

Zadání

Máme podprostor $\mathcal{A}$ zadaný obecně:

$$\begin{aligned}2x_2 - 2x_3 + 1 &= 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + 2 &= 0\end{aligned}$$

a podprostor $\mathcal{B}$ zadaný také obecně:

$$2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$$

Naším úkolem je zjistit, jestli jsou oba podprostory rovnoběžné.

Ověření rovnoběžnosti podprostorů

Při určování rovnoběžnosti potřebujeme, aby oba podprostory byly zadány stejně. V našem případě jsou oba podprostory zadány obecně, a tak nemusíme žádný převádět na jiný typ vyjádření.

Podprostory jsou rovnoběžné, jestliže platí

$$\dim(U + V) = \max(\dim(U), \dim(V)),$$

kde U je zaměření podprostoru $\mathcal{A}$ a V zaměření podprostoru $\mathcal{B}$. Jinými slovy, musí být

$$h(S) = \max(h(M), h(N)),$$

kde M je matice soustavy, která zadává podprostor $\mathcal{A}$, N je matice soustavy, která zadává podprostor $\mathcal{B}$, a S je matice soustavy, která zadává podprostor $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ (ta vznikne „slepením“ obou matic). Umístění podprostoru je ovšem v případě určování rovnoběžnosti irelevantní, a tak nás budou zajímat pouze matice soustav bez absolutních členů. Zjistíme nejprve, jaké hodnoty mají matice soustav rovnic, jimiž jsou podprostory zadány.

zjištění hodnoty matice M

Převédeme matici M :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

na schodovitý tvar.

Protože 1. sloupec je nulový, tak jej přeskočíme.

Pokračujeme dalším sloupcem. K 2. řádku přičteme $-\frac{3}{2}$ -násobek 1. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matici M jsme tak převedli do schodovitého tvaru.

Počet nenulových řádků, a tedy i hodnost matice je 2.

zjištění hodnosti matice N

Matice N :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

již je ve schodovitém tvaru.

Počet nenulových řádků, a tