

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2012

TOMÁŠ HEBELKA



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Stochastické modely neuronové aktivity

Diplomová práce

Tomáš Hebelka

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Lánský, CSc.

Brno 2012

Bibliografický záznam

Autor: Ing. Bc. Tomáš Hebelka
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Ústav matematiky a statistiky

Název práce: Stochastické modely neuronové aktivity

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické modelování a numerické metody

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Lánský, CSc.

Akademický rok: 2011/2012

Počet stran: 60

Klíčová slova: Model neuronu; Steinův model; Ornstein-Uhlenbeckův model; Náhodný proces; Doba dosažení prahu; Simulace

Bibliographic Entry

Author: Ing. Bc. Tomáš Hebelka
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Stochastic neuronal models

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Mathematical Modelling and Numeric Methods

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lánský, CSc.

Academic Year: 2011/2012

Number of Pages: 60

Keywords: Neuronal model; Stein's model; Ornstein-Uhlenbeck's model;
Stochastic process; First passage time; Simulation

Abstrakt

V této práci se věnujeme stochastickým modelům jediného neuronu, konkrétně Steino-
vu modelu a Ornstein-Uhlenbeckovu modelu v základní verzi a ve verzi s mezemi. Neuron
zde chápeme jako jednotku s vnitřním stavem, daným elektrickým napětím, vstupy od
sousedních neuronů, které toto napětí mění, a jediným výstupem, který je napojen na
vstupy dalších susedů a je aktivován, dosáhne-li napětí určitého prahu. Stav neuronu
tak reprezentujeme náhodným procesem, u nějž se zajímáme o hustotu rozložení doby,
kdy poprvé dosáhl daného prahu. Práce je proto doplněna matematickým úvodem týka-
jícím se náhodných procesů, jejich transformací a stochastických diferenciálních rovnic
popisujících takové procesy. Dále je numericky určována ona hustota pomocí simulace
na počítači programem napsaným v jazyce MATLAB. Výsledkem je srovnání uvedených
modelů neuronové aktivity.

Abstract

In this work we focus on stochastic models of single neuron, specifically Stein model
and Ornstein-Uhlenbeck model in the basic version and a version with boundaries. Neuron
is understood here as a unit with an internal state given by electric voltage, inputs from
neighboring neurons that this voltage change, and a single output which is connected
to inputs of other neighbors and is activated if the voltage reaches a certain threshold.
The state of the neuron is represented by a random process for which we are interested
in the density distribution of the first time to reach the given threshold. The work is
therefore supplemented by mathematical introduction concerning random processes, their
transformations and stochastic differential equations describing such processes. Next, the
density is determined numerically using computer simulation by program written in
MATLAB language. The result is a comparison of those neuronal activity models.

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval docentu Petru Lánskému za vedení této práce, cenné rady a připomínky a svým rodičům za podporu během studia, jež tato práce završuje.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, kterým jsou v práci citovány.

Brno 11. května 2012

.....
Tomáš Hebelka

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Kapitola 1. Náhodné procesy | 1 |
| 1.1 Základy teorie náhodných procesů | 1 |
| 1.2 Kinetické a difúzní rovnice | 2 |
| 1.3 Stochastická diferenciální rovnice | 5 |
| 1.4 Doba prvního dosažení | 7 |
| 1.4.1 Fortetova a Siegertova rovnice | 7 |
| 1.4.2 Výpočet momentů doby prvního dosažení | 9 |
| 1.4.3 Aproximace hustoty g doby prvního dosažení | 11 |
| 1.4.4 Hypergeometrické a chybové funkce | 12 |
| 1.5 Wienerův proces | 13 |
| 1.5.1 Transformace homogenního difúzního procesu | 16 |
| Kapitola 2. Modely neuronové aktivity | 19 |
| 2.1 Obecné předpoklady | 19 |
| 2.2 Steinův model | 20 |
| 2.2.1 Hustota f Steinova modelu | 20 |
| 2.2.2 Hustota g doby prvního dosažení prahu Steinova modelu | 22 |
| 2.2.3 Steinův model s mezemi | 22 |
| 2.3 Ornstein-Uhlenbeckův model | 23 |
| 2.3.1 Hustota f O.U. modelu | 26 |
| 2.3.2 Hustota g doby prvního dosažení prahu O.U. modelu | 26 |
| 2.3.3 O.U. model s mezemi | 30 |
| Kapitola 3. Simulace | 33 |
| 3.1 Simulace základního Steinova a O.U. procesu | 33 |
| 3.1.1 Průběh střední hodnoty napětí | 34 |
| 3.1.2 Průběh hustoty pravděpodobnosti | 34 |
| 3.1.3 Průběh hustoty doby prvního dosažení prahu | 36 |
| 3.2 Simulace Steinova a O.U. modelu s mezemi | 37 |
| 3.2.1 Průběh trajektorií a jejich střední hodnoty u modelů s mezemi | 38 |
| 3.2.2 Průběh hustoty pravděpodobnosti u modelů s mezemi | 39 |
| 3.2.3 Průběh hustoty doby prvního dosažení u modelů s mezemi | 40 |
| Seznam použité literatury | 44 |

| | |
|-------------------------------------|-----------|
| Kapitola 4. Appendix A | 45 |
| Kapitola 5. Appendix B | 50 |

Úvod

Nervová soustava člověka a pochopení jejího fungování patří k zajímavým oborům biologie, ve kterých lze s úspěchem uplatnit znalosti matematiky. Neurony takových soustav jsou pospojovány do komplexních sítí schopných zpracování vjemů, jejich uložení a asociací mezi nimi. Kdybychom dostatečně pochopili činnost celé neuronové sítě, byli bychom schopni vytvořit její umělou kopii, což by vedlo až ke vzniku značně sofistikovaných počítačů či dokonce androidů.

Pro hlubší studium takové činnosti neuronů "přenášíme" do světa matematiky pomocí modelů. Každý neuron je tak nahrazen "černou skříňkou" se vstupy a výstupy vykonávající jistou (matematickou) funkci. Ukazuje se, že taková funkce však není deterministická, proto k ní přidáváme náhodnou složku a modely nazýváme stochastické. Popíšeme velmi stručně, jak se neuron chová. Stav neuronu je dán elektrickým napětím na jeho membráně. Neuron dostává signály od sousedních (vstupních) neuronů, které napětí mění a při dosažení jistého prahu napětí neuron pošle signál svým sousedním (výstupním) neuronům. Díky kolování takových signálů v neuronové síti dochází k uchování informací.

V této práci se soustředíme na základní díl takové sítě, tedy stochastický model jediného neuronu. První kapitola obsahuje nutnou teorii pro studium modelů neuronové aktivity. Opakuje a shrnuje základní pojmy týkající se obecných náhodných procesů, Wienerova a Poissonova procesu a jejich vzájemných transformací. Dále se zabývá hustotou doby prvního dosažení meze náhodným procesem, což je stěžejní část pro pochopení modelů neuronové aktivity. Kromě toho přináší první kapitola stručný souhrn pojmů týkající se difúzních rovnic a stochastických diferenciálních rovnic.

Druhá kapitola již popisuje ony stochastické modely neuronové aktivity, konkrétně Steinův model a Ornstein-Uhlenbeckův model a jejich obměny. Tyto modely určují náhodné procesy, u nichž potom zjišťujeme hustotu pravděpodobnosti v daném čase a hustotu doby prvního dosažení meze. Ve speciálních případech můžeme takové hustoty analyticky určit, což je v práci uděláno. Ve většině netriviálních případů je však tyto hustoty třeba určit numericky. V této práci je k numerickému řešení využívána metoda simulace.

Třetí kapitola se tak zabývá právě simulací náhodných procesů popisujících neuronovou aktivitu. Znárodnuje grafy hustot zmíněných ve druhé kapitole a provádí statistické srovnání modelů. K simulaci je využíván program napsaný v jazyce MATLAB, který je přiložen i s dokumentací.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

| | |
|---------------------|--|
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |
| \mathbb{N} | množina všech přirozených čísel |
| \mathbb{N}_0 | množina všech přirozených čísel s nulou |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 |
| $\lfloor a \rfloor$ | největší celé číslo menší nebo rovné a (floor) |
| $\lceil a \rceil$ | nejmenší celé číslo větší nebo rovné a (ceiling) |
| $\Omega(f)$ | funkce stejného nebo většího řádu než f |
| $O(f)$ | funkce stejného nebo menšího řádu než f |
| $o(f)$ | funkce ostře menšího řádu než f |

Kapitola 1

Náhodné procesy

V této práci předpokládáme znalost základů teorie pravděpodobnosti. Vhodná je rovněž základní znalost teorie náhodných procesů, ačkoliv je tato stručně zopakována na začátku této kapitoly. Uveden je rovněž alternativní popis náhodných procesů pomocí stochastických diferenciálních rovnic. Dále se kapitola zabývá speciálními případy náhodných procesů, splňující tzv. kinetické a difúzní rovnice. Na to navazuje problematika tzv. doby prvního dosažení. Konečně v poslední části kapitoly definujeme speciální případ náhodného procesu - Wienerův proces a pojednáme o možnostech transformace náhodného procesu právě na Wienerův proces. Podstatná část této kapitoly čerpá z [1] (str. 31-72), nicméně dobrý přehled teorie náhodných procesů lze najít rovněž v [4].

1.1 Základy teorie náhodných procesů

Definice 1.1. *Necht' je dán pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P) , tedy Ω množina elementárních jevů, A σ -algebra na Ω a P je pravděpodobnostní míra na A . Necht' je dále dána $T \subseteq \mathbb{R}$. Pak soubor (indexovaných) náhodných veličin $\{X_t | t \in T\}$ nazýváme náhodným procesem. Speciálně, označuje-li index t čas, označujeme jako $X(t) := X_t$ hodnotu náhodného procesu v čase t .*

V této práci budeme pod indexem t náhodného procesu X_t vždy rozumět čas.

Dříve než se budeme podrobněji věnovat teorii náhodných procesů, rozeberme případ hustoty náhodné veličiny. Je-li náhodná veličina X absolutně spojitá, definujeme její hustotu pravděpodobnosti $f(x) := \frac{dF(x)}{dx}$, kde $F(x)$ je distribuční funkce veličiny X . Je-li náhodná veličina X diskrétní, použijeme pro definici její (zobecněné) hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ následující definici.

Definice 1.2. *Pro diskrétní náhodnou veličinu X popsanou pravděpodobnostní funkcí $P(x_i) = p_i$, $i \in \mathbb{N}$ definujeme hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ pomocí δ -funkcí:*

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) .$$

Jiné případy náhodných veličin než ony dvě uvedené nebudeme dále uvažovat.

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $X(t)$ (tj. hodnoty procesu X v čase t) označíme $f(x, t)$, kde x je hodnota realizace veličiny $X(t)$. Podobně hustotu náhodného

vektoru $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ označíme $f(x_0, t_0; \dots; x_n, t_n)$, kde x_i jsou hodnoty realizací veličin X_{t_i} . Konečně podmíněnou hustotu veličiny $X(t)$ při dané hodnotě náhodného vektoru $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ označíme $f(x, t | x_0, t_0; \dots; x_n, t_n)$. Bez důkazu uvedme následující vztah pro podmíněnou hustotu.

Lemma 1.3.

$$f(x, t | x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{f(x, t; x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}$$

Nyní definujeme pojem Markovova procesu a uvedeme některé jeho vlastnosti.

Definice 1.4. *Necht' X je náhodný proces, X_t jeho hodnota v čase t . Zvolme dále libovolné $n \in \mathbb{N}_0$, libovolné časy t_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, pro které $t > t_0 > t_1 > \dots > t_n$. Pokud pro každou takovou volbu platí*

$$f(x, t | x_0, t_0; \dots; x_n, t_n) = f(x, t | x_0, t_0) ,$$

nazveme X Markovovým náhodným procesem.

Speciálně, pokud $\forall t$ a $\forall t_0$ platí $f(x, t | x_0, t_0) = f(x, t - t_0 | x_0, 0)$, nazveme Markovův proces homogenní. Poslední (nulovou) proměnnou je zvykem vynechávat a píšeme tak $f(x, t - t_0 | x_0) := f(x, t - t_0 | x_0, 0)$.

Pro popis Markovova procesu tak většinou vystačíme s podmíněnou hustotou $f(x, t | x_0, t_0)$. Mezi podmíněnými hustotami v různých časech platí Smoluchowského rovnice, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 1.5 (Smoluchowski). *Necht' $X(t)$ je Markovův náhodný proces. Pak*

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int dy f(x, t | y, \tau) f(y, \tau | x_0, t_0) . \quad (1.1)$$

V další sekci představíme kinetické a difúzní rovnice platné pro Markovovy procesy.

1.2 Kinetické a difúzní rovnice

V [1] (str. 31-38) se ukazuje, že je-li náhodný proces $X(t)$ s podmíněnými hustotami $f(x, t | x_0, t_0)$ Markovův, musí f splňovat jisté diferenciální rovnice. Nejprve si zavedeme symboly užívané v těchto rovnicích.

Definice 1.6. *Definujeme n -tý moment A_n pro $n \geq 1$, Markovova náhodného procesu $X(t)$ s podmíněnými hustotami $f(x, t | x_0, t_0)$ jako*

$$A_n(x, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int (y - x)^n f(y, t + dt | x, t) dy = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E((dX(t))^n | X(t) = x)}{dt} , \quad (1.2)$$

kde jsme označili $dX(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} (X(t + dt) - X(t))$.

Podmíněné hustoty Markovova procesu splňují dopředné a zpětné kinetické rovnice.

Věta 1.7 (Dopředná kinetická rovnice). *Nechť $X(t)$ je Markovův proces s podmíněnými hustotami $f(x, t|x_0, t_0)$ a A_n jeho n -té momenty. Pak f splňuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (A_n(x, t) f(x, t|x_0, t_0)). \quad (1.3)$$

Důkaz. Viz [1] (str. 33). □

Věta 1.8 (Zpětná kinetická rovnice). *Nechť $X(t)$ je Markovův proces s podmíněnými hustotami $f(x, t|x_0, t_0)$ a A_n jeho n -té momenty. Pak f splňuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0, t_0)}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^n}. \quad (1.4)$$

Důkaz. Viz [1] (str. 35). □

Při vyšetřování náhodného procesu často nastává případ, že máme dány momenty A_n a chceme z nich určit pomocí kinetických rovnic podmíněnou hustotu. To je však poměrně obtížně, neboť kinetické rovnice obsahují obecně nekonečný počet členů, pokud pro nekonečně mnoho n platí $A_n \neq 0$. Následující věta však ukáže, že v celé řadě případů jsou nenulové pouze momenty A_1 a A_2 .

Věta 1.9. *Nechť $|A_n(x, t)| < \infty \forall n \geq 1$. Platí-li $A_{2k}(x, t) = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $A_n(x, t) = 0 \forall n \geq 3$.*

Důkaz. Vyjdeme z Hölderovy nerovnosti:

$$E(|XY|) \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (E(|Y|^q))^{\frac{1}{q}},$$

kde $p, q \geq 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Označme $dX^m = ((dX(x, t))^m | X(t) = x)$. Dosazením $p = q = \frac{1}{2}$, $X = dX^k$, $Y = dX^l$ a vydělením $dt \rightarrow 0$ dostaneme

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E(|dX^k dX^l|) \leq \left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E(dX^{2k}) \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E(dX^{2l}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zřejmě $A_{k+l}(x, t) \leq \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E(|dX^k dX^l|)$, tedy

$$A_{k+l} \leq (A_{2k} A_{2l})^{\frac{1}{2}}.$$

Dosazením $l = k + m \forall m \geq 1$ dostáváme $A_n = 0 \forall n > 2k$. Dosazením $l = m \forall m \geq 1$ dostáváme $A_n = 0 \forall n > k$. Analogicky zmenšováním k a l dostaneme postupně $A_n = 0 \forall n \geq 3$. Zřejmě nemá smysl volit $k = l$, dostali bychom pouze triviální nerovnost. Protože $k, l \geq 1$, $k \neq l$, nemáme možnost získat omezení pro A_1 a A_2 . Wienerův proces s driftem (viz další sekce) je příkladem procesu pro který $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, avšak $A_n \equiv 0 \forall n \geq 3$. □

Uvedená věta nás inspiruje k následující definici.

Definice 1.10. *Markovův proces, pro jehož momenty A_n platí $A_n \equiv 0, \forall n \geq 3$, nazveme difúzní proces.*

Kinetické rovnice se pro difúzní procesy zjednoduší. Z dopředné kinetické rovnice dostáváme Fokker-Planckovu rovnici.

Věta 1.11 (Fokker-Planck). *Necht' $X(t)$ je difúzní proces s podmíněnými hustotami $f(x, t|x_0, t_0)$ a A_1, A_2 jsou jeho momenty. Pak f splňuje Fokker-Planckovu diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (A_1(x, t)f(x, t|x_0, t_0)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A_2(x, t)f(x, t|x_0, t_0)) . \quad (1.5)$$

Ze zpětné kinetické rovnice potom dostáváme Kolmogorovu rovnici.

Věta 1.12 (Kolmogorov). *Necht' $X(t)$ je difúzní proces s podmíněnými hustotami $f(x, t|x_0, t_0)$ a A_1, A_2 jsou jeho momenty. Pak f splňuje Kolmogorovu diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = -A_1(x_0, t_0) \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} - \frac{1}{2} A_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} . \quad (1.6)$$

Fokker-Planckova rovnice (1.5) je někdy zapisována ve tvaru rovnice kontinuity. K tomu potřebujeme následující definici.

Definice 1.13. *Necht' $X(t)$ je difúzní proces s podmíněnými hustotami $f(x, t|x_0, t_0)$ a A_1, A_2 jsou jeho momenty. Pak definujeme tok pravděpodobnosti j jako*

$$j(x, t|x_0, t_0) = A_1(x, t)f(x, t|x_0, t_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2(x, t)f(x, t|x_0, t_0)) .$$

Doplňme, že $j(x, t|x_0, t_0)dt$ udává množství pravděpodobnosti, které vstoupí zleva do intervalu (x, ∞) za čas dt . Nyní již můžeme přistoupit k uvedení rovnice kontinuity.

Věta 1.14 (Rovnice kontinuity).

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t|x_0, t_0)}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Důkaz. Plyne z definice 1.13 a věty 1.11. □

Rovnici kontinuity nyní využijeme pro určení hustoty homogenních difúzních procesů v čase $t \rightarrow \infty$. Začneme následující definicí.

Definice 1.15. *Necht' je dána hustota $f(x, t|x_0)$ homogenního difúzního procesu (uvažujeme $t_0 = 0$). Existuje-li limita*

$$W(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t|x_0) , \quad (1.8)$$

která nezávisí na x_0 , říkáme, že $W(x)$ je rovnovážná hustota tohoto procesu. Tok pravděpodobnosti $j_0(x)$ pro proces daný hustotou $W(x)$ nazveme rovnovážný tok pravděpodobnosti.

$W(x)$ můžeme explicitně vyjádřit, jak ukazuje následující věta.

