MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2021 Patrik Hadrbolec

MASARYKOVA
UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Matematické modely v teorii portfolia

Bakalářská práce

Patrik Hadrbolec

Vedoucí práce: Mgr. Silvie Zlatošová, Ph.D. **Brno 2021**

Bibliografický záznam

Autor:	Patrik Hadrbolec Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Matematické modely v teorii portfolia
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Silvie Zlatošová, Ph.D.
Akademický rok:	2020/2021
Počet stran:	ix + 40
Klíčová slova:	Teorie portfolia; Optimální portfolio; Markowitzův model; Očekávaný výnos; Riziko portfolia; Míry rizika; Střední absolutní odchylka; MAD; Hodnota rizika; Podmíněná hodnota rizika

Bibliographic Entry

Author:	Patrik Hadrbolec Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Mathematical models in portfolio theory
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insured Mathematics
Supervisor:	Mgr. Silvie Zlatošová, Ph.D.
Academic Year:	2020/2021
Number of Pages:	ix + 40
Keywords:	Portfolio theory; Optimal portfolio; Markowitz; Mean-Variance model; Expected return; Portfolio risk; Measure of risk; Mean-Absolute-Deviation; Value-at-Risk; VaR; Conditional Value-at-Risk; CVaR

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje vybraným modelům z moderní a postmoderní teorie portfolia. Cílem práce je porovnat tyto modely. V úvodních kapitolách jsou představeny zvolené modely, které jsou následně porovnány z hlediska optimalizace a vlastností funkce rizika. Praktická část práce porovnává modely na portfoliu, které je vytvořené z pěti amerických akcií.

Abstract

In this thesis, we study selected models from modern and postmodern portfolio theory. The objective of the thesis is to compare these models. The first chapters introduce selected models, which are then compared in terms of optimization and properties of the risk function. The practical part of the thesis compares models in the portfolio created from five American stocks.

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2020/2021

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Student:	Patrik Hadrbolec
Program:	Matematika
Obor:	Finanční a pojistná matematika

Ředitel *ústavu* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Matematické modely v teorii portfolia
Název práce anglicky:	Mathematical models in portfolio theory
Jazyk závěrečné práce:	čeština

Oficiální zadání:
Cíl práce:
Student nastuduje vybrané modely z klasické teorie portfolia, které následně porovná s modely z postmoderní teorie portfolia. Nabyté znalosti budou aplikovány na modelových příkladech.

Literatura:
ELTON, Edwin J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 8th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2011. xviii, 727. ISBN 9780470505847.

Vedoucí práce:	Mgr. Silvie Zlatošová, Ph.D.
Datum zadání práce:	26. 6. 2020
V Brně dne:	21. 3. 2021

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Patrik Hadrbolec, 18. 11. 2020
Mgr. Silvie Zlatošová, Ph.D., 18. 11. 2020
RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 18. 11. 2020

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat své vedoucí práce Mgr. Silvii Zlatošové, Ph.D. za cenné rady, připomínky a čas věnovaný pročítáním průběžných verzí mé práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 16. dubna 2021 . . . . . .

Patrik Hadrbolec

Obsah

Přehled použitého značení ..... **viii**

Úvod **1**

Kapitola 1. Markowitzův model **2**
1.1 Očekávaný výnos a očekávané riziko portfolia 2
1.2 Přípustná a efektivní množina 4
1.2.1 Bezrizikové aktivum v portfoliu 5
1.3 Optimalizační úloha Markowitzova modelu 6

Kapitola 2. MAD model **7**
2.1 Vlastnosti funkce *MAD* 8
2.2 Optimalizační úloha MAD modelu 11
2.3 Efektivní množina 13

Kapitola 3. CVaR model **14**
3.1 Funkce *VaR* a její vlastnosti 14
3.1.1 Metody výpočtu *VaR* 16
3.2 Funkce *CVaR* a její vlastnosti 17
3.3 Optimalizační úloha CVaR modelu 20

Kapitola 4. Teoretické porovnání modelů **22**

Kapitola 5. Praktické porovnání modelů **24**
5.1 Příprava dat a jejich analýza 24
5.2 Optimální váhy $\mathbf{w}^*$ a efektivní množiny 27
5.3 Chování optimálních portfolií v následujících 3 měsících 32

Závěr **34**

Příloha **35**

Seznam použité literatury **40**

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde je přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

MAD	střední absolutní odchylka
VaR	Value-at-Risk (hodnota rizika) nebo-li odhad maximální ztráty
$CVaR$	Conditional Value-at-Risk (očekávaná ztráta)
$\mathbb{E}(X)$	střední hodnota náhodné veličiny X
$\mathbb{D}(X)$	rozptyl náhodné veličiny X
N	počet cenných papírů v portfoliu
R_i/R_P	náhodná veličina určující výnos cenného papíru i / portfolia P za určitou dobu
$\mathbf{R}$	náhodný vektor výnosů cenných papírů za určitou dobu
$\overline{R_i}/\overline{R_P}$	očekávaný výnos cenného papíru i / portfolia P za určitou dobu
$\overline{\mathbf{R}}$	vektor očekávaných výnosů cenných papírů za určitou dobu
σ_i^2	rozptyl cenného papíru i
σ_i	směrodatná odchylka cenného papíru i
w_i	podíl i-tého cenného papíru investovaného do portfolia
$\mathbf{w}$	vektor vah cenných papírů v portfoliu
σ_{ij}	kovariance výnosnosti mezi cennými papíry i a j
$\mathbf{\Sigma}$	kovarianční matice
ρ_{ij}	korelační koeficient výnosnosti mezi cennými papíry i a j
$\mathbf{1}_N$	vektor obsahující samé jedničky o rozměru $N \times 1$
R_f	výnosnost bezrizikového aktiva
$\mathbf{w}^*$	optimální vektor vah cenných papírů v portfoliu
V	množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru
$F(x)$	distribuční funkce
$Q(\alpha)$	kvantilová funkce
L_P	náhodná veličina určující ztráty z portfolia P
u_α	α-kvantil standardizovaného normálního rozdělení
$\Phi^{-1}(\alpha)$	kvantilová funkce standardizovaného normálního rozdělení
T	maximální hodnota období t (tj. $t \in \{1, \ldots, T\}$)
r_{it}	realizace náhodné veličiny R_i v čase t

$\mathbf{w}^*_{M.}$	optimální vektor vah pro Markowitzův model
$\mathbf{w}^*_{MAD}$	optimální vektor vah pro MAD model
$\mathbf{w}^*_{CVaR}$	optimální vektor vah pro CVaR model

Úvod

Teorie portfolia je mikroekonomická disciplína, která se zabývá hledáním optimálního portfolia z předem zvolených aktiv. První matematický model teorie portfolia (Markowitzův) vznikl již v roce 1959 a dodnes se používá. V průběhu let se objevil nemalý počet modifikovaných modelů, které patří do tzv. postmoderní teorie portfolia a snaží se o dosažení lepších výsledků oproti Markowitzovu modelu.

V práci je představen jak samotný Markowitzův model, tak i dva postmoderní modely. U postmoderních modelů je zkoumáno v jakých situacích jsou lepší než Markowitzův model a zda jsou rozdíly dostatečně výrazné, aby mělo smysl je v praxi používat. Tyto dva postmoderní modely jsou MAD model a CVaR model, které se liší ve výpočtu očekávaného rizika portfolia.

Úvodní tři kapitoly představí základní pojmy teorie portfolia, optimalizační úlohy modelů a vlastnosti měr rizik jako jsou Mean-Absolute Deviation, Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk. Nejvíce důležitá kapitola teoretické části je pravděpodobně čtvrtá kapitola, jelikož shrnuje rozdíly mezi modely a měr rizik z teoretického hlediska, a to v co nejstručnější formě.

Poslední kapitola práce je zaměřena na rozdíly modelů u reálných dat. Předmětem analýzy je hlavně vizualizace a porovnávání hodnot v přehledných tabulkách. Metodika je založena na porovnání optimálních portfolií, efektivních množin a na výnosy optimálních portfolií v následujících měsících. Tato bakalářská práce též obsahuje podrobnou dokumentaci v programovacím jazyce R, kde je provedena celá praktická část.

Kapitola 1

Markowitzův model

Racionální investoři se vždy snažili diverzifikovat svá portfolia. V 50. letech 20. století jim Harry Markowitz usnadnil práci, když představil svůj nový přístup k teorii portfolia. Tento přístup lze dohledat pod názvy jako Markowitzův model, Markowitzova moderní teorie portfolia nebo Mean-Variance model. Hlavní myšlenka spočívá v tom, že investor počítá se ziskem z investice jako s náhodnou veličinou a podle číselných charakteristik této veličiny určí optimální portfolio.

Při rozhodování by si měl investor uvědomit, že očekávané výnosy a rizika cenných papírů v portfoliu během doby investice jsou neznámé a že údaje použité při optimalizaci portfolia jsou pouhé výběrové odhady.

Předpoklady Markowitzova modelu dle [2]

- *investoři investují v jednom určitém časovém období*
- *investoři hodnotí portfolia podle očekávaného výnosu a očekávaného rizika*
- *ze 2 portfolií se stejným očekávaným rizikem si investor vybere to s vyšším výnosem*
- *ze 2 portfolií se stejným očekávaným výnosem si investor vybere to s nižším rizikem*
- *jednotlivá aktiva se dají libovolně dělit*
- *existuje bezrizikové aktivum se sazbou* R_f
- *zanedbáme daně, poplatky a další transakční výdaje*

1.1 Očekávaný výnos a očekávané riziko portfolia

Markowitzův přístup říká, že investor nejdříve stanoví očekávanou výnosnost a očekávané riziko změny výnosu portfolia a pak podle výsledných hodnot rozhoduje o optimálním portfoliu.

K těmto hodnotám se investor dostane přes historická data kurzů cenných papírů. Před uvedením konkrétních vzorců pomocí následující definice zavedu základní značení pro moji práci.

Definice 1.1. Uvažujme portfolio P s N cennými papíry na určitou dobu. Nechť $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)^T$ je náhodný vektor, kde R_i značí výnosnost i-tého cenného papíru. Pak

$$\overline{\mathbf{R}} = (\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_N)^T, \quad \text{kde } \overline{R}_i = \mathbb{E}(R_i) \quad \text{pro } i \in \{1, \ldots, N\}$$

značí vektor očekávaných výnosů cenných papírů v portfoliu P.

Se střední hodnotou se vážou užitečné vlastnosti jako :

1. střední hodnota součtu dvou náhodných veličin

$$\mathbb{E}(R_1 + R_2) = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$$

2. střední hodnota součinu náhodné veličiny s konstantou $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(c \cdot R_i) = c \cdot \overline{R}_i$$

Další definice představí očekávaný výnos celého portfolia.

Definice 1.2. Nechť w_i je váha cenného papíru i v portfoliu. Pak se *výnos portfolia* R_P rovná váženému průměru výnosů cenných papírů, tj.

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Dopočítání očekávaného výnosu portfolia se provede využitím vlastností střední hodnoty.

$$\overline{R}_P = \mathbb{E}(R_P) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(w_i R_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}(R_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i$$

Maticově lze zapsat jako

$$\overline{R}_P = \mathbf{w}^T \cdot \overline{\mathbf{R}},$$

kde $\mathbf{w}^T$ značí transpozici vektoru vah $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_N)^T$.

Další užitečnou charakteristikou náhodné veličiny R_P je její variabilita. Jinými slovy rozptyl, v této práci značený jako $\mathbb{D}(R_P)$ nebo σ^2. K určení $\mathbb{D}(R_P)$ je potřeba definice kovarianční matice.

Definice 1.3. Nechť $\mathbf{\Sigma}$ je *kovarianční matice* náhodného vektoru $\mathbf{R}$, pak

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}((\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}})(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}})^T)$$

Pomocí vlastností střední hodnoty a definice kovarianční matice odvodíme rozptyl výnosnosti portfolia. Uvedu zde pouze maticovou verzi odvození.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(R_P) &= \mathbb{E}(R_P - \overline{R}_P)^2 = \mathbb{E}(\mathbf{w}^T\mathbf{R} - \mathbf{w}^T\overline{\mathbf{R}})^2 = \mathbb{E}(\mathbf{w}^T(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}}))^2 \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{w}^T(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}})(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}})^T\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\end{aligned}$$

Markowitzův model přistupuje k očekávanému riziku portfolia jako ke směrodatné odchylce výnosu portfolia. Finální tvar funkce rizika:

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}}$$

1.2 Přípustná a efektivní množina

Tyto množiny se zobrazují na prostoru $(\sigma, \overline{R})$.

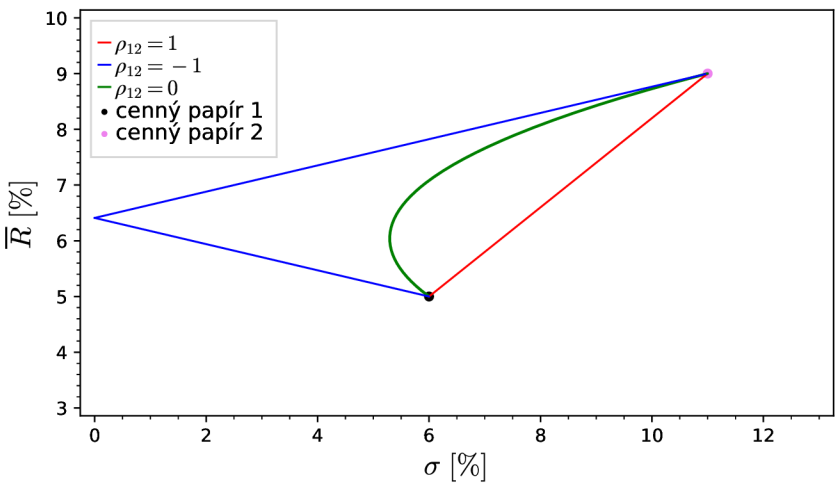
Přípustná množina značí všechna možná portfolia, která lze vytvořit z N cenných papírů. Je potřeba uvažovat podmínku v podobě $\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1$, která říká, že se investuje vše.

Když vybereme cenný papír z portfolia s maximálním rizikem, tak s žádnou kombinací cenných papírů v portfoliu nevytvoříme větší riziko. Analogicky u maximálního výnosu.

