n-1}$, $1 \leq i \leq m$. Proto

$$s(\theta) = v'_0(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i}{v_i}, \quad (5.8)$$

kde $c_i \in \bar{K}$, $1 \leq i \leq m$, $v_0(\theta) \in \bar{F}_{n-1}[\theta]$ a $v_i \in \bar{F}_{n-1}$, $1 \leq i \leq m$. Označme $k = \text{st}(v_0(\theta))$ a nechť

$$v_0(\theta) = q_k \theta^k + q_{k-1} \theta^{k-1} + \cdots + q_0,$$

kde $q_i \in \bar{F}_{n-1}$, $0 \leq i \leq k$. Z Věty 2.17 víme, že $v'_0(\theta) \in \bar{F}_{n-1}[\theta]$ a $\text{st}(v'_0(\theta)) = k - 1$, pokud $q_k \in \bar{K}$, jinak $\text{st}(v'_0(\theta)) = k$. Jelikož musí platit $\text{st}(s(\theta)) = \text{st}(v'_0(\theta))$, tak je zřejmé, že nejvyšší možný stupeň polynomu $v_0(\theta)$ je $k = \ell + 1$. Rovnost (5.8) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$s_\ell \theta^\ell + s_{\ell-1} \theta^{\ell-1} + \cdots + s_0 = (q_{\ell+1} \theta^{\ell+1} + q_\ell \theta^\ell + \cdots + q_0)' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i}{v_i},$$

kde $s_i \in F_{n-1}$, $0 \leq i \leq \ell$, $q_{\ell+1} \in \bar{K}$, $q_i \in \bar{F}_{n-1}$, $0 \leq i \leq \ell$. Derivováním a porovnáním koeficientů stejných mocnin θ dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= q'_{\ell+1}, \\ s_\ell &= (\ell + 1) \cdot q_{\ell+1} \theta' + q'_\ell, \\ s_{\ell-1} &= \ell \cdot q_\ell \theta' + q'_{\ell-1}, \\ &\vdots \\ s_1 &= 2q_2 \theta' + q'_1, \\ s_0 &= q_1 \theta' + q'_0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

přičemž

$$\bar{q}_0 = q_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \ln v_i.$$

Známe koeficienty $s_i \in F_{n-1}$, $0 \leq i \leq \ell$, a chceme najít řešení $q_{\ell+1} \in \bar{K}$, $q_i \in \bar{F}_{n-1}$, $1 \leq i \leq \ell$, a $\bar{q}_0 \in \bar{F}_{n-1}(\ln v_1, \dots, \ln v_m)$.

V řešení rovnic pokračujeme následovně. Integrace obou stran první rovnosti vede k rovnici $q_{\ell+1} = b_{\ell+1}$, kde $b_{\ell+1} \in \bar{K}$ je libovolná integrační konstanta. Dosazením $q_{\ell+1}$ do druhé rovnosti a integrací obou stran dostáváme

$$\int s_\ell = (\ell + 1) b_{\ell+1} \cdot \theta + q_\ell.$$

Nyní je nutné integrovat $s_\ell \in F_{n-1}$. Abychom vyřešili tuto rovnici pro $b_{\ell+1} \in \bar{K}$ a $q_\ell \in \bar{F}_{n-1}$ musí pro $\int s_\ell$ platit následující podmínky:

- (i) integrál je elementární,
- (ii) v integrálu se objevuje nejvýše jedno logaritmické rozšíření $\bar{F}_{n-1}$,
- (iii) pokud se logaritmické rozšíření $\bar{F}_{n-1}$ v integrálu objeví, pak se musí jednat o konkrétní $\theta = \ln u$.

Pokud jedna z těchto podmínek neplatí, pak rovnice nemá řešení, a tedy $\int s(\theta)$ není elementární. Pokud jsou však všechny uvedené podmínky splněny, tak $\int s_\ell = c_\ell \theta + d_\ell$ pro některé $c_\ell \in \bar{K}$ a $d_\ell \in \bar{F}_{n-1}$. Porovnáním koeficientů dostáváme, že požadované řešení je

$$b_{\ell+1} = \frac{c_\ell}{\ell + 1}, \quad q_\ell = d_\ell + b_\ell, \text{ kde } b_\ell \in \bar{K} \text{ je libovolná integrační konstanta.}$$

Dosazením q_ℓ do třetí rovnice a následným přeskupením dostáváme

$$s_{\ell-1} - \ell \cdot d_\ell \theta' = \ell \cdot b_\ell \theta' + q'_{\ell-1},$$

integrací obou stran rovnice obdržíme

$$\int (s_{\ell-1} - \ell \cdot d_\ell \theta') = \ell \cdot b_\ell \theta + q_{\ell-1}.$$

Integrand na levé straně rovnosti můžeme zintegrovat, neboť obsahuje pouze známé funkce ležící v tělese F_{n-1} . Porovnáme-li levou stranu rovnosti s pravou, tak je zřejmé, že poslední integrál musí zmíněné tři podmínky splňovat, jinak není $\int s(\theta)$ elementární. Nechť jsou tedy podmínky splněny, pak

$$\int (s_{\ell-1} - \ell \cdot d_\ell \theta') = c_{\ell-1} \theta + d_{\ell-1} \text{ pro některé } c_{\ell-1} \in \bar{K} \text{ a } d_{\ell-1} \in \bar{F}_{n-1}.$$

Z toho plyne, že požadované řešení je

$$b_\ell = \frac{c_{\ell-1}}{\ell}, \quad q_{\ell-1} = d_{\ell-1} + b_{\ell-1}, \text{ kde } b_{\ell-1} \in \bar{K} \text{ je libovolná integrační konstanta.}$$

Proces řešení uvedený výše pokračuje pro každou rovnici až k předposlední rovnici, kde má řešení tvar

$$b_2 = \frac{c_1}{2}, \quad q_1 = d_1 + b_1, \text{ kde } b_1 \in \bar{K} \text{ je libovolná integrační konstanta.}$$

Dosazením za q_1 do poslední rovnice, přeuspořádáním a integrací dostáváme

$$\int (s_0 - d_1 \theta') = b_1 \theta + \bar{q}_0.$$

Tentokrát musí platit jen jedna podmínka, a to že integrál musí být elementární. Pokud není, pak $\int p(\theta)$ není elementární. Pokud elementární je, například

$$\int (s_0 - d_1 \theta') = d_0,$$

pak $\bar{q}_0 = d_0 - b_1 \theta + b_0$. V tomto případě je b_0 integrační konstantou $\int s(\theta)$. Tím je dokončena integrace polynomiální části, která nabývá tvaru

$$\int s(\theta) = b_{\ell+1} \theta^{\ell+1} + q_\ell \theta^\ell + \cdots + q_1 \theta + \bar{q}_0. \quad (5.10)$$

Dále uvádíme příklady integrace polynomiální části.

Příklad 5.6. Integrujte

$$\int \ln x.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Pak je možné integrand považovat za polynom v proměnné θ

$$f(\theta) = \theta \in \mathbb{Q}(x)[\theta].$$

Abychom spočetli integrál (pokud existuje), budeme řešit následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0 &= q_2' \\ 1 &= 2q_2\theta' + q_1' \\ 0 &= q_1\theta' + \bar{q}_0'. \end{aligned}$$