Věta 1.16. *Necht' je dán homogenní difúzní proces, $A_1(x)$, $A_2(x)$ jsou jeho momenty, $W(x)$ jeho rovnovážná hustota a $j_0(x)$ jeho rovnovážný tok pravděpodobnosti. Pak platí, že $j_0(x)$ je konstantní a*

$$W(x) = \frac{c}{A_2(x)} \exp\left(\int_z^x \frac{A_1(y)}{A_2(y)}\right) - \frac{2j_0}{A_2(x)} \int_z^x \exp\left(\int_w^x \frac{A_1(y)}{A_2(y)} dy\right) dw, \quad (1.9)$$

kde c , z jsou libovolné konstanty dané dodatečnými okrajovými podmínkami.

Důkaz. Dosadíme-li $W(x)$ a $j_0(x)$ do rovnice kontinuity (1.7), dostaneme

$$0 \equiv \frac{\partial W(x)}{\partial t} = -\frac{\partial j_0(x)}{\partial x}.$$

j_0 je tedy konstantní. $W(x)$ je potom obecné řešení lineární diferenciální rovnice vycházející z definice 1.13, tedy

$$j_0 = A_1(x)W(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (A_2(x)W(x)).$$

□

1.3 Stochastická diferenciální rovnice

Další možný popis Markovova náhodného procesu X je pomocí stochastické diferenciální rovnice. Nejprve definujme diferenci $dX(t)$.

Definice 1.17. *Necht' $X(t)$ je Markovův homogenní proces. Definujme jeho diferenci $dX(t)$ jako*

$$dX(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} (X(t+dt) - X(t)).$$

Speciálně, je-li $X(t)$ homogenní, píšeme diferenci pouze jako dX , neboť pro libovolné t platí

$$dX := dX(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} (X(t+dt) - X(t)) = \lim_{dt \rightarrow 0} (X(dt) - X(0)).$$

Nyní již můžeme přikročit k definici stochastické diferenciální rovnice.

Definice 1.18. *Stochastická diferenciální rovnice pro Markovův homogenní proces $X(t)$ je tvaru*

$$dX(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dP(t),$$

kde $a(x,t)$, $b(x,t)$ jsou známé funkce a $dP(t)$ je diference nějakého (jiného) Markovova náhodného procesu $P(t)$. Speciálně v případě homogenního X a P dostáváme

$$dX = a(x)dt + b(x)dP. \quad (1.10)$$

Příkladem homogenního Markovova procesu $P(t)$ může být Wienerův nebo Poissonův proces, které jsou definovány následovně.

Definice 1.19. Poissonův proces $N(t)$ s parametrem λ je homogenní Markovův proces, jehož hodnoty čase t se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λt , tedy pro jeho pravděpodobnostní funkci $p(x, t)$ platí

$$p(x = n, t = t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} .$$

Speciálně tedy $N(0) = 0$.

Věta 1.20. V libovolném časovém intervalu $\langle t, t + dt \rangle$ zvýší Poissonův proces svou hodnotu právě o 1 s pravděpodobností $\lambda dt + o(dt)$, o víc jak o 1 s pravděpodobností $o(dt)$ a zůstane na stejné hodnotě s pravděpodobností $1 - \lambda dt + o(dt)$.

Důkaz. S ohledem na homogenitu Poissonova procesu můžeme místo intervalu $\langle t, t + dt \rangle$ uvažovat interval $\langle 0, dt \rangle$. Tvrzení věty pak plyne z Taylorova rozvoje 2. řádu funkce $p(x, dt)$ z definice 1.19 dle dt pro $x = 1$, resp. $x > 1$, resp. $x = 0$. \square

Věta 1.21. Pro všechny momenty Poissonova procesu s parametrem λ platí $A_n \equiv \lambda$.

Důkaz. Z definice 1.6 a věty 1.20 dostáváme

$$\begin{aligned} A_n(x, t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(dN^n | N(t) = x)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(1 - \lambda dt + o(dt))0^n + (\lambda dt + o(dt))1^n + o(dt)}{dt} = \lambda . \end{aligned}$$

\square

Definice 1.22. Wienerův proces $W(t)$ je difúzní homogenní Markovův proces definovaný pro $t \geq 0$, jehož momenty A_1, A_2 jsou konstantní, a splňuje počáteční podmínku $W(t_0) = x_0$. Konstanty A_1 nazveme driftem, A_2 rozptylem. Speciálně, je-li $A_1 = 0, t_0 = 0$ a $x_0 = 0$, nazveme takový proces standardním Wienerovým procesem.

V sekci 1.5 dospějeme k následující větě, která bývá někdy považována za alternativní definici standardního Wienerova procesu.

Věta 1.23. Necht' $W(t)$ je standardní Wienerův proces s momentem A_2 . Pak

- $W(0) = 0$,
- $\forall t > 0$ je $W(t)$ normálně rozdělené: $W(t) \sim N(0, A_2 t)$,
- $W(t)$ má nezávislé přírůstky, tedy $\forall t_1, \forall t_2, \forall t_3, \forall t_4 \ t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ platí, že náhodné veličiny $W(t_4) - W(t_3)$ a $W(t_2) - W(t_1)$ jsou stochasticky nezávislé.

1.4 Doba prvního dosažení

Necht' $X(t)$ je náhodný proces s počáteční podmínkou $X(t_0) = x_0$. Nyní se budeme zajímat o to, ve kterém čase $T(S|x_0) \geq t_0$ proces $X(t)$ dosáhne poprvé hodnoty $S > x_0$. Případ $S < x_0$ by byl analogický, my ho však k řešení problematiky neuronu nebudeme dále potřebovat. Právě uvedené je obsahem následující formální definice.

Definice 1.24. *Necht' $X(t)$ je náhodný proces s počáteční podmínkou $X(t_0) = x_0$. Pak definujeme dobu T prvního dosažení prahu $S > x_0$ jako*

$$T(S|x_0) = \inf\{t \mid t \geq t_0, X(t_0) = x_0, X(t) \geq S\}.$$

Vzhledem k náhodnosti $X(t)$ je $T(S|x_0)$ náhodná veličina popsána (podmíněnou) hustotou pravděpodobnosti $g(S, t|x_0, t_0)$. Nyní odvodíme rovnice, které musí $g(S, t|x_0, t_0)$ Markovova procesu splňovat.

1.4.1 Fortetova a Siegertova rovnice

Věta 1.25 (Fortet). *Necht' $X(t)$ je Markovův proces s počáteční podmínkou $X(t_0) = x_0$. Necht' (podmíněná) hustota pravděpodobnosti procesu je $f(x, t|x_0, t_0)$ a hustota doby prvního dosažení prahu S je $g(S, t|x_0, t_0)$. Pak pro $S > x_0$ platí*

$$f(x, t|x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(S, \tau|x_0, t_0) f(x, t|S, \tau) d\tau.$$

Předpokládáme-li navíc, že je $X(t)$ homogenní a $t_0 = 0$, dostáváme Fortetovu rovnici

$$f(x, t|x_0) = \int_0^t g(S, \tau|x_0) f(x, t - \tau|S) d\tau. \quad (1.11)$$

Důkaz. Vezměme libovolné $x > S$. Nabude-li proces v čase t hodnoty $x > S > x_0$, musel v čase τ , $t_0 \leq \tau \leq t$, poprvé projít hodnotou S . Vzhledem k tomu, že je proces Markovův, dostáváme první rovnost. Je-li proces navíc homogenní, platí $f(x, t|S, \tau) = f(x, t - \tau|S, 0)$. Dosazením $t_0 = 0$ a vynecháním "koncových" nul dostáváme druhou rovnost. \square

Věta 1.26 (Siegert). *Necht' $X(t)$ je homogenní Markovův proces s počáteční podmínkou $X(t_0) = x_0$. Necht' hustota pravděpodobnosti procesu je $f(x, t|x_0, t_0)$. Necht' hustota doby prvního dosažení prahu S je $g(S, t|x_0)$ a $g(S, \lambda|x_0)$ Laplaceova transformace funkce g dle času t . Pak pro $S > x_0$ platí*

$$g(S, \lambda|x_0) = \frac{f(x, \lambda|x_0)}{f(x, \lambda|S)}. \quad (1.12)$$

Důkaz. Provedeme Laplaceovu transformaci Fortletove rovnice (1.11) vzhledem k proměnné t . Díky známému vztahu pro Laplaceovu transformaci konvoluce (která je na pravé straně rovnice (1.11)) dostáváme:

$$f(x, \lambda|x_0) = g(S, \lambda|x_0) f(x, \lambda|S).$$

Po vyjádření $g(S, \lambda|x_0)$ dostáváme žádanou rovnost. \square

Následující věty uvádí diferenciální rovnice, které splňuje $g(S, \lambda | x_0)$.

Věta 1.27. *Nechť $X(t)$ je homogenní Markovův proces s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Necht' jeho momenty jsou $A_n(x)$. Necht' hustota doby prvního dosažení prahu S je $g(S, t | x_0)$ a $g(S, \lambda | x_0)$ Laplaceova transformace funkce g dle času t . Pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \frac{\partial^n g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0^n} - \lambda g(x, \lambda | x_0) = 0 \quad (1.13)$$

s počáteční podmínkou $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$.

Důkaz. Necht' hustota pravděpodobnosti procesu $X(t)$ je $f(x, t | x_0, t_0)$ a $t_0 = 0$. Protože je proces $X(t)$ homogenní, platí:

$$\frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} = - \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t}.$$

Ze zpětné kinetická rovnice (1.4) spolu s předešlou rovností dostáváme:

$$\frac{\partial f(x, t | x_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \frac{\partial^n f(x, t | x_0)}{\partial x^n}. \quad (1.14)$$

Zřejmě Laplaceova transformace L levé strany rovnice (vzhledem k proměnné t) je (po použití integrační metody per partes):

$$L\left(\frac{\partial f(x, t | x_0)}{\partial t}\right) = \lambda L(f(x, t | x_0)) - f(x, 0 | x_0).$$

Počáteční podmínka pro f je zřejmě tvaru $f(x, 0 | x_0) = \delta(x - x_0)$. Provedme nyní Laplaceovu transformaci rovnice (1.14) dle proměnné t za podmínky $x > x_0$:

$$\lambda f(x, \lambda | x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \frac{\partial^n f(x, \lambda | x_0)}{\partial x^n}.$$

Podělíme-li tuto rovnici výrazem $f(x, \lambda | S)$ a použijeme-li Siegertovu rovnici (1.12), dostáváme dokazovanou rovnici. Neboť požadujeme $f(x, 0 | x_0) = \delta(x - x_0)$, zřejmě $g(x_0, t | x_0) = \delta(t)$, z čehož $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$. \square

Věta 1.28. *Nechť jsou zachovány předpoklady a značení předchozí věty 1.27. Necht' je navíc proces $X(t)$ difúzní. Pak*

$$\frac{1}{2} A_2(x_0) \frac{\partial^2 g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0^2} + A_1(x_0) \frac{\partial g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0} - \lambda g(x, \lambda | x_0) = 0 \quad (1.15)$$

s počáteční podmínkou $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$. Přidáním podmínky $g(x, \lambda | x_0) < \infty \forall x_0$ je řešení jednoznačné.

Důkaz. Pro difúzní proces platí $A_n(x) = 0, \forall n \geq 3$. Dosazením těchto A_n do (1.13) dostáváme dokazovanou diferenciální rovnici a první počáteční podmínku. Důkaz jednoznačnosti je proveden v [5]. \square

1.4.2 Výpočet momentů doby prvního dosažení

V častých případech bývá obtížně spočítat hustotu g . Proto je vhodné znát také vztahy pro výpočet momentů náhodné veličiny T , jejíž hustotou je právě g (viz definice 1.24). Tyto vztahy shrnují následující věty.

Věta 1.29. *Necht' $X(t)$ je homogenní Markovův proces s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Necht' $A_n(x)$ je jeho n -tý moment. Necht'dále $T(x|x_0)$ je doba prvního dosažení prahu x (tedy náhodná veličina) a $t_k(x|x_0)$ je její k -tý moment. Pak platí diferenciální rovnice:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \frac{\partial^n t_k(x|x_0)}{\partial x_0^n} + k t_{k-1}(x|x_0) = 0 \quad (1.16)$$

s počáteční podmínkou $t_k(x_0|x_0) = 0$, $k \geq 1$ a $t_0(x|x_0) \equiv 1$.

Důkaz. Necht' hustota doby prvního dosažení prahu S je $g(S, t|x_0)$ a $g(S, \lambda|x_0)$ Laplaceova transformace funkce g dle času t . Předpokládejme, že je $g(x, \lambda|x_0)$ analytická. Rozvineme ji do Taylorovy řady dle proměnné λ :

$$g(x, \lambda|x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left. \frac{d^n g(x, \lambda|x_0)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0} .$$

Podívejme se, čemu odpovídají jednotlivé derivace v nule. Pro $n = 0$ je

$$g(x, \lambda|x_0) \Big|_{\lambda=0} = \int_0^{\infty} e^{-0t} g(x, t|x_0) dt = 1 .$$

Pro $n > 0$ je

$$\left. \frac{d^n g(x, \lambda|x_0)}{d\lambda^n} \right|_{\lambda=0} = \int_0^{\infty} (-1)^n t^n e^{-0t} g(x, t|x_0) dt = (-1)^n t_n(x|x_0) .$$

Dosazením za derivace do Taylorova rozvoje dostáváme

$$g(x, \lambda|x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} t_n(x|x_0) , \quad (1.17)$$

kde $t_0(x|x_0) \equiv 1$. Dosadíme nyní tento rozvoj do rovnice (1.13):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \frac{\partial^n t_k(x|x_0)}{\partial x_0^n} - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} t_k(x|x_0) = 0$$

a přeuspořádáme dle mocnin λ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x_0)}{n!} \frac{\partial^n t_k(x|x_0)}{\partial x_0^n} - \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} t_{k-1}(x|x_0) \right) = 0 .$$

Vzhledem k libovolnosti λ dostáváme pro momenty $t_k(x|x_0)$, $k \geq 1$ dokazovanou diferenciální rovnici s počátečními podmínkami. \square

Věta 1.30. *Nechť jsou zachovány předpoklady a značení předchozí věty 1.29. Navíc předpokládejme, že je proces $X(t)$ difúzní. Pak platí diferenciální rovnice:*

$$\frac{1}{2}A_2(x_0)\frac{\partial^2 t_k(x|x_0)}{\partial x_0^2} + A_1(x_0)\frac{\partial t_k(x|x_0)}{\partial x_0} = -kt_{k-1}(x|x_0) \quad (1.18)$$

s počáteční podmínkou $t_k(x_0|x_0) = 0$, $k \geq 1$ a $t_0(x|x_0) \equiv 1$.

Důkaz. Dosazením $A_n \equiv 0 \forall n \geq 3$ do rovnice (1.16). □

Z právě uvedené rovnice (1.18) je možné explicitně vyjádřit $t_k(x|x_0)$, což ukazuje následující věta.

Věta 1.31. *Nechť jsou zachovány předpoklady a značení předchozí věty 1.30. Necht' pro dané k existuje řešení rovnice (1.18) na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Pak $t_k(x|x_0)$ lze explicitně vyjádřit jako:*

$$t_k(x|x_0) = 2k \int_{x_0}^x \frac{dz}{F(z)} \int_a^z \frac{F(y)}{A_2(y)} t_{k-1}(x|y) dy, \quad (1.19)$$

kde $F(x_0)$ je integrační faktor definovaný:

$$F(x_0) = e^{\int_a^{x_0} \frac{2A_1(s)}{A_2(s)} ds}.$$

Důkaz. Podělme rovnici (1.18) výrazem $\frac{A_2}{2}$ a řešme metodou integračního faktoru F :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t_k}{\partial x_0^2} + \frac{2A_1}{A_2} \frac{\partial t_k}{\partial x_0} &= -\frac{2k}{A_2} t_{k-1} \quad / \cdot e^{\int_a^{x_0} \frac{2A_1(s)}{A_2(s)} ds} = F(x_0) \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \left(F \frac{\partial t_k}{\partial x_0} \right) &= -\frac{2k}{A_2} F t_{k-1} \\ \frac{\partial t_k}{\partial x_0} &= -\frac{2k}{F} \int_a^{x_0} \frac{F(y)}{A_2(y)} t_{k-1}(x|y) dy \\ t_k(x|x_0) &= -2k \int_{x_0}^x \frac{dz}{F(z)} \int_a^z \frac{F(y)}{A_2(y)} t_{k-1}(x|y) dy. \end{aligned}$$

Vzhledem k podmínce $t_k(x_0|x_0) = 0$ můžeme psát

$$t_k(x|x_0) = 2k \int_{x_0}^x \frac{dz}{F(z)} \int_a^z \frac{F(y)}{A_2(y)} t_{k-1}(x|y) dy. \quad (1.20)$$

□

Věta 1.32. *Nechť jsou zachovány předpoklady a značení předchozí věty 1.31. Existuje-li rovnovážná hustota $W(x)$ procesu $X(t)$ a má-li tento proces nulový tok pravděpodobnosti přes hranice oblasti $\langle a, b \rangle$, platí*

$$t_k(x|x_0) = 2k \int_{x_0}^x \frac{dz}{A_2(z)W(z)} \int_a^z W(y) t_{k-1}(x|y) dy. \quad (1.21)$$

Důkaz. V případě existence rovnovážné hustoty $W(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t | x_0)$ a nulového toku pravděpodobnosti j_0 přes hranice $\langle a, b \rangle$ dle (1.9) platí

$$W(x) = \frac{c}{A_2(x)} e^{\int_a^x \frac{2A_1(s)}{A_2(s)} ds} = \frac{c}{A_2(x)} F(x),$$

kde c je normovací konstanta. Vypočteme-li z tohoto vztahu $F(x)$ a dosadíme do (1.19), dostaneme dokazovanou rovnost. \square

1.4.3 Aproximace hustoty g doby prvního dosažení

V řadě případů nedokážeme analyticky určit hustotu $g(x, t | x_0)$. Potom je nutné uchýlit se k numerickým metodám. Shrňme nyní základní postupy těchto metod.

Aproximace $g(x, t | x_0)$ v případě známé $f(x, t | x_0)$

Předpokládejme neprve, že známe $f(x, t | x_0)$. Nejjednodušší aproximace vychází z numerického řešení Fortetovy rovnice (1.11). To je možné například metodou konečných diferencí. Další možností je využití numerické Laplaceovy transformace dle t pro výpočet $f(x, \lambda | x_0)$, následný výpočet $g(x, \lambda | x_0)$ dle Siegertovy rovnice (1.12) a poté využití numerické zpětné Laplaceovy transformace dle λ pro získání $g(x, t | x_0)$.

Aproximace $g(x, t | x_0)$ v případě neznámé $f(x, t | x_0)$

Neznáme-li $f(x, t | x_0)$, může být výhodnější využít rovnice (1.13), speciálně v případě difúzního procesu rovnice (1.15). Pokud $A_n \approx 0 \forall n \geq 3$, můžeme položit $A_n = 0 \forall n \geq 3$ a uvažovat také rovnici pro difúzní proces (1.15). Následně je třeba použít numerické inverzní Laplaceovy transformace dle λ .