Přípustnou množinu dále ovlivňuje korelace ρ_{ij} mezi cennými papíry. Jak moc, zde demonstruji na obrázku 1.1, kde vodorovná osa představuje riziko σ a svislá osa očekávaný výnos $\overline{R}$. Na tomto obrázku uvažujeme pouhé dva cenné papíry s údaji z tabulky 1.1.

i	σ_i [%]	$\overline{R}_i$ [%]
1	6	5
2	11	9

Tab. 1.1: Očekávané riziko a výnos cenného papíru 1 a 2 [*Vlastní zpracování*]



Obr. 1.1: Přípustné množiny dvou cenných papírů v závislosti na jejich korelaci [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]

Extrémy v podobě dokonale pozitivní či negativní korelace v praxi nenajdeme, proto je tvar přípustné množiny dvou cenných papírů z pravidla zaoblený.

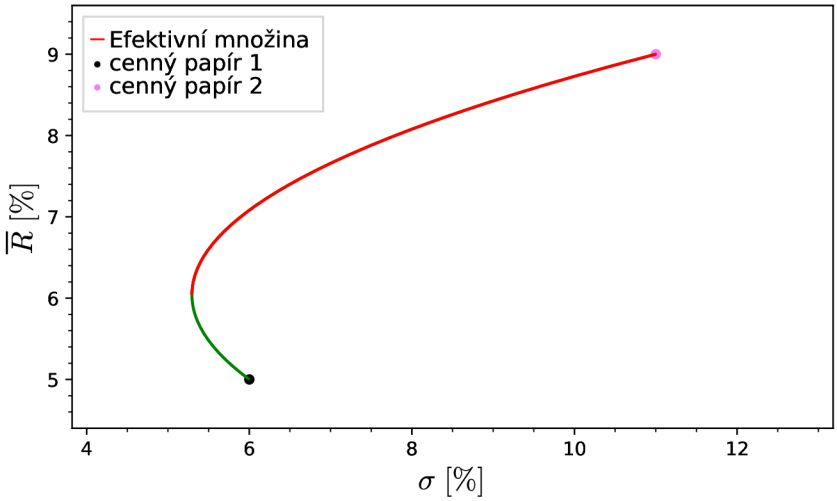
Definice 1.4. *Efektivní množina* nebo-li *efektivní hranice* je množina portfolií, která splňují podmínky:

- Nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika.
- Nabízejí minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti.

Při zavedení následujícího značení, lze napsat i pomocí matematické definice. $h(PM)$ značí hranici přípustné množiny. Bod $[\sigma_{min}, \overline{R}_a]$ je bod s minimálním rizikem a bod $[\sigma_a, \overline{R}_{max}]$ je bod s maximálním očekávaným výnosem. Pak by matematická definice efektivní množiny mohla vypadat následovně:

$$EF_{RP} = \{[\sigma, \overline{R}] \in \mathbb{R}^2 \mid [\sigma, \overline{R}] \in h(PM),\ \sigma \leq \sigma_a,\ \overline{R} \geq \overline{R}_a\}$$

Při uvažování dvou nekorelovaných cenných papírů je jejich efektivní množina vyznačena na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Efektivní množina [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]

1.2.1 Bezrizikové aktivum v portfoliu

Bezrizikové aktivum je aktivum f, pro které platí, že $\sigma = 0$. R_f značí výnosnost tohoto aktiva.

Při investici do bezrizikového aktiva a rizikového aktiva s $\overline{R}_1$ a σ_1 je přípustná množina tvořena úsečkou s krajními body $[0, R_f]$ a $[\sigma_1, \overline{R}_1]$.

Ohledně investování do bezrizikového aktiva a rizikového portfolia přípustná množina bude tvořena všemi možnými úsečkami mezi bodem $[0, R_f]$ a všemi ostatními body z přípustné množiny samotného rizikového portfolia. Část efektivní množiny bude tvořit spojnice mezi body $[0, R_f]$ a $[R_{RP}, \sigma_{RP}]$, kde RP značí rizikové portfolio z efektivní množiny

rizikového portfolia. Tento bod se dá specifikovat na tzv. tangenciální portfolio $[\overline{R}_T, \sigma_T]$, které se najde jako bod, v kterém tečna efektivní množiny rizikového portfolia prochází bodem $[0, R_f]$. Za tangenciálním portfoliem zůstane efektivní množina ve tvaru efektivní množiny rizikového portfolia. Moje matematická definice by vypadala takto:

$$EF_{BA+RP} = \left\{ [\sigma, \overline{R}] \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{R} = \frac{\overline{R}_T - R_f}{\sigma_T}\sigma + R_f, \sigma \in [0, \sigma_T] \right\} \cup \{EF_{RP} \mid \sigma \geq \sigma_T\}$$

EF_{BA+RP} značí efektivní množinu pro investici do bezrizikového aktiva a rizikového portfolia a EF_{RP} značí efektivní množinu rizikového portfolia.

Poznámka. V praxi bezrizikové aktivum neexistuje a při reálných výpočtech se často používají například týdenní pokladniční poukázky bezpečného státu. Tato poznámka je dobrá k uvědomění, že spousta předpokladů Markowitzova modelu v realitě není splněna a bezrizikové aktivum je pouhý teoretický nástroj.

1.3 Optimalizační úloha Markowitzova modelu

Investor zná očekávané výnosy a rizika cenných papírů do kterých chce investovat, chybí mu však ještě nejdůležitější informace a to jaké váhy přiřadit cenným papírům při investování. Jinými slovy, cílem investora je najít optimální vektor vah $\mathbf{w}^*$.

Funkcionál, který bude tvořit naši účelovou funkci bude rozptyl výnosu portfolia. Rozptyl výnosu portfolia budeme chtít minimalizovat.

$$\sigma^2(\mathbf{w}) \to \min$$

Poznámka. Minimum rozptylu nastane ve stejném bodě jako minimum směrodatné odchylky. Takže jako účelovou funkci je možné volit i $\sigma(\mathbf{w})$.

Omezující podmínky :

(a) Investor vloží do investice celou částku k tomu určenou.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N$$

(b) Zákaz sell shortu (prodeje nakrátko).

$$w_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, N\}$$

(c) Investor si určí maximální riziko.

(d) Investor si určí výnos.

V této práci budu počítat pouze s omezující podmínkou (a) a (b). Optimalizační úlohu Markowitzova modelu lze tedy zapsat jako:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma^2(\mathbf{w}) \to \min \\ &\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1 \\ &w_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, N\} \end{aligned}} \tag{M1}$$

Kapitola 2

MAD model

V této kapitole uvedu základní myšlenky Mean-Absolute Deviation (MAD) modelu, který je variantou Markowitzova modelu. Dále se zaměřím na vlastnosti míry rizika v tomto modelu a následně na optimalizaci modelu a aproximace, které se používají.

MAD model představil Hiroshi Konno v roce 1990. Tento model se řadí do postmoderní teorie portfolia a jeho účelem je řešit optimalizační problémy velkých portfólií, které nelze efektivně řešit pomocí Markowitzova přístupu. U MAD modelu se uvažují stejné předpoklady jako v předchozí kapitole.

Ohledně očekávaného výnosu se tento model neliší od Markowitzova, tj.

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i w_i = \mathbf{w}^T \cdot \overline{\mathbf{R}}.$$

Rozdíl v těchto dvou modelech je ve výpočtu očekávaného rizika portfolia. Markowitz ve svém modelu definoval riziko jako směrodatnou odchylku náhodné veličiny R_P. MAD model používá střední absolutní odchylku kolem střední hodnoty náhodné veličiny R_P, kterou v této práci značím jako MAD.

Definice 2.1. Pro *střední absolutní odchylku* výnosu portfolia platí následující vztah:

$$MAD(R_P) = \mathbb{E}(|R_P - \overline{R}_P|)$$

Obrázky 2.1 a 2.2 znázorňují rozdíl mezi zvolením rozptylu a MAD jako funkcí rizika výnosu portfolia. Bod, který se jako jediný dotýká osy výnosnosti ($\overline{R}$) je u rozptylu a i u MAD bod se souřadnicemi $[\overline{R}_P, 0]$. Rozptyl se zvětšuje, čím více se realizace náhodné veličiny R_P vzdaluje od $\overline{R}_P$. Výrazně rychleji než MAD. Výjimkou jsou menší hodnoty rozdílů mezi realizací a střední hodnotou výnosu, kde rychleji roste MAD.

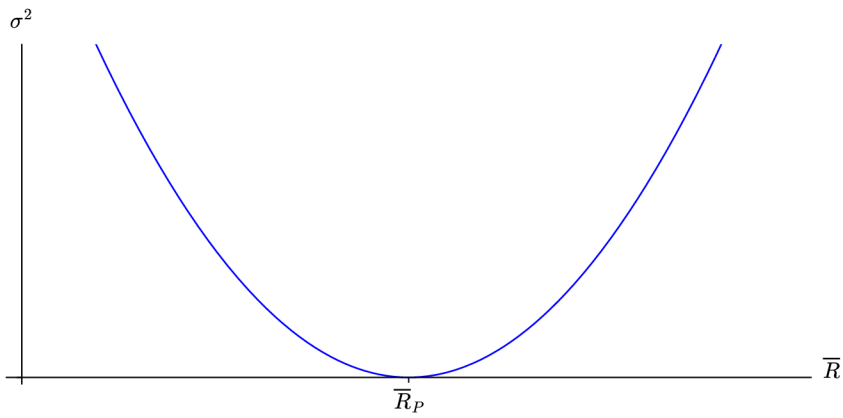
Dále je vhodné poznamenat, že MAD jako riziko portfolia má lineární růst. Toto má různé důsledky v oblasti optimalizace portfolia.

Z obrázků, lze vyvodit konvexnost rozptylu i MAD. Vyplývá to z tvrzení, že když nadgraf funkce je konvexní množina, tak tato funkce je konvexní. Pro úplnost zde uvedu definici nadgrafu a konvexní množiny.

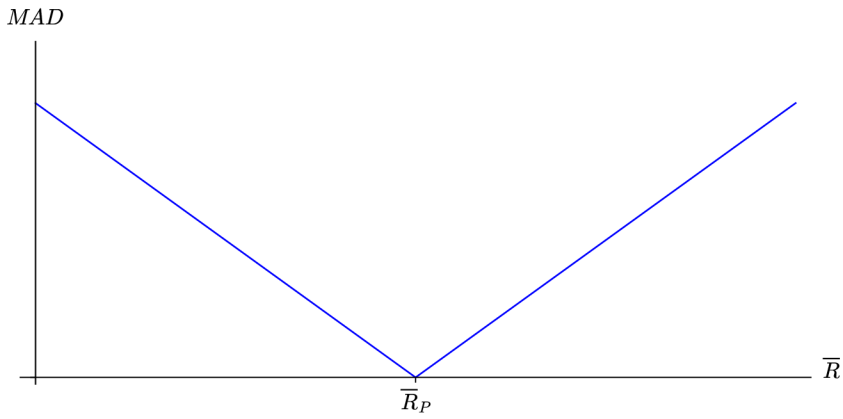
Definice 2.2. Nechť f je funkce jedné proměnné. *Nadgrafem* funkce f se rozumí množina

$$\mathrm{epi} f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$$

pro taková x, která patří do definičního oboru f.



Obr. 2.1: Rozptyl jako míra rizika [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]



Obr. 2.2: *MAD* jako míra rizika [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]

Definice 2.3. Množina X je *konvexní*, jestliže platí

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X \qquad \text{pro } \forall x_1, x_2 \in X \text{ a } \lambda \in [0,1]$$

Více matematicky podrobný důkaz konvexnosti funkce *MAD* je uveden v následující podkapitole.

2.1 Vlastnosti funkce *MAD*

Funkce, která má za účel odhadovat riziko výnosu portfolia, by měla splňovat vhodné vlastnosti pro určení, zda se blíží realitě a je vhodné ji jako míru rizika uvažovat. Dále tyto vlastnosti mohou být nápomocné pro určení strategie investice nebo například pro určení, které funkce se budou snadněji řešit při optimalizaci portfolia. Ve výsledku záleží na investorovi, zda tyto vlastnosti bude požadovat nebo nikoliv.

Definice 2.4. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Když $X, Y, X+Y \in V$, pak o funkci $f\colon V \to \mathbb{R}$, řekneme, že je *sub-aditivní* pokud splňuje nerovnost

$$f(X+Y) \leq f(X) + f(Y).$$

Sub-aditiva je pro funkci rizika důležitá. Funkce míry rizika by měla zajistit, aby riziko diverzifikovaného portfolia nebylo větší než součet individuálních rizik z investic. A přesně tuto vlastnost sub-aditivita zaručuje. Bez této vlastnosti by pro investora nemělo smysl diverzifikovat svá portfolia, což není v souladu s realitou.

K dokázání této vlastnosti u funkce *MAD* bude potřeba následující věta z [3, strana 71]

Věta 2.1. *Nechť X_1, X_2 jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Nechť existují $\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2)$ a platí $X_1 \leq X_2$, potom $\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2)$.*

Definice 2.5. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Funkce $f\colon V \to \mathbb{R}$ je *pozitivně homogenní*, pokud

$$f(\lambda X) = \lambda f(X)$$

pro $\forall X \in V$ a $\lambda > 0$.

Podmínka říká, že při vynásobení výnosnosti kladným číslem λ se nám číslem λ vynásobí i riziko z dané investice při stejném výnosu. Tento jev v reálu způsobuje například pokles likvidity.

Definice 2.6. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Funkce $f\colon V \to \mathbb{R}$ je *G-P translačně invariantní*, pokud pro $\forall c \in \mathbb{R}$ a $\forall X \in V$ platí:

$$f(X + c) = f(X).$$

Jinými slovy, že při přidání bezrizikových aktiv do portfolia, se riziko investice nezmění.

Definice 2.7. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Funkce $f\colon V \to \mathbb{R}$ je *konvexní* pokud

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

pro $\forall X, Y \in V$ a $\lambda \in [0,1]$.

Matematické modely v teorii portfolia dávají investorovi optimalizační úlohu, která se musí řešit. Většinou se minimalizuje riziko a konvexnost míry je pomoc při řešení těchto optimalizačních úloh. Podrobnějším vlastnostem ohledně konvexnosti funkce se zabývá matematická disciplína konvexní analýza.

Věta 2.2. *Funkce MAD je:*

a) sub-aditivní,

b) pozitivně homogenní,

c) G-P translačně invariantní,

d) konvexní.