Nejdříve zintegrujeme obě strany první rovnice, čímž obdržíme

$$q_2 = b_2 \in \mathbb{Q},$$

což dosadíme do druhé rovnice. Máme tedy

$$\begin{aligned} 1 &= 2b_2\theta' + q_1' \\ \int 1 &= x + b_1 = 2b_2\theta + q_1, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že

$$b_2 = 0, \quad q_1 = b_1 + x, \quad b_1 \in \mathbb{Q}.$$

Dosadíme za q_1 do třetí rovnice, a tím dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (b_1 + x)\theta' + \bar{q}_0' \\ -x \cdot \frac{1}{x+1} &= b_1\theta' + \bar{q}_0' \\ \int (-1) &= -x + b_0 = b_1\theta + \bar{q}_0, \quad b_0 \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

přičemž b_0 volíme libovolné, například $b_0 = 0$, a odtud tedy plyne

$$b_1 = 0, \quad \bar{q}_0 = -x.$$

Nyní je zřejmé, že

$$q_1 = x,$$

a integrál proto nabývá tvaru

$$\int \ln x = 0 \cdot \theta^2 + x \cdot \theta - x = x \cdot \ln x - x.$$



Příklad 5.7. Integrujte

$$\int \frac{x}{x+1} \cdot \ln x.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Pak je možné integrand považovat za polynom v proměnné θ

$$F_0 = \mathbb{Q}(x), \quad F_1 = F_0(\theta) = \mathbb{Q}(x)[\theta]$$

$$f(\theta) = \frac{x}{x+1} \cdot \theta \in F_1.$$

Abychom spočetli integrál (pokud existuje), budeme řešit následující soustavu rovnic:

$$0 = q_2'$$

$$\frac{x}{x+1} = 2q_2\theta' + q_1'$$

$$0 = q_1\theta' + q_0'.$$

Nejdříve zintegrujeme obě strany první rovnice, čímž obdržíme

$$q_2 = b_2 \in \mathbb{Q},$$

což dosadíme do druhé rovnice. Máme tedy

$$\frac{x}{x+1} = 2b_2\theta' + q_1'$$

$$\int \frac{x}{x+1} = x - \ln(x+1) + b_1 = 2b_2\theta + q_1, \quad b_1 \in \mathbb{Q},$$

z čehož vyplývá, že

$$b_2 = 0, \quad q_1 = x - \ln(x+1) + b_1.$$

Ovšem $q_1 \notin F_0$, proto docházíme k závěru, že integrál není elementární. ■

5.2 Rischův algoritmus pro exponenciální rozšíření

V této sekci se budeme zabývat případem, kdy je θ exponenciální prvek nad tělesem F_{n-1} , tedy existuje $u \in F_{n-1}$ takový, že $\frac{\theta'}{\theta} = u'$. Naším cílem je spočítat integrál funkce $f(\theta)$, kterou můžeme – stejně jako v logaritmickém případě – zapsat jako

$$f(\theta) = \frac{p(\theta)}{q(\theta)} \in F_{n-1}(\theta),$$

kde $p(\theta), q(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, přičemž $q(\theta)$ je normovaný. Budeme postupovat stejně jako v logaritmickém případě.

Nejdříve vydělíme se zbytkem polynom $p(\theta)$ polynomem $q(\theta)$, čímž obdržíme polynomy $s(\theta), r(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$ takové, že $p(\theta) = q(\theta)s(\theta) + r(\theta)$, kde buď $r(\theta) = 0$, nebo

$\text{st}(r(\theta)) < \text{st}(q(\theta))$. To znamená, že $f(\theta)$ můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce, tedy

$$f(\theta) = s(\theta) + \frac{r(\theta)}{q(\theta)}. \quad (5.11)$$

Vypočteme bezčtvercový rozklad jmenovatele zlomku $\frac{r(\theta)}{q(\theta)}$

$$q(\theta) = \prod_{i=1}^k q_i(\theta)^i,$$

kde každý $q_i(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, $1 \leq i \leq k$, je normovaný a bezčtvercový polynom. Abychom mohli pokračovat v Hermiteově metodě, je nutné, aby pro každé $i = 1, \dots, k$, platilo $(q_i(\theta), q_i'(\theta)) = 1$.

Uvědomme si, že předchozí podmínka obecně neplatí. Uvažujme například $q_i(\theta) = \theta$. V tomto případě platí, že $(q_i(\theta), q_i'(\theta)) = (\theta, u'\theta) = \theta$.

Dle Věty 2.18 víme, že $q_i(\theta)$ dělí $q_i(\theta')$, pouze tehdy, když je $q_i(\theta)$ monom. Musíme proto upravit výraz $\frac{r(\theta)}{q(\theta)}$ tak, aby ve svém jmenovateli neobsahoval činitele, které jsou monomy.

Nechť je tedy jmenovatel tvaru

$$q(\theta) = \theta^\ell \cdot \bar{q}(\theta),$$

kde $\theta \nmid \bar{q}(\theta)$, tj. ℓ je nejvyšší možná mocnina θ , kterou můžeme z polynomu $q(\theta)$ vytknout. Uvažujme nejdříve, že $\ell = 0$. Pak platí $q(\theta) = \bar{q}(\theta)$, a tudíž jmenovatel ve svém bezčtvercovém rozkladu neobsahuje žádný monom. Nechť je tedy $\ell > 0$. Pak využijeme Větu 3.1 ke spočítání polynomů $\bar{r}(\theta)$, $w(\theta)$ takových, že

$$\bar{r}(\theta)\theta^\ell + w(\theta)\bar{q}(\theta) = r(\theta), \quad \text{st}(\bar{r}(\theta)) < \text{st}(\bar{q}(\theta))$$

a jelikož platí $\text{st}(r(\theta)) < \text{st}(q(\theta)) = \text{st}(\theta^\ell) + \text{st}(\bar{q}(\theta))$, tak dle Věty 3.1 je $\text{st}(w(\theta)) < \text{st}(\theta^\ell) = \ell$. Tuto rovnost vydělíme polynomem $q(\theta)$, čímž získáme

$$\frac{r(\theta)}{q(\theta)} = \frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)} + \frac{w(\theta)}{\theta^\ell}.$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnosti (5.11), je tedy

$$f(\theta) = s(\theta) + \frac{w(\theta)}{\theta^\ell} + \frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)}, \quad \theta \nmid \bar{q}(\theta), \quad \text{st}(\bar{r}(\theta)) < \text{st}(\bar{q}(\theta)).$$

Označme

$$\bar{s}(\theta) = s(\theta) + \frac{w(\theta)}{\theta^\ell}, \quad s(\theta) = \sum_{i=1}^m s_i \theta^i, \quad w(\theta) = \sum_{i=0}^{\ell-1} w_i \theta^i.$$

Polynom $\bar{s}(\theta)$ je v rozšířeném tvaru, tj.

$$\bar{s}(\theta) = \sum_{i=-\ell}^{-1} w_{\ell+i} \theta^i + \sum_{i=0}^m s_i \theta^i.$$

Dále tedy integrujeme

$$\int f(\theta) = \int \bar{s}(\theta) + \int \frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)}, \quad \text{st}(\bar{r}(\theta)) < \text{st}(\bar{q}(\theta)), \quad \theta \nmid \bar{q}(\theta).$$

Stejně jako dříve budeme polynom $\bar{s}(\theta)$ nazývat polynomiální část a zlomek $\frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)}$ budeme nazývat racionální část funkce $f(\theta)$.

Příklad 5.8. Uvažujme integrál

$$\int \frac{1}{e^{3x} + e^{2x}}.$$

Nechť $\theta = e^x$. Integrand můžeme považovat za funkci v proměnné θ , tedy

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta^3 + \theta^2} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Toto vyjádření musíme upravit tak, aby bezčtvercový rozklad jmenovatele neobsahoval činitele, které jsou monomy. Postupovat budeme tak, jak jsme uvedli výše, tj. určíme $\ell = 2$, poté zjistíme polynomy $\bar{r}(\theta) = 1$, $w(\theta) = -\theta + 1$. Proto je

$$\bar{s}(\theta) = \theta^{-2} - \theta^{-1}, \quad \frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)} = \frac{1}{\theta + 1}.$$

Původní integrál tedy můžeme vyjádřit jako součet integrálů

$$\int \frac{1}{e^{3x} + e^{2x}} = \int \frac{1}{\theta^3 + \theta^2} = \int (\theta^{-2} - \theta^{-1}) + \int \frac{1}{\theta + 1} = \int (e^{-2x} - e^{-x}) + \int \frac{1}{e^x + 1}.$$

5.2.1 Integrace racionální části

Racionální část $\frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)}$ integrujeme pomocí Hermiteovy metody. Nejprve spočítáme bezčtvercový rozklad jmenovatele $\bar{q}(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$:

$$\bar{q}(\theta) = \prod_{i=1}^k q_i(\theta)^i,$$

kde každý polynom $q_i(\theta)$, $1 \leq i \leq k$, je normovaný a bezčtvercový, $(q_i(\theta), q_j(\theta)) = 1$ pro $i \neq j$, $\text{st}(q_k(\theta)) > 0$ a navíc $\theta \nmid q_i(\theta)$, $1 \leq i \leq k$. Následující věta dokazuje, že $(q_i(\theta), q_i'(\theta)) = 1$ pro každý netriviální činitel $q_i(\theta)$.