Chceme-li se vyhnout výpočtu inverzní Laplaceovy transformace, můžeme uvažovat pouze konečný počet členů Taylorova rozvoje (1.17). Nejprve uvažme pouze nultý a první člen, tedy

$$g(x, \lambda | x_0) \approx 1 - \lambda M_1(x | x_0) \approx \frac{1}{1 + \lambda M_1(x | x_0)}$$

za předpokladu, že $\lambda M_1(x | x_0) < 1$. Z tohoto zlomku lze snadno určit inverzní Laplaceovu transformaci (dle tabulek), která je:

$$g(x, t | x_0) \approx L^{-1} \left(\frac{1}{1 + \lambda M_1(x | x_0)} \right) = \frac{1}{M_1(x | x_0)} e^{-\frac{t}{M_1(x | x_0)}}.$$

Přeformulujeme-li náš předpoklad, je nutné, aby

$$\int_{\frac{1}{M_1(x | x_0)}}^{\infty} \frac{1}{M_1(x | x_0)} e^{-\frac{t}{M_1(x | x_0)}} e^{-\lambda t} \approx 0. \quad (1.22)$$

Můžeme též uvažovat více členů Taylorova rozvoje (1.17). Např. při použití nultého až druhého členu dostáváme

$$g(x, \lambda | x_0) \approx 1 - \lambda M_1(x | x_0) + \frac{1}{2} \lambda^2 M_2(x | x_0) \approx \frac{A}{1 + \lambda a(x | x_0)} + \frac{B}{1 + \lambda b(x | x_0)}$$

za předpokladu, že $\lambda a(x|x_0) < 1$ a $\lambda b(x|x_0) < 1$. Funkce $a(x|x_0)$ a $b(x|x_0)$ určíme řešením rovnic

$$A \sum_{n=0}^2 \lambda^n a^n + B \sum_{n=0}^2 \lambda^n b^n = 1 - \lambda M_1 + \lambda^2 M_2 .$$

Inverzní Laplaceova transformace je poté snadná. Uvedená metoda si samozřejmě žádá (numerický) výpočet $M_i(x|x_0)$ z rovnic (1.16) nebo (1.19), což je stejně složité jako výpočet $g(x, \lambda|x_0)$. Navíc splnění podmínky (1.22) (či její analogie pro více členů Taylorova rozvoje) není zaručeno.

Aproximace $g(x, t|x_0)$ pomocí simulace

Další použitelnou metodou může být využití simulace procesu $X(t)$. Předpokládejme, že máme homogenní Markovův proces $X(t)$, s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$, zadaný pomocí stochastické diferenciální rovnice (1.10)

$$dX = a(x)dt + b(x)dP ,$$

kde dP je diference nějakého homogenního Markovova procesu, jehož hustotu pravděpodobnosti $h(x, t)$ známe. Pro jednoduchost předpokládejme $P(0) = 0$, což je splněno např. v případě Wienerova nebo Poissonova procesu. Zvolíme-li nyní malý časový krok δt , pak bude dle (1.10) přibližně platit:

$$X(\delta t) \approx x_0 + a(x_0)\delta t + b(x_0)P(\delta t) .$$

Realizace $P(\delta t)$ můžeme generovat, neboť známe hustotu $h(x, \delta t)$. Z toho následně dle právě uvedené rovnice spočítáme realizace X v čase δt . Označme jednu takovou realizaci $X(\delta t)$ proměnnou x_1 . Opakováním předešlé úvahy pak můžeme dostat realizaci o hodnotě x_n procesu X v čase $n\delta t$ jako:

$$x_n \approx x_{n-1} + a(x_{n-1})\delta t + b(x_{n-1})P(\delta t) . \quad (1.23)$$

Realizace (x_0, x_1, \dots, x_n) tak tvoří jednu realizaci procesu $X(t)$ na intervalu $\langle 0, T = n\delta t \rangle$. Z průběhu realizace $X(t)$ určíme, kdy poprvé dosáhla žádaného prahu S .

Nyní vygenerujeme velký počet (tisíce) takových realizací $X(t)$ a u každé určíme dobu t prvního dosažení S . Pomocí hodnot t a vhodně zvoleného jádrového odhadu potom získáme hustotu $g(S, t|x_0)$. Metodu simulace pro určení $g(S, t|x_0)$ budeme v této práci hojně využívat.

1.4.4 Hypergeometrické a chybové funkce

Tato podsekce shrnuje definice, které budeme potřebovat při výpočtu hustoty g doby prvního dosažení u některých modelů. Jedná se o hypergeometrické funkce definované nekonečným rozvojem a chybové funkce definované integrály, které nelze analyticky vypočítat.

Definice 1.33. k -tá zobecněná mocnina čísla a je definována jako

$$a^{(k)} = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1). \quad (1.24)$$

Definice 1.34. Konfluentní hypergeometrická funkce $F(a, b, z)$ je definována jako

$$F(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}n!} z^n. \quad (1.25)$$

Pro usnadnění zápisu řešení diferenciálních rovnic se ukáže být výhodné zavést funkci U , která je lineární kombinací dvou funkcí F , a dále funkci D , která vznikne z funkce U speciální volbou parametrů. To shrnuje následující definice.

Definice 1.35. Funkci U definujeme jako

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} F(a, b, z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} F(a-b+1, 2-b, z), \quad (1.26)$$

kde Γ je standardní gamma funkce. Funkci D definujeme jako

$$D_{-\lambda\tau}(z) = U\left(\frac{\lambda\tau}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right). \quad (1.27)$$

Konečně definujme chybové funkce.

Definice 1.36. Chybové funkce Erf a $Erfi$ jsou definovány jako

$$Erf(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (1.28)$$

$$Erfi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{t^2} dt. \quad (1.29)$$

1.5 Wienerův proces

Jak již víme z definice 1.22, Wienerův proces je difúzní proces s konstantními momenty A_1, A_2 a počáteční podmínkou $W(t_0) = x_0$. Určíme nejprve (podmíněnou) hustotu pravděpodobnosti Wienerova procesu $f(x, t|x_0, t_0)$ a poté hustotu pravděpodobnosti doby prvního dosažení prahu $g(x, t|x_0, t_0)$.

Věta 1.37. Necht' $W(t)$ značí Wienerův proces s počáteční podmínkou $W(t_0) = x_0$. Označme $A_1(x) \equiv \mu$, $A_2(x) \equiv \sigma^2$ jeho momenty. Pak hustota pravděpodobnosti procesu f je

$$f(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-\mu(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right). \quad (1.30)$$

Důkaz. Dosadíme dané momenty A_1, A_2 do Kolmogorove rovnice (1.6):

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} + \mu \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} = 0. \quad (1.31)$$

Tuto rovnici budeme nyní řešit spolu s počáteční podmínkou

$$f(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0) .$$

Rovnici (1.31) substitucí $\hat{x}_0 = \Psi(x_0, t_0)$ a $\hat{x} = \Psi(x, t)$, jejíž tvar vzápětí určíme, převedeme na standardní rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{x}_0^2} = 0 , \quad (1.32)$$

kde jsme pro zabránění dvouznačnosti označili hustotu v proměnných \hat{x}_0, \hat{x} jako \hat{f} . Nyní určíme tvar této substituce.

Členy v rovnici (1.31) se (zatím obecnou) substitucí transformují takto:

$$\begin{aligned} f_{t_0} &= \hat{f}_{\hat{x}_0} \Psi_{t_0} + \hat{f}_{t_0} , \\ f_{x_0} &= \hat{f}_{\hat{x}_0} \Psi_{x_0} , \\ f_{x_0 x_0} &= \hat{f}_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} \Psi_{x_0}^2 + \hat{f}_{\hat{x}_0} \Psi_{x_0 x_0} . \end{aligned}$$

Rovnice (1.31) po této (zatím obecné) substituci přejde do tvaru:

$$\hat{f}_{t_0} + (\Psi_{t_0} + \mu \Psi_{x_0} + \frac{\sigma^2}{2} \Psi_{x_0 x_0}) \hat{f}_{\hat{x}_0} + \frac{\sigma^2}{2} \Psi_{x_0}^2 \hat{f}_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} = \hat{f}_{t_0} + \hat{b} \hat{f}_{\hat{x}_0} + \hat{a} \hat{f}_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} = 0 .$$

Pro transformaci na (1.32) žádáme $\hat{b} = 0, \hat{a} = 1$. Z podmínky $\hat{a} = 1$ dostáváme

$$\Psi(x_0, t_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} x_0 + \omega(t_0) ,$$

kde $\omega(t_0)$ je nějaká funkce. Dosazením této $\Psi(x_0, t_0)$ do podmínky $\hat{b} = 0$ dostáváme

$$\frac{d\omega(t_0)}{dt_0} = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \mu ,$$

celkově tedy

$$\Psi(x_0, t_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} (x_0 - \mu t_0) .$$

Vztah hustot f a \hat{f} je dán vztahem

$$f(x, t | x_0, t_0) = \hat{f}(\hat{x}, t | \hat{x}_0, t_0) \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \hat{f}(\hat{x}, t | \hat{x}_0, t_0) .$$

Počáteční podmínka v proměnných $\hat{x}, t, \hat{x}_0, t_0$ přejde zřejmě do tvaru (plyne z transformace δ -funkce dle věty 4.1)

$$\hat{f}(\hat{x}, t_0 | \hat{x}_0, t_0) = \delta(\hat{x} - \hat{x}_0) .$$

Řešení rovnice vedení tepla (1.32) spolu s právě danou počáteční podmínkou lze získat např. Fourierovou transformací dle proměnné \hat{x}_0 a zní

$$\hat{f}(\hat{x}, t | \hat{x}_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(\hat{x} - \hat{x}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) .$$

Konečně řešení (1.31) je potom

$$f(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-\mu(t-t_0))^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right).$$

□

Věta 1.38. *Nechť jsou zachovány podmínky i značení předchozí věty 1.37. Pak*

- $W(t_0) = x_0$,
- $\forall t > 0$ je $W(t)$ normálně rozdělené, $W(t) \sim N(x_0 + \mu(t-t_0), \sigma^2(t-t_0))$,
- $W(t)$ má nezávislé přírůstky, tedy $\forall t_1, \forall t_2, \forall t_3, \forall t_4$ $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ platí, že náhodné veličiny $W(t_4) - W(t_3)$ a $W(t_2) - W(t_1)$ jsou stochasticky nezávislé.

Důkaz. První tvrzení plyne přímo z předpokladů. Druhé tvrzení plyne z tvaru hustoty f v předchozí větě 1.37. Nyní dokážeme třetí tvrzení.

Nechť jsou dány libovolné časy $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Označme $Y_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ náhodnou veličinu přírůstku. Hustotu pravděpodobnosti vektoru (Y_1, \dots, Y_n) v bodě (y_1, \dots, y_n) označme $f(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$. Konkrétní realizace náhodného procesu $W(t)$ v časech t_0, \dots, t_n , označená x_0, \dots, x_n zřejmě udává realizaci přírůstků Y_1, \dots, Y_n a tedy platí

$$\begin{aligned} f(Y_1 = (x_1 - x_0), Y_2 = (x_2 - x_1), \dots, Y_n = (x_n - x_{n-1})) &= \\ f(x_1, t_1 | x_0, t_0) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) \dots f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) &= \\ f(x_1 - x_0, t_1 - t_0 | 0, 0) f(x_2 - x_1, t_2 - t_1 | 0, 0) \dots f(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1} | 0, 0) &= \\ f(Y_1 = (x_1 - x_0)) f(Y_2 = (x_2 - x_1)) \dots f(Y_n = (x_n - x_{n-1})) , \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost plyne z tvaru hustoty f pro Wienerův proces. Z uvedených rovností plyne nezávislost přírůstků Y_i , což jsme chtěli dokázat. □

Věta 1.39. *Nechť $W(t)$ značí Wienerův proces s počáteční podmínkou $W(0) = x_0$. Označme $A_1(x) \equiv \mu$, $A_2(x) \equiv \sigma^2$ jeho momenty. Pak hustota $g(x, t | x_0)$ doby prvního dosažení meze $x > x_0$ je*

$$g(x, t | x_0) = \frac{x - x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (1.33)$$

Důkaz. Využijeme diferenciální rovnice (1.15), která říká

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0^2} + \mu \frac{\partial g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0} - \lambda g(x, \lambda | x_0) = 0 \quad (1.34)$$

s počáteční podmínkou $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$, podmínkou $g(x, \lambda | x_0) < \infty \forall x_0$ a podmínkou $x > x_0$. Jde o snadnou homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu, jejíž řešení je

$$g(x, \lambda | x_0) = A \exp\left(\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\lambda}\right) \frac{x_0}{\sigma^2}\right) + B \exp\left(\left(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\lambda}\right) \frac{x_0}{\sigma^2}\right)$$

pro libovolné konstanty A, B . Vzhledem k podmínce $g(x, \lambda | x_0) < \infty$ pro $x_0 \rightarrow -\infty$ musíme položit $B = 0$ (pro $x_0 \rightarrow +\infty$ takovou podmínku nemáme, neboť požadujeme konečné

$x > x_0$). Z počáteční podmínky $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$ potom dostáváme hodnotu A a funkce $g(x, \lambda | x_0)$ má pak tvar

$$g(x, \lambda | x_0) = \exp\left(\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\lambda}\right)\frac{x_0 - x}{\sigma^2}\right).$$

Naším dalším úkolem bude určit inverzní Laplaceovu transformaci $g(x, \lambda | x_0)$ dle proměnné λ . Platí

$$\begin{aligned} g(x, t | x_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(x, \lambda | x_0) e^{\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\lambda}\right)\frac{x_0 - x}{\sigma^2}\right) e^{\lambda t} d\lambda, \end{aligned}$$

kde $c > 0$ je libovolná reálná konstanta. Zaveďme proto substituci p :

$$2\sigma^2 p = \mu^2 + 2\sigma^2 \lambda,$$

$$dp = d\lambda,$$

potom

$$\begin{aligned} g(x, t | x_0) &= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(x - x_0)\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \exp\left(\sqrt{2\sigma^2 p} \frac{x_0 - x}{\sigma^2}\right) \exp\left(t\left(p - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\right) dp \\ &= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(x - x_0) - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \exp\left(-\sqrt{p} \sqrt{2} \frac{x - x_0}{\sigma}\right) e^{pt} dp, \end{aligned}$$

kde $d > 0$ je opět libovolné reálné. Z posledně uvedeného integrálu je zřejmé, že potřebujeme znát inverzní Laplaceovu transformaci funkce $\exp(-a\sqrt{p})$ dle proměnné p . Z tabulek (viz [10]) dostáváme

$$L_p^{-1} \exp(-a\sqrt{p}) = \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right),$$

pak

$$\begin{aligned} g(x, t | x_0) &= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(x - x_0) - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \frac{x - x_0}{\sqrt{2\pi\sigma t^3}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right) \\ &= \frac{x - x_0}{\sqrt{2\pi\sigma t^3}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \end{aligned}$$

□

1.5.1 Transformace homogenního difúzního procesu

Ve speciálních případech je možné homogenní difúzní proces převést na standardní Wienerův proces s momentem $A_2 = 2$ pomocí vhodné transformace. V této sekci určíme podmínky, jaké musí takový proces splňovat a nalezneme onu transformaci.

Věta 1.40. Necht' $X(t)$ je homogenní difúzní proces s momenty A_1, A_2 s počáteční podmínkou $X(t_0) = x_0$. Označme $a(x) = \frac{A_2(x)}{2}$, $b(x) = A_1(x)$. Je-li splněna rovnost

$$b(x) = \frac{a_x}{2} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} \left(c_2 \int^x \frac{dz}{a(z)^{\frac{1}{2}}} + c_1 \right) \quad (1.35)$$

pro nějaké konstanty c_1, c_2 , pak lze proces $X(t)$ pomocí transformace $(x, t) \mapsto (\Psi(x, t), \Phi(t))$ transformovat na standardní Wienerův proces s momentem $A_2 = 2$. Transformace jsou tvaru

$$\Phi(t) = -\frac{1}{c_2} e^{-c_2 t}, \quad (1.36)$$

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{c_2 t}{2}} \left(\frac{c_1}{c_2} + \int^x \frac{dz}{a(z)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (1.37)$$

Důkaz. Proces $X(t)$ je popsáný Kolmogorovou rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + b \frac{\partial f}{\partial x_0} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0. \quad (1.38)$$

Pokusíme se jej transformovat na Wienerův proces, pro který $A_1(x) = 0$, $A_2(x) = 2$, který má tedy Kolmogorovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0.$$

Zavedeme (zatím obecnou) transformaci $y = \Psi(x_0, t_0)$, $\tau = \Phi(t_0)$. Hustotu v nových proměnných y, τ označíme pro zabránění nejednoznačnosti se stříškou, tedy jako \hat{f} . Členy v rovnici (1.38) potom budou

$$\begin{aligned} f_{t_0} &= \hat{f}_y \Psi_{t_0} + \hat{f}_\tau \Phi_{t_0}, \\ f_{x_0} &= \hat{f}_y \Psi_{x_0}, \\ f_{x_0 x_0} &= \hat{f}_{yy} \Psi_{x_0}^2 + \hat{f}_y \Psi_{x_0 x_0}. \end{aligned}$$

Mohli bychom pro τ použít též obecnější transformaci $\tau = \Phi(x_0, t_0)$. Při ní by však v rovnici pro $f_{x_0 x_0}$ vznikl nový člen $\Phi_{x_0}^2 \hat{f}_{\tau\tau}$, kterému se chceme vyhnout, požadujeme tedy $\Phi_{x_0} = 0$, z čehož nutně $\Phi(x_0, t_0) = \Phi(t_0)$.