Důkaz. a) Chceme dokázat, že $MAD(X+Y) \leq MAD(X)+MAD(Y)$. Pro levou stranu nerovnice platí

$$MAD(X+Y) = \mathbb{E}(|X+Y-\mathbb{E}(X+Y)|) = \mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y)|).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu plyne, že $|X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y)| \leq |X-\mathbb{E}(X)|+|Y-\mathbb{E}(Y)|$. Toto, lze v tomto případě aplikovat i na střední hodnoty, díky Větě 2.1. Takže dostáváme nerovnost

$$\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)+Y-\mathbb{E}(Y)|) \leq \mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|)+\mathbb{E}(|Y-\mathbb{E}(Y)|),$$

kde levá strana nerovnosti je upravené $MAD(X+Y)$ a pravá strana nerovnosti je po přímé aplikaci Definice 2.1 $MAD(X)+MAD(Y)$.

b) Díky vlastnostem střední hodnoty a předpokladu, že $\lambda > 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} MAD(\lambda X) &= \mathbb{E}(|\lambda X-\mathbb{E}(\lambda X)|) = \mathbb{E}(|\lambda X-\lambda\mathbb{E}(X)|) = \mathbb{E}(\lambda|(X-\mathbb{E}(X))|) = \\ &= \lambda\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|) = \lambda MAD(X). \end{aligned}$$

c) Pro všechna reálná c platí

$$\begin{aligned} MAD(X+c) &= \mathbb{E}(|X+c-\mathbb{E}(X+c)|) = \mathbb{E}(|X+c-\mathbb{E}(X)-c|) = \\ &= \mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|) = MAD(X). \end{aligned}$$

d) Chceme ukázat, že

$$MAD(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \lambda MAD(X)+(1-\lambda)MAD(Y).$$

Levou stranu lze upravit na tvar

$$\mathbb{E}(|\lambda X+Y-\lambda Y-\lambda\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)+\lambda\mathbb{E}(Y)|)$$

a pravou stranu na

$$\mathbb{E}(|\lambda X-\lambda\mathbb{E}(Y)|)+\mathbb{E}(|Y-\mathbb{E}(Y)-\lambda Y+\lambda\mathbb{E}(Y)|).$$

Zde se opět použije Věta 2.1 a trojúhelníková nerovnost absolutní hodnoty. Pro lepší vizualizaci zavedu substituci $A = \lambda(X-\mathbb{E}(X))$ a $B = Y-\mathbb{E}(Y)-\lambda(Y+\mathbb{E}(Y))$. Pak jde vidět, že

$$\mathbb{E}(|A+B|) \leq \mathbb{E}(|A|)+\mathbb{E}(|B|).$$

□

Poznámka. U konvexnosti není nutné takto dopodrobna dokazovat, jelikož platí, že vlastnost sub-aditivity a pozitivní homogenity implikuje konvexnost.

2.2 Optimalizační úloha MAD modelu

Máme funkcionál v podobě funkce *MAD*, kterou chceme minimalizovat. Jinými slovy, funkce *MAD* je účelovou funkcí optimalizační úlohy tohoto modelu. Opět uvažuji, že se investuje všechno a sell short je zakázán. Optimalizační úloha má tvar

$$\boxed{\begin{aligned} &MAD(\mathbf{w}) \to \min \\ &\quad \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1 \\ &w_i \geq 0,\ i \in \{1,\dots,N\} \end{aligned}} \tag{M2}$$

K určení optimálního vektoru vah $\mathbf{w}^*$ bude potřeba znát historická data za období t, kde t nabývá hodnot od 1 do T.

Podle [6] se pak funkce $MAD(\mathbf{w})$ dá aproximovat jako

$$MAD(\mathbf{w}) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{N} w_i R_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i\right)\right|\right) \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N} w_i (r_{it} - \overline{R}_i)\right|,$$

kde r_{it} je realizace náhodné veličiny R_i v čase t. Tato aproximace je důsledkem aproximace očekávané výnosnosti, konkrétně jako

$$\overline{R}_i \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}.$$

Což je běžný odhad pomocí aritmetického průměru z hodnot, které známe.

Při označení $a_{it} = r_{it} - \overline{R}_i$ a uvážení předchozí aproximace lze optimalizační úlohu MAD modelu zapsat jako

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N} w_i a_{it}\right| \to \min \\ &\qquad \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1 \\ &\qquad w_i \geq 0,\ i \in \{1,\dots,N\} \end{aligned}}$$

.

Přípustná množina po aproximaci zůstává zachována.

Tento pohled na model je ekvivalentní s úlohou lineárního programování tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \to \min \\ &y_t + \sum_{i=1}^{N} w_i a_{it} \geq 0 \\ &y_t - \sum_{i=1}^{N} w_i a_{it} \geq 0,\ t \in \{1,\dots,T\} \\ &\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1 \\ &w_i \geq 0,\ i \in \{1,\dots,N\} \end{aligned}}$$

kterou, lze řešit například simplexovým algoritmem.

Věta 2.3 (O propojení s Markowitzovým modelem). *Jestliže $R_P \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak*

$$MAD(\mathbf{w}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{w}).$$

Důkaz. Nechť $f(x)$ je hustota náhodné veličiny R_P. Platí

$$\begin{aligned} MAD(\mathbf{w}) &= \mathbb{E}(|R_P - \overline{R}_P|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu(\mathbf{w})| \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{w})} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu(\mathbf{w})| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma(\mathbf{w})}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu(\mathbf{w})}{\sigma(\mathbf{w})} \\ x - \mu(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w})t \\ \mathrm{d}x = \sigma(\mathbf{w})\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{w})} \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma(\mathbf{w})t| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma(\mathbf{w})\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Z vlastností integrálů a znalosti, že směrodatná odchylka bude vždy kladná, dostaneme výraz

$$\frac{\sigma^2(\mathbf{w})}{\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{w})} \int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.2.1}$$

Argument integrálu je sudá funkce. Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$ lze tedy přepsat na $2 \cdot \int_0^{\infty} |t| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$. Než dosadíme, tak tento integrál vypočítáme. S využitím Newtonovy–Leibnizovy formule obdržíme

$$\int_0^{\infty} |t| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\right)}_{=0} + \mathrm{e}^0 = 1.$$

Vyšlo, že nevlastní integrál konverguje k 1. Po dosazení do výrazu (2.2.1) obdržíme tvrzení věty a důkaz je hotov.

$$MAD(\mathbf{w}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{w})$$

□

Důsledek této věty je, že když se náhodný vektor výnosů $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$ řídí vícerozměrným náhodným rozdělením, tak Markowitzův i MAD model budou mít stejné optimální portfolio. A pokud se $\mathbf{R}$ neřídí vícerozměrným náhodným rozdělením, tak výsledná optimální portfolia budou rozdílná.

2.3 Efektivní množina

Při zobrazení efektivní množiny MAD modelu na prostor riziko-výnos bychom dostali podobný tvar jako u Markowitzova modelu. Jediný rozdíl je ve výpočtu rizika, takže na vertikální ose by nebyla směrodatná odchylka, ale střední absolutní odchylka.

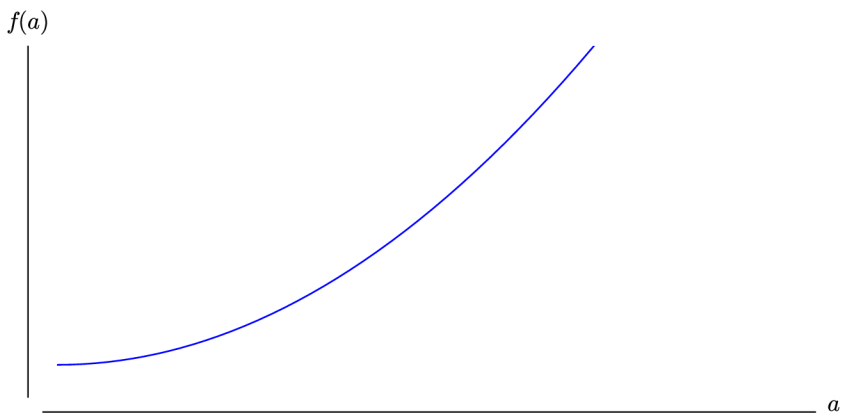
V [4] efektivní množinu definují pomocí následující definice.

Definice 2.8. Uvažujme zobrazení f se závislou proměnnou a, která značí pevně dané očekávané riziko portfolia v podobě:

$$f(a) := \min\{MAD(\mathbf{w}) \mid \overline{R}_P = a \ , \ \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N = 1 \ , \ w_i \leq 0 \ , \ i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

Funkce f je *efektivní množina* MAD modelu (M2).

Díky Větě 2.2 víme, že funkce *MAD* je konvexní. Z toho vyplývá, že i $f(a)$ bude konvexní. Obrázek 2.3 demonstruje tvar efektivní množiny na prostoru $(a, f(a))$.



Obr. 2.3: Efektivní množina MAD modelu [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage, inspirace z [4]*]

Poznámka. MAD model má i svou CAPM verzi, kde se uvažuje bezrizikové aktivum a tržní portfolio. Podrobnější informace o této modifikaci MAD modelu, lze najít v [4] .

Kapitola 3

CVaR model

Neexistuje univerzální míra rizika. I přesto, že směrodatná odchylka i funkce *MAD* poskytují užitečné informace o riziku portfolia, nezodpoví všechny otázky, které si investor pokládá. Jedna z těchto otázek je například, kolik investor může ztratit v průběhu následujícího dne, týdne, měsíce apod. K odpovězení otázek tohoto typu se využívají kvantilové míry rizika Value-at-Risk (*VaR*), Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) a mnoho dalších. Hlavní cíl této kapitoly je představit matematický model, který hledá optimální portfolio pomocí minimalizace funkce *CVaR*. K definování samotné funkce rizika *CVaR* bude potřeba definovat pojmy jako kvantil a *VaR*, na které se zaměřím v první polovině kapitoly.

Kvantil je číselná charakteristika náhodné veličiny, která dává informaci o poloze. K určení konkrétní definice je potřeba zadefinovat distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X vztahem

$$F(x) = P(X \leq x),$$

kde X je náhodná veličina definována na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

S tímto značením, lze zadefinovat kvantil podle [3].

Definice 3.1. Nechť $\alpha \in (0,1)$. Potom funkce

$$Q(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$$

se nazývá *kvantilová funkce* a číslo

$$x_\alpha = Q(\alpha)$$

je α-*kvantilem* rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$.

Pokud X je spojitá náhodná veličina, tak se kvantilová funkce $Q(\alpha)$ dá zapsat jako inverzní funkce distribuční funkce, tj.

$$Q(\alpha) = F^{-1}(\alpha).$$

3.1 Funkce *VaR* a její vlastnosti

„VaR je odhadem maximální ztráty, ke které může dojít s předepsanou spolehlivostí ve stanoveném budoucím období.“ [7]

V české literatuře, lze dohledat i pod názvem *hodnota rizika*. Tato míra je často používaná nejen v portfoliu, ale třeba i v pojišťovnictví a dalších finančních institucích. V teorii portfolia se používá hlavně za účelem lepší orientace investorů ohledně rizikovosti investice do daného portfolia.

Definice 3.2. Pro náhodnou veličinu $L_P = -R_P$, určující ztrátu portfolia P, s distribuční funkcí $F_L(x)$, kvantilovou funkcí $Q_L(\alpha)$ se spolehlivostí $\alpha \in (0,1)$ je *VaR* definováno jako

$$VaR_\alpha(L_P) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_L(x) \geq \alpha\} = Q_L(\alpha).$$

Je důležité si uvědomit, že v této definici se pracuje s náhodnou veličinou určující *ztrátu* portfolia. V takovém případě *VaR* je lehce definováno jako α-kvantil.

Samotný výraz $VaR_\alpha(L_P)$ se dá vyjádřit i jiným způsobem než bylo na začátku podkapitoly. Například jako minimální ztráta, která nebude překročena s pravděpodobností α, či jako minimální ztráta při nejhorších scénářích investice s pravděpodobností $(1-\alpha)$. Spolehlivost α se většinou volí $0,9; 0,95$ nebo $0,99$.

Poznámka. Při práci s náhodnou veličinou R_P, určující výnos, by se definice *VaR* změnila na

$$VaR_{1-\alpha}(R_P) = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_R(x) \geq 1-\alpha\} = -Q_R(1-\alpha),$$

kde $F_R(x)$ je distribuční funkce veličiny R_P a $Q_R(\alpha)$ kvantilová funkce veličiny R_P.

Ohledně spolehlivosti i časového horizontu je snadné provést tzv. *konverzi*. Nechť VaR^A označuje hodnotu rizika v časovém horizontu t_A a spolehlivostí α_A. A chceme vypočítat hodnotu rizika VaR^B v časovém horizontu t_B a spolehlivostí α_B. Pak se použije vzorec

$$VaR^B = \frac{u_{\alpha_B}}{u_{\alpha_A}} \cdot \sqrt{\frac{t_B}{t_A}} \cdot VaR^A,$$

kde u_α značí α-kvantil standardizovaného normálního rozdělení.

Pro analýzu vlastností, které funkce *VaR* má, bude vhodné definovat monotónnost a translační invarianci, jelikož tyto vlastnosti se často určují jako 2 ze 4 axiomů *koherentních* metrik rizika.

Definice 3.3. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Funkce $f\colon V \to \mathbb{R}$ splňuje vlastnost *monotónie*, když pro každé $X, Y \in V$, takové že $X \leq Y$ platí nerovnost

$$f(X) \leq f(Y).$$

Tato vlastnost informuje o míře rizika, že menší ztráty implikují menší riziko.

Definice 3.4. Nechť V je množina všech reálných náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Funkce $f\colon V \to \mathbb{R}$ je *translačně invariantní*, pokud pro $\forall c \in \mathbb{R}$ a $\forall X \in V$ platí:

$$f(X+c) = f(X) + c.$$

Z definic je zřejmé, že funkce nemůže být translačně invariantní a zároveň G-L translačně invariantní. Při práci se ztrátami translační invariance poukazuje, že při navýšení ztráty se navýší i riziko, a to o stejnou hodnotu.

Věta 3.1. *Funkce VaR je :*

a) monotónní,

b) pozitivně homogenní,

c) translačně invariantní.