Věta 5.9. *Nechť F je diferenciální těleso s diferenciálním operátorem $'$ splňujícím $x' = 1$, kde $x \in F$. Nechť $F(\theta)$ je diferenciální rozšíření tělesa F se stejným tělesem konstant takové, že θ je transcendentní a exponenciální prvek nad F . Nechť $a(\theta) \in F[\theta]$ je normovaný a bezčtvercový polynom kladného stupně, pro který platí $\theta \nmid a(\theta)$. Pak $(a(\theta), a'(\theta)) = 1$.*

Důkaz. Polynom $a(\theta)$ můžeme rozložit nad jeho rozkladovým tělesem F_a na tvar

$$a(\theta) = \prod_{i=1}^N (\theta - a_i),$$

kde $a_i \in F_a$, $1 \leq i \leq N$, jsou nenulové a různé, neboť $a(\theta)$ je bezčtvercový. Derivace tohoto polynomu je pak tvaru

$$a'(\theta) = \sum_{i=1}^N (\theta' - a'_i) \prod_{j \neq i} (\theta - a_j).$$

Je zřejmé, že polynom $a'(\theta)$ je součtem $N - 1$ výrazů, které jsou dělitelné výrazem $\theta - a_i$ pro některé i , $1 \leq i \leq N$, a jedním výrazem, který jím dělitelný není. Aby byl tedy polynom $a'(\theta)$ dělitelný výrazem $\theta - a_i$, muselo by platit

$$(\theta - a_i) \mid (\theta' - a'_i).$$

Avšak dle Věty 2.18 víme, že tento případ nastane pouze tehdy, když a_i je nulové, což je spor s předpokladem věty. Z toho vyplývá, že $a(\theta)$, $a'(\theta)$ nemají žádného společného dělitele, a tvrzení věty je tím dokázáno. $\square$

Pokračujeme dále s Hermiteovou metodou, což znamená, že stejný postupem jako u logaritmického případu v sekci 5.1.1 na straně 26 upravíme racionální část na tvar

$$\int \frac{\bar{r}(\theta)}{\bar{q}(\theta)} = \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$$

kde $a(\theta), b(\theta), c(\theta), d(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$, $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$, $\theta \nmid b(\theta)$ a $b(\theta)$ je normovaný a bezčtvercový.

Poznámka. U logaritmického případu jsme uvedli, že proces redukce stupňů jmenovatelů zlomků v rámci integrálu, je nutné v jistých případech opakovat. Abychom však toto opakování mohli provést, museli jsme ukázat, že i po provedení daného procesu platí podmínka (5.1). Díky Větě 2.18 je zřejmé, že tato podmínka platí i v případě exponenciálního polynomu.

Integrace logaritmické části

Zbývá spočítat integrál racionální lomené funkce $\frac{a(\theta)}{b(\theta)} \in F_{n-1}(\theta)$, kde $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$ a $b(\theta)$ je normovaný a bezčtvercový. Opět využijeme Rothstein-Tragerovy metody, tentokrát pro exponenciální případ.

Věta 5.10 (Rothstein-Tragerova metoda – exponenciální případ.). *Nechť F je těleso elementárních funkcí s tělesem konstant K . Nechť θ je transcendentní a exponenciální nad F , tj. existuje $u \in F$ takový, že $\frac{\theta'}{\theta} = u'$, a předpokládejme, že transcendentní elementární rozšíření $F(\theta)$ má stejné těleso konstant K . Nechť $\frac{a(\theta)}{b(\theta)} \in F(\theta)$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, jsou nesoudělné, $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$, $\theta \nmid b(\theta)$ a $b(\theta)$ je normovaný a bezčtvercový. Pak*

- (i) $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární, právě když všechny kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_{\theta}(a(\theta) - z \cdot b'(\theta), b(\theta)) \in F[z]$$

jsou konstanty.

(ii) Je-li $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ elementární, pak

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = g' + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}, \quad \text{neboli} \quad \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = g + \sum_{i=1}^m c_i \ln v_i(\theta), \quad (5.12)$$

kde c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny polynomu $R(z)$ a polynomy $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou definovány jako

$$v_i(\theta) = (a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta)) \in F(c_1, \dots, c_m)[\theta],$$

a kde $g \in F(c_1, \dots, c_m)$ je definováno jako

$$g' = - \left(\sum_{i=1}^m c_i \text{st}(v_i(\theta)) \right) u'.$$

(iii) Nechť E je minimální algebraické rozšíření tělesa F takové, že $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ může být vyjádřeno ve tvaru (5.12) s konstantami $c_i \in E$ a s polynomy $v_i(\theta) \in E[\theta]$. Pak $E = F(c_1, \dots, c_m)$, kde c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny $R(z)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární. Pak dle Liouvillova principu platí

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = v_0'(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}, \quad (5.13)$$

kde $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, a $v_i(\theta) \in E(\theta)$, $0 \leq i \leq m$, přičemž L značí minimální algebraické rozšíření K nutné k vyjádření integrálu a E značí F s tělesem konstant rozšířeným na L . Jako v důkazu Věty 5.3 můžeme předpokládat, že $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, jsou různé nenulové konstanty a $v_i(\theta) \in E[\theta]$, $1 \leq i \leq m$, jsou polynomy, které jsou bezčtvercové a po dvou nesoudělné.

Sporem dokážeme, že $v_0(\theta) = h_0$, kde $h_0 \in E$. Je-li $v_0(\theta) \in E(\theta)$ racionální funkce $v_0(\theta) = \frac{p(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta) \in E[\theta]$ jsou nesoudělné a pokud $q(\theta)$ obsahuje činitel, který není monom, pak $v_0'(\theta)$ ve svém jmenovateli obsahuje činitel, který není bezčtvercový (viz důkaz Liouvillova principu). Protože však $b(\theta)$ bezčtvercový je, tak se dostáváme ke sporu, a tím pádem musí být jmenovatel $v_0(\theta)$ tvaru $q(\theta) = h\theta^k$, pro některé $k \geq 0$ a $h \in E \setminus \{0\}$. Jinými slovy, $v_0(\theta)$ je tvaru

$$v_0(\theta) = \sum_{j=-k}^{\ell} h_j \theta^j$$

kde $h_j \in E$, $-k \leq j \leq \ell$, a dle Věty 2.18 je derivace tohoto výrazu tvaru

$$v_0'(\theta) = \sum_{j=-k}^{\ell} \bar{h}_j \theta^j,$$

kde $\bar{h}_j \in E$ a pro $j \neq 0$ je $\bar{h}_j \neq 0$, pokud $h_j \neq 0$. Dosadíme tento tvar $v'_0(\theta)$ do rovnosti (5.13) a převedeme pravou stranu na společný jmenovatel. Budeme-li předpokládat, že $\ell > 0$, tak bude stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, což plyne z Věty 2.18, ze které víme, že $\text{st}(v'_i(\theta)) = \text{st}(v_i(\theta))$. To je však spor s předpokladem, že pro levou stranu rovnosti (5.13) platí, že stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Proto musí být $\ell = 0$.