Rovnice (1.38) po uvedené transformaci a vydělení Φ_{t_0} přejde do tvaru

$$\hat{f}_\tau + \frac{1}{\Phi_{t_0}} (\Psi_{t_0} + b \Psi_{x_0} + a \Psi_{x_0 x_0}) \hat{f}_y + \frac{a \Psi_{x_0}^2}{\Phi_{t_0}} \hat{f}_{yy} = \hat{f}_\tau + \hat{b} \hat{f}_y + \hat{a} \hat{f}_{yy} = 0.$$

Pro transformaci na žádaný Wienerův proces musí $\hat{b} = 0$, $\hat{a} = 1$. Z podmínky $\hat{a} = 1$ dostáváme

$$\Psi_{x_0} = \frac{\Phi_{t_0}^{1/2}}{a^{1/2}},$$

$$\Psi = \Phi_{t_0}^{1/2} \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{1/2}} + \omega(t_0), \quad (1.39)$$

kde $\omega(t_0)$ je libovolná (dostatečně hladká) funkce. Dle podmínky $\hat{b} = 0$ vyjádříme b :

$$b = -\frac{a\Psi_{x_0x_0}}{\Psi_{x_0}} - \frac{\Psi_{t_0}}{\Psi_{x_0}} = -\frac{a\Phi_{t_0}^{1/2}a_{x_0}}{-2a^{3/2}\Phi_{t_0}^{1/2}} - \left(\frac{\Phi_{t_0t_0} \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{1/2}}}{2\Phi_{t_0}^{1/2}} + \omega_{t_0} \right) \frac{a^{1/2}}{\Phi_{t_0}^{1/2}}$$

$$b = \frac{a_{x_0}}{2} - \frac{a^{1/2}}{2} \left(\frac{\Phi_{t_0t_0} \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{1/2}}}{\Phi_{t_0}} + \frac{2\omega_{t_0}}{\Phi_{t_0}^{1/2}} \right)$$

Zavedeme přeznačení

$$c_1(t_0) = -\frac{2\omega_{t_0}}{\Phi_{t_0}^{1/2}}, \quad (1.40)$$

$$c_2(t_0) = -\frac{\Phi_{t_0t_0}}{\Phi_{t_0}} = -(\ln \Phi_{t_0})_{t_0}. \quad (1.41)$$

Po dosazení do rovnice pro b dostaneme podmínku, kterou musí splňovat koeficienty difúzní rovnice, aby ji bylo možno transformovat na Wienerův proces:

$$b(x_0) = \frac{a_{x_0}}{2} + \frac{a^{1/2}}{2} \left(c_2 \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{1/2}} + c_1 \right) \quad (1.42)$$

pro nějaké c_1, c_2 . Protože je proces homogenní, nezávisí $b(x_0)$ na t_0 , tedy obecně musí být c_1, c_2 konstanty. Z rovnice (1.40) získáme nejprve $\Phi(t_0)$:

$$\Phi(t_0) = -\frac{1}{c_2} e^{-c_2 t_0}. \quad (1.43)$$

Z rovnice (1.41) dosadíme do (1.39):

$$\Psi(x_0, t_0) = e^{-\frac{c_2 t_0}{2}} \left(\frac{c_1}{c_2} + \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{1/2}} \right). \quad (1.44)$$

□

Kapitola 2

Modely neuronové aktivity

2.1 Obecné předpoklady

V této kapitole popíšeme chování neuronu pomocí různých stochastických modelů. Bude se rovněž zabývat vztahy mezi těmito modely. Začneme základním popisem, který bude pro všechny modely společný.

Neuronovou aktivitu budeme modelovat pomocí homogenního Markovova náhodného procesu $X(t)$, který značí hodnotu elektrického potenciálu na membráně neuronu v závislosti na čase $t \geq 0$. Na vstup(y) neuronu přicházejí v náhodných časech kladné, resp. záporné náboje, které způsobují nárůst, resp. pokles napětí. Jakmile napětí dosáhne jisté prahové hodnoty S , neuron vyšle signál (kladný náboj) na výstup, což způsobí pokles napětí na "resetovanou" hodnotu ρ . Bez přítomnosti vstupů vystoupá napětí po jisté době z resetované hodnoty k rovnovážné hodnotě x_0 . Protože elektrické napětí je relativní veličina, volíme jeho nulovou hladinu jako $x_0 = 0$. Dále budeme vždy (poněkud zjednodušeně) předpokládat $\rho = x_0$.

Rozdělení pravděpodobnosti homogenního procesu $X(t)$ s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$ popíšeme pomocí podmíněné hustoty pravděpodobnosti $f(x, t|x_0)$, kde x je hodnota napětí v čase t za podmínky $X(0) = x_0$. Počáteční podmínka pro tuto hustotu je zřejmě

$$f(x, 0|x_0) = \delta(x - x_0) .$$

Připomeňme, že vzhledem k naší volbě $x_0 = \rho = 0$ má neuron na začátku procesu rovnovážné napětí.

Dále nás bude zajímat čas T , kdy napětí dosáhne poprvé prahu $S > x_0 = 0$, tedy náhodná veličina $T(S|x_0)$ z definice 1.24. Rozdělení této náhodné veličiny popíšeme pomocí (podmíněné) hustoty pravděpodobnosti $g(S, t|x_0)$, kde S je hodnota prahu a t čas jeho prvního dosažení za podmínky $X(0) = x_0$.

Začneme popisem diskrétního Steinova modelu, jehož speciálním případem je Poissonův proces. Potom přejdeme k popisu spojitého Ornstein-Uhlenbeckova modelu, jehož speciálním případem je Wienerův model. Sekce o Steinově modelu čerpají z [2], o Ornstein-Uhlenbeckově modelu z [1] (str. 118 až 147) a rozšíření obou modelů z [3].

2.2 Steinův model

V Steinově modelu je napětí na membráně neuronu navyšováno excitačními pulsy, které přicházejí náhodně, v průměru λ -krát za jednotku času a časy jejich příchodů jsou navzájem nezávislé. Vzhledem k řečenému tak příchody excitačních pulsů tvoří homogenní Poissonův proces $N_\lambda(t)$ s parametrem λ . Každý puls navýší napětí o hodnotu $a > 0$. V základním Steinově modelu předpokládáme a konstatní. Podobně je napětí snižováno inhibičními pulsy, jejichž příchody tvoří homogenní Poissonův proces $N_\omega(t)$ s parametrem ω . Každý inhibiční puls naopak sníží napětí o hodnotu $i > 0$, kterou také předpokládáme konstatní. V době, mezi příchody pulsů, napětí klesá po exponenciále s kvocientem $-1/\tau$, tedy $X(t+dt) = X(t) \exp(-\frac{dt}{\tau})$. Celkem tak dostáváme

$$X(t+dt) = X(t) \exp\left(-\frac{dt}{\tau}\right) + a(N_\lambda(t+dt) - N_\lambda(t)) - i(N_\omega(t+dt) - N_\omega(t)) .$$

Přechodem k limitě $dt \rightarrow 0$ získáme stochastickou diferenciální rovnici pro X tvaru (1.10). Neboť $\exp(-\frac{dt}{\tau}) = 1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt)$, dostáváme tak následující definici.

Definice 2.1. *Steinův proces je homogenní Markovův proces popsáný následující stochastickou diferenciální rovnicí.*

$$dX = -\frac{X}{\tau}dt + a dN_\lambda - i dN_\omega , \quad (2.1)$$

kde $\tau > 0$ a $a, i \geq 0$.

Na obrázku 2.1 je znázorněna jedna z možných trajektorií Steinova procesu.

2.2.1 Hustota f Steinova modelu

Věta 2.2. *Necht' $X(t)$ je Steinův proces, s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Necht' $f(x, t|x_0)$ je jeho hustota pravděpodobnosti. Pak f splňuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial f(x, t|x_0)}{\partial t} = \frac{\partial(\frac{x}{\tau}f(x, t|x_0))}{\partial x} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|x_0)}{\partial x^n} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|x_0)}{\partial x^n} . \quad (2.2)$$

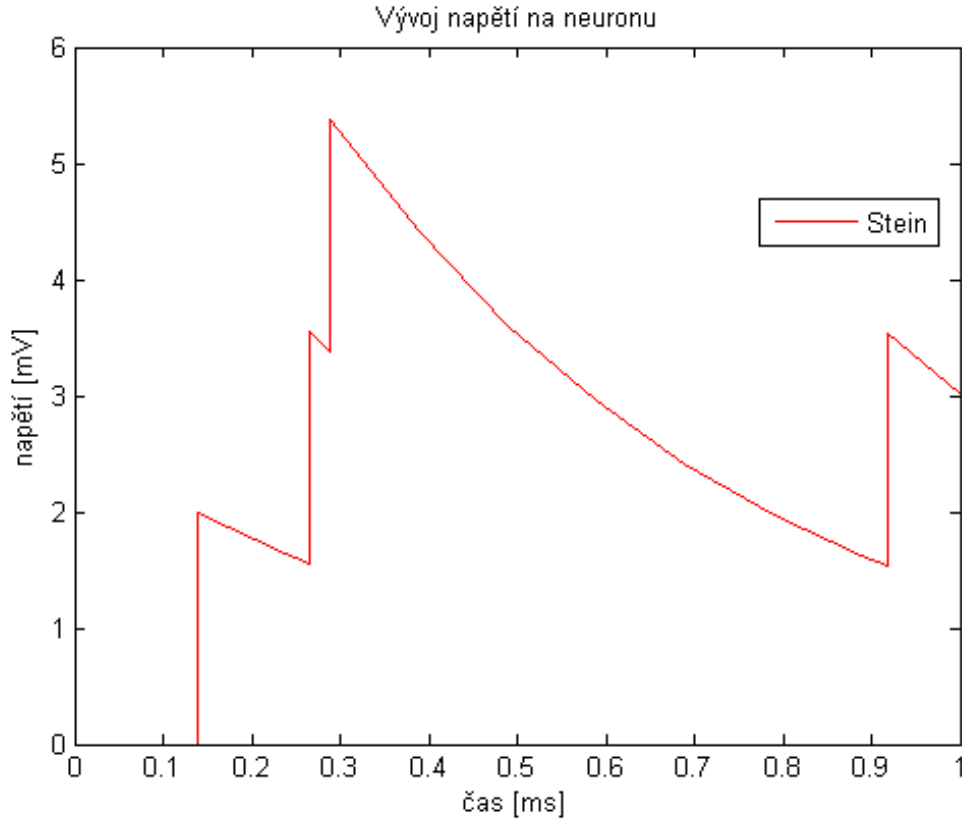
Důkaz. Viz Appendix A - věta 4.2. □

Následující věta uvádí vzorce pro výpočet momentů $A_n(x)$ Steinova procesu.

Věta 2.3. *Pro momenty A_n Steinova procesu platí:*

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -\frac{x}{\tau} + \lambda a - \omega i , \\ A_n(x) &= \lambda a^n + \omega (-i)^n \quad \forall n \geq 2 . \end{aligned}$$

Důkaz. Nejjednodušší důkaz je porovnáním rovnice (2.2) s kinetickou rovnicí (1.7).



Obrázek 2.1: Ukázka trajektorie Steinova modelu pro $\lambda = 6 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 0$, $a = 2 \text{ mV}$, $\tau = 0.5 \text{ ms}$.

Další možný důkaz je výpočtem momentů přímo ze stochastické diferenciální rovnice (2.1):

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(dX|X(t) = x)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-\frac{E(X(t))}{\tau} dt + a E(dN_\lambda) - i E(dN_\omega)}{dt} \\ &= -\frac{x}{\tau} + a\lambda - i\lambda, \end{aligned}$$

$$A_n(x) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(dX^n|X(t) = x)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E\left(\left(-\frac{X(t)}{\tau} dt + a dN_\lambda - i dN_\omega\right)^n\right)}{dt}.$$

V čitateli má zřejmě smysl uvažovat jen členy řádu $\Omega(dt)$. Neboť $E(dN_\lambda^n) = \lambda dt$, dostáváme

$$A_n(x) = \lambda a^n + \omega(-i)^n \quad \forall n \geq 2.$$

□

Z důkazu věty je tak patrné, že popis pomocí stochastické diferenciální rovnice (2.1) je shodný s popisem pomocí (kinetické dopředné) rovnice (2.2).

2.2.2 Hustota g doby prvního dosažení prahu Steinova modelu

Hustotu $g(S, t|x_0)$ doby prvního dosažení prahu $S > x_0$ u Steinova modelu bohužel nedokážeme analyticky vypočítat. Musíme se tak uchýlit k numerickým metodám shrnutým v sekci 1.4.3. Z těchto metod využijeme metodu simulace, o které pojednáme hlouběji v následující kapitole.

Ve speciálním případě, kdy položíme $\tau = \infty$ a $\omega = 0$ se Steinův proces stává totožným s Poissonovým procesem. Pro hustotu g potom platí následující věta.

Věta 2.4. *Necht' $X(t)$ je Steinův proces s počátečním podmínkou $X(0) = x_0$. Necht' pro jeho parametry platí $\tau = \infty$ a $\omega = 0$. Pak pro hustotu $g(S, t|x_0)$ doby prvního dosažení prahu $S > x_0$ platí*

$$g(S, t|x_0) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!},$$

kde

$$n = \left\lceil \frac{S - x_0}{a} \right\rceil.$$

Důkaz. Zadaný Steinův proces X se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$dX = a dN_\lambda.$$

Zřejmě X dosáhne prahu S , právě tehdy když N_λ dosáhne (celočíslné) hodnoty n , dané zněním věty. Zajímá nás pravděpodobnost, že právě v intervalu $< t, t + dt$) nabyde Poissonův proces N_λ hodnoty n . Ta je zřejmě rovna součinu pravděpodobnosti, že v čase t má N_λ hodnotu $n - 1$, a pravděpodobnosti, že v intervalu $< t, t + dt$) nastane n . událost. První činitel je dle definice 1.19 roven $\frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$. Druhý činitel je dle věty 1.20 roven $\lambda dt + o(dt)$. Vydělením uvedeného součinu diferencí dt a přechodem k limitě $dt \rightarrow 0$ dostáváme tvrzení věty. \square

2.2.3 Steinův model s mezemi

Možnou obměnou základního Steinova modelu je přidání spodní a horní meze procesu $X(t)$. Steinův model s mezemi je dán stochastickou diferenciální rovnicí

$$dX = -\frac{X}{\tau} dt + a(V_E - X) dN_\lambda - i(X - V_I) dN_\omega, \quad (2.3)$$

kde $\tau > 0$ a $1 > a, i > 0$ jsou konstanty. V_E a V_I , pro něž $V_E > S > x_0 = 0 > V_I$, jsou konstantní meze, které (jak vidno z uvedené rovnice a podmínek) nemůže proces X překročit.

Uvedený model má nevýhodu, že má pouze deterministickou limitu pro $\lambda, \omega \rightarrow \infty$ a $a, i \rightarrow 0_+$ (viz [6]). Tuto nevýhodu však můžeme odstranit předpokladem nekonstantních (kladných i záporných) vstupů. Dostáváme tak Steinův model s mezemi a nekonstantními vstupy daný stochastickou diferenciální rovnicí

$$dX = -\frac{X}{\tau} dt + (a + A)(V_E - X) dN_\lambda - (i + I)(X - V_I) dN_\omega, \quad (2.4)$$

kde mají symboly stejný význam jako v předešlé rovnici (2.3). A , resp. I jsou náhodné veličiny nabývající hodnot z intervalu $(-a, 1-a)$, resp. $(-i, 1-i)$ se středními hodnotami $E(A) = E(I) = 0$, navzájem nezávislé a též nezávislé na dN_λ a dN_ω .

Uvedený model má rovněž nevýhodu. Při difúzní aproximaci, o které bude řeč v následující sekci 2.3, se dá ukázat (viz [3]), že hranice V_I a V_E jsou regulární. Regulárnosti hranice se myslí, že jí proces může (v konečném čase) dosáhnout a nadále pokračovat. My však žádáme, aby proces uvedených hranic nikdy nedosáhl. Navíc pro řešení rovnice (2.4) bychom museli stanovit hodnoty procesu X na oněch hranicích, ty však nejsou známy. Řešením se ukázalo být ještě více pozměnit Steinův model s mezemi, tak, aby náhodná složka závisela na obou mezích, tedy aby platila stochastická diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} dX &= -\frac{X}{\tau} dt & (2.5) \\ &+ [a(V_E - X) + A(V_E - X)^p(X - V_I)^q] dN_\lambda \\ &- [i(X - V_I) + I(V_E - X)^q(X - V_I)^p] dN_\omega . \end{aligned}$$

V tomto modelu je vhodné volit konstanty $p = q = \frac{1}{2}$, aby rovnice nabyla symetrické podoby.

U všech těchto modelů s mezemi jsou obdobné problémy s výpočtem hustoty $g(S, t|x_0)$ doby prvního dosažení prahu S jako u základního Steinova modelu. Proto budeme funkci g hledat numericky v následující kapitole věnované simulacím.

Dříve než přistoupíme k simulování Steinova procesu, popíšeme v následující sekci další model, a sice Ornstein-Uhlenbeckův (dále jen O.U.), který ze Steinova vychází. O.U. model je onou difúzní aproximací Steinova modelu, kterou jsme zmínili v této sekci.

2.3 Ornstein-Uhlenbeckův model

Steinův model je poměrně složitý v tom smyslu, že všechny jeho momenty $A_m(x)$ jsou nenulové, což znesnadňuje (byť jen numerické) řešení kinetických rovnic (1.3) a (1.4). Pokusíme se proto Steinův model nahradit jistým limitním modelem, který bude mít pouze konečně mnoho nenulových momentů, tedy $A_m(x) \equiv 0 \forall m \geq m_0$ pro nějaké $m_0 \geq 3$. Pak ale dle věty 1.9 bude $A_m(x) \equiv 0 \forall m \geq 3$.

Vyjdeme ze Steinova modelu. Nechť je dána posloupnost Steinových modelů SM_n ($n \in N$) s parametry $a_n, i_n, \lambda_n, \omega_n$ a m -tými momenty $(A_m)_n(x)$. Žádáme, aby pro každé m posloupnost momentů $(A_m)_n(x)$ konvergovala (stejněměrně) k funkci $A_m(x)$, tedy

$$(A_m)_n(x) \rightarrow A_m(x) .$$

Momenty $A_m(x)$ nám určují limitní model, po kterém budeme žádat splnění uvedené podmínky $A_m(x) \equiv 0 \forall m \geq 3$. Konkrétně pro $m = 2$ a $m = 4$ tedy požadujeme

$$\begin{aligned} (A_4)_n(x) &= \lambda_n a_n^4 + \omega_n i_n^4 \rightarrow A_4(x) \equiv 0 , \\ (A_2)_n(x) &= \lambda_n a_n^2 + \omega_n i_n^2 \rightarrow A_2(x) \neq 0 . \end{aligned}$$

Toho je možné docílit jedině pokud $a_n \rightarrow 0$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ a $i_n \rightarrow 0$, $\omega_n \rightarrow \infty$.

Předpokládejme tedy, že pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$\begin{aligned} a_n, i_n &\rightarrow 0_+, \\ \lambda_n, \omega_n &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

avšak

$$\lambda_n a_n - \omega_n i_n \rightarrow \mu \quad (2.6)$$

$$(A_2(x))_n = \lambda_n a_n^2 + \omega_n i_n^2 \rightarrow \sigma^2 \quad (2.7)$$

pro dané parametry μ, σ . Toho lze docílit snadno volbou

$$a_n = i_n = \frac{1}{n}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2}(\sigma^2 n^2 + \mu n), \quad (2.9)$$

$$\omega_n = \frac{1}{2}(\sigma^2 n^2 - \mu n). \quad (2.10)$$

Posloupnost SM_n se nám tak blíží k difúznímu homogennímu modelu, který je obsahem následující definice.

Definice 2.5. *Difúzní homogenní model, pro jehož momenty platí*

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -\frac{x}{\tau} + \mu, \\ A_2(x) &= \sigma^2, \\ A_n(x) &= 0 \quad \forall n \geq 3, \end{aligned}$$

nazýváme *Ornstein-Uhlenbeckův (dále jen O.U. model)*. Říkáme též, že *O.U. model je difúzní aproximací základního Steinova modelu*.