Důkaz. Důkaz provedu jen pro náhodné veličiny spojitého typu a budu předpokládat, že prezentují ztrátu z investice. Díky tomuto omezení, lze $VaR_\alpha(X)$ zapsat jako $F_X^{-1}(\alpha)$. Dále budu využívat vlastnost, že α se dá zapsat jako $F_X(F_X^{-1}(\alpha))$.

a) Předpokládáme $X \leq Y$. Z toho plyne, že pro $\forall p \in \mathbb{R}$, platí $P(X \leq p) \geq P(Y \leq p)$. Proto bude platit nerovnost

$$\inf\{p \in \mathbb{R} \mid P(X \leq p) \geq \alpha\} \leq \inf\{p \in \mathbb{R} \mid P(Y \leq p) \geq \alpha\},$$

což je pouze jinak zapsáno $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$.

b) Pro každé $\lambda > 0$ platí

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= F_{\lambda X}^{-1}(\alpha) = F_{\lambda X}^{-1}[F_X(F_X^{-1}(\alpha))] = F_{\lambda X}^{-1}[P(X \leq F_X^{-1}(\alpha))] = \\ &= F_{\lambda X}^{-1}[P(\lambda X \leq \lambda F_X^{-1}(\alpha))] = F_{\lambda X}^{-1}[F_{\lambda X}(\lambda F_X^{-1}(\alpha))] = \\ &= \lambda F_X^{-1}(\alpha) = \lambda VaR_\alpha(X). \end{aligned}$$

c) Pro všechna $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X+c) &= F_{X+c}^{-1}(\alpha) = F_{X+c}^{-1}[F_X(F_X^{-1}(\alpha))] = F_{X+c}^{-1}[P(X \leq F_X^{-1}(\alpha))] = \\ &= F_{X+c}^{-1}[P(X+c \leq F_X^{-1}(\alpha)+c)] = F_{X+c}^{-1}[F_{X+c}(F_X^{-1}(\alpha)+c)] = \\ &= F_X^{-1}(\alpha)+c = VaR_\alpha(X)+c. \end{aligned}$$

□

Obecně u *VaR* neplatí vlastnost sub-aditivity a konvexnosti. Pokud se ztráta portfolia řídí symetrickým rozdělením, tak tyto vlastnosti mohou být pro *VaR* splněny.

3.1.1 Metody výpočtu *VaR*

Jak už bylo zmíněno v úvodní slovní definici, *VaR* je **odhad** maximální ztráty portfolia. Různé metody výpočtu odhadu *VaR* dávají jiné výsledky, což může být v praxi jedna z nevýhod této metriky rizika.

Metody výpočtu se klasifikují na metody parametrické, neparametrické a kombinované. Uvedu ty nejpoužívanější, a to ve tvaru, který odpovídá výpočtu *VaR* pro portfolio.

Metoda rozptylů a kovariancí je nejpoužívanější parametrická metoda. Výhodou této metody je, že dostaneme analytické řešení. Daň za to, jsou předpoklady:

- Celková ztráta portfolia P v čase t (označena jako $L_{P,t}$), pro kterou počítáme *VaR*, je dána vztahem
$$L_{P,t} = \mathbf{w}_t^T \cdot \mathbf{L}_{P,t},$$
kde $\mathbf{L}_{P,t}$ je náhodný vektor ztrát portfolia v čase t a $\mathbf{w}_t$ vektor vah v čase t.
- Náhodné vektory ztrát portfolia jsou v čase vícerozměrně normálně rozděleny, tj.
$$\mathbf{L}_{P,t} \sim N(-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$
A navíc v čase stacionární.

Při splnění předpokladů platí

$$L_{P,t} \sim N(\underbrace{-\mathbf{w}_t^T \boldsymbol{\nu}}_{-\mu}, \underbrace{\mathbf{w}_t^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_t}_{\sigma^2})$$

a díky předpokladu stacionarity lze odhadnout parametry $\boldsymbol{\nu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$. Poslední krok metody je využití vzorce pro výpočet *VaR* pro normální rozdělení:

$$VaR_\alpha(L_{P,t}) = -\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha). \tag{3.1.1}$$

V praxi je vhodné pomocí modelů finančních řad zkonstruovat předpovědi parametrů a následně určit předpověď hodnoty rizika *VaR*.

Metoda historické simulace je nejpoužívanější neparametrická metoda díky své jednoduchosti. Předpokládá, že chování ztrát bude v budoucnosti podobné jak v minulosti. Samotný výpočet *VaR* lze provést například seřazením historických dat. Nalezení hranice nejhorších $\alpha \times 100$ % ztrát a tato hranice je hledaný odhad.

Metoda simulace Monte Carlo je kombinovaná metoda. Jako první se provede parametrický odhad rozdělení ztrát z historických dat. Následně proběhne simulace Monte Carlo, jejíž výsledkem jsou nasimulovaná data pro časový okamžik, pro která se následně provede odhad *VaR* (například metodou historické simulace). Výhodou této metody je možnost nasimulování dat, jejichž rozsah může být až několikanásobně větší než rozsah historických dat. K dobré kvalitě odhadu je potřeba kvalitní model simulace.

3.2 Funkce *CVaR* a její vlastnosti

CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) je střední hodnota ztrát, které převyšují hodnotu *VaR*. Pro investora *CVaR* dává informaci, co v průměru má očekávat za ztráty ve velmi pesimistických situacích. *CVaR* lze dohledat i pod názvem *ES* (*Expected Shortfall*).

V české literatuře lze najít pod názvy *podmíněná hodnota rizika* nebo třeba *očekávaná ztráta*. Tato míra rizika je obecně považována za více užitečnou než *VaR*, což je způsobeno hlavně lepšími vlastnostmi.

Obecná definice *CVaR*:

Definice 3.5. Nechť L_P^α je náhodná veličina s distribuční funkcí

$$F_{L_P}^\alpha(z) = \begin{cases} 0, & \text{pro } z < VaR_\alpha(L_P) \\ \frac{F_{L_P}(z)-\alpha}{1-\alpha} & \text{pro } z \geq VaR_\alpha(L_P) \end{cases},$$

pak *CVaR* je definován jako

$$CVaR_\alpha(L_P) = \mathbb{E}[L_P^\alpha].$$

Tato definice se sama o sobě nepoužívá a je lepší znát odvozené vzorce pro diskrétní a spojitý případ náhodné veličiny L_P.

Pro diskrétní L_P se *CVaR* určí pomocí formule známou pod názvem *Convex Combination Formula*. Jak tato formule vypadá a co vše v ní vystupuje, lze najít v [8, strana 9].

V této práci budeme uvažovat hlavně případ spojité náhodné veličiny L_P. V takovém případě je definice následující:

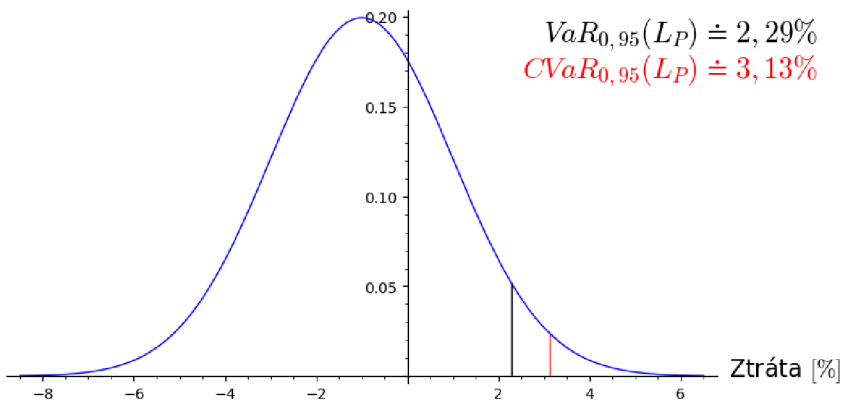
Definice 3.6. Nechť L_P je **spojitá** náhodná veličina určující ztrátu portfolia P. Parametr $\alpha \in (0,1)$. Pak α-*CVaR* náhodné veličiny L_P, je

$$CVaR_\alpha(L_P) = \mathbb{E}[L_P \mid L_P \geq VaR_\alpha(L_P)] = \int_{VaR_\alpha(L_P)}^{\infty} x \frac{f(x)}{1-\alpha}\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.1}$$

kde $f(x)$ značí hustotu náhodné veličiny L_P.

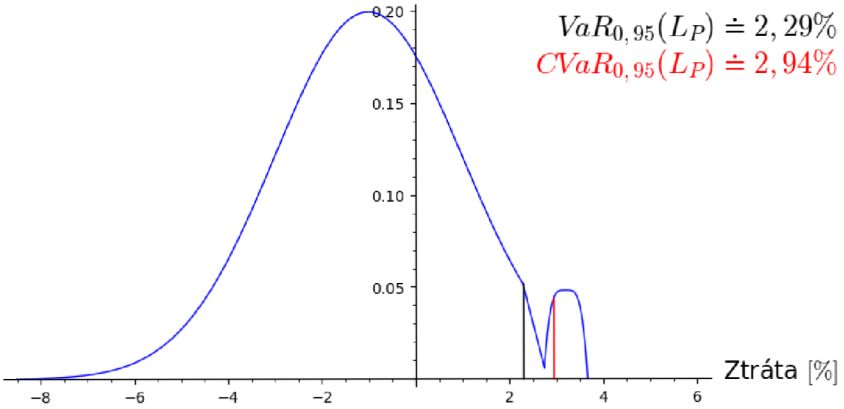
V [7] se na vzorec (3.2.1) pohlíží jako na „univerzální“ vzorec, jelikož tento vzorec v případě spojitých náhodných veličin je totožný u více metrik. Jedna z nich je například *TVaR* (*Tail Value-at-Risk*).

Z Definice 3.6 je zřejmé, že $CVaR_\alpha \geq VaR_\alpha$ pro $\forall \alpha \in (0,1)$. Ve skutečnosti platí $CVaR_\alpha > VaR_\alpha$. Výjimkou je pouze případ, kdy VaR_α je maximální možná ztráta. Obrázek 3.1 demonstruje tuto nerovnost, zobrazením hodnot *VaR* a *CVaR* pro hustotu náhodné veličiny L_P.



Obr. 3.1: Hodnoty $VaR_{0,95}(L_P)$ a $CVaR_{0,95}(L_P)$ pro $L_P \sim N(-1,2)$. [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]

Samotná hodnota *VaR* nezohledňuje tvar hustoty na intervalu (VaR, ∞). Tento fakt je znázorněn na obrázku 3.2, kde je hodnota *VaR* stejná jako na obrázku 3.1. Jediný rozdíl je v chování hustoty za hodnotou *VaR*. Tuto skutečnost *CVaR* (na rozdíl od *VaR*) zachytí .



Obr. 3.2: Hodnoty $VaR_{0,95}(L_P)$ a $CVaR_{0,95}(L_P)$ [*Vlastní zpracování v CoCalc - Sage*]

Věta 3.2. *CVaR náhodné veličiny L_P reprezentující ztrátu portfolia P, lze vyjádřit jako*

$$CVaR_\alpha(L_P) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(L_P)\,\mathrm{d}\beta.$$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [8, strana 10].

Věta 3.3. *Funkce CVaR je :*

a) monotónní,

b) pozitivně homogenní,

c) translačně invariantní,

d) sub-aditivní,

e) konvexní.

Důkaz. K důkazu využiji znalostí z Věty 3.1, tj. vlastností *VaR*.

a) Za předpokladu $X \leq Y$ víme, že platí i $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$. Při úpravě této nerovnice a přeznačení α na β obdržíme:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta &\leq \int_\alpha^1 VaR_\beta(Y)\,\mathrm{d}\beta\\ \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta &\leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(Y)\,\mathrm{d}\beta\\ CVaR_\alpha(X) &\leq CVaR_\alpha(Y).\end{aligned}$$

b) Dokáže se jednoduše pomocí vlastností *VaR* a integrálu.

$$\begin{aligned}CVaR_\alpha(\lambda X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(\lambda X)\,\mathrm{d}\beta = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \lambda VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta =\\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta = \lambda CVaR_\alpha(X).\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
CVaR_\alpha(X+c) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X+c)\,\mathrm{d}\beta = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)+c\,\mathrm{d}\beta = \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta + \int_\alpha^1 c\,\mathrm{d}\beta\right) = \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta + [c\cdot\beta]_\alpha^1\right) = \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta + c - c\cdot\alpha\right) = \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,\mathrm{d}\beta + \frac{c-c\cdot\alpha}{1-\alpha} = \\
&= CVaR_\alpha(X)+c.
\end{aligned}
$$

d) Pro důkaz sub-aditivity je potřeba odvodit více vlastností a z toho důvodu v této práci uveden nebude. Lze najít v [7].

e) Ze sub-aditivy plyne nerovnost $CVaR_\alpha(\tilde{X}+\tilde{Y}) \leq CVaR_\alpha(\tilde{X})+CVaR_\alpha(\tilde{Y})$. Při provedení substituce $\tilde{X}=\lambda X, \tilde{Y}=(1-\lambda)Y$ obdržíme

$$CVaR_\alpha(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq CVaR_\alpha(\lambda X)+CVaR_\alpha((1-\lambda)Y).$$

Také již víme, že funkce *CVaR* je pozitivně homogenní, takže můžeme upravit na tvar

$$CVaR_\alpha(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \lambda CVaR_\alpha(X)+(1-\lambda)CVaR_\alpha(Y).$$

Obdrželi jsme definici konvexní funkce a důkaz je tímto hotov.

□

3.3 Optimalizační úloha CVaR modelu

Optimalizační úloha pro CVaR modelu je podobná Markowitzově i MAD modelu. Rozdíl bude ve volbě funkce rizika nebo-li ve volbě funkcionálu, který chceme minimalizovat. Funkcionální omezení úlohy jsou ponechány beze změny.