Uvažujme, že $k > 0$. Pak po převedení pravé strany rovnosti (5.13) na společný jmenovatel bude mít pravá strana jmenovatele dělitelného θ . To je ovšem spor s předpokladem, že $b(\theta)$ není dělitelné θ , a proto je $k = 0$. Tím jsme dokázali, že $v_0(\theta) = h_0 \in E$, a tedy rovnost (5.13) nabývá tvaru

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = h'_0 + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)}. \quad (5.14)$$

Díky lemmatu 3.9 víme, že

$$b(\theta) = \prod_{j=1}^m v_j(\theta).$$

Pro levou stranu rovnosti (5.14) platí, že je ryze lomenou funkcí, což musí platit i pro pravou stranu rovnosti. Avšak pro každý zlomek v součtu platí, že $\text{st}(v'_i(\theta)) = \text{st}(v_i(\theta))$. Je tedy nutné upravit pravou stranu rovnosti (5.14) tak, aby splňovala, že stupeň jmenovatele bude vždy menší než stupeň čitatele. Vyjádříme $h_0 \in E$ ve tvaru

$$h_0 = g + h,$$

pro některé $h \in E$, kde g je definováno (až na libovolnou konstantu) stejně jako v tvrzení věty. Pak pravá strana rovnosti (5.14) nabývá tvaru

$$h' + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \left(\frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)} - \text{st}(v_i(\theta))u' \right) = h' + \sum_{i=1}^m c_i \cdot \left(\frac{v'_i(\theta) - \text{st}(v_i(\theta))u'v_i(\theta)}{v_i(\theta)} \right).$$

Jelikož platí, že

$$\begin{aligned} v_i(\theta) &= \theta^{n_i} + \alpha_{n_i-1}\theta^{n_i-1} + \cdots + \alpha_0, \\ v'_i(\theta) &= n_i u' \theta^{n_i} + \beta_{n_i-1} \theta^{n_i-1} + \cdots + \beta_0, \text{ kde } n_i = \text{st}(v_i(\theta)), \end{aligned}$$

tak vidíme, že každý výraz v součtu je ryze lomenou funkcí (neboť výrazy stupně $\text{st}(v_i(\theta))$ se odečtou). Součet m ryze lomených funkcí je opět ryze lomená funkce. Je-li h' libovolný nenulový prvek v E , pak bude mít celé vyjádření, po převedení na společný jmenovatel, stupeň čitatele roven stupni jmenovatele. To je však spor, ze kterého plyne $h' = 0$.

Ukázali jsme, že je-li $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ elementární, pak rovnost (5.12) platí pro $c_i \in L$, $1 \leq i \leq m$, různé nenulové konstanty, $v_i(\theta) \in E[\theta]$, $1 \leq i \leq m$, jsou normované, bezčtvercové, po dvou nesoudělné polynomy,

$$b(\theta) = \prod_{j=1}^m v_j(\theta)$$

a g' je definován stejně jako v tvrzení věty. Obdobným postupem jako v důkazu Věty 3.10, můžeme ukázat, že c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny polynomu $R(z)$ definovaného v části (i)

tvrzení věty a $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou definovány stejně jako v části (ii). Tak jsme dokázali část (ii), případ „zprava doleva“ části (i) a také část (iii) tvrzení věty, neboť jsme předpokládali, že E je minimální algebraické rozšíření F , a také jsme dokázali, že se kořeny $R(z)$ musí v rozšíření nutně objevit.

Abychom dokázali případ „zleva doprava“ části (i), předpokládejme, že všechny kořeny $R(z)$ jsou konstanty. Nechť c_i , $1 \leq i \leq m$, jsou různé kořeny $R(z)$ a definujeme $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jako

$$v_i(\theta) = (a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta)) \in F(c_1, \dots, c_m)[\theta].$$

Stejně jako v důkazu Věty 5.3 zjistíme, že

$$b(\theta) = \prod_{i=1}^m v_i(\theta),$$

kde $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou normované a $(v_i(\theta), v_j(\theta)) = 1$ pro $i \neq j$. Nyní definujeme

$$\bar{a}(\theta) = g' \cdot b(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \cdot v'_i(\theta) \prod_{j \neq i}^m v_j(\theta), \quad (5.15)$$

kde g' je definováno stejně jako v tvrzení věty. Jelikož platí

$$b'(\theta) = \sum_{i=1}^m v'_i(\theta) \prod_{j \neq i}^m v_j(\theta),$$

pak pro libovolné k , $1 \leq k \leq m$, platí, že

$$\bar{a}(\theta) - c_k \cdot b'(\theta) = g' \cdot b(\theta) + \sum_{i=1}^m (c_i - c_k) \cdot v'_i(\theta) \prod_{j \neq i}^m v_j(\theta),$$

odkud je zřejmé, že

$$v_k(\theta) \mid (\bar{a}(\theta) - c_k \cdot b'(\theta)).$$

Navíc z definice $v_i(\theta)$ vyplývá

$$v_k(\theta) \mid (a(\theta) - c_k \cdot b'(\theta)). \quad (5.16)$$

Proto pro každé $k = 1, \dots, m$ platí, že $v_k(\theta) \mid (\bar{a}(\theta) - a(\theta))$. Jelikož jsou $v_i(\theta)$ po dvou nesoudělné, pak

$$b(\theta) \mid (\bar{a}(\theta) - a(\theta)).$$

Dosadíme-li za g' v (5.15) definici formulovanou ve větě, pak dostáváme

$$\bar{a}(\theta) = \sum_{i=1}^m c_i \prod_{j \neq i}^m v_j(\theta) (v'_i(\theta) - \text{st}(v_i(\theta)) u' v_i(\theta)),$$

odkud plyne, že $\text{st}(\bar{a}(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$, neboť výrazy stupně $\text{st}(v_i(\theta))$ se odečetly (stejný postup jsme užili již dříve). Protože také $\text{st}(a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$, je zřejmé, že $\text{st}(\bar{a}(\theta) - a(\theta)) < \text{st}(b(\theta))$. Jelikož zároveň platí i (5.16), je $(\bar{a}(\theta) - a(\theta)) = 0$, tj. $a(\theta) = \bar{a}(\theta)$. Dokázali jsme, že

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = g' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)}$$

a je jasné, že $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je v tomto případě elementární. □

Následují příklady integrace pomocí Rothstein-Tragerovy metody.

Příklad 5.11. Integrujte

$$\int \frac{1}{e^x + 1}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = e^x, \theta' = e^x.$$

Integrand můžeme považovat za funkci v proměnné θ , tedy

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta + 1} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny resultantu $R(z)$ konstanty.

$$R(z) = \text{res}_\theta (1 - z\theta, \theta + 1) = -z - 1.$$

Vidíme, že $R(z)$ má právě jeden kořen $c_1 = -1 \in \mathbb{Q}$, který je konstanta, a proto je integrál elementární. Dále dle Věty 5.10 určíme polynom $v_1(\theta)$ a funkci g :

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= (1 - (-1)\theta, \theta + 1) = (1 + \theta, 1 + \theta) = 1 + \theta, \\ g &= x. \end{aligned}$$

Integrál je tedy tvaru

$$\int \frac{1}{e^x + 1} = x - \ln(\theta + 1) = x - \ln(e^x + 1).$$

■

Příklad 5.12. Integrujte

$$\int \frac{1}{x(e^x + 1)}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = e^x, \theta' = e^x.$$

Integrand můžeme považovat za funkci v proměnné θ , tedy

$$f(\theta) = \frac{\frac{1}{x}}{\theta + 1} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny resultantu $R(z)$ konstanty.

$$R(z) = \text{res}_\theta \left(\frac{1}{x} - z\theta, \theta + 1 \right) = -z + \frac{1}{x}.$$

Vidíme, že $R(z)$ má právě jeden kořen $c_1 = \frac{1}{x} \notin \mathbb{Q}$, který není konstantou, a proto integrál není elementární. ■

5.2.2 Integrace polynomiální části

V této sekci se budeme věnovat integraci polynomiální části $f(\theta)$.