Na obrázku 2.2 je znázorněna jedna z možných trajektorií O.U. procesu.

Analogicky jako u Steinova modelu splňuje O.U. model následující stochastickou diferenciální rovnici.

Věta 2.6. *Stochastická diferenciální rovnice pro Ornstein-Uhlenbeckův proces $X(t)$ zní*

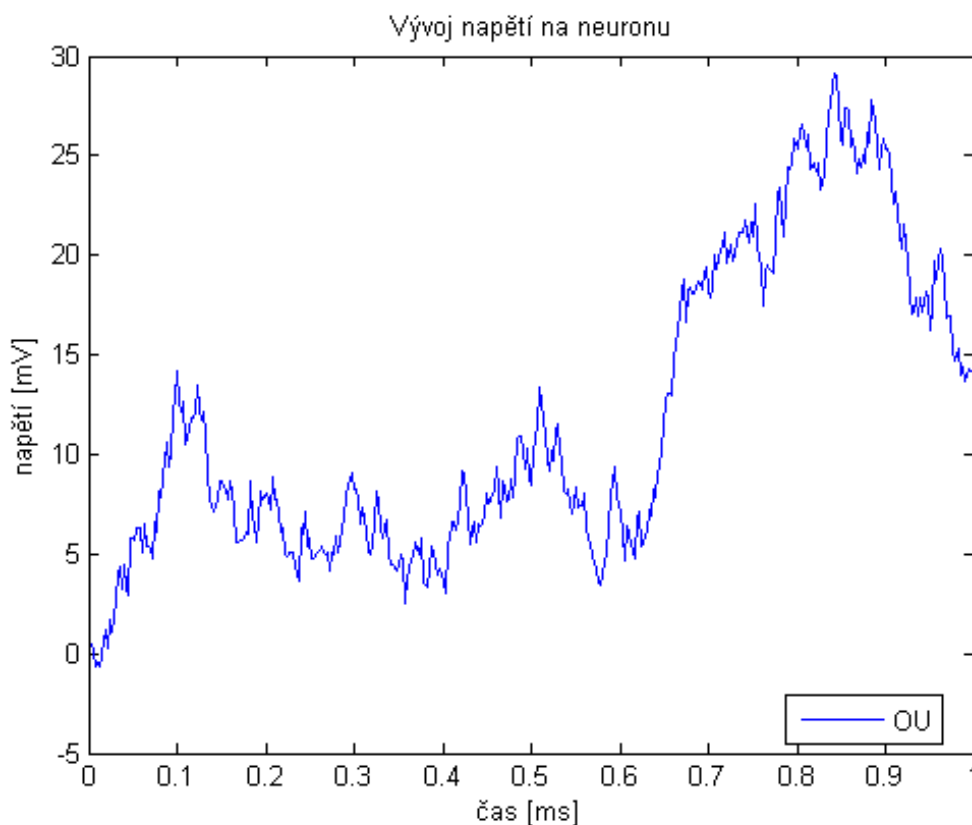
$$dX = \left(-\frac{x}{\tau} + \mu\right) dt + \sigma dW, \quad (2.11)$$

kde dW je *diference standardního Wienerova procesu s momentem $A_2 = 1$* .

Důkaz. Každý homogenní difúzní proces, pro který je moment A_2 konstantní, splňuje stochastickou diferenciální rovnici

$$dX = A_1(x)dt + A_2 dW.$$

Dosazením momentů $A_1(x), A_2$ O.U. procesu pak dostáváme (2.11).



Obrázek 2.2: Ukázka trajektorie O.U. procesu pro $\mu = 20 \text{ mV/ms}$, $\sigma^2 = 20 \text{ mV}^2/\text{ms}$, $\tau = 2 \text{ ms}$.

Skutečně, ověříme, že proces definovaný pomocí (2.11) má požadované momenty $A_1(x)$, A_2 . Dle (1.2) dostáváme

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(dX|X(t) = x)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(-\frac{E(X|X(t)=x)}{\tau} + \mu)dt + \sigma E(dW)}{dt} \\ &= -\frac{x}{\tau} + \mu, \end{aligned}$$

$$A_n(x) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(dX^n|X(t) = x)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E((-\frac{X(t)}{\tau}dt + \sigma dW)^n)}{dt}.$$

V čitateli má zřejmě smysl uvažovat jen členy řádu $\Omega(dt)$. Neboť $E(dW^2) = dt$ a $E(dW^n) \in o(dt)$, $\forall n \geq 3$ dostáváme

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \sigma^2, \\ A_n(x) &= 0 \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

□

2.3.1 Hustota f O.U. modelu

Výhodou O.U. modelu je, že dokážeme analyticky určit hustotu $f(x, t|x_0)$ rozložení O.U. procesu v čase t , jak ukazuje následující věta.

Věta 2.7. *Necht' $X(t)$ je O.U. proces s počáteční podmínkou $X(t_0 = 0) = x_0$. Pak pro hustotu $f(x, t|x_0)$ O.U. procesu platí*

$$f(x, t|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu(t))^2}{2V(t)}\right), \quad (2.12)$$

kde

$$\mu(t) = \mu\tau + (x_0 - \mu\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.13)$$

$$V(t) = \frac{\sigma^2\tau}{2}(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}}). \quad (2.14)$$

$X(t)$ má tedy normální rozdělení:

$$X(t) \sim N(\mu(t), V(t)).$$

Důkaz. Viz Appendix A - věta 4.3. □

Věta 2.8. *Pro O.U. proces $X(t)$ s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$ existuje rovnovážná hustota $W(x)$ (z definice 1.15):*

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(\infty)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu(\infty))^2}{2V(\infty)}\right), \quad (2.15)$$

kde

$$\mu(\infty) = \mu\tau, \quad (2.16)$$

$$V(\infty) = \frac{\sigma^2\tau}{2}. \quad (2.17)$$

$X(\infty)$ má tedy normální rozdělení:

$$X(\infty) \sim N(\mu\tau, \frac{1}{2}\sigma^2\tau).$$

Důkaz. Dosazením $t \rightarrow \infty$ do (4.2) dostáváme $W(x)$. Normálnost rozdělení $X(\infty)$ je zřejmá z tvaru hustoty $W(x)$. □

2.3.2 Hustota g doby prvního dosažení prahu O.U. modelu

Stejně jako v případě Steinova modelu je analytický výpočet hustoty $g(S, t|x_0)$ doby prvního dosažení prahu $S > x_0$ nemožný. Uchýlíme se tedy opět k numerickým metodám shrnutým v sekci 1.4.3, a sice k metodě simulace, o které pojednáme hlouběji v následující kapitole.

Kromě již uvedených numerických metod můžeme vypočítat Laplaceovu transformaci $g(S, \lambda|x_0)$ pomocí funkcí, definovaných nekonečným rozvojem. Tyto funkce jsou uvedeny v podsekci 1.4.4. Následující věta ukáže vztah pro $g(S, \lambda|x_0)$. Inverzní Laplaceovu transformaci pro získání $g(x, t|x_0)$ je pak třeba samozřejmě provést numericky.

Věta 2.9. Pro Laplaceovu transformaci hustoty $g(x, \lambda | x_0)$ doby prvního dosažení prahu $x > x_0$ u O.U. modelu s parametry μ , σ , τ platí:

$$g(x, \lambda | x_0) = \exp\left(\frac{x_0^2 - x^2}{2\tau\sigma^2} + \frac{(x - x_0)\mu}{\sigma^2}\right) \frac{D_{-\lambda\tau}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\tau}}x_0 - \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{2\tau}\right)}{D_{-\lambda\tau}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\tau}}x - \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{2\tau}\right)}. \quad (2.18)$$

Důkaz. Vyjdeme z diferenciální rovnice (1.15), která pro O.U. proces zní

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0^2} + \left(-\frac{x}{\tau} + \mu\right) \frac{\partial g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0} - \lambda g(x, \lambda | x_0) = 0 \quad (2.19)$$

s počáteční podmínkou $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$.

Zavedeme značení $g'' = \frac{\partial^2 g(x, \lambda | x_0)}{\partial x_0^2}$. Rovnici (2.19) vydělíme $\sigma^2/2$ a dostáváme

$$g'' + \left(-\frac{2x}{\tau\sigma^2} + \frac{2\mu}{\sigma^2}\right) g' - \frac{2\lambda}{\sigma^2} g = g'' + ag' + bg = 0.$$

Z rovnice potřebujeme nejprve vyloučit člen ag' . Proto zavedeme substituci $g = u \exp(-\frac{1}{2} \int a(x_0) dx_0)$. Rovnice pak přejde ve tvar

$$u'' + \left(-\left(\frac{x}{\tau\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{1}{\tau\sigma^2} - \frac{2\lambda}{\sigma^2}\right) u = 0.$$

Nyní použijeme lineární substituci

$$z_0 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\tau}} x_0 - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{2\tau}, \quad (2.20)$$

aby rovnice přešla ve standardní tvar Weberovy rovnice (u'' nyní značí $\frac{\partial^2 u(z, \lambda | z_0)}{\partial z_0^2}$)

$$u'' + \left(-\frac{z_0^2}{4} - \left(\lambda\tau - \frac{1}{2}\right)\right) u = 0. \quad (2.21)$$

Weberovu rovnici převedeme substitucí $h = u \exp(\frac{z_0^2}{4})$ na rovnici

$$h'' - z_0 h' - (\lambda\tau) h = 0. \quad (2.22)$$

Předpokládáme analytické řešení ve tvaru $h(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$. Pro koeficienty c_n pak dostáváme rekurentní vztah

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n + \lambda\tau)c_n.$$

Pomocí zobecněných mocnin zapíšeme řešení rekurentního vztahu jako

$$c_{2n} = \frac{\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)^{(n)} 2^n}{(2n)!} c_0 = \frac{\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)^{(n)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} 2^n n!} c_0,$$

$$c_{2n+1} = \frac{\left(\frac{\lambda\tau+1}{2}\right)^{(n)} 2^n}{(2n+1)!} c_1 = \frac{\left(\frac{\lambda\tau+1}{2}\right)^{(n)}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{(n)} 2^n n!} c_1.$$

Pak řešení (2.22) můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} h(z, \lambda | z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n \\ &= \hat{A}(z) F \left(\left(\frac{\lambda\tau}{2} \right)^{(n)}, \left(\frac{1}{2} \right)^{(n)}, \frac{z_0^2}{2} \right) \\ &\quad + \hat{B}(z) z_0 F \left(\left(\frac{\lambda\tau+1}{2} \right)^{(n)}, \left(\frac{3}{2} \right)^{(n)}, \frac{z_0^2}{2} \right), \end{aligned}$$

kde $\hat{A}(z)$, $\hat{B}(z)$ jsou nějaké funkce. Provedeme-li zpátky všechny zavedené substituce, dostaneme řešení (2.19) ve tvaru

$$\begin{aligned} g(x, \lambda | x_0) &= \exp \left(\frac{x_0^2}{2\tau\sigma^2} - \frac{x_0\mu}{\sigma^2} \right) \left\{ \tilde{A}(x) F \left(\left(\frac{\lambda\tau}{2} \right)^{(n)}, \left(\frac{1}{2} \right)^{(n)}, \frac{z_0^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}(x) z_0 F \left(\left(\frac{\lambda\tau+1}{2} \right)^{(n)}, \left(\frac{3}{2} \right)^{(n)}, \frac{z_0^2}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

kde jsme ponechali označení z_0 zavedené dle (2.20). Z tohoto tvaru řešení je obtížně určit funkce $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$ z počáteční podmínky $g(x_0, \lambda | x_0) = 1$. V [8] je proto navrženo použít pro zápis řešení zavedené funkce U a D . Pak řešením (2.19) je (jako $z^{1-b} = z^{1/2}$ zde bereme kladnou větev odmocniny)

$$g(x, \lambda | x_0) = \exp \left(\frac{x_0^2}{2\tau\sigma^2} - \frac{x_0\mu}{\sigma^2} \right) \{ A(x) D_{-\lambda\tau}(z_0) + B(x) D_{-\lambda\tau}(-z_0) \}. \quad (2.23)$$

Přidáme další podmínku, kterou musí $g(x, \lambda | x_0)$ splňovat, a sice $g(x, \lambda | -\infty) = 0$. Použijeme-li asymptotické rozvoje $D_{-\lambda\tau}(z_0)$ pro $z_0 \rightarrow \pm\infty$ (viz [8]), dostaneme $D_{-\lambda\tau}(\infty) = 0$ a $D_{-\lambda\tau}(-\infty) > 0$. Pak díky podmínce $g(x, \lambda | -\infty) = 0$ nutně $B(x) \equiv 0$. Z podmínky $g(x, \lambda | x) = 1$ nyní dostaneme $A(x)$ jako

$$A(x) = \exp \left(-\frac{x^2}{2\tau\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} \right) D_{-\lambda\tau}^{-1} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\tau}} x - \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{2\tau} \right).$$

Po dosazení $A(x)$ a $B(x)$ do (2.23) dostáváme tvrzení věty. □

Podobně jako $g(x, \lambda | x_0)$ lze též moment $t_1(x | x_0)$ O.U. procesu určit pomocí funkce F . V důkazu věty použijeme chybové funkce definované v podsekcí 1.4.4.

Věta 2.10. Pro první moment $t_1(x | x_0)$ O.U. procesu s parametry μ , σ , τ platí vztah

$$\begin{aligned} t_1(x | x_0) &= \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\sigma} \left((x - \mu\tau) F \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(x - \mu\tau)^2}{\sigma^2\tau} \right) - (x_0 - \mu\tau) F \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(x_0 - \mu\tau)^2}{\sigma^2\tau} \right) \right) \\ &\quad + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n(2n-1)!!} \left(\left(\frac{x - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^{2n} - \left(\frac{x_0 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^{2n} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Důkaz. Vyjdeme ze vzorce (1.21):

$$t_1(x|x_0) = 2 \int_{x_0}^x \frac{dz}{A_2(z)W(z)} \int_{-\infty}^z W(y) dy ,$$

kde je rovnovážná hustota $W(x)$ dána rovnicí (2.15):

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\mu\tau)^2}{\sigma^2\tau}\right) , \\ A_2(x) &= \sigma^2 . \end{aligned}$$

Upravme druhý integrál v $t_1(x|x_0)$ pomocí substituce $s = \frac{y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$:

$$\begin{aligned} \sigma\sqrt{\pi\tau} \int_{-\infty}^z W(y)dy &= \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{(y-\mu\tau)^2}{\sigma^2\tau}\right) dy = \sigma\sqrt{\tau} \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma\sqrt{\tau} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} ds\right) \\ &= \frac{\sigma\sqrt{\pi\tau}}{2} \left(1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right) . \end{aligned}$$

Pak pro $t_1(x|x_0)$ dostáváme

$$t_1(x|x_0) = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\sigma} \int_{x_0}^x dz \exp\left(\frac{(z-\mu\tau)^2}{\sigma^2\tau}\right) \left(1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right) = I_1 + I_2 ,$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\sigma} \int_{x_0}^x dz \exp\left(\frac{(z-\mu\tau)^2}{\sigma^2\tau}\right) , \\ I_2 &= \frac{\sqrt{\pi\tau}}{\sigma} \int_{x_0}^x dz \exp\left(\frac{(z-\mu\tau)^2}{\sigma^2\tau}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) . \end{aligned}$$

Po úpravě analogické úpravě $\int_{-\infty}^z W(y)dy$ dostáváme pro I_1 :

$$I_1 = \frac{\pi\tau}{2} \left\{ \operatorname{Erfi}\left(\frac{x-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{Erfi}\left(\frac{x_0-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right\} .$$

Funkci $\operatorname{Erfi}(x)$ lze též zapsat pomocí nekonečného polynomu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. $\operatorname{Erfi}(x)$ je zřejmě řešením diferenciální rovnice

$$f'(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} = 0$$

s počáteční podmínkou $f(0) = 0$. Dosadíme-li do této rovnice onen polynom $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dostaneme rekuretní vztah pro c_n a řešení oné diferenciální rovnice je pak

$$\operatorname{Erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} xF\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) ,$$

kde F je konfluentní hypergeometrická funkce 1. řádu definovaná rovnicí (1.25).

Nyní je třeba určit I_2 . Pokusme se proto nejdříve integrál $\int_0^x dt \exp(t^2) \operatorname{Erf}(t)$ určit pomocí nekonečného polynomu. Tento integrál je řešením diferenciální rovnice

$$f''(x) - 2xf'(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0$$

s počátečními podmínkami $f(0) = 0$ a $f'(0) = 0$. Dosadíme-li $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dostaneme rekurentní vztah pro c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2(n-2)}{n(n-1)} c_{n-2} \quad \forall n > 0, \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $c_0 = 0$ a $c_1 = 0$. Řešením je

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2^{n-1}}{\sqrt{\pi n} (2n-1)!!} \quad \forall n > 0, \\ c_0 &= 0, \\ c_{2n+1} &= 0 \quad \forall n > 0. \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme pro integrál I_2 (po substituci $s = \frac{z-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$):

$$I_2 = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n(2n-1)!!} \left(\left(\frac{x-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^{2n} - \left(\frac{x_0-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^{2n} \right).$$

□

Ve speciálním případě, kdy položíme $\tau = \infty$ se O.U. proces stává totožným s Wienerovým procesem s momenty $A_1(x) \equiv \mu$ a $A_2(x) \equiv \sigma^2$. Hustotu $f(x, t|x_0)$ potom určuje vztah (1.30) a hustotu $g(x, t|x_0)$ vztah (1.33).

2.3.3 O.U. model s mezemi

Podobně jako v sekci 2.2.3 jsme k základnímu Steinovu modelu přidali meze, rovněž k základnímu O.U. modelu můžeme přidat spodní a horní mez. O.U. model s mezemi budeme také konstruovat jako difúzní aproximaci Steinova modelu s mezemi, tedy jako limitu Steinových modelů s parametry $a_n, i_n \rightarrow 0_+$ a $\lambda_n, \omega_n \rightarrow \infty$. Jedině tak totiž docílíme, aby pro O.U. model s mezemi byly momenty $A_m(x)$, $\forall m \geq 3$, rovné 0.

Předpokládejme tedy posloupnost Steinových modelů s mezemi SM_n s parametry $a_n, i_n, \lambda_n, \omega_n, V_E, V_I$, pro které

$$\begin{aligned} a_n, i_n &\rightarrow 0_+, \\ \lambda_n, \omega_n &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vzhledem k přítomnosti mezí, tedy závislosti na $(V_E - X)$ nebo $(X - V_I)$, nemůžeme využít triku, aby platilo (důkaz viz [6])

$$\begin{aligned}\lambda_n a_n (V_E - X) - \omega_n i_n (X - V_I) &\not\rightarrow 0, \\ \lambda_n a_n^2 (V_E - X)^2 + \omega_n i_n^2 (X - V_I)^2 &\not\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Místo toho požadujeme platnost podmínky

$$\lambda_n a_n \rightarrow \mu, \quad (2.25)$$

$$\omega_n i_n \rightarrow \nu. \quad (2.26)$$

Pro model daný rovnicí (2.3) potom dostaneme difúzní aproximaci s momenty

$$\begin{aligned}A_1(x) &= -\frac{x}{\tau} + \mu(V_E - x) - \nu(x - V_I), \\ A_2(x) &= 0.\end{aligned}$$

Neboť je A_2 nulový, chová se tento proces deterministicky, a proto pro nás není zajímavý.