Doposud jsem argument funkce *CVaR* uvažoval jako náhodnou veličinu L_P. Ta se dá však zapsat jako

$$L_P = -R_P = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}$$

a z toho důvodu pro větší přehlednost, že hledáme $\mathbf{w}^*$, nyní budu značit s argumentem $\mathbf{w}$ tj. $CvaR_\alpha(\mathbf{w})$. S tímto značením máme optimalizační úlohu v podobě

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&CVaR_\alpha(\mathbf{w}) \to \min \\
&\quad \mathbf{w}^T\cdot\mathbf{1}_N = 1 \\
&\quad w_i \geq 0,\ i\in\{1,\dots,N\}
\end{aligned}
} \tag{M3}
$$

Definujme (konvexní) funkci

$$F_\alpha(\mathbf{w},\phi) = \phi + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(L_P-\phi)^+],$$

kde

$$(L_P-\phi)^+ = \begin{cases} L_P-\phi, & \text{pro } L_P > \phi \\ 0, & \text{pro } L_P \le \phi \end{cases}.$$

V [9] je odvozeno, že pro spojitou náhodnou veličinu L_P platí

$$CVaR_\alpha(\mathbf{w}) = \min_\phi F_\alpha(\mathbf{w},\phi) = VaR_\alpha(\mathbf{w}) + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(L_P - VaR_\alpha(\mathbf{w}))^+].$$

Díky této vlastnosti, lze za předpokladu spojitosti L_P optimalizační úlohu (M3) přepsat na

$$\boxed{\begin{aligned} VaR_\alpha(\mathbf{w}) + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(-\mathbf{w}^T\mathbf{R} - VaR_\alpha(\mathbf{w}))^+] &\to \min \\ \mathbf{w}^T\cdot\mathbf{1}_N &= 1 \\ w_i \ge 0,\ i\in\{1,\dots,N\} \end{aligned}}$$

Poznámka. Pro diskrétní L_P lze dokonce úlohu (M3) převést na úlohu lineárního programování.

Věta 3.4 (O propojení s Markowitzovým modelem). *Jestliže $L_P \sim N(-\mu,\sigma^2)$ (tj. $R_P \sim N(\mu,\sigma^2)$), pak Markowitzův model i CVaR model obdrží jako řešení stejné optimální portfolio.*

Důkaz. Díky vzorcům (3.1.1) a (3.2.1) platí

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(\mathbf{w}) &= \int_{VaR_\alpha(\mathbf{w})}^\infty x\frac{f(x)}{1-\alpha}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{w})}\int_{-\mu(\mathbf{w})+\sigma(\mathbf{w})\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\mu(\mathbf{w})}{\sigma(\mathbf{w})}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left|\begin{matrix} t = \frac{x+\mu(\mathbf{w})}{\sigma(\mathbf{w})} \\ x+\mu(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w})t \\ \mathrm{d}x = \sigma(\mathbf{w})\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty (\sigma(\mathbf{w})t-\mu(\mathbf{w}))\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\left[\sigma(\mathbf{w})\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty t\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \mu(\mathbf{w})\underbrace{\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}_{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)}\right] = \\ &= \frac{\sigma(\mathbf{w})}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty t\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \mu(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Integrál na posledním řádku úpravy nezávisí na $\sigma^2(\mathbf{w})$ a proto optimalizace $CVaR_\alpha(\mathbf{w})$ pro dané α je stejná jako optimalizovat $\sigma^2(\mathbf{w})$. □

Kapitola 4

Teoretické porovnání modelů

Jelikož jediný rozdíl v Markowitzově, MAD a CVaR modelu je míra rizika, tak je vhodné začít porovnáním vlastností metrik. K tomu využiji vlastnosti definované na straně 9 a 15. Pro určení, zda je danou metriku vhodné aplikovat do praxe, se používá vlastnost koherence. Někteří autoři dokonce o funkci, která nesplní vlastnost koherence, nehovoří jako o míře rizika.

Definice 4.1. Míra rizika je *koherentní*, pokud současně splňuje vlastnosti monotónie, sub-aditivity, pozitivní homogenity a translační invariance.

„*Koherentní míry rizika se považují za rizikové míry s dobrými vlastnostmi, které jsou vhodné pro aplikace ve financích a pojišťovnictví. V praxi se přesto běžně využívají míry, které koherentní nejsou.*“ [7]

Vlastnosti pro *MAD*, *VaR* a *CVaR* jsou dokázány v této práci. Důkaz vlastností σ^2 a σ lze najít v [5].

Funkce	σ^2	σ	*MAD*	*VaR*	*CVaR*
Monotónie	✗	✓	✗	✓	✓
Sub-aditivita	✗	✓	✓	✗	✓
Pozitivní homogenita	✗	✓	✓	✓	✓
Translační invariance	✗	✗	✗	✓	✓
G-P translační invariance	✓	✓	✓	✗	✗
Konvexnost	✓	✓	✓	✗	✓
Koherentnost	✗	✗	✗	✗	✓

Tab. 4.1: Přehled vlastností funkcí $\sigma^2, \sigma, MAD, VaR, CVaR$. [*Vlastní zpracování*]

Důležité poznatky z tabulky 4.1:

- Funkce *CVaR* je jako jediná koherentní. Jinými slovy: *CVaR* je nejvhodnější míra rizika.
- σ^2 má horší vlastnosti než σ. Díky podobnosti s σ a konvexnosti se i přes špatné vlastnosti σ^2 používá při optimalizaci Markowitzova modelu.

- *VaR* není koherentní ani konvexní. Kvůli tomu je *VaR* v obecném případě nevhodná míra rizika a *CVaR* je jednoznačně lepší modifikace *VaR*.

Při řešení optimalizační úlohy

$$\boxed{\begin{aligned} f(\mathbf{w}) &\to \min \\ \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N &= 1 \\ w_i \geq 0,\ i &\in \{1,\dots,N\} \end{aligned}}$$

lze zpozorovat, že konvexnost funkce rizika nám zaručí řešení úlohy konvexního programování. Jelikož $\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{1}_N - 1$ je afinní funkce a funkce $-w_i$ pro $i \in \{1,\dots,N\}$ jsou konvexní (dokonce afinní). Takže pro všechny míry rizika v tabulce 4.1 obdržíme úlohu konvexního programování. Výjimkou je funkce *VaR*, kde toto obecně neplatí a proto se nepoužívá.

Další srovnávací pohledy na modely jsou:

- Markowitzova optimalizační úloha má jako jediná analytické řešení. U MAD i CVaR modelu je potřeba numerická aproximace (i když *VaR* počítáme metodou rozptylů a kovariancí).

- Pro velké počty cenných papírů v portfoliu je MAD model výpočetně efektivnější oproti Markowitzově i CVaR modelu. A to díky možnosti převést MAD minimalizační úlohu na úlohu lineárního programování, kde u Markowitzova modelu je potřeba provést odhad kovarianční matice velké dimenze a navíc máme úlohu kvadratického programování. V případě CVaR optimalizace závisí na metodě výpočtu *VaR*. Ale i při volbě metody historické simulace bude MAD model u velkých portfolií vypočten rychleji.

- CVaR optimalizační úloha by díky vlastnosti koherence funkce *CVaR* měla z těchto modelů nejlépe odhadnout skutečnost.

- Díky Větě 2.3 a Větě 3.4 víme, že pro výnosy portfolia rozděleny vícerozměrným normálním rozdělením, vyjdou stejná optimální portfolia pro Markowitzův, MAD i CVaR model.

- Markowitzův model není vhodný pro optimalizaci portfolia s výnosy, které se řídí nesymetrickým rozdělením. Důvodem je rozptyl, který jako symetrická funkce nebere v úvahu chvosty a obecně šikmost rozdělení. MAD model a CVaR model jsou více přizpůsobeny pro práci i s nesymetrickým rozdělením výnosů.

Poznámka. Existují speciální případy, kdy *VaR* splňuje vlastnost konvexnosti i koherence. Konkrétně když se výnosy portfolia řídí eliptickým rozdělením. V takovém případě je *VaR* dobrá míra rizika a dá se použít i jako účelová funkce.

Kapitola 5

Praktické porovnání modelů

Tato kapitola je zaměřena na porovnání Markowitzova modelu, MAD modelu a CVaR modelu na reálných datech. Důraz je kladen na porovnání optimálních vah $\mathbf{w}^*$ a vizualizaci efektivních množin. Na závěr, po vytvoření optimálních portfolií, se porovnají výnosnosti těchto portfolií v následujících měsících.

Z teorie se očekává, že optimální váhy budou rozdílné při nenormalitě výnosností akcií. U efektivních množin se očekává velká podobnost.

Veškerá analýza je provedena v programu RStudio, který umožňuje práci v programovacím jazyce R.

5.1 Příprava dat a jejich analýza

Před samotným porovnáváním modelů je vhodné provést analýzu akcií s kterými se nadále pracuje. K analýze jsem zvolil akcie následujících pěti firem:

Apple Inc. (AAPL) je americká firma, která se proslavila svými produkty jako jsou například chytré telefony, hodinky a počítače.

Microsoft Corporation (MSFT) stojí za vývojem nejpoužívanějších operačních systému série Microsoft Windows a za programy v balíku Microsoft Office.

The Coca-Cola Company (KO) je firma vyrábějící sladký nealkoholický nápoj.

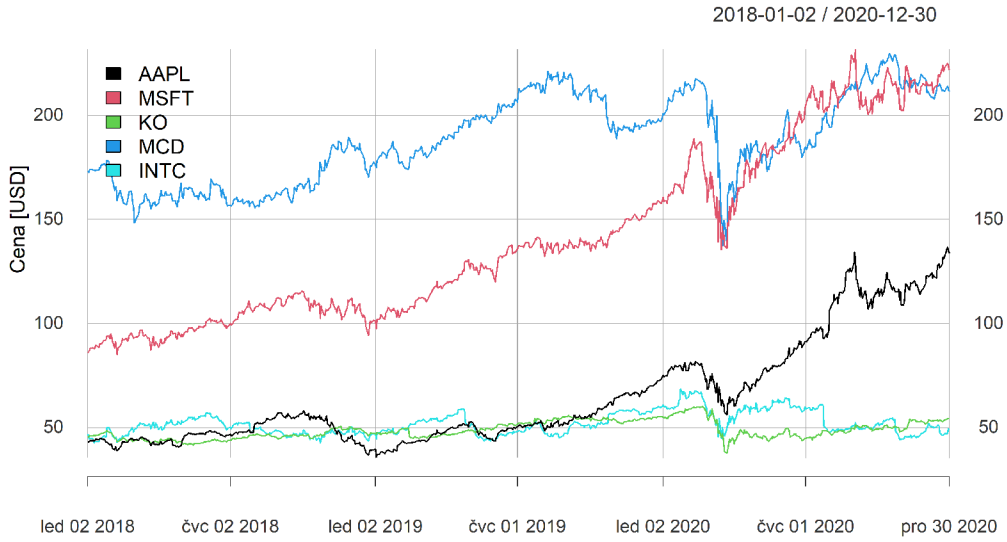
McDonald's Corporation (MCD) provozuje rychlé občerstvení po celém světě.

Intel Corporation (INTC) je firma vyrábějící počítačový hardware.

Pro tyto akcie byly sesbírány **denní** ceny pomocí balíčku *quantmod*, který umožňuje přímo v prostředí RStudio stáhnout data z `https://finance.yahoo.com`. Zvolené období **1.1.2018 - 31.12.2020** obsahuje 755 obchodních dní.

Na obrázku 5.1 jsou zobrazeny časové řady kurzů akcií. Za toto období k největšímu navýšení ceny došlo u akcií MSFT a APPL, kde se cena akcií po třech letech zvýšila více než dvojnásobně. Ceny akcií KO a INTC celé tři roky kolísaly okolo hodnoty 50 USD. Dále graf výrazně zachycuje krizi v březnu roku 2020 propadem cen všech pěti akcií.

Poznámka. Pro lehčí orientaci jsou barvy akcií zachovány i na dalších grafech.



Obr. 5.1: Kurzy vybraných akcií [*Vlastní zpracování*]

V samotných modelech teorie portfolia se pracuje s výnosnostmi akcií. Zvolil jsem práci s logaritmickou výnosností danou vzorcem

$$r_{it} = \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}}\right),$$

kde r_{it} je realizace náhodné veličiny R_i v čase t a P_{it} značí tržní cenu akcie i v čase t. Výpočtem výnosnosti přijdeme o jedno pozorování, takže výsledné t nabývá hodnot $\{1, 2, \ldots, T\}$, kde $T = 754$.

Výsledky z teorie informují, že pro výnosnosti řídící se vícerozměrným normálním rozdělením se optimální portfolia nebudou pro vybrané tři modely měnit. K ověření normality výnosností byl použit Shapiro-Wilkův test, který má jako nulovou hypotézu tvrzení: data jsou normálně rozdělena. Výsledná p-hodnota $\ll 0,01$ (u všech akcií), tedy zamítáme nulovou hypotézu i na hladině významnosti 1%. Jinými slovy: výnosnosti akcií **nejsou** normálně rozdělena.

Obrázek 5.2 potvrzuje nenormalitu dat pomocí Q-Q grafů. Vodorovné osy značí teoretické kvantily normálního rozdělení a horizontální osy pozorované kvantily. U všech akcií je problém těžkých chvostů.

Další důležité informace o akciích jsou jejich očekávané výnosy, směrodatné odchylky, *MAD*, *VaR* a *CVaR*. Pro výpočet těchto a dalších hodnot byly použité následující **odhady**:

Očekávaná výnosnost akcie

$$\overline{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$$

Kovariance

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{R}_i)(r_{jt} - \overline{R}_j)$$

Směrodatná odchylka

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{R}_i)}$$

Korelace

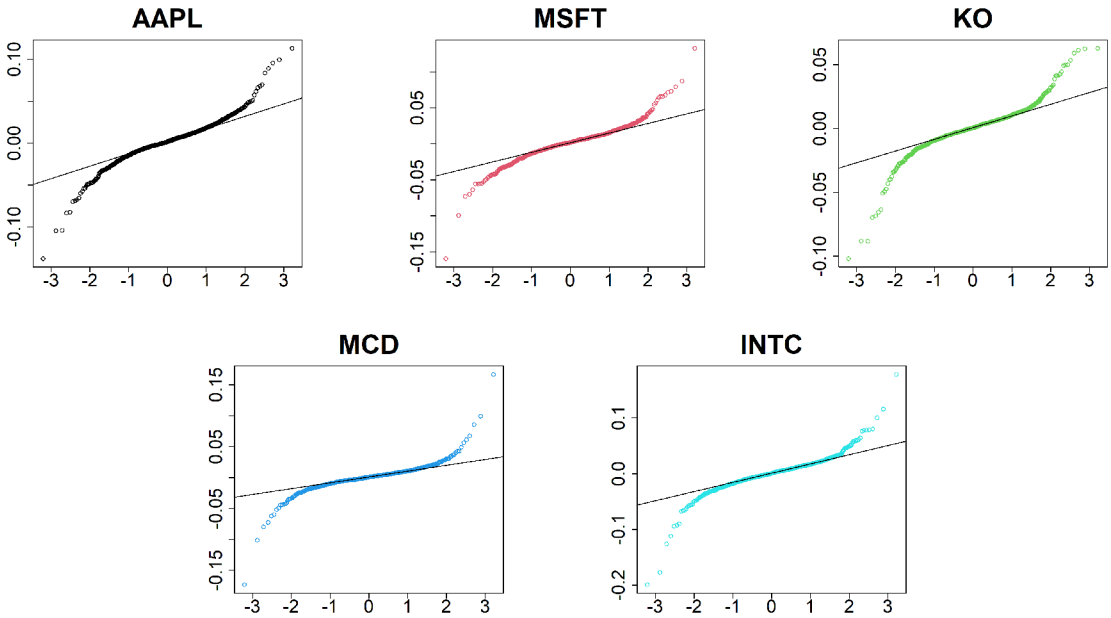
$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

Střední absolutní odchylka

$$MAD_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_{it} - \overline{R}_i|$$

Hodnota rizika *VaR* je odhadována metodou historické simulace.