Polynomiální část integrandu $f \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ v případě, kdy poslední rozšíření $\theta = \theta_n$ je exponenciální nad $F_{n-1} = K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, je polynom v rozšířeném tvaru

$$\bar{s}(\theta) = \sum_{j=-k}^l s_j \theta^j, \quad s_j \in F_{n-1}, \quad (5.17)$$

který může obsahovat jak kladné, tak záporné mocniny θ . Naším cílem je vypočítat integrál tohoto polynomu. Z Liouvillova principu plyne, že má-li $\bar{s}(\theta)$ elementární integrál, pak je $\bar{s}(\theta)$ tvaru

$$\bar{s}(\theta) = v'_0(\theta) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)},$$

kde $c_i \in \bar{K}$, kde $\bar{K}$ je algebraický uzávěr tělesa konstant K , $1 \leq i \leq m$ a $v_i(\theta) \in \bar{F}_{n-1}(\theta)$, $0 \leq i \leq m$, kde $\bar{F}_{n-1}(\theta)$ je těleso $F_{n-1}(\theta)$ s tělesem konstant rozšířeným na $\bar{K}$. Stejně jako v důkazu Liouvillova principu můžeme $v'_0(\theta)$ vyjádřit ve tvaru

$$v'_0(\theta) = a'_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a'_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j} - \frac{j a_{ij}(\theta) b'_i(\theta)}{b_i(\theta)^{j+1}} \right).$$

Předpokládejme, že existuje polynom $p(\theta) \in \bar{F}_{n-1}[\theta]$, který je ireducibilní, normovaný a není monom. Dle Věty 2.18 víme, že $p(\theta)$ dělí $p'(\theta)$ pouze tehdy, je-li $p(\theta)$ monomem, tudíž v našem případě platí, že $p(\theta) \nmid p'(\theta)$. Pak pravá strana výše uvedené rovnosti obsahuje zlomek, jehož jmenovatel je roven $p(\theta)^{r_i+1}$. Jelikož se tento výraz již nemá na pravé straně rovnosti s čím odečíst, musí se nutně objevit i na levé straně. To je ovšem spor s předpokladem, že $\bar{s}(\theta)$ můžeme psát ve tvaru (5.17), tedy jako součet mocnin θ . To znamená, že $v_0(\theta)$ nemůže mít ve jmenovateli činitele, který není monomem.

Obdobným způsobem dospějeme k závěru, že $v_i(\theta)$, $1 \leq i \leq m$, jsou buď prvky $\bar{F}_{n-1}$, nebo jsou normované ireducibilní monomy v $\bar{F}_{n-1}[\theta]$, tedy $v_i(\theta) = \theta$. Avšak pak by platilo, že

$$c_i \frac{v'_i(\theta)}{v_i(\theta)} = c_i \frac{\theta'}{\theta} = c_i u' \in \bar{F}_{n-1},$$

což je výraz, který můžeme zahrnout do $v'_0(\theta)$.

Je-li tedy $\int \bar{s}(\theta)$ elementární, pak

$$\bar{s}(\theta) = \left(\sum_{j=-k}^{\ell} q_j \theta^j \right)' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i}{v_i}, \quad (5.18)$$

kde $q_j \in \bar{F}_{n-1}$, $-k \leq j \leq \ell$, $c_i \in \bar{K}$, $v_i \in \bar{F}_{n-1}$, $1 \leq i \leq m$. Z Věty 2.18 plyne, že součet $\left(\sum_{j=-k}^{\ell} q_j \theta^j \right)'$ na pravé straně rovnosti (5.18) musí mít stejný rozsah $-k \leq j \leq \ell$ jako suma definující $\bar{s}(\theta)$ v (5.17).

Jelikož platí, že

$$(q_j \theta^j)' = (q'_j + j u' q_j) \theta^j, \quad -k \leq j \leq \ell,$$

pak srovnáním koeficientů stejných mocnin θ v rovnostech (5.17) a (5.18) obdržíme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} s_j &= q'_j + j \cdot u' q_j \quad \text{pro } -k \leq j \leq -1 \text{ a } 1 \leq j \leq \ell, \\ s_0 &= \bar{q}'_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde $\bar{q}_0 = q_0 + \sum_{i=1}^m c_i \ln v_i$. Známe koeficienty $s_j \in F_{n-1}$, $-k \leq j \leq \ell$, a chceme určit řešení $q_j \in \bar{F}_{n-1}$ pro $j \neq 0$ a $\bar{q}_0 \in \bar{F}_{n-1}$ ($\ln v_1, \dots, \ln v_m$). Abychom zjistili $\bar{q}_0$, stačí integrovat rovnici $s_0 = \bar{q}'_0$, tj.

$$\bar{q}_0 = \int s_0.$$

Pokud $\int s_0$ není elementární, pak docházíme k závěru, že $\int \bar{s}(\theta)$ není elementární. V opačném případě jsme našli $\bar{q}_0$. Pro každé $j \neq 0$ musíme vyřešit diferenciální rovnici pro $q_j \in \bar{F}_{n-1}$. Tento konkrétní tvar diferenciální rovnice, tedy

$$y' + fy = g,$$

kde dané funkce jsou $f, g \in F_{n-1}$ a my musíme určit řešení $y \in \bar{F}_{n-1}$, je známý jako *Rischova diferenciální rovnice*. Pokud libovolná diferenciální rovnice v systému výše nebude mít řešení, pak $\int \bar{s}(\theta)$ není elementární. Jinak platí, že

$$\int \bar{s}(\theta) = \sum_{j \neq 0} q_j \theta^j + \bar{q}_0. \quad (5.20)$$

Poznámka. Algoritmus pro řešení Rischovy diferenciální rovnice byla představena již Rischem v roce 1969, později také Rothsteinem (1976) a Davenportem (1986) a v roce 1988 Manuelem Bronsteinem [2]. V této práci se však těmto algoritmům nevěnujeme; diferenciální rovnice objevující se v následujících příkladech jsou řešeny pomocí software Wolfram Mathematica.

Následují příklady integrace polynomiální části.

Příklad 5.13. Integrujte

$$\int \frac{1}{e^x}.$$

Řešení. Nechť $\theta = e^x$. Integrand můžeme považovat za polynom (příp. polynom v rozšířeném tvaru) v proměnné θ , tedy

$$\bar{s}(\theta) = \theta^{-1} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili integrál dané funkce (pokud existuje), budeme řešit následující diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} 1 &= q'_{-1} - q_{-1} \\ 0 &= \bar{q}'_0. \end{aligned}$$

Integrací obou stran druhé rovnice získáme $\bar{q}_0 = c$, kde c je libovolná konstanta; zvolme například $c = 0$. Řešením první diferenciální rovnice je

$$q_{-1} = -1.$$

Integrál je tedy tvaru

$$\int \frac{1}{e^x} = -1 \cdot \theta^{-1} = -e^{-x}.$$

■

Příklad 5.14. Integrujte

$$\int e^{x^2}.$$

Řešení. Nechť $\theta = e^{x^2}$. Integrand můžeme považovat za polynom v proměnné θ , tj.

$$\bar{s}(\theta) = \theta \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

K určení integrálu musíme vyřešit následující diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} 1 &= q'_j + 2xq_j \\ 0 &= \bar{q}'_0. \end{aligned}$$

První diferenciální rovnice nemá řešení, které náleží do $\mathbb{Q}(x)$, a proto integrál $\int e^{x^2}$ není elementární. ■

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s Rischovým algoritmem pro výpočet primitivní funkce, určit historické okolnosti jeho vzniku a zda je implementován v systémech počítačové algebry. V práci jsou uvedeny konkrétní příklady integrace různých transcendentních elementárních funkcí.

Ukázali jsme, že pomocí Rischova algoritmu umíme určit, zda má zadaná transcendentní elementární funkce také elementární integrál, přičemž jsme ukázali, že část tohoto algoritmu je založena na Hermiteově metodě a Rothstein-Tragerově metodě pro integraci racionálních funkcí.

Příloha – příklady

Racionální funkce

Příklad 5.15. Integrujte

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 9x + 18}.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme bezčtvercový rozklad jmenovatele, tj.

$$x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 9x + 18 = (x + 2)(x^2 - 3)^2$$

a následně funkci rozložíme na parcionální zlomky. Proto původní integrál rozdělíme na součet tří integrálů:

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 9x + 18} = \int \frac{1}{x + 2} + \int \frac{2 - x}{x^2 - 3} + 4 \int \frac{1}{(x^2 - 3)^2}.$$

Nejdříve vypočteme poslední integrál; použijeme Hermiteovu metodu uvedenou v Kapitole 3.