Model daný rovnicí (2.5) (případně rovnicí (2.4), který je speciálním případem pro $p = 1, q = 0$) dává momenty

$$\begin{aligned}A_1(x) &= -\frac{x}{\tau} + \lambda a(V_E - x) + \omega i(x - V_I), \\ A_2(x) &= \lambda a^2 (V_E - x)^2 + \omega i^2 (x - V_I)^2 \\ &\quad + \lambda E(A^2)(V_E - X)^{2p}(X - V_I)^{2q} + \omega E(I^2)(V_E - X)^{2q}(X - V_I)^{2p}.\end{aligned}$$

Vzhledem k podmínkám (2.25), (2.26) a tomu, aby v limitním difúzním modelu platilo $A_2 \neq 0$, žádáme splnění podmínek

$$\begin{aligned}\lambda E(A_n^2) &\rightarrow \sigma_A^2 > 0, \\ \omega E(I_n^2) &\rightarrow \sigma_I^2 > 0.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Dostáváme tak homogenní difúzní model, který nazveme O.U. model s mezemi, daný momenty

$$\begin{aligned}A_1(x) &= -\frac{x}{\tau} + \mu(V_E - x) - \nu(x - V_I), \\ A_2(x) &= \sigma_A^2 (V_E - X)^{2p}(X - V_I)^{2q} + \sigma_I^2 (V_E - X)^{2q}(X - V_I)^{2p}.\end{aligned}$$

Pro $p = 1, q = 0$ tak dostaneme model, který již zapíšeme pomocí stochastické diferenciální rovnice

$$dX = \left(-\frac{X}{\tau} + \mu(V_E - X) - \nu(X - V_I) \right) dt + \sqrt{\sigma_A^2 (V_E - X)^2 + \sigma_I^2 (X - V_I)^2} dW. \quad (2.28)$$

Pro naši speciální (symetrickou) volbu $p = q = \frac{1}{2}$ dostaneme model

$$dX = \left(-\frac{X}{\tau} + \mu(V_E - X) - \nu(X - V_I) \right) dt + \sigma \sqrt{(V_E - X)(X - V_I)} dW, \quad (2.29)$$

kde jsme označili $\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_I^2$. Opět se chceme vyhnout tomu, aby hranice $x = V_E$, resp. $x = V_I$, byla regulární. Dle [3] to nastane právě tehdy, pokud

$$\sigma^2 < \frac{2V_E}{\tau(V_E - V_I)}, \quad (2.30)$$

resp.

$$\sigma^2 < \frac{-2V_I}{\tau(V_E - V_I)}. \quad (2.31)$$

Je známo, že $|V_I| < |V_E|$, stačí nám tedy pouze platnost 2. podmínky.

Stejně jako pro základní O.U. model, je též pro O.U. model s mezemi nemožné analyticky vypočítat hustotu $g(S, t|x_0)$. g tak budeme opět hledat numericky pomocí metody simulace v následující kapitole.

Kapitola 3

Simulace

V této kapitole znázorníme a popíšeme výsledky simulace základního Steinova a Ornstein-Uhlenbeckova (dále jen O.U.) procesu i obou procesů s mezemi. Simulace budeme provádět pomocí přiloženého programu implementovaného v jazyce a prostředí MATLAB. Nejprve vždy uvedeme parametry procesů, poté příkaz ke spuštění simulace, následně grafy vzniklé simulací a případně též statistické testy porovnávající oba modely.

V jednotlivých sekcích vždy na začátku uvedeme hodnoty vstupních parametrů. V tabulkách i grafech uvažujeme čas v ms , frekvenci v ms^{-1} a napětí v mV . Ve všech případech budeme volit $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

3.1 Simulace základního Steinova a O.U. procesu

Pro simulaci základních modelů zvolíme parametry, které budou řádově odpovídat parametrům uvedeným v tabulce 3.3 pro modely s mezemi. Aby simulace doběhla v "rozumně krátkém" čase, je vhodné volit $\mu = \lambda a - \omega i > 0$, toto však parametry v tabulce 3.3 nesplňují. Zvolme

$$\begin{aligned}\lambda &= 10 \text{ ms}^{-1} \\ \omega &= 5 \text{ ms}^{-1} \\ a &= 0.2 \text{ mV} \\ i &= 0.2 \text{ mV} \\ \tau &= 10 \text{ ms}\end{aligned}$$

Parametry μ a σ O.U. procesu jsou dopočítány dle vztahů

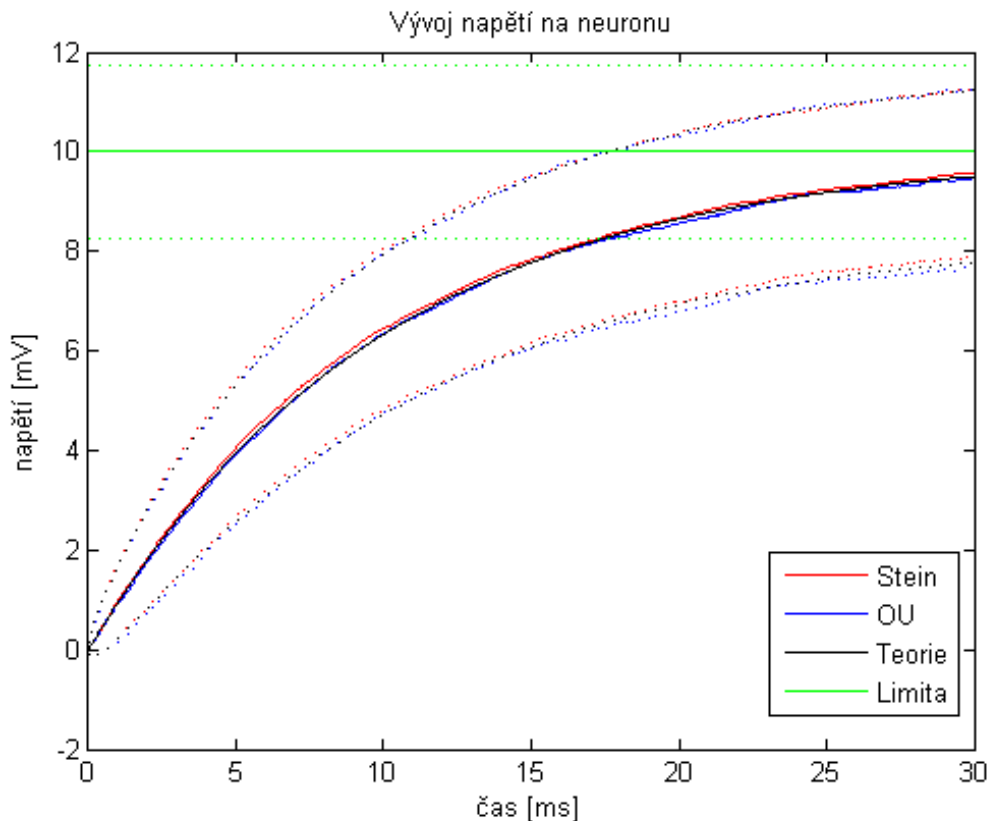
$$\begin{aligned}\mu &= \lambda a - \omega i = 10 \text{ mV/ms}, \\ \sigma &= \sqrt{\lambda a^2 + \omega i^2} = 0.775 ,\end{aligned}$$

které vycházejí z limit (2.6) a (2.7). Zdá se být rovněž vhodné, aby byl krok výpočtu O.U. procesu menší, než s jakou průměrnou periodou nastávají skoky v Steinově modelu ($1/(\lambda + \omega)$). Zvolme proto krok o velikosti 0.01 ms .

3.1.1 Průběh střední hodnoty napětí

Nejprve zobrazíme průběh střední hodnoty (plně) a standardní odchylky od střední hodnoty (tečkovaně) 1000 trajektorií obou procesů příkazem:

```
plotBothEvolve(NeuronParam(PoissonParam(10,5,0.2,0.2),10),
  SimParam(CoordParam(0,30),1e-2,1e3),
  GraphEvolveParam(0,0,1,1,1));
```



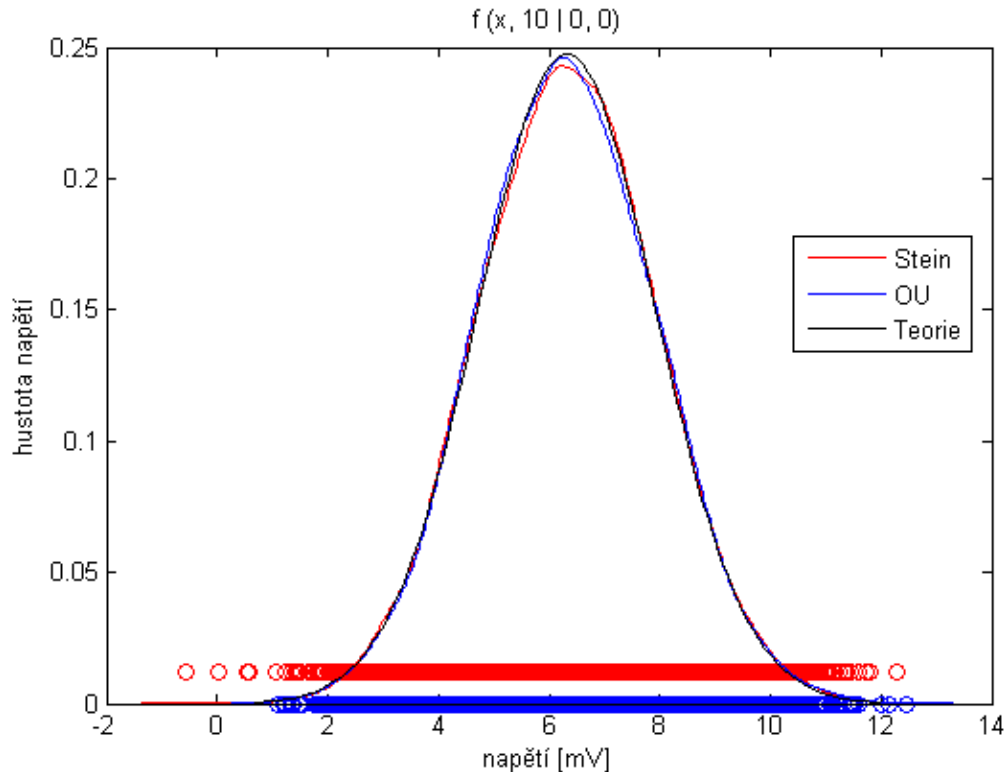
Obrázek 3.1: Průběh střední hodnoty a standardní odchylky trajektorií.

Výsledkem je obrázek 3.1. Jak vidno, střední hodnoty i standardní odchylky trajektorií obou modelů (s popisky "Stein" a "OU") vycházejí přibližně stejné. Rovněž se mnoho neliší od teoretických hodnot (s popiskem "Teorie") daných vztahem (2.13) a odmocninou z $V(t)$ ze vztahu (2.14). Pro $t \rightarrow \infty$ se též střední hodnoty i standardní odchylky limitně blíží k hodnotě (s popiskem "Limita") dané vztahy (2.16) a (2.17) (vztah (2.17) je pro druhou mocninou standardní odchylky).

3.1.2 Průběh hustoty pravděpodobnosti

Dále zobrazíme průběh hustot pravděpodobností $f(x,t|x_0)$ procesů v čase $t = 10$ ms, přičemž zvýšíme počet vzorků k simulaci na 10 000, příkazem:

```
plotBoth(NeuronParam(PoissonParam(10,5,0.2,0.2),10),
  SimParam(CoordParam(0,10),1e-2,1e4));
```



Obrázek 3.2: Odhad hustot pravděpodobnosti procesů.

Výsledkem je obrázek 3.2. Teoretická křivka (s popiskem "Teorie") vychází z O.U. modelu a je dána vztahem (4.2). Další 2 křivky jsou zkonstruovány z generovaných dat metodou vyhlazování s normálním jádrem, optimální šířkou okna a 400 ekvidistančními body (viz funkce MATLABu `ksdensity` v [9]).

Kromě obrázku funkce vypíše statistické údaje uvedené v tabulce 3.1. p -hodnota je z χ^2 testu dobré shody s normálním rozdělením. Vidíme, že je poměrně vysoká (vychází větší jak 5 %) i pro jiné simulace, což koresponduje s teoretickou hustotou f (danou vztahem (4.2)), která má normální rozdělení. Z obrázku je patrná dobrá shoda teorie s oběma modely i obou modelů navzájem. Toto je též podpořeno Wilcoxonovým párovým testem a Kolmogorovým-Smirnovovým (dále jen KS) testem mezi daty z obou modelů. Pro Wilcoxonův test vychází p -hodnota 68.23 %, pro KS test p -hodnota 63.77 % a k -hodnota $1.05 \cdot 10^{-2}$. k -hodnotou míníme maximum vzdálenosti empirických distribučních funkcí obou modelů.

Simulace s 10 000 vzorky byla provedena 10-krát a p -hodnoty Wilcoxonova i KS testu vycházely v rozmezí 3-99 % a k -hodnota v rozmezí 0.01 - 0.02. Provedeme-li Wilcoxonův nebo KS test mezi dvěma soubory s 10 000 vzorky, avšak oba soubory generujeme dle Steinova nebo O.U. modelu (každý pár opět 10-krát), dostaneme p -hodnoty i k -hodnoty ve stejném rozmezí, tedy nedostaneme větší p -hodnoty ani menší k -hodnoty než pro dvojici

| | Stein | O.U. | |
|-----------------|-----------|-----------|----------|
| | simulace | simulace | teorie |
| střední hodnota | 6.336365 | 6.334167 | 6.321206 |
| medián | 6.334062 | 6.313460 | 6.321206 |
| mód | 6.253246 | 6.251389 | 6.321206 |
| stand. odchylka | 1.605589 | 1.598027 | 1.610588 |
| šikmost | 0.010371 | 0.064272 | 0 |
| špičatost | -0.025490 | -0.035680 | 0 |
| p-hodnota (%) | 79.58 | 15.49 | - |

Tabulka 3.1: Údaje o hustotě $f(x, t = 10 | x_0 = 0)$

| | Stein | O.U. | Teorie |
|-----------------|----------|----------|----------|
| střední hodnota | 8.728182 | 8.656363 | 8.692273 |
| medián | 8.135663 | 8.068725 | - |
| mód | 7.045094 | 7.109642 | - |
| stand. odchylka | 3.347129 | 3.300488 | 3.323808 |
| šikmost | 1.157778 | 1.139453 | - |
| špičatost | 2.291389 | 2.116522 | - |

Tabulka 3.2: Údaje o hustotě $g(x = 6, t | x_0 = 0)$

různých modelů. Z těchto faktů a zejména z nízké k -hodnoty usuzujeme o dobré ekvivalenci obou modelů pro odhad hustoty $f(x, t | x_0)$.

3.1.3 Průběh hustoty doby prvního dosažení prahu

Konečně nejzajímavější bude průběh hustoty $g(x, t | x_0)$ doby prvního dosažení prahu u obou modelů. Jako práh zvolíme hodnotu $S = 6 \text{ mV}$, která je menší než limitní hodnota 10 mV , ke které konverguje střední hodnota pro $t \rightarrow \infty$. Počet vzorků bude opět 10 000. Simulaci spustíme příkazem:

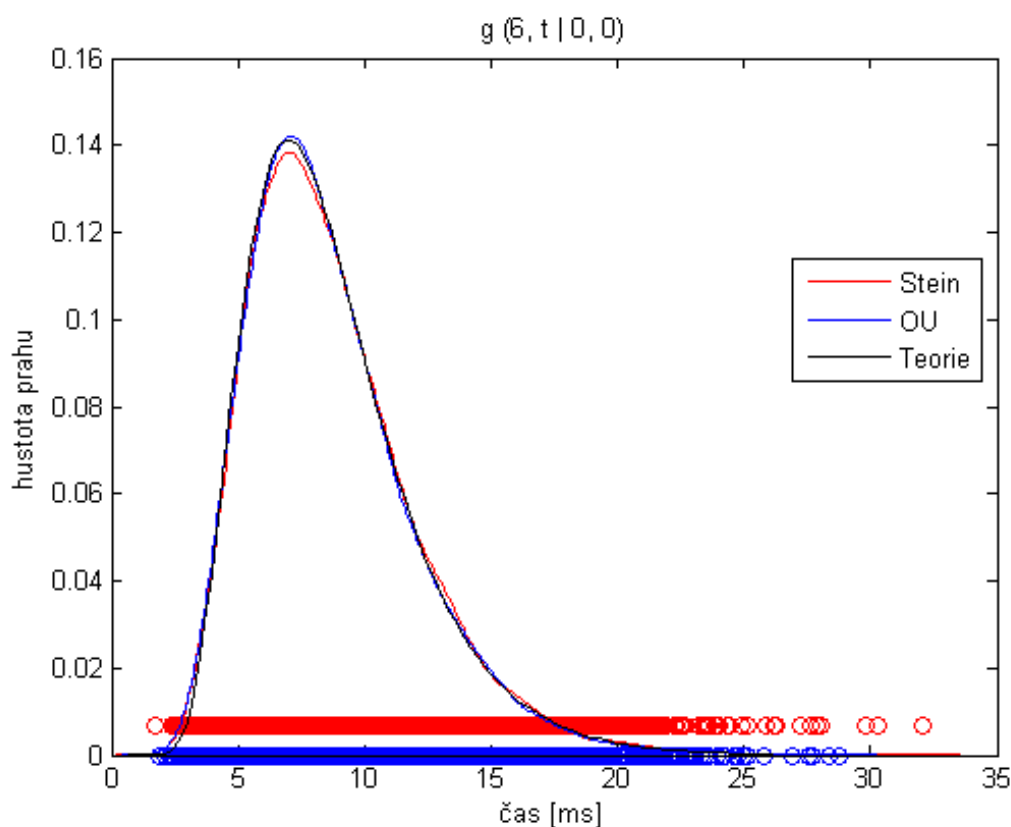
```
plotBothThreshold(NeuronParam(PoissonParam(10, 5, 0.2, 0.2), 10),
  SimParam(CoordParam(0, 30, 6), 1e-2, 1e4));
```

Výsledkem je obrázek 3.3. Teoretická křivka (s popiskem "Teorie") vychází z Wienerova modelu (tedy O.U. modelu pro $\tau \rightarrow \infty$) a je dána vztahem (1.33). V této rovnici je třeba určit konstanty μ a σ . Řešením rovnice (1.18) pro 1. moment M_1 a 2. moment M_2 Wienerova modelu s přidáním podmínkou $M_k(x | x_0) < \infty$ pro $x_0 \rightarrow -\infty$ dostaneme:

$$M_1(x | x_0) = \frac{x - x_0}{\mu},$$

$$M_2(x | x_0) = M_1^2(x | x_0) + \frac{\sigma^2}{\mu^3}(x - x_0).$$

M_1 , resp. $(M_2 - M_1^2)$ odhadneme jako průměr středních hodnot, resp. rozptylů trajektorií Steinova a O.U. modelu a z těchto odhadů vypočítáme dle uvedených vztahů μ a σ . Další 2 křivky jsou opět zkonstruovány z generovaných dat metodou vyhlazování.