Podmíněná hodnota rizika *CVaR* jako průměrná hodnota dat převyšující ztráty *VaR*.



Obr. 5.2: Q-Q grafy výnosností akcií [*Vlastní zpracování*]

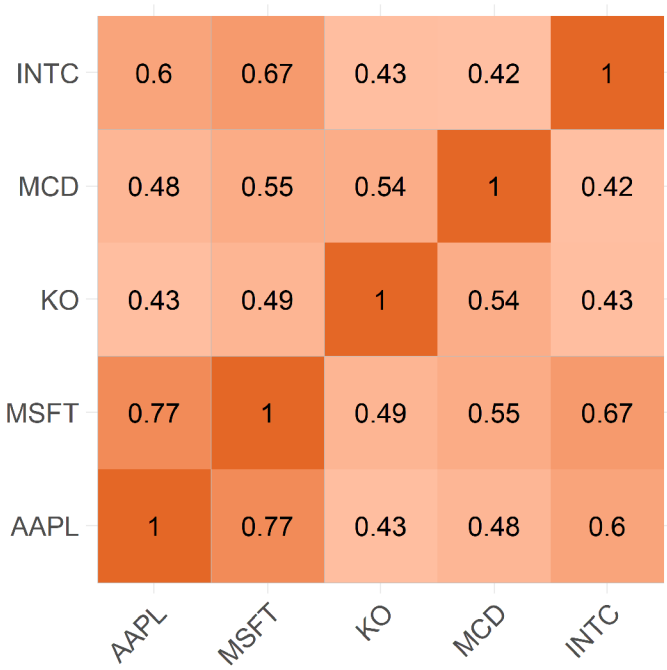
Tabulka 5.1 obsahuje vypočtené hodnoty pro vybrané akcie. Nejvyšší očekávané jednodenní výnosnosti dochází u akcie AAPL a nejnižší u akcie INTC. Dále z tabulky lze vypozorovat, že pro všechny čtyři míry rizika se nemění pořadí ve smyslu nejvíce a nejméně rizikové akcie.

Kdyby se měl všechen kapitál investovat jen do jedné akcie, tak podle teorie portfolia a této tabulky je zřejmé, že nejhorší možnost z těchto pěti akcií je INTC. Nejen, že u této akcie je nejnižší očekávaný výnos, ale dokonce i největší riziko (bez ohledu na volbě funkce míry rizika). Ohledně nejlepší investice není „vítězná“ akcie jednoznačná. Pokud by investorovi šlo o co největší zisk tak zvolí akcii APPL. Pro investora s menší tolerancí k riziku je vhodnější akcie KO. A jako kompromis mezi těmito extrémy je možné zvolit akcii MSFT.

	$\overline{R}[\%]$	σ	MAD	$VaR_{0,95}[\%]$	$CVaR_{0,95}[\%]$
AAPL	0,1503	0,0222	0,0150	3,2248	5,3767
MSFT	0,1257	0,0204	0,0136	3,0867	4,7755
KO	0,0237	0,0152	0,0097	2,0876	3,9274
MCD	0,0265	0,0173	0,0101	2,1006	4,0771
INTC	0,0053	0,0252	0,0162	3,4584	6,1488

Tab. 5.1: $\overline{R}, \sigma, MAD, VaR$ a $CVaR$ akcií. (Zeleně zvýrazněny nejlepší hodnoty ve sloupci a červeně zvýrazněny nejhorší hodnoty ve sloupci.) [*Vlastní zpracování*]

Aby analýza byla kompletní je vhodné uvést i vzájemné korelace mezi výnosy akcií. Při dokonale negativní korelaci, lze docílit nulového rizika a při dokonale pozitivní korelaci je minimalizace rizika docílena investicí celého kapitálu do akcie s nejmenším rizikem. U našich akcií k těmto extrémům nedochází a ani se k nim neblíží. Na obrázku 5.3 jsou barevně zobrazeny vzájemné korelace. Všechny jsou pozitivní a k největší korelaci dochází mezi akciemi AAPL a MSFT a k nejnižší korelaci mezi MCD a INTC.



Obr. 5.3: Vzájemné korelace výnosů akcií [*Vlastní zpracování*]

5.2 Optimální váhy $\mathbf{w}^*$ a efektivní množiny

V případě Markowitzovy optimalizační úlohy (M1) je funkcionál $\sigma^2(\mathbf{w})$ definován jako

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w},$$

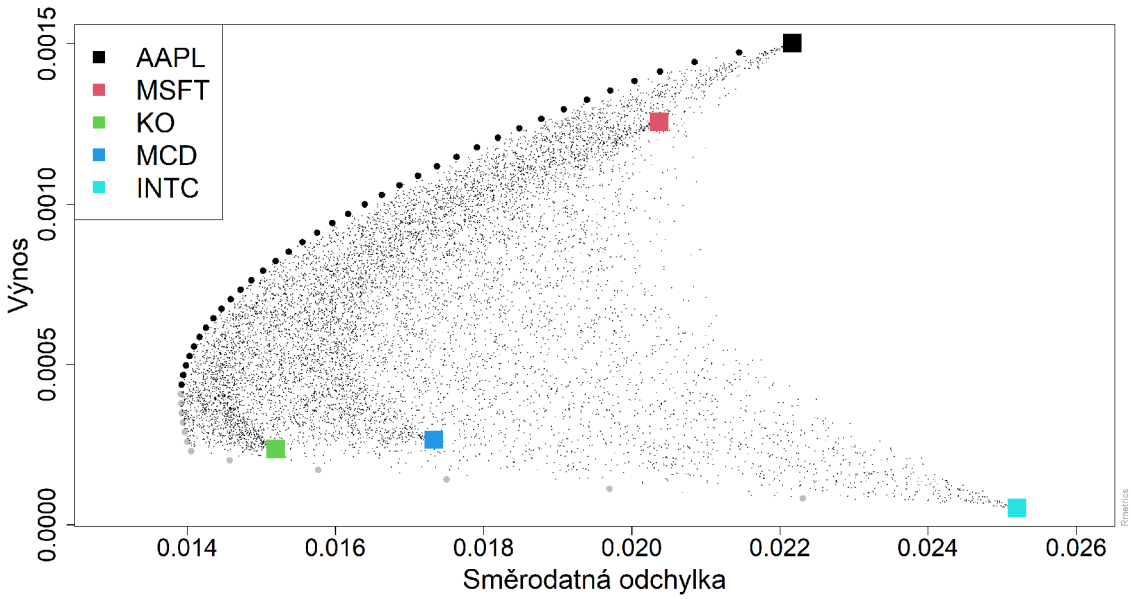
kde kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ je odhadnuta. Řešením úlohy je optimální portfolio ve smyslu minimálního možného rizika (směrodatné odchylky).

Poznámka. Existuje několik jednoduchých způsobů, jak vypočítat optimální vektor vah $\mathbf{w}^*$ k úloze, která má jako **jedinou** omezující podmínku, že investor investuje vše. Například pomocí vzorce

$$\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_N}{\mathbf{1}_N^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_N}, \tag{5.2.1}$$

který je uveden v [10]. Další způsob je, že se kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ vynásobí skalárem s hodnotou 2. Nově vytvořenou matici rozšíříme zprava vektorem $\mathbf{1}_N$, zdola vektorem $\mathbf{1}_N^T$ a aby finální matice byla čtvercová tak na pozici $N+1, N+1$ zadefinujeme číslo 0. Pro tuto matici se vypočítá inverze a poslední sloupec této inverze bez posledního řádku nám udává optimální vektor vah $\mathbf{w}^*$. Tyto výsledky většinou končí s $\mathbf{w}^*$, kde se objeví záporná váha, nebo-li **povoluje se sell short**. Pokud výsledný vektor neobsahuje záporné číslo, lze tento výsledek aplikovat i pro úlohu kde je sell short zakázán.

Pozice akcií v prostoru $(\sigma, \overline{R})$ společně s efektivní množinou jsou vykresleny na obrázku 5.4. K vykreslení byl použit balíček *fPortfolio*. K odhadu hranice bylo použito 50 bodů, kde světlé body demonstrují dolní hranici a horní hranici nebo-li efektivní množinu tmavé body. Pro přibližné vyobrazení tvaru přípustné množiny slouží malé černé tečky, což je 10 000 náhodně nasimulovaných portfolií, které lze z vybraných akcií vytvořit.



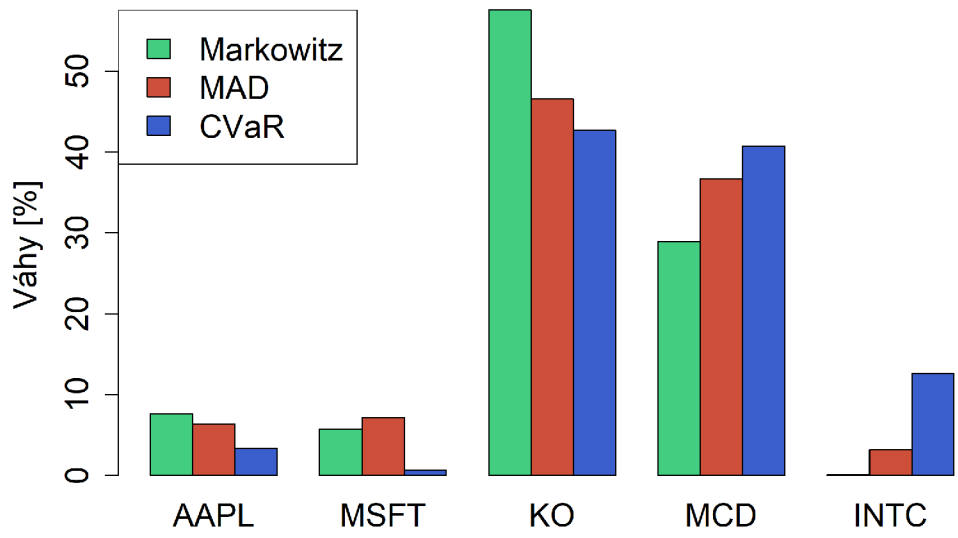
Obr. 5.4: Přípustná a efektivní množina pro vybrané akcie (Markowitzův model) [*Vlastní zpracování*]

Výsledné řešení pro Markowitzovu optimalizační úlohu
$\mathbf{w}^*_{\text{M.}} = \begin{pmatrix} 0,076570434 & 0,057717656 & 0,575362184 & 0,289253149 & 0,001096577 \end{pmatrix}^T$
bylo vypočteno pomocí funkce *efficientPortfolio*. Stejný výsledek však u **těchto konkrétních dat** dostaneme i pomocí vzorce (5.2.1).

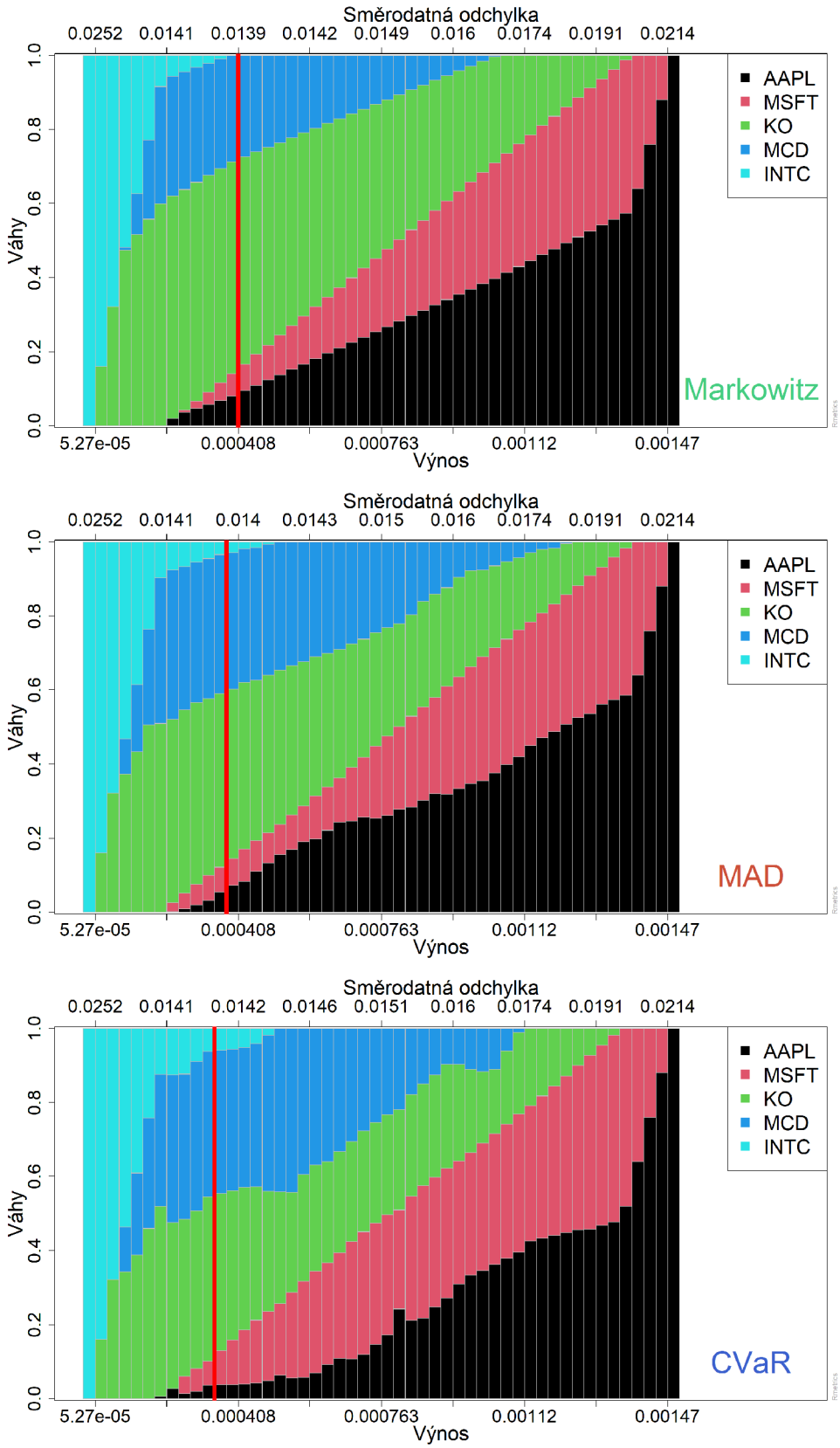
Hodnoty vektoru $\mathbf{w}^*$ určují váhy akcií v pořadí AAPL, MSFT, KO, MCD, INTC. Již ze samotné analýzy akcií se při hledání optimálního portfolia očekává velké procento investovaného kapitálu do akcie KO a to kvůli nejmenší rizikovosti tohoto cenného papíru. Výsledek 57,536% kapitálu investovat do akcie KO, potvrzuje toto očekávání (v případě Markowitzova modelu).