V první řadě určíme polynomy $\sigma(x)$ a $\tau(x)$ uvedené ve Větě 3.1 pomocí postupu uvedeného v důkazu této věty, takové, že platí

$$\sigma(x)(x^2 - 3) + \tau(x)2x = 1.$$

Takovými polynomy jsou

$$\sigma(x) = -\frac{1}{3}, \quad \tau(x) = \frac{x}{6}.$$

Dle Hermiteovy metody víme, že integrál můžeme vyjádřit jako

$$4 \int \frac{1}{(x^2 - 3)^2} = 4 \left[\frac{-\frac{x}{6}}{x^2 - 3} + \int \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{x^2 - 3} \right] = -\frac{2x}{3(x^2 - 3)} - \frac{1}{3} \int \frac{2}{x^2 - 3}.$$

Dále pomocí Rothstein-Tragerovy metody (viz Kapitola 3, Věty 3.10, 3.11) vypočítáme $\int \frac{2}{x^2 - 3}$. Podle Věty 3.10 musíme vypočítat všechny kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_x(2 - z \cdot 2x, x^2 - 3).$$

Těmi jsou

$$c_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

Abychom mohli integrál vyjádřit, je nutné rozšířit těleso konstant $\mathbb{Q}$ o algebraický prvek $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nyní určíme dle Věty 3.10 polynomy $v_1(x)$ a $v_2(x)$:

$$v_1(x) = \left(2 - 2\frac{x}{\sqrt{3}}, x^2 - 3\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1,$$

$$v_2(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1.$$

V tento moment již můžeme dle Věty 3.10 určit tvar integrálu $\int \frac{2}{x^2-3}$, tedy

$$\int \frac{2}{x^2-3} = \frac{\ln(\sqrt{3}-x) - \ln(x+\sqrt{x}+\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}.$$

Obdobným způsobem si čtenář může vypočítat i integrál $\int \frac{2-x}{x^2-3}$, my zde uvedeme pouze výsledek:

$$\int \frac{2-x}{x^2-3} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

Posledním integrálem, který musíme vypočítat je $\int \frac{1}{x+2}$. Opět postupujeme dle Rothstein-Tragerovy metody; určíme kořeny polynomu

$$R(z) = \text{res}_x(1-z, x+2),$$

Kořenem je $c_1 = 1 \in \mathbb{Q}$. Dále určíme dle Věty 3.10 polynom $v_1(x)$:

$$v_1(x) = (1 - 1, x + 2) = x + 2,$$

a proto

$$\int \frac{1}{x+2} = \ln(x+2).$$

Původní integrál je tedy tvaru

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 9x + 18} &= \ln(x+2) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - 1\right) + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 1\right) - \frac{2x}{3(x^2-3)} - \\ &- \frac{\ln(\sqrt{3}-x) + \ln(x+\sqrt{x}+\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

■

Logaritmické rozšíření

Příklad 5.16. Integrujte

$$\int \frac{\ln x}{x \cdot \ln^2 x + x}.$$

Řešení. Budeme postupovat dle Rothstein-Tragerovy metody pro logaritmické rozšíření uvedené v Kapitole 5 ve Větě 5.3.

Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Pak můžeme integrand považovat za funkci v proměnné θ , tj.

$$f(\theta) = \frac{\theta}{x \cdot \theta^2 + x} \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny následujícího polynomu konstanty:

$$\begin{aligned} R(z) = \operatorname{res}_{\theta} (\theta - z \theta^2 - 2z\theta - z, x\theta^2 + x) &= \begin{vmatrix} -z & 1-2z & -z & 0 \\ 0 & -z & 1-2z & -z \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \end{vmatrix} = \\ &= x^2(4z^2 - 4z + 1). \end{aligned}$$

Vidíme, že jediným kořenem tohoto polynomu je $c_1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, který je konstanta, a tedy integrál je elementární. Dle Věty 5.3 určíme polynom $v_1(\theta)$:

$$v_1(\theta) = \left(-\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}, x(\theta^2 + 1) \right) = \left(-\frac{1}{2}(\theta^2 + 1), x(\theta^2 + 1) \right) = \theta^2 + 1.$$

Nyní již můžeme vyjádřit integrál dle Věty 5.3 jako (5.4), konkrétně

$$\int \frac{\ln x}{x \cdot \ln^2 x + x} = \frac{1}{2} \ln(\theta^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1).$$

■

Příklad 5.17. Integrujte

$$\int \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{\ln(\ln x)}.$$

Řešení. Budeme postupovat dle Rothstein-Tragerovy metody pro logaritmické rozšíření uvedené v Kapitole 5 ve Větě 5.3.

Nechť

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \ln x, & \theta_1' &= \frac{1}{x}, \\ \theta_2 &= \ln \theta_1, & \theta_2' &= \frac{\theta_1'}{\theta_1}. \end{aligned}$$

Pak můžeme integrand považovat za funkci v proměnné θ_2 , tj.

$$f(\theta_2) = \frac{\frac{1}{x \cdot \theta_1}}{\theta_2} \in \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta_2),$$

dále budeme pro přehlednost psát $\theta_2 = \theta$.

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny následujícího polynomu konstanty:

$$R(z) = \operatorname{res}_{\theta} \left(\frac{1}{x \cdot \theta_1} - z \cdot \theta', \theta \right) = \operatorname{res}_{\theta} \left(\frac{1}{x \cdot \theta_1} - \frac{z}{x \cdot \theta_1}, \theta \right) = \frac{z}{x \cdot \theta_1} - \frac{1}{x \cdot \theta_1}.$$

Vidíme, že jediným kořenem tohoto polynomu je $c_1 = 1 \in \mathbb{Q}$, který je konstanta, a tedy integrál je elementární. Dle Věty 5.3 určíme polynom $v_1(\theta)$:

$$v_1(\theta) = \left(\frac{1}{x \cdot \theta_1} - 1 \cdot \frac{1}{x \cdot \theta_1}, \theta \right) = (0, \theta) = \theta.$$

Nyní již můžeme vyjádřit integrál dle Věty 5.3 jako (5.4), konkrétně

$$\int \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{\ln(\ln x)} = \ln \theta = \ln(\ln(\ln x)).$$

■

Příklad 5.18. Integrujte

$$\int x \cdot \ln x.$$

Řešení. Necht

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Pak můžeme integrand považovat za polynom v proměnné θ , tj.

$$s(\theta) = x \cdot \theta \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Dle postupu, který jsme uvedli v sekci 5.1.2, budeme řešit soustavu rovnic (5.9), konkrétně

$$\begin{aligned} 0 &= q_2' \\ x &= 2q_2\theta' + q_1' \\ 0 &= q_1\theta' + q_0'. \end{aligned}$$

Nejdříve zintegrujeme obě strany první rovnice, čímž obdržíme

$$q_2 = b_2 \in \mathbb{Q},$$

což dosadíme do druhé rovnice. Máme tedy

$$\begin{aligned} x &= 2b_2\theta' + q_1' \\ \int x &= \frac{x^2}{2} + b_1 = 2b_2\theta + q_1, \quad b_1 \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že

$$b_2 = 0, \quad q_1 = b_1 + \frac{x^2}{2}.$$

Dosadíme-li za q_1 do třetí rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b_1 + \frac{x^2}{2}\right) \theta' + \bar{q}'_0 \\ -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} &= b_1 \theta' + \bar{q}'_0 \\ \int \left(-\frac{x}{2}\right) &= -\frac{x^2}{4} + b_0 = b_1 \theta + \bar{q}_0, \quad b_0 \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

přičemž b_0 volíme libovolné, například $b_0 = 0$. Odtud tedy plyne

$$b_1 = 0, \quad \bar{q}_0 = -\frac{x^2}{4}.$$

Nyní je zřejmé, že

$$q_1 = \frac{x^2}{2}$$

a integrál proto nabývá tvaru (5.10), tedy

$$\int x \cdot \ln x = \frac{x^2}{2} \theta - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