Obrázek 3.3: Odhad hustot doby prvního dosažení prahu.

Dále jsou vypsaný statistické údaje v tabulce 3.2. Z obrázku je patrná dobrá shoda Steinova a O.U. modelu. Wilcoxonův párový test dává p-hodnotu 17.41 %, KS test p-hodnotu 36.46 % a k-hodnotu $1.30 \cdot 10^{-2}$. Simulace s 10 000 vzorky byla provedena 10-krát, přičemž k-hodnoty KS testu vycházely vždy v rozmezí 0.01 - 0.02. Při KS mezi dvěma soubory s 10 000 vzorky, avšak oba soubory generovanými dle Steinova nebo O.U. modelu, nedostaneme menší k-hodnoty. Z těchto faktů usuzujeme o dobré ekvivalenci obou modelů pro odhad hustoty $g(x, t | x_0)$.

3.2 Simulace Steinova a O.U. modelu s mezemi

V této sekci uvažujeme Steinův model s mezemi daný stochastickou diferenciální rovnicí (2.4) a O.U. model s mezemi daný rovnicí (2.28). Vzhledem k tomu, že však nejsou příliš dobře splněny podmínky difúzní aproximace (tedy $\lambda, \omega \rightarrow \infty, a, i \rightarrow 0$), O.U. model s mezemi pozměníme tak, že bude dán rovnicí

$$dX = \left(-\frac{X}{\tau} + \mu(V_E - X) - \nu(X - V_I) \right) dt + \sqrt{(\lambda a^2 + \sigma_A^2)(V_E - X)^2 + (\omega i^2 + \sigma_I^2)(X - V_I)^2} dW. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{8}{\tau} = 1.379 \text{ ms}^{-1} \\
\omega &= \frac{4}{\tau} = 0.690 \text{ ms}^{-1} \\
a &= 0.02 \text{ mV} \\
i &= 0.2 \text{ mV} \\
\tau &= 5.8 \text{ ms} \\
V_E &= 100 \text{ mV} \\
V_I &= -10 \text{ mV} \\
S &= 10 \text{ mV}
\end{aligned}$$

Tabulka 3.3: Vstupní parametry modelů s mezemi

Vstupem modelů s mezemi budou odhady parametrů zjištěné experimentálně u neuronů savců (viz [7]) uvedené v tabulce 3.3.

Dle Steinova modelu s mezemi daného rovnicí (2.4) má být A náhodná veličina nabývající hodnot z intervalu $(-a, 1 - a)$ se střední hodnotou $E(A) = 0$ a rozptylem $E(A^2)$. Pro příslušný O.U. model daný rovnicí s mezemi (2.28) žádáme platnost podmínky

$$\lambda E(A^2) = \sigma_A^2, \quad (3.2)$$

která vychází z limity (2.27). Proto položíme $A = \check{A} - a$, kde \check{A} je náhodná veličina s beta rozdělením se střední hodnotou a a rozptylem $\frac{\sigma_A^2}{\lambda}$. Tím jsou již jednoznačně určeny parametry α , β onoho beta rozdělení, a sice takto:

$$\alpha = -a \left(1 + \frac{\lambda a(a-1)}{\sigma_A^2} \right), \quad (3.3)$$

$$\beta = (a-1) \left(1 + \frac{\lambda a(a-1)}{\sigma_A^2} \right). \quad (3.4)$$

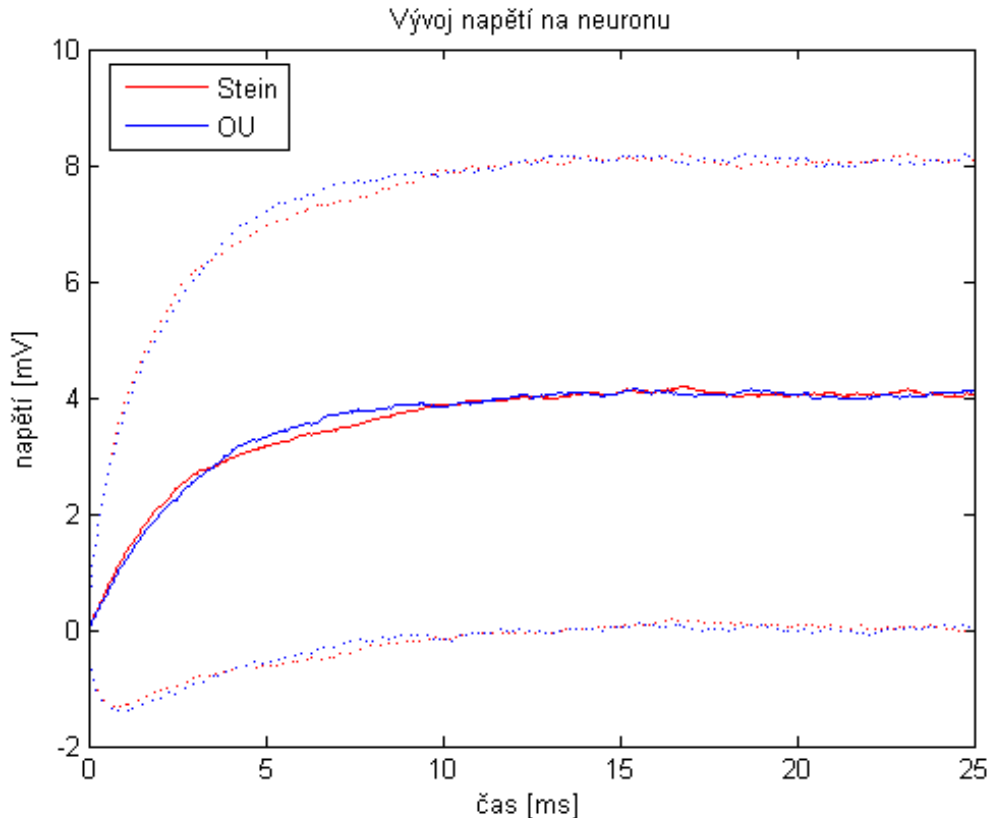
σ_A zvolíme o 1 řád menší než je konstanta a , tedy $\sigma_A = 10^{-3}$. Analogicky volíme $I = \check{I} - i$, kde \check{I} má beta rozdělení. Volíme opět σ_I o 1 řád menší než i , tedy $\sigma_I = 10^{-2}$.

Podobně jako v předešlé sekci budeme zobrazovat průběh střední hodnoty trajektorií Steinova a O.U. procesu s mezemi, průběh konkrétních trajektorií, průběh hustoty pravděpodobnosti $f(x, t | x_0)$ procesů a průběh hustoty $g(x, t | x_0)$ doby prvního dosažení prahu. Jako krok výpočtu O.U. procesu s mezemi se ukázalo účelné volit 0.01, v dalším vysvětlíme proč.

3.2.1 Průběh trajektorií a jejich střední hodnoty u modelů s mezemi

Opět nejprve zobrazíme průběh střední hodnoty (plně) a standardní odchylky od střední hodnoty (tečkovaně) trajektorií obou procesů. Pro oba procesy použijeme 5000 vzorků a pro O.U. proces délku kroku 0.01. Příkaz pro spuštění je

```
plotBothEvolve(BoundParam(PoissonParam(1.379,0.69,0.02,0.2),
  5.8,100,-10,1e-3,1e-2), SimParam(CoordParam(0,25),0.01,1e3),
  GraphEvolveParam(0,0,1));
```



Obrázek 3.4: Průběh střední hodnoty a standardní odchylky trajektorií.

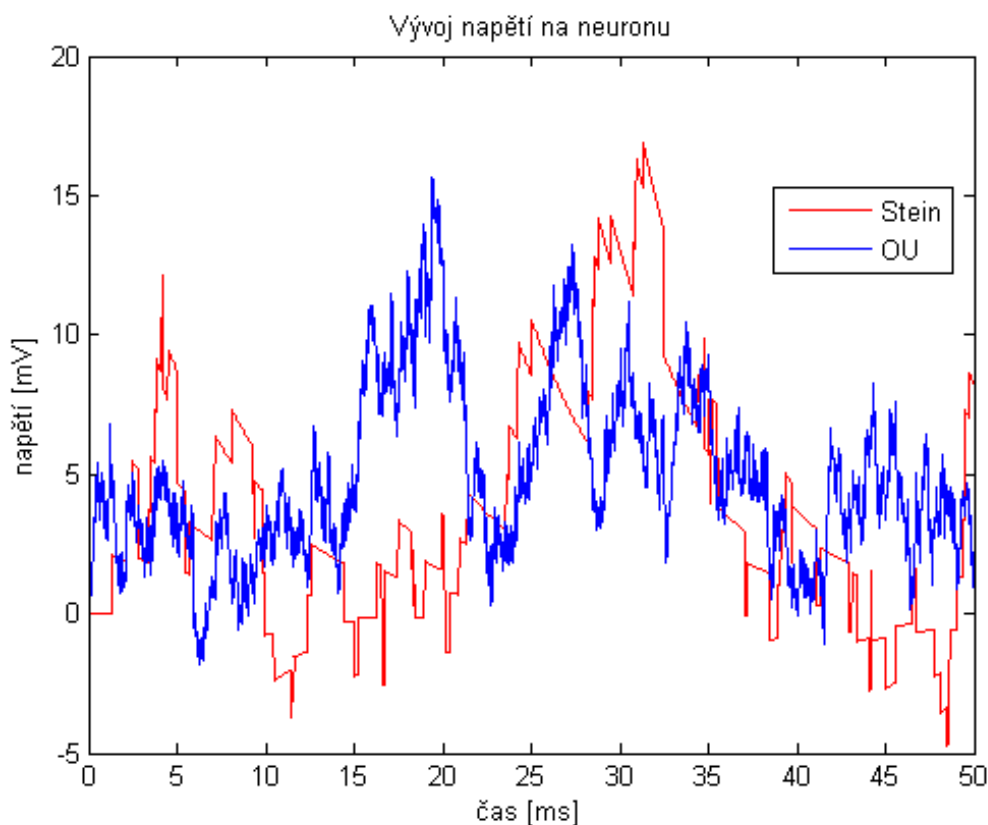
Výsledkem je obrázek 3.4. Z obrázku je patrné, že střední hodnoty i rozptyly obou procesů konvergují k přibližně 4 mV pro $t \rightarrow \infty$. Může se zdát tedy překvapivé, že jednotlivé trajektorie vůbec dosáhnou požadované meze $S = 10 \text{ mV}$. Větší jasno do situace vnese, zobrazíme-li u obou modelů průběh jediné trajektorie příkazem

```
plotBothEvolve(BoundParam(PoissonParam(1.379,0.69,0.02,0.2),
  5.8,100,-10,1e-3,1e-2), SimParam(CoordParam(0,50),0.01,1),
  GraphEvolveParam(0,0,0));
```

Výsledkem je obrázek 3.5. Vidíme, že hodnota napětí trajektorie ani u jednoho z modelů se neustálí a opakovaně s rostoucím časem překračuje práh $S = 10 \text{ mV}$.

3.2.2 Průběh hustoty pravděpodobnosti u modelů s mezemi

Dále zobrazíme průběh hustot pravděpodobností $f(x,t|x_0)$ procesů v čase $t = 10 \text{ ms}$, přičemž zvýšíme počet vzorků k simulaci na 10 000. Simulaci spustíme příkazem



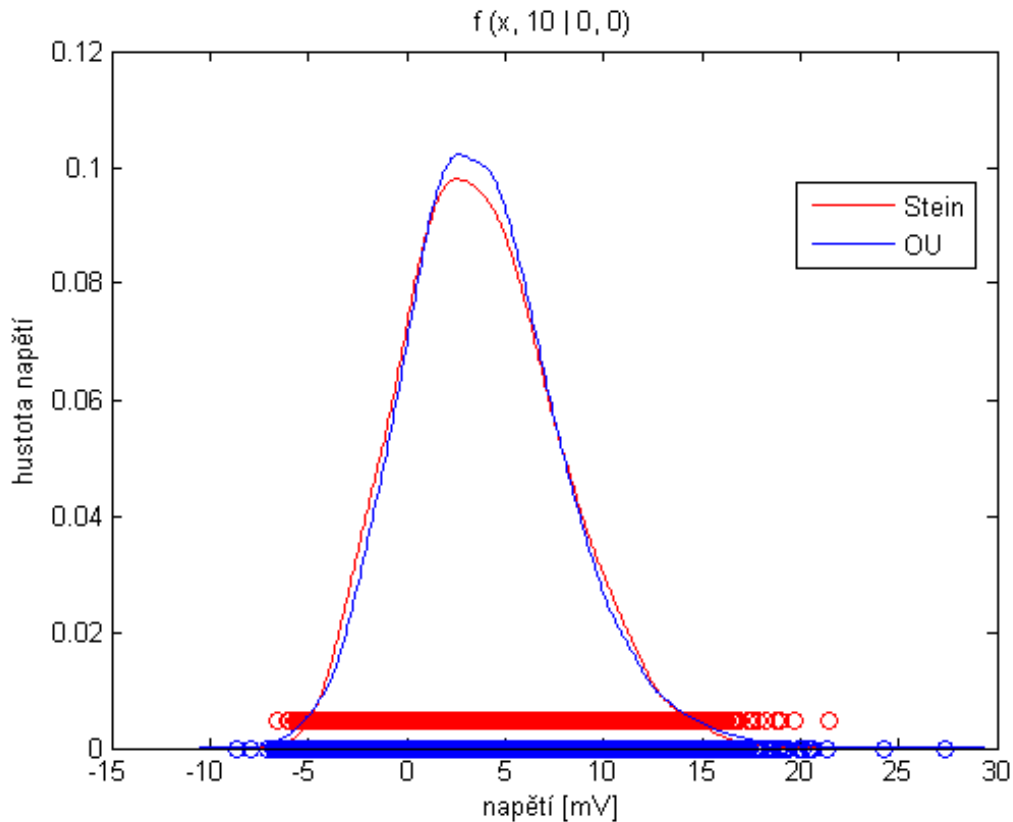
Obrázek 3.5: Průběh trajektorií.

```
plotBoth(BoundParam(PoissonParam(1.379,0.69,0.02,0.2),
  5.8,100,-10,1e-3,1e-2), SimParam(CoordParam(0,10),0.01,1e4));
```

Výsledkem je obrázek 3.6. Křivky jsou opět zkonstruovány z generovaných dat metodou vyhlazování s normálním jádrem. Funkce dále vypíše statistické údaje uvedené v tabulce 3.4. p -hodnoty Wilcoxonova párového a Kolmogorova-Smirnovova testu mezi daty z obou modelů vycházejí menší než 1 % a zdálo by se tedy, že modely nejsou ekvivalentní pro dané parametry. Avšak provedeme-li oba testy mezi dvěma soubory dat o 10 000 vzorcích dle stejného modelu (Steinova nebo O.U.), dostaneme též takto nízké p -hodnoty. Určující je tak spíše k -hodnota KS testu (maximální vzdálenost distribučních funkcí). Ta se pro 10 provedených simulací po 10 000 vzorcích vždy pohybovala mezi $1.5 \cdot 10^{-2}$ a $4 \cdot 10^{-2}$ pro dvojice dat z různých modelů, pro dvojice dat stejných modelů vychází také až $4 \cdot 10^{-2}$. Z toho lze usuzovat poměrně dobrou shodu Steinova a O.U. modelu s mezemi s danými parametry pro odhad hustoty $f(x, t | x_0)$.

3.2.3 Průběh hustoty doby prvního dosažení u modelů s mezemi

Při odhadu hustoty $g(x, t | x_0)$ doby prvního dosažení O.U. modelu metodou simulace nastává následující problém. Nastavíme-li u O.U. procesu příliš velký časový krok (označme jej δt), může se stát, že proces dosáhl poprvé dané meze S v (otevřeném) intervalu



Obrázek 3.6: Odhad hustot pravděpodobnosti procesů.