MAD model společně s vysvětlením jak se účelová funkce aproximuje je na straně 11. Pro CVaR model je shrnutí k optimalizaci na straně 20. Výsledná řešení optimalizační úlohy MAD a CVaR jsou:
$\mathbf{w}^*_{\text{MAD}} = \begin{pmatrix} 0,06376420 & 0,07199014 & 0,46564188 & 0,36716311 & 0,03144067 \end{pmatrix}^T$
$\mathbf{w}^*_{\text{CVaR}} = \begin{pmatrix} 0,03338757 & 0,00638271 & 0,42667522 & 0,40737928 & 0,12617522 \end{pmatrix}^T$
U obou modelů je největší váha investice u akcie KO. Oproti Markowitzově modelu je výrazně větší část investovaná do akcie MCD. Pro CVaR model je dokonce investovaná váha do akcie KO a MCD výrazně podobná. Dále u CVaR modelu je 13% investováno do akcie INTC, což je překvapivé, jelikož z analýzy akcií tato akcie vystupovala jako nejhorší možnost.

Obrázek 5.5 porovnává optimální váhy pomocí skupinového sloupcového grafu a obrázek 5.6 porovnává konkrétní rozložení vah u všech 50 bodů hranice. Tlustá svislá červená čára značí optimální portfolio, tudíž nalevo od červené čáry je tzv. dolní hranice a napravo od čáry je rozložení vah pro efektivní množinu.



Obr. 5.5: Optimální váhy modelů [*Vlastní zpracování*]



Obr. 5.6: Rozložení vah na hranicích modelů [*Vlastní zpracování*]

Rozložení vah je v případě Markowitzova a MAD modelu velmi podobné. Jediný výrazný rozdíl je, že efektivní množina MAD modelu obsahuje portfolia s větším procentem investovaným do akcie MCD. Tato procenta jsou odebírána z akcie KO. U efektivních množin CVaR modelu se podíl investovaný do MCD navýší, a navíc rozložení vah obsahuje „skoky“, které vypovídají o citlivosti na váhy v případě CVaR modelu. Dolní hranice a efektivní množina u vysokých očekávaných výnosů je u všech 3 modelů skoro totožná.

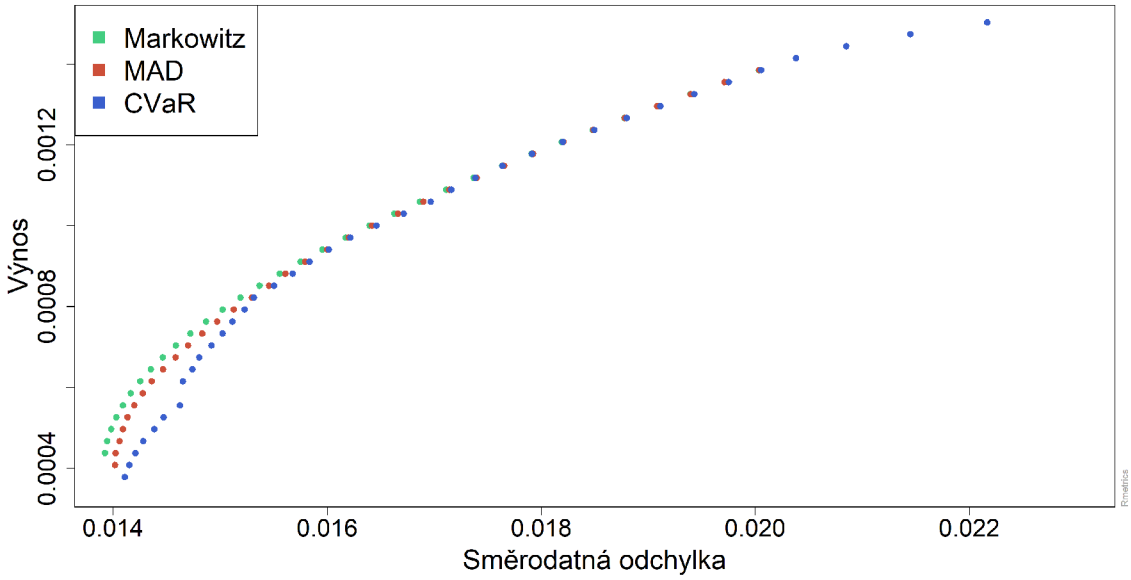
Pro optimální váhy obdržíme následující hodnoty:

	$\overline{R}[\%]$	σ	MAD	$VaR_{0,95}[\%]$	$CVaR_{0,95}[\%]$
$\mathbf{w}^*_{\text{M.}}$	0,0401	0,0139	0,008556	1,827	3,5753
$\mathbf{w}^*_{\text{MAD}}$	0,0396	0,0140	0,008484	1,795	3,5549
$\mathbf{w}^*_{\text{CVaR}}$	0,0274	0,0142	0,008621	1,823	3,5388

Tab. 5.2: $\overline{R}, \sigma, MAD, VaR$ a $CVaR$ pro optimální váhy [*Vlastní zpracování*]

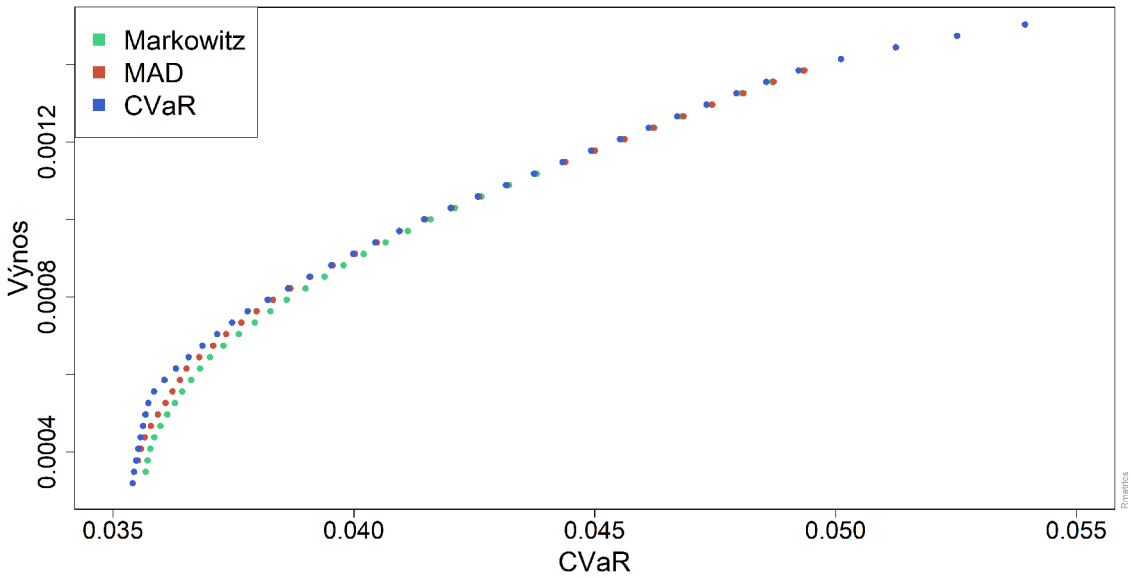
Největší očekávaný výnos nastává u Markowitzova optimálního portfolia a nejmenší hodnoty rizika $VaR_{0,95}$ dochází u optimálního portfolia MAD modelu.

Při porovnání efektivních množin na prostoru (σ, $\overline{R}$) jsou tyto množiny pro větší hodnoty rizika totožné (Obrázek 5.7). Výrazný rozdíl nastává pro nízké hodnoty rizika, kde se CVaR model výrazně liší od Markowitzova a MAD modelu. Nejen, že CVaR efektivní množina je níže, ale i v samotném tvaru nastává výrazný pokles výnosu pro hodnotu směrodatné odchylky blízkou 0,0146. Tento tvar je pravděpodobně způsobem menšími rozdíly v pozicích akcií na prostoru ($CVaR_{0,95}$, $\overline{R}$).



Obr. 5.7: Efektivní množiny modelů na prostoru (σ,$\overline{R}$) [*Vlastní zpracování*]

Při uvažování rizika jako $CVaR$ není rozdíl množin výrazný (Obrázek 5.8).



Obr. 5.8: Efektivní množiny modelů na prostoru $(CVaR_{0,95}, \overline{R})$ [*Vlastní zpracování*]

5.3 Chování optimálních portfolií v následujících 3 měsících

Teorie portfolia při počítání s historickými daty předpokládá, že se portfolio bude chovat podobně i v následujících měsících. Tato podkapitola porovná podobnost výsledků z historických dat a hodnot v následujících 3 měsících (tj. 1.1.2021 - 31.3.2021). Jinými slovy, v předchozí podkapitole se pracovalo s trénovacími daty, z kterých se určila optimální portfolia. Tato portfolia se aplikují na následující 3 měsíce. Finální krok je porovnání výsledků trénovacích a aplikačních dat. Kvůli krizi, která je zachycena v těchto datech, se očekávají výrazné rozdíly.

Konkrétní porovnání trénovacích a aplikačních očekávaných výnosností je v tabulce 5.3. Podle trénovacích dat se očekávalo, že největší výnosnosti se dosáhne u optimálního portfolia dle Markowitzova modelu a nejhoršího výnosu u optimálního portfolia vytvořeného pomocí CVaR modelu. Aplikační data ukazují, že u Markowitzova modelu je výnosnost nižší než se čekalo a u CVaR modelu je dokonce více než třikrát větší.

Model	Markowitz	MAD	CVaR
Trénovací očekávaný výnos	0,0401 %	0,0396 %	0,0274 %
Aplikační očekávaný výnos	0,0372 %	0,0608 %	0,1020 %

Tab. 5.3: Porovnání trénovacích a aplikačních očekávaných výnosů pro optimální portfolia modelů [*Vlastní zpracování*]

Při pohledu na očekávané riziko a jaké riziko nastávalo v následujících 3 měsících

(tabulka 5.4) jsou rozdíly v případě Markowitze a MAD modelu malé. To se nedá říci o CVaR modelu, kde je rozdíl 1,5%. Odůvodnění této skutečnosti může být menší počet pozorování u aplikačních dat ($T = 59$).

Model	Markowitz	MAD	CVaR
Riziko (trénovací)	0,0139	0,008484	3,5388
Riziko (aplikační)	0,0102	0,008054	2,0557

Tab. 5.4: Porovnání trénovacích a aplikačních rizik pro optimální portfolia modelů [*Vlastní zpracování*]

Další zajímavostí na těchto datech je, že při realizaci menšího rizika, než se čekalo může nastat jak menší, tak i větší výnos, než byl původně vypočten. U všech modelů se projevil pokles rizika, ale u Markowitze nastal i pokles výnosu. Výnos u MAD i CVaR modelu se výrazně navýšil.

Je nutné upozornit na fakt, že z těchto výsledků nelze vyvodit obecné závěry a jsou čistě pro představu, jak dobře modely predikovaly realitu na těchto konkrétních datech.

Závěr

Tématem práce bylo porovnání Markowitzova modelu s postmoderními modely MAD a CVaR. Pro pochopení výsledků je potřeba znát základní pojmy a principy teorie portfolia, které byly sepsány v prvních třech kapitolách.

Čtvrtá kapitola se zabývala již samotným porovnáním modelům z teoretického hlediska. Nejvýznamnější výsledky této kapitoly byly, že funkce rizika *CVaR* je jako jediná koherentní, a tudíž je z teoretického hlediska nejvíce vhodná. Pro velké počty cenných papírů v portfoliu je výpočetně nejvíce efektivní MAD model, díky možnosti převést minimalizační úlohu na úlohu lineárního programování. Na druhou stranu Markowitzův model má jako jediný analytické řešení ke své optimalizační úloze. Navíc když výnosy portfolia budou rozděleny vícerozměrným normálním rozdělením, je jedno jaký z těchto modelů zvolíme, jelikož optimální portfolia vyjdou totožná. Pro výnosnosti s nesymetrickým rozdělením je Markowitzův model nevhodný a je lepší použít MAD model nebo CVaR model.

Praktická část porovnávala modely na reálných datech. Výnosnosti vybraných pěti akcií se neřídily vícerozměrným normálním rozdělením, a tudíž už ze začátku byla jistota rozdílných optimálních portfolií. Porovnání efektivních množin naznačilo, že volba modelu není výrazná pro investory s větší tolerancí k riziku. U menších hodnot rizika se efektivní množina CVaR modelu lišila od Markowitzova i MAD modelu nejvýrazněji.

Závěrem praktické části byla otázka: Jaký by byl výnos optimálních portfolií modelů po 3 měsících? Zde se největší výnosnosti docílilo u CVaR modelu. U Markowitzova modelu nastala naopak nejmenší výnosnost a to dokonce menší než se očekávalo z trénovacích dat. Kvůli probíhající krizi a malému počtu dat nelze tyto výsledky aplikovat do praxe a jsou pouze pro zajímavost u těchto konkrétních dat.