■

Příklad 5.19. Integrujte

$$\int \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta = \ln x, \quad \theta' = \frac{1}{x}.$$

Pak můžeme integrand považovat za polynom v proměnné θ . tj.

$$s(\theta) = \frac{1}{x} \cdot \theta \in \mathbb{Q}(x, \theta).$$

Dle postupu, který jsme uvedli v sekci 5.1.2, budeme řešit soustavu rovnic (5.9), konkrétně

$$\begin{aligned} 0 &= q'_2 \\ \frac{1}{x} &= 2q_2 \theta' + q'_1 \\ 0 &= q_1 \theta' + \bar{q}'_0. \end{aligned}$$

Nejdříve zintegrujeme obě strany první rovnice, čímž obdržíme

$$q_2 = b_2 \in \mathbb{Q},$$

což dosadíme do druhé rovnice. Máme tedy

$$\frac{1}{x} = 2b_2\theta' + q_1'$$

$$\int \frac{1}{x} = \theta + b_1 = 2b_2\theta + q_1, \quad b_1 \in \mathbb{Q},$$

z čehož vyplývá, že

$$b_2 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = b_1.$$

Dosadíme-li za q_1 do třetí rovnice, dostaneme

$$0 = b_1\theta' + \bar{q}_0'$$

$$\int 0 = b_0 = b_1\theta + \bar{q}_0, \quad b_0 \in \mathbb{Q},$$

přičemž b_0 volíme libovolné, například $b_0 = 0$. Odtud tedy plyne

$$b_1 = 0, \quad \bar{q}_0 = 0.$$

Nyní je zřejmé, že

$$q_1 = 0$$

a integrál proto nabývá tvaru (5.10), tedy

$$\int x \cdot \ln x = \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

■

Příklad 5.20. Integrujte

$$\int \ln x \cdot \ln(x+1).$$

Řešení. Nechť

$$\theta_1 = \ln x, \quad \theta_1' = \frac{1}{x},$$

$$\theta_2 = \ln(x+1), \quad \theta_2' = \frac{1}{x+1}.$$

Pro přehlednost budeme psát $\theta_2 = \theta$. Pak označíme

$$F_0 = \mathbb{Q}(x), \quad F_1 = F_0(\theta_1) = \mathbb{Q}(x, \theta_1), \quad F_2 = F_1(\theta) = \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta),$$

a integrand můžeme považovat za polynom v proměnné θ , tj.

$$s(\theta) = \theta_1 \cdot \theta \in F_2.$$

Dle postupu, který jsme uvedli v sekci 5.1.2, budeme řešit soustavu rovnic (5.9), konkrétně

$$\begin{aligned} 0 &= q_2' \\ \theta_1 &= 2q_2\theta' + q_1' \\ 0 &= q_1\theta' + \bar{q}_0'. \end{aligned}$$

Nejdříve zintegrujeme obě strany první rovnice, čímž obdržíme

$$q_2 = b_2 \in \mathbb{Q},$$

což dosadíme do druhé rovnice. Máme tedy

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2b_2\theta' + q_1' \\ \int \theta_1 &= x \cdot (\theta_1 - 1) + b_1 = 2b_2\theta + q_1, \quad b_1 \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

kde jsme využili výsledek Příkladu 5.6. Z toho vyplývá, že

$$b_2 = 0, \quad q_1 = x(\theta_1 - 1) + b_1.$$

(Uvědomme si, že v tomto případě q_1 splňuje podmínku $q_1 \in F_1$ uvedenou v sekci 5.1.2). Dosadíme-li za q_1 do třetí rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= [x(\theta_1 - 1) + b_1]\theta' + \bar{q}_0' \\ 0 &= \frac{x}{x+1}(\theta_1 - 1) + \bar{q}_0' \\ \int \left(-\frac{x}{x+1} \right) (\ln x - 1) &= -\int \frac{x}{x+1} \ln x + \int \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

První integrál na pravé straně rovnice však není elementární (viz Příklad 5.7), a proto $\int \ln x \cdot \ln(x+1)$ není elementární. ■

Exponenciální rozšíření

Příklad 5.21. Integrujte

$$\int \frac{e^x(2x-1)}{e^x + e^{x^2}}.$$

Řešení. Budeme postupovat dle Rothstein-Tragerovy metody pro exponenciální rozšíření uvedené v Kapitole 5 ve Větě 5.10.

Nechť

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e^x, \quad \theta_1' = e^x, \\ \theta_2 &= e^{x^2}, \quad \theta_2' = e^{x^2} \cdot 2x. \end{aligned}$$

Pak můžeme integrand vyjádřit jako funkci v proměnné θ_2 , pro přehlednost budeme dále značit $\theta_2 = \theta$:

$$f(\theta) = \frac{\theta_1(2x-1)}{\theta+1} \in \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta).$$

Abychom určili, zda je integrál elementární, musíme zjistit, jestli jsou všechny kořeny následujícího polynomu konstanty:

$$R(z) = \text{res}_\theta (1 - z\theta, \theta + 1) = -z - 1.$$

Vidíme, že jediným kořenem daného polynomu je $c_1 = -1 \in \mathbb{Q}$, který je konstantou, a tedy integrál je elementární. Dle Věty 5.10 určíme polynom $v_1(\theta)$ a funkci g :

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= (\theta_1(2x - 1) + \theta_1 + 2x\theta, \theta_1 + \theta) = (2x(\theta_1 + \theta), \theta_1 + \theta) = \theta_1 + \theta, \\ g &= x^2. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme vyjádřit integrál dle Věty 5.10 jako (5.12), konkrétně

$$\int \frac{e^x(2x - 1)}{e^x + e^{x^2}} = x^2 - \ln(\theta_1 + \theta) = x^2 - \ln(e^x + e^{x^2}).$$

■

Příklad 5.22. Integrujte

$$\int \frac{2e^{x^2}x + 2e^{x^2}e^{-x} + e^{2x^2}e^{-x} + e^{-x}}{2e^{x^2} + e^{2x^2} + 1}.$$

Řešení. Nechť

$$\theta_1 = e^{-x}, \quad \theta_2 = e^{x^2}.$$

Pak můžeme integrand vyjádřit jako funkci v proměnné θ_2 , pro přehlednost budeme dále značit $\theta_2 = \theta$:

$$f(\theta) = \frac{2\theta x + 2\theta\theta_1 + \theta^2\theta_1 + \theta_1}{\theta^2 + 2\theta + 1} = \theta_1 + \frac{2x\theta}{\theta^2 + 2\theta + 1}.$$

Pomocí bezčtvercového rozkladu jmenovatele rozložíme zlomek na parciální zlomky, a tím tedy obdržíme vyjádření původního integrálu jako

$$\int f(\theta) = \int \theta_1 + \int \frac{2x}{\theta + 1} - \int \frac{2x}{(\theta + 1)^2}.$$

První integrál na pravé straně rovnosti je polynomiální částí (viz 5.2.2), zbylé dva integrály jsou racionální částí (viz 5.2.1) integrálu.