$(n\delta t, (n+1)\delta t)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$, avšak v časech $n\delta t$ i $(n+1)\delta t$ měl hodnotu nižší jak mez. S rostoucím krokem se tedy zvětšuje doba prvního dosažení meze (na simulovaných datech). Pro naše zvolené parametry se ukázalo, že pro délku kroku δt nižší než 0.01 se již střední hodnota doby prvního dosažení prahu nesnižuje a $\delta t = 0.01$ se tak zdá být dostatečně nízká. Ukažme si tedy výsledné grafy a testy pro 10 000 vzorků a takový krok. Simulaci spustíme příkazem:

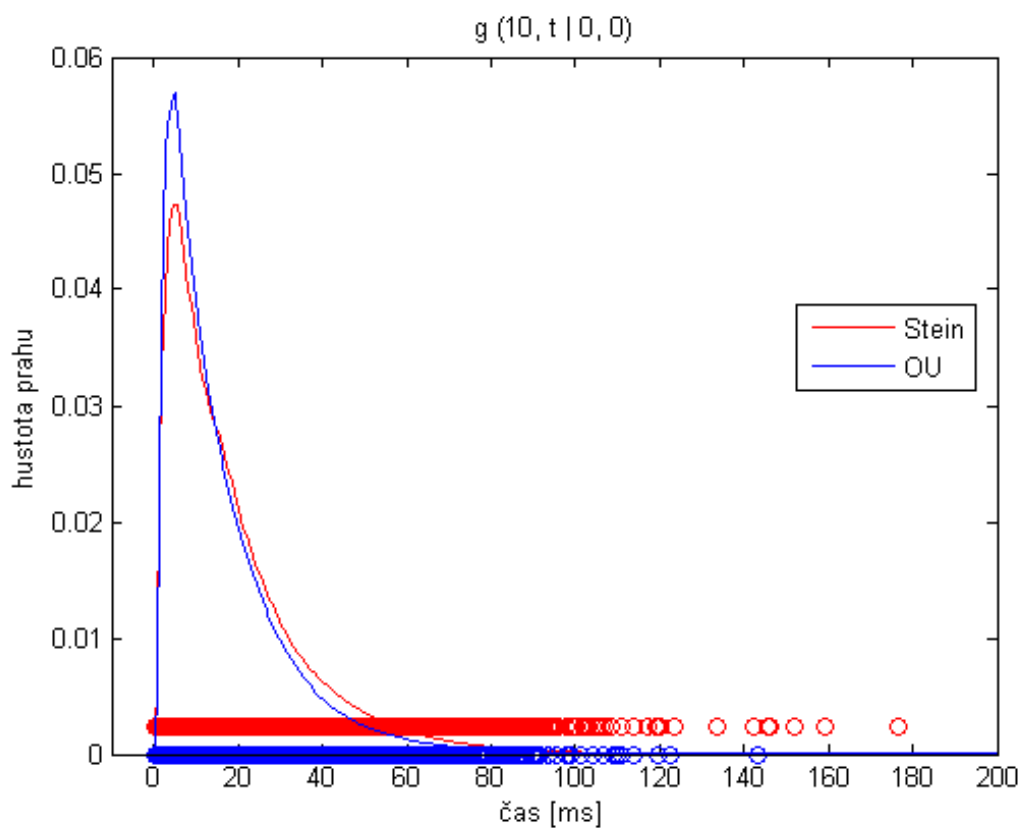
```
plotBothThreshold(BoundParam(PoissonParam(1.379,0.69,0.02,0.2),
5.8,100,-10,1e-3,1e-2),
SimParam(CoordParam(0,200,10),0.01,1e4));
```

Výsledkem je obrázek 3.7. Křivky jsou opět zkonstruovány z generovaných dat metodou vyhlazování. Statistické údaje jsou vypsány v tabulce 3.5. Bohužel z obrázku je patrné, že modely jsou si sice podobné, ale rozcházejí se. Střední hodnota O.U. modelu je přibližně o 15 % nižší než u o Steinova modelu. Wilcoxonův párový i Kolmogorův-Smirnovův test mezi daty z oněch dvou modelů dávají p-hodnoty nižší jak 1 %. Pro nás je však důležitější k-hodnota KS testu. Ta pro 10 provedených simulací s 10 000 vzorky od každého modelu vychází v rozpětí $6.5 \cdot 10^{-2}$ až $9.5 \cdot 10^{-2}$. To je o něco horší než k-hodnota mezi soubory s 10 000 vzorky stejného modelu, která je v rozpětí $1 \cdot 10^{-2}$ až $3 \cdot 10^{-2}$. V případě modelu s mezemi jsme tak zjistili, že Steinův a O.U. model s mezemi pro dané vstupní parametry nejsou ekvivalentní.

| | Stein | O.U. |
|-----------------|-----------|----------|
| střední hodnota | 3.802266 | 3.896466 |
| medián | 3.525773 | 3.627249 |
| mód | 2.592636 | 2.652360 |
| stand. odchylka | 3.967342 | 3.992174 |
| šikmost | 0.387517 | 0.494934 |
| špičatost | -0.035778 | 0.625079 |

Tabulka 3.4: Údaje o hustotě $f(x, t = 10 | x_0 = 0)$

| | Stein | O.U. |
|-----------------|----------|----------|
| střední hodnota | 19.06477 | 16.23581 |
| medián | 14.35096 | 11.82663 |
| mód | 4.899424 | 4.985732 |
| stand. odchylka | 16.69076 | 14.33932 |
| šikmost | 1.976980 | 1.983992 |
| špičatost | 6.247321 | 5.777315 |

Tabulka 3.5: Údaje o hustotě $g(x = 10, t | x_0 = 0)$ Obrázek 3.7: Odhad hustot doby prvního dosažení prahu ($\delta t = 0.01$).

Závěr

Po nastudování nutné teorie náhodných procesů jsme se zabývali Steinovým a Ornstein-Uhlenbeckovým (dále jen O.U.) modelem neuronu. Dle teorie jsou tyto modely pro parametry $\lambda, \omega \rightarrow \infty, a, i \rightarrow 0$ ekvivalentní. To se potvrdilo při simulaci modelů pomocí počítače na 10 000 vzorcích, přičemž jsme použili parametry o velikosti (řádově) $\lambda, \omega \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$, $a, i \sim 10^{-4} \text{ V}$. Ačkoli se domníváme, že Steinův model odpovídá realitě lépe než O.U. model, díky ekvivalenci modelů (pro dané parametry) můžeme pro další výpočty s výhodou využít O.U. model. Ten totiž dává analytické řešení pro hustotu pravděpodobnosti $f(x, t|x_0)$ (viz rovnice (4.2)) procesu a usnadňuje numerický výpočet hustoty $g(S, t|x_0)$ doby prvního dosažení prahu $S > x_0$ (viz sekce 2.3.2).

Dále jsme se zabývali Steinovým i O.U. modelem s mezemi. Bohužel se ukázalo, že pro námi zvolené parametry nejsou modely ekvivalentní ve smyslu hustoty $g(S, t|x_0)$. To je způsobeno tím, že 3. a vyšší momenty ($A_3(x)$) Steinova procesu nejsou zanedbatelné. V O.U. procesu jsou však tyto momenty nulové, jelikož se jedná o difúzní proces. Nicméně O.U. model s mezemi poměrně slušně aproximuje Steinův model s mezemi a pro jiné parametry by aproximace mohla být ještě lepší.

V rámci práce se dále podařilo implementovat uvedené modely v jazyce MATLAB a optimalizovat jejich časovou náročnost. Lze tak říci, že na této implementaci, či jejich principech, bude možné stavět při simulaci dalších modelů a jejich obměn.

V modelování neuronové aktivity, o které práce pojednává, je možno dále pokračovat v několika směrech. Uvedené modely je možné srovnat s dalšími experimentálními daty různých částí nervové soustavy člověka i ostatních savců. Na základě toho je možné vytvářet další modely, které budou lépe odpovídat realitě. Další možností je spojování takových modelů jediného neuronu do celých sítí, podobných neuronové síti mozku člověka, ve kterých některé neurony budou vstupní a některé výstupní. Simulací takové sítě lze získat ještě zajímavější výsledky.

Seznam použité literatury

- [1] Luigi M. Ricciardi, *Lecture Notes in Biomathematics: Diffusion Processes and Related Topics in Biology*, Springer-Verlag (1977).
- [2] Petr Lánský, *On Approximations of Stein's Neuronal Model*, J. theor. Biol. **107** (1984), 631-647.
- [3] V. Lánská, P. Lánský, Ch. E. Smith, *Synaptic Transmission in a Diffusion Model for Neural Activity*, J. theor. Biol. **166** (1994), 393-406.
- [4] Marie Forbelská, *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*, Masarykova Univerzita, Brno, 2007.
- [5] W. Feller, *Diffusion Processes in One Dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 1-31.
- [6] V. Lánská, P. Lánský, *Diffusion approximations of the neuronal model with synaptic reversal potentials*, Biol. Cybern. **56** (1987), 19-26.
- [7] H. C. Tuckwell, *Synaptic transmission in a model for stochastic neural activity*, J. theor. Biol. **77** (1979), 65-81.
- [8] F. G. Tricomi, *Fonctions Hypergéométriques Confluentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
- [9] MATLAB - Documentation, Mathworks, dostupné on-line "http://www.mathworks.com/help/techdoc/" (2012).
- [10] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Vol.I., McGraw-Hill, New York, 1954.

4 Appendix A

V tomto appendixu jsou dokázány některé věty použité v předchozích kapitolách. Důkazy jsou převzaté z [1].

Pro důkaz věty 4.2 budeme potřebovat následující větu, která říká, jakým způsobem se transformuje proměnná v δ -funkci.

Věta 4.1.

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|},$$

kde $f(x)$ je monotónní funkce a x_0 je její jediný nulový bod, tedy $f(x_0) = 0$, a navíc $f'(x_0) \neq 0$.

Důkaz. Z definice δ -distribuce dostáváme pro libovolnou hladkou $g(x)$ s kompaktním nosičem

$$\langle \delta(f), g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))g(x)dx.$$

Provedeme transformaci $t = f(x)$, $dx = \frac{dt}{f'(x(t))}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))g(x)dx = \int_{f(-\infty)}^{f(\infty)} \delta(t)g(x(t))\frac{dt}{f'(x(t))} = \frac{g(x(0))}{|f'(x(0))|} = \frac{g(x_0)}{|f'(x_0)|},$$

neboť $x(0) = f^{-1}(0) = x_0$ a $0 \in \langle f(-\infty), f(\infty) \rangle$ pro f neklesající, $0 \in \langle f(\infty), f(-\infty) \rangle$ pro f nerostoucí. \square

Věta 4.2. Necht' $X(t)$ je Steinův proces, s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Necht' $f(x, t|x_0)$ je jeho hustota pravděpodobnosti. Pak f splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f(x, t|x_0)}{\partial t} = \frac{\partial (\frac{x}{t} f(x, t|x_0))}{\partial x} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|x_0)}{\partial x^n} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|x_0)}{\partial x^n}. \quad (4.1)$$

Důkaz. Využijeme Smoluchowského rovnici (1.1) pro homogenní Markovův proces

$$f(x, t + dt|x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + dt|y, t)f(y, t|x_0)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, dt|y)f(y, t|x_0)dy.$$

Určíme nejprve $f(x, dt|y)$. Neboť po delším odvozování přejdeme k limitě $dt \rightarrow 0$, budeme členy většího řádu než dt souhrně psát jako $o(dt)$. Pravděpodobnost nárůstu $X(t)$ o a někde v intervalu $\langle 0, dt \rangle$ je rovna $\lambda dt + o(dt)$, neboť nárůst je způsoben Poissonovým procesem $N_\lambda(t)$. Podobně pravděpodobnost poklesu o i v intervalu $\langle 0, dt \rangle$

je rovna $\omega dt + o(dt)$. Dále víme, že $X(t)$ klesá po exponenciále, za čas $dt_i \rightarrow 0$ tedy klesne o $\frac{X(t)}{\tau} dt_i$. Dostáváme tak rovnici

$$\begin{aligned} f(x, dt|y) &= (1 - (\lambda + \omega)dt + o(dt)) \delta(x - y_0) \\ &+ (\lambda dt + o(dt)) \delta(x - y_1) + (\omega dt + o(dt)) \delta(x - y_2), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} y_0 &= y - \frac{y}{\tau} dt = y \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right), \\ y_1 &= \left(y - \frac{y}{\tau} dt_1 + a\right) \left(1 - \frac{dt_2}{\tau}\right), \\ y_2 &= \left(y - \frac{y}{\tau} dt_1 - i\right) \left(1 - \frac{dt_2}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Předpokládáme tedy, že případný nárůst (pokles) o a (i) nastane v čase dt_1 , a platí $dt_1 + dt_2 = dt$. Pro další účely bude výhodnější mít δ -funkce ve tvaru $\delta(y - h(x))$, kde $h(x)$ je nějaká funkce. Využijeme proto věty 4.1 o transformaci δ -funkce. Zřejmě součin $dt_1 dt_2 \in o(dt)$. Pak

$$\begin{aligned} f(x, dt|y) &= \frac{1}{1 - \frac{dt}{\tau}} (1 - (\lambda + \omega)dt + o(dt)) \delta\left(y - \frac{x}{1 - \frac{dt}{\tau}}\right) \\ &+ \frac{1}{1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt)} (\lambda dt + o(dt)) \delta\left(y - \frac{x - a + a \frac{dt_2}{\tau}}{1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt)}\right) \\ &+ \frac{1}{1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt)} (\omega dt + o(dt)) \delta\left(y - \frac{x + i - i \frac{dt_2}{\tau}}{1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt)}\right). \end{aligned}$$

Platí $(1 - \frac{dt}{\tau} + o(dt))^{-1} = 1 + \frac{dt}{\tau} + o(dt)$. Neboť $dt_2 dt, dt^2 \in o(dt)$, po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} f(x, dt|y) &= \left(\left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) (1 - (\lambda + \omega)dt + o(dt)) \right) \delta\left(y - x \left(1 + \frac{dt}{\tau} + o(dt)\right)\right) \\ &+ \left(\left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) \lambda dt + o(dt) \right) \delta\left(y - (x - a) \left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) + a \frac{dt_2}{\tau} + o(dt)\right) \\ &+ \left(\left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) \omega dt + o(dt) \right) \delta\left(y - (x + i) \left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) - i \frac{dt_2}{\tau} + o(dt)\right) \\ &= \left(1 + \frac{dt}{\tau} - (\lambda + \omega)dt + o(dt)\right) \delta\left(y - x \left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) + o(dt)\right) \\ &+ (\lambda dt + o(dt)) \delta\left(y - (x - a) \left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) + a \frac{dt_2}{\tau} + o(dt)\right) \\ &+ (\omega dt + o(dt)) \delta\left(y - (x + i) \left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) - i \frac{dt_2}{\tau} + o(dt)\right). \end{aligned}$$

Poslední rovnost nyní dosadíme do Smoluchowského rovnice:

$$\begin{aligned} f(x, t + dt | x_0) &= \left(1 + \frac{dt}{\tau} - (\lambda + \omega)dt + o(dt)\right) f\left(x\left(1 + \frac{dt}{\tau} + o(dt)\right), t | x_0\right) \\ &+ (\lambda dt + o(dt)) f\left((x - a)\left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) + a\frac{dt_2}{\tau} + o(dt), t | x_0\right) \\ &+ (\omega dt + o(dt)) f\left((x + i)\left(1 + \frac{dt}{\tau}\right) - i\frac{dt_2}{\tau} + o(dt), t | x_0\right). \end{aligned}$$

Odečtením $f(x, t | x_0)$ od obou stran rovnice, vydělením dt a přeskupením členů dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{f(x, t + dt | x_0) - f(x, t | x_0)}{dt} &= \frac{f(x(1 + \frac{dt}{\tau}) + o(dt), t | x_0) - f(x, t | x_0)}{dt} \\ &+ \frac{1}{\tau} f(x + O(dt), t | x_0) \\ &+ \left(\lambda + \frac{o(dt)}{dt}\right) f((x - a) + O(dt), t | x_0) \\ &- \left(\lambda + \frac{o(dt)}{dt}\right) f(x + O(dt), t | x_0) \\ &+ \left(\omega + \frac{o(dt)}{dt}\right) f((x + i) + O(dt), t | x_0) \\ &- \left(\omega + \frac{o(dt)}{dt}\right) f(x + O(dt), t | x_0). \end{aligned}$$

Přechodem k limitě $dt \rightarrow 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t | x_0)}{\partial t} &= \frac{x}{\tau} \frac{\partial f(x, t | x_0)}{\partial x} + \frac{1}{\tau} f(x, t | x_0) \\ &+ \lambda (f(x - a, t | x_0) - f(x, t | x_0)) + \omega (f(x + i, t | x_0) - f(x, t | x_0)) \\ &= \frac{\partial (\frac{x}{\tau} f(x, t | x_0))}{\partial x} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t | x_0)}{\partial x^n} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t | x_0)}{\partial x^n}, \end{aligned}$$

kde jsme využili Taylorova rozvoje v bodě x za předpokladu, že $f(x, t | x_0)$ je analytická. Stačí nám také, pokud bude $f(x, t | x_0) \in L^2(\mathbb{R})$ (vzhledem k x proměnné), neboť potom ji lze libovolně přesně aproximovat (analytickým) polynomem. Pro $f(x, t | x_0)$ ve tvaru δ -funkce by takový rozvoj nebyl možný. \square

Věta 4.3. *Necht' $X(t)$ je O.U. proces s počáteční podmínkou $X(t_0 = 0) = x_0$. Pak pro podmíněnou hustotu $f(x, t | x_0)$ O.U. procesu platí*

$$f(x, t | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu(t))^2}{2V(t)}\right), \quad (4.2)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu\tau + (x_0 - \mu\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ V(t) &= \frac{\sigma^2\tau}{2}(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}}). \end{aligned}$$

$X(t)$ má tedy normální rozdělení:

$$X(t) \sim N(\mu(t), V(t)) .$$

Důkaz. Protože je Ornstein-Uhlenbeckův proces difúzní a homogenní, platí pro něj Kolmogorova rovnice ($f := f(x, t | x_0, t_0 = 0)$)

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = -\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{x_0}{\tau} - \mu\right) \frac{\partial f}{\partial x_0} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} . \quad (4.3)$$

Rovnici (4.3) nyní budeme řešit. Pokusme se ji transformovat na Kolmogorovu rovnici Wienerova procesu pomocí transformace $\hat{x}_0 = \Psi(x_0, t_0)$, $\hat{t}_0 = \Phi(t_0)$ danou rovnicemi (1.37) a (1.36). K tomu je třeba ověřit platnost rovnice (1.35) a poté z ní vypočítat konstanty c_1 , c_2 . Máme

$$\begin{aligned} a(x_0) &= \frac{\sigma^2}{2} , \\ b(x_0) &= \mu - \frac{x_0}{\tau} . \end{aligned}$$

Dostáváme tak podmínku

$$\begin{aligned} b(x_0) &= \frac{a_{x_0}}{2} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} \left(c_2 \int^{x_0} \frac{dz}{a(z)^{\frac{1}{2}}} + c_1 \right) , \\ \mu - \frac{x_0}{\tau} &= \frac{\sigma}{2^{\frac{3}{2}}} \left(c_1 + c_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sigma} x_0 \right) , \\ c_1 &= \frac{\mu}{\sigma} 2^{\frac{3}{2}} , \\ c_2 &= -\frac{2}{\tau} . \end{aligned}$$

Určíme transformační funkce:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0) &= \frac{\tau}{2} e^{\frac{2t_0}{\tau}} , \\ \Psi(x_0, t_0) &= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sigma} e^{\frac{t_0}{\tau}} (x_0 - \mu\tau) . \end{aligned}$$

Po transformaci dostaneme standardní rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}_0} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \hat{x}_0^2} = 0 ,$$

jejíž řešení je (s počáteční podmínkou $\hat{f}(\hat{x}, \hat{t}_0 | \hat{x}_0, \hat{t}_0) = \delta(\hat{x} - \hat{x}_0)$)

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{t} | \hat{x}_0, \hat{t}_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\hat{t} - \hat{t}_0)}} e^{-\frac{(\hat{x} - \hat{x}_0)^2}{4(\hat{t} - \hat{t}_0)}} .$$

Pro f platí

$$f(x, t | x_0, t_0) = \hat{f}(\hat{x}, \hat{t} | \hat{x}_0, \hat{t}_0) \Psi_x(x, t) .$$

Dosadíme

$$\Psi_x(x, t) = e^{\frac{t}{\tau}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$$

a pro $t_0 = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x, t | x_0) &= e^{\frac{t}{\tau}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\tau}{2} (e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)}} \exp\left(-\frac{\frac{2}{\sigma^2} (e^{\frac{t}{\tau}} (x - \mu\tau) - (x_0 - \mu\tau))^2}{4 \frac{\tau}{2} (e^{\frac{2t}{\tau}} - 1)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \mu(t))^2}{2V(t)}\right) , \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu\tau + (x_0 - \mu\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} , \\ V(t) &= \frac{\sigma^2 \tau}{2} (1 - e^{-2\frac{t}{\tau}}) . \end{aligned}$$

Normálnost rozdělení $X(t)$ je zřejmá z tvaru hustoty f .

□

5 Appendix B

K programu je přiloženo CD, které obsahuje text této práce, zdrojové soubory MATLABu použité k simulacím a dokumentaci k programu. Popis struktury adresářů a souborů na tomto CD je popsán přímo v kořenovém adresáři v souboru `README.txt`.