Práce nedocílila jednoznačného závěru, který model je nejlepší, i přesto že CVaR model je z teoretických závěrů nejsympatičtější. Pouze poukázala na situace kdy je jaký model vhodnější použít a kdy volba modelu má na výsledky minimální vliv. I v situacích, kdy se matematické modely jeví jako ideálně stvořené pro danou situaci, je potřeba mít na paměti citát britského statistika George Boxe: „*All models are wrong, but some are useful.*“

Příloha

Výpočty a vizualizace grafů v praktické části byly provedeny v programovacím jazyku R. Jako přílohu přikládám soubor s příkazy, které byly použity při zpracování praktické části práce. Obsah souboru je navíc sepsán i zde.

Je potřeba zdůraznit, že všechny rozměry při tvorbě obrázků jsou zvoleny tak, aby finální obrázek byl publikovatelný. Z toho důvodu některé obrázky budou v samotném RStudiu působit useknutě a proto je u každého obrázku napsána i procedura png s konkrétními rozměry, pro export obrázku takového, jak vypadá v práci.

Jako první krok zvolíme domácí adresář a načteme potřebné knihovny.

```
setwd(...)

# Nacteni balicku
library(quantmod)
library(PerformanceAnalytics)
library(timeSeries)
library(ggplot2)
library(ggcorrplot)
library(fPortfolio)

# 5.1 Priprava dat a jejich analyza ==================================
akcie <- c("AAPL", "MSFT", "KO", "MCD", "INTC")
cenyAkcii <- NULL
for (Akcie in akcie) {
  cenyAkcii <- cbind(cenyAkcii,
                     getSymbols.yahoo(Akcie, from="2018-01-01",
                                      to="2020-12-31",
                                      auto.assign=F)[, 4])
}

# Obrazek 5.1. Kurzy vybranych akcii
# png("Obr5_1.png", units="in", width=14, height=8, res=300)
plot.xts(cenyAkcii, legend.loc='topleft', main=NULL, grid.ticks.col=NA,
         xlab="Datum", ylab="Cena [USD]", cex=1.1)
# dev.off()

vynosnosti <- as.timeSeries(na.omit(diff(log(cenyAkcii))))
vynosnostiDF <- as.data.frame(vynosnosti)  # vynosnosti v data frameu

# Testovani normality vynosnosti
apply(vynosnostiDF, 2, shapiro.test) # vsude p-hodnota < 2.2e-16

# Obrazek 5.2 Q-Q grafy vynosnosti akcii
```

```
layout(matrix(c(1,1,1,1,1,0,2,2,2,2,2,0,3,3,3,3,3,0,0,0,4,4,4,4,4,0,5,
                5,5,5,5,0,0,0), 2, 17, byrow=TRUE))
qqnorm(vynosnostiDF[,1], main="AAPL", xlab=NA, ylab=NA,  cex.axis=2,
       cex.main=3, col=1)
qqline(vynosnostiDF[,1])
qqnorm(vynosnostiDF[,2], main="MSFT", xlab=NA, ylab=NA, cex.axis=2,
       cex.main=3, col=2)
qqline(vynosnostiDF[,2])
# atd (v souboru je tento kod uplny)
layout(1)
# dev.off()

# Vypocet hodnot do tabulky 5.1
ocVynosnosti <- colMeans(vynosnostiDF)  # ocekavane vynosnosti akcii
sigma <- StdDev(vynosnosti)
MAD <- MeanAbsoluteDeviation(vynosnosti)
VaR0.95 <- - VaR(vynosnosti, p=0.95, method="historical")
CVaR0.95 <-  - ETL(vynosnosti, p=0.95, method="historical")

# Obrazek 5.3 Vzajemne korelace vynosu akcii
korelacniMatice <- cor(vynosnostiDF)
# png("Obr5_3.png", units="in", width=7, height=7, res=300)
ggcorrplot(korelacniMatice, lab=TRUE, show.legend=FALSE, tl.cex=20,
           lab_size=7, colors=c("#6D9EC1", "white", "#E46726"))
# dev.off()

# 5.2 Optimalni vahy w^* a efektivni mnoziny ==========================
# Markowitzuv model ------------------------------------
markowitzSpec <- portfolioSpec()
print(markowitzSpec)

markowitzPortfolio <- efficientPortfolio(data=vynosnosti,
                                         spec=markowitzSpec,
                                         constraints="LongOnly")
print(markowitzPortfolio)  # optimalni portfolio pro Markowitzuv model
wMarkowitz <- getWeights(markowitzPortfolio)

# Vypocet optimalniho vektoru vah podle vzorce (5.2.1) pro nase data
kovariancniMatice <- cov(vynosnostiDF); vektor.1 <- c(rep(1, 5))
wMarkowitz.2 <- (solve(kovariancniMatice) %*% vektor.1) /
  as.single( (t(vektor.1) %*% solve(kovariancniMatice) %*% vektor.1))

# Efektivni mnozina
markowitzHranice <- portfolioFrontier(vynosnosti, markowitzSpec)
print(markowitzHranice)

# Obrazek 5.4 Pripustna a efektivni mnozina pro vybrane akcie
# png("Obr5_4.png", units = "in", width=14, height=8, res=300)
frontierPlot(markowitzHranice, risk="Sigma", pch=19,
             xlim=c(0.013,0.026), title=FALSE, cex.axis=1.8)
monteCarloPoints(markowitzHranice, risk="Sigma", pch=1, cex=0.01,
                 mcSteps = 10000)
singleAssetPoints(markowitzHranice, pch=15, risk="Sigma", cex=3,
                  col=c(1,2,3,4,5))
legend(x="topleft", legend=akcie, col=c(1,2,3,4,5),pch=15, cex=2)
```

```
title("", "", "Směrodatná odchylka", "", cex.lab=2, line=3)
title("", "", "", "Výnos", cex.lab=2, line=2.7)
# dev.off()

# MAD model ----------------------------------------
MADSpec <- portfolioSpec()
setType(MADSpec) <- "MAD"
setSolver(MADSpec) <- "solveRglpk.MAD"
print(MADSpec)

MADPortfolio <- efficientPortfolio(data=vynosnosti,
                                   spec=MADSpec,
                                   constraints="LongOnly")
print(MADPortfolio)
wMAD <- getWeights(MADPortfolio)

# Efektivni mnozina
MADHranice <- portfolioFrontier(vynosnosti, MADSpec)
print(MADHranice)

# CVaR model ----------------------------------------
CVaRSpec <- portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<- "CVAR"
setSolver(CVaRSpec) <- "solveRglpk.CVAR"
print(CVaRSpec)

CVaRPortfolio <- efficientPortfolio(data=vynosnosti,
                                    spec=CVaRSpec,
                                    constraints="LongOnly")
print(CVaRPortfolio)
wCVaR <- getWeights(CVaRPortfolio)

# Efektivni mnozina
CVaRHranice <- portfolioFrontier(vynosnosti, CVaRSpec)
print(CVaRHranice)

# Porovnani modelu ----------------------------------------------
# Obrazek 5.5. Optimalni vahy modelu
porovnaniVah <- as.matrix(data.frame("AAPL"=c(wMarkowitz[1], wMAD[1],
                                              wCVaR[1]),
                                     "MSFT"=c(wMarkowitz[2], wMAD[2],
                                              wCVaR[2]),
                                     "KO"=c(wMarkowitz[3], wMAD[3],
                                              wCVaR[3]),
                                     "MCD"=c(wMarkowitz[4], wMAD[4],
                                              wCVaR[4]),
                                     "INTC"=c(wMarkowitz[5], wMAD[5],
                                              wCVaR[5])))

# png("Obr5_5.png", units = "in", width=8, height=5.5, res=300)
barplot(porovnaniVah, col=c("seagreen3","tomato3","royalblue3"),
        beside=T, ylab="Váhy [%]", cex.axis=1.5, cex.names = 1.5,
        cex.lab=1.5)
legend("topleft", legend=c("Markowitz", "MAD", "CVaR"),
       fil=c("seagreen3","tomato3","royalblue3"), cex=1.5)
```

```
# dev.off()

# Vypocet hodnot MAD pro optimalni vahy (Tabulka 5.2)
a <- cbind(vynosnosti[,1] - ocVynosnosti[1],
           vynosnosti[,2] - ocVynosnosti[2],
           vynosnosti[,3] - ocVynosnosti[3],
           vynosnosti[,4] - ocVynosnosti[4],
           vynosnosti[,5] - ocVynosnosti[5])
kT <- dim(vynosnosti)[1]

MADprowM <- 1 / kT * sum(abs(as.vector(wMarkowitz) %*% t(a)))
MADprowMAD <- 1 / kT * sum(abs(as.vector(wMAD) %*% t(a)))
MADprowCVaR <- 1 / kT * sum(abs(as.vector(wCVaR) %*% t(a)))

# Obrazek 5.6. Rozlozeni vah na hranicich modelu
# png("Obr5_6_M.png", units = "in", width=14, height=8, res=200)
par(cex.axis=1.8)
weightsPlot(markowitzHranice, col=c(1,2,3,4,5), title=FALSE)
abline(v=13, col="red", lwd=7)
legend(x="topright", legend = akcie, col=c(1,2,3,4,5), pch=15, cex=2)
title("","","Výnos","Váhy", line=2.5, cex.lab=2)
mtext("Směrodatná odchylka", side=3, line=2.5, cex=2)
text(x=56, y=0.1, labels="Markowitz", cex=3, col="seagreen3")
par(cex.axis=1)
# dev.off()
```

Zbylé dva podobrázky obrázku 5.6 byly vytvořeny analogicky.

```
# Porovnani efektivnich mnozin ----------------------------
# Obrazek 5.7 Efektivni mnoziny modelu na prostoru (sigma, R)
# png("Obr5_7.png", units = "in", width=14, height=8, res=300)
frontierPlot(markowitzHranice, pch=19, xlim=c(0.014, 0.023),
             ylim=c(0.00035, 0.0015), risk="Sigma", title=F,
             cex.axis=1.8, col=c("seagreen3", "seagreen3"),
             frontier="upper")
frontierPlot(MADHranice, pch=19, title=F, cex.axis=1.8, add=T,
             col=c("tomato3", "tomato3"), frontier="upper")
frontierPlot(CVaRHranice, pch=19, title=F, cex.axis=1.8, add=T,
             col=c("royalblue3", "royalblue3"), frontier="upper")
legend(x="topleft", legend=c("Markowitz", "MAD", "CVaR"),
       col=c("seagreen3", "tomato3", "royalblue3"), pch=15, cex=2)
title("", "", "Směrodatná odchylka", "", cex.lab=2, line=3)
title("", "", "", "Výnos", cex.lab=2, line=2.7)
# dev.off()
```

Obr. 5.8 vytvořený stejně, jen s úpravou rozhraní os a argumentu risk.

```
# 5.3 Chovani optimalnich portfolii v nasledujicich 3 mesicich ====
cenyAkcii.po <- NULL
for (Akcie in akcie) {
  cenyAkcii.po <- cbind(cenyAkcii.po,
                        getSymbols.yahoo(Akcie, from="2021-01-01",
                                         to="2021-03-31",
                                         auto.assign=F)[, 4])
}
vynosnosti.po <- as.timeSeries(na.omit(diff(log(cenyAkcii.po))))
```

```
# Hodnoty skutecnych vynosu po 3 mesicich (Tabulka 5.3)
t(wMarkowitz) %*% colMeans(vynosnosti.po)  # Markowitz 0.0003717311
t(wMAD) %*% colMeans(vynosnosti.po)  # MAD 0.0006079682
t(wCVaR) %*% colMeans(vynosnosti.po)  # CVaR 0.001019807

# Hodnoty skutecnych rizik po 3 mesicich (Tabulka 5.4)
sqrt(t(wMarkowitz) %*% cov(vynosnosti.po) %*% wMarkowitz)  # 0.01018844

a_po <- cbind(vynosnosti.po[,1] - colMeans(vynosnosti.po)[1],
              vynosnosti.po[,2] - colMeans(vynosnosti.po)[2],
              vynosnosti.po[,3] - colMeans(vynosnosti.po)[3],
              vynosnosti.po[,4] - colMeans(vynosnosti.po)[4],
              vynosnosti.po[,5] - colMeans(vynosnosti.po)[5])
T_po <- dim(vynosnosti.po)[1]
1 / T_po * sum(abs(as.vector(wMAD) %*% t(a_po)))  # MAD 0.008054476

Spec <- portfolioSpec()
setWeights(Spec) <- getWeights(CVaRPortfolio)
getTargetRisk(feasiblePortfolio(data=vynosnosti.po, spec = Spec))
## CVaR 0.02055681
```

Seznam použité literatury

[1] ELTON, Edwin J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 8th ed. Hoboken: Wiley, 2011. ISBN 978-0-470-50584-7.

[2] ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2. přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4252-0.

[3] FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika I*.

[4] KONNO, Hiroshi a Tomoyuki KOSHIZUKA. Mean-absolute deviation model. *IIE Transactions* [online]. 2005, **37**(10), 893-900 [cit. 2020-11-27]. ISSN 0740817X. doi:10.1080/07408170591007786

[5] YU, Mei, Hiroshi INOUE a Jianming SHI. *Portfolio optimization problems with linear programming models*. 2014.

[6] KONNO, Hiroshi a Hiroaki YAMAZAKI. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science* [online]. 1991, **37**(5), 519-531 [cit. 2020-11-27]. ISSN 00251909. Dostupné z: https://www-jstor-org.ezproxy.muni.cz/stable/2632458.

[7] CIPRA, Tomáš. *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 9788087865248.

[8] KISIALA, Jakob. *Conditional Value-at-Risk: Theory and Applications*[online]. Edinburgh, 2015 [cit. 2021-02-17]. Disertační práce. The University of Edinburgh, The School of Mathematics. Dr Peter Richtárik. Dostupné z: http://arxiv.org/abs/1511.00140.

[9] XUE, Mengya. *Comparative Analysis of Portfolio Optimization*[online]. Kalmar, 2016 [cit. 2021-02-22]. Disertační práce. Linnaeus University, Faculty of Technology. Roger Pettersson. Dostupné z: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-56502.

[10] WÜRT, D., SETZ, T.,CHALABI, Y., CHEN, W. a A. ELLIS. *Portfolio Optimization with R/Rmetrics*[online]. 2015, [cit. 2021-03-10]. ISBN 9783906041018. Dostupné z: https://www.rmetrics.org/ebooks-portfolio.