Zabývejme se nejdříve integrací racionální částí integrálu, konkrétně integrací zlomku $\frac{2x}{(\theta+1)^2}$. Postupujeme dle Hermiteovy metody, musíme tedy nejdříve nalézt polynomy $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ uvedené ve Větě 3.1 takové, že

$$2x = \sigma(\theta)(\theta + 1) + \tau(\theta)\theta'.$$

Využijeme-li postupu uvedeného v důkazu zmíněné věty, zjistíme, že hledanými polynomy jsou

$$\sigma(\theta) = 2x, \quad \tau(\theta) = -1,$$

a proto, pokračujeme-li dále v Hermiteově metodě, je

$$\int \frac{2x}{(\theta+1)^2} = \frac{1}{\theta+1} + \int \frac{2x}{\theta+1}.$$

Dosadíme-li toto vyjádření do $\int f(\theta)$, tak dostaneme

$$\int f(\theta) = \int \theta_1 + \int \frac{2x}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+1} - \int \frac{2x}{\theta+1} = -\frac{1}{\theta+1} + \int \theta_1.$$

Jelikož $\int \theta_1$ jsme již vyřešili v Příkladu 5.13 v Kapitole 5, můžeme vyjádřit integrál jako

$$\int \frac{2e^{x^2}x + 2e^{x^2}e^{-x} + e^{2x^2}e^{-x} + e^{-x}}{2e^{x^2} + e^{2x^2} + 1} = -\frac{1}{\theta+1} - \theta_1 = -\frac{1}{e^{x^2} + 1} - e^{-x}.$$

■

Další příklady

Příklad 5.23. Integrujte

$$\int \frac{e^x(x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}.$$

Řešení. Necht

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e^x, & \theta_1' &= e^x, \\ \theta_2 &= \ln x, & \theta_2' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Pak můžeme integrand vyjádřit jako funkci v proměnné θ_2 , pro přehlednost budeme dále značit $\theta_2 = \theta$:

$$f(\theta) = \frac{\theta_1(x\theta - 1)}{x\theta^2} \in \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta).$$

Pomocí bezčtvercového rozkladu jmenovatele rozložíme zlomek na parciální zlomky, a tím obdržíme vyjádření původního integrálu

$$\int f(\theta) = \int \frac{\theta_1}{\theta} - \int \frac{\frac{\theta_1}{x}}{\theta^2}.$$

Dle Hermitovy metody se nyní budeme zabývat pouze integrálem zlomku, jehož jmenovatel má stupeň větší než jedna. Určíme tedy polynomy $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ tak, aby byla platila Věta 3.1:

$$\sigma(\theta) = 0, \quad \tau(\theta) = e^x,$$

a proto, pokračujeme-li v Hermiteově metodě, je

$$\int \frac{\frac{\theta_1}{x}}{\theta^2} = \int 0 + \int \frac{\theta_1 \theta'}{\theta^2} = \frac{-\frac{\theta_1}{1}}{\theta} + \int \frac{\frac{\theta_1'}{1}}{\theta} = -\frac{\theta_1}{\theta} + \int \frac{\theta_1'}{\theta},$$

a tedy

$$\int f(\theta) = \int \frac{\theta_1}{\theta} + \frac{\theta_1}{\theta} - \int \frac{\theta_1'}{\theta} = \int \frac{\theta_1}{\theta} + \frac{\theta_1}{\theta} - \int \frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\theta_1}{\theta} = \frac{e^x}{\ln x}.$$

■

Příklad 5.24. Integrujte

$$\frac{e^x(x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}.$$

Řešení. Nechť

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \ln x, & \theta_1' &= \frac{1}{x}, \\ \theta_2 &= e^x, & \theta_2' &= e^x.\end{aligned}$$

Pak můžeme integrand vyjádřit jako polynom v proměnné θ_2 , pro přehlednost budeme dále psát $\theta_2 = \theta$, tj.

$$s(\theta) = \theta \frac{x\theta_1 - 1}{x\theta_1^2} \in \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta).$$

Dle postupu, který jsme uvedli v sekci 5.2.2, budeme řešit diferenciální rovnice (5.19), konkrétně

$$\begin{aligned}\frac{x\theta_1 - 1}{x\theta_1^2} &= q_1' + q_1, \\ 0 &= \bar{q}_0'.$$

Integrací obou stran druhé rovnice získáme $\bar{q}_0 = c$, kde c je libovolná konstanta, zvolíme např. $c = 0$. Řešením první diferenciální rovnice je

$$q_1 = \frac{1}{\ln x}.$$

Integrál je tedy tvaru (5.20), konkrétně

$$\int \frac{1}{e^x} = \frac{e^x}{\ln x}.$$

■

Příklad 5.25. Integrujte

$$\int \sin x.$$

Řešení. Funkci $\sin x$ můžeme zapsat jako

$$\sin x = \frac{1}{2}ie^{-ix} - \frac{1}{2}ie^{ix}.$$

Nechť $\theta = e^{ix}$. Integrand můžeme považovat za polynom (příp. polynom v rozšířeném tvaru) v proměnné θ , tedy

$$\bar{s}(\theta) = \frac{1}{2}i\theta^{-1} - \frac{1}{2}i\theta \in \mathbb{C}(x, \theta).$$

Integrovat budeme pomocí postupu uvedeného v sekci 5.2.2. Abychom určili integrál dané funkce (pokud existuje), budeme řešit diferenciální rovnice (5.19), konkrétně budeme řešit:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}i &= q'_{-1} + (-1) \cdot (ix)' q_{-1}, \\ -\frac{1}{2}i &= q'_1 + (ix)' q_1, \\ 0 &= \bar{q}'_0.\end{aligned}$$

Integrací obou stran poslední rovnice získáme $\bar{q}_0 = c$, kde c je libovolná konstanta, zvolíme např. $c = 0$. Řešeními první a druhé diferenciální rovnice jsou funkce

$$\begin{aligned}q_{-1} &= -\frac{1}{2}, \\ q_1 &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Integrál je tedy tvaru (5.20), konkrétně

$$\int \sin x = -\frac{1}{2}\theta^{-1} - \frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{2}e^{-ix} - \frac{1}{2}e^{ix} = -\cos x.$$

■

Seznam použité literatury

- [1] BRONSTEIN, M. *Symbolic Integration Tutorial*. Rostock, 1998.
- [2] BRONSTEIN, M. The Transcendental Risch Differential Equation. *Journal of Symbolic Computation*. 1990, **9**(1), 49–60.
- [3] GEDDES, K. O., CZAPOR S. R., LABAHN G. *Algorithms for computer algebra*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. ISBN 07-923-9259-0.
- [4] GEDDES, K. O., STEFANUS L. Y. *On the risch-norman integration method and its implementation in MAPLE*. Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 international symposium on Symbolic and algebraic computation – ISSAC '89. New York, USA: ACM Press, 1989, 212–217. ISBN 0897913256.
- [5] KUČERA, R. *Rozšíření těles* [online]. 2014 [cit. 2018-05-06]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1431/podzim2016/M3150/um/RozsireniTeles.pdf>
- [6] MOSES, J. *Macsyma: A personal history*. Journal of Symbolic Computation. 2012, 47(2), 123–130. DOI: 10.1016/j.jsc.2010.08.018. ISSN 07477171.
- [7] RISCH, R. Algebraic Properties of the Elementary Functions of Analysis. *American Journal of Mathematics*. 1979, **101**(4), 743–759.
- [8] TERELIUS, B. *Symbolic Integration*. Stockholm, Švédsko, 2009. Diplomová práce. Royal Institute of Technology, School of Computer Science and Communication. Vedoucí práce Johan Håstad.
- [9] *Maxima 5.41.0 Manual*. Maxima, a Computer Algebra System [online]. Maxima CAS development team., 2017, 5. říjen 2017 [cit. 2018-04-21]. Dostupné z: maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html
- [10] Mathematica Quick Revision History. *Wolfram: Computation Meets Knowledge* [online]. Wolfram, 2018 [cit. 2018-04-21]. Dostupné z: www.wolfram.com/mathematica/quick-revision-history.html
- [11] Some Notes on Internal Implementation. *Wolfram: Computation Meets Knowledge* [online]. Wolfram, 2018 [cit. 2018-04-21]. Dostupné z: reference.wolfram.com/language/tutorial/SomeNotesOnInternalImplementation

Rejstřík

A

algebraický prvek, 4

B

bezčtvercový polynom, 12

bezčtvercový rozklad polynomu, 12

D

derivace, 3

diferenciální operátor, 3

diferenciální rozšíření tělesa, 3

diferenciální těleso, 2

E

elementární rozšíření tělesa, 5

exponenciální prvek, 4

L

logaritmický prvek, 4

M

minimální polynom, 8

N

neurčitá integrace, 3

R

rezultant polynomů, 12

rozkladové těleso, 12

rozšíření tělesa, 2

S

Sylvesterova matice, 11

T

těleso elementárních funkcí, 5

těleso konstant, 3

těleso transcendentních elementárních funkcí,

5

transcendentní elementární rozšíření, 5

transcendentní prvek, 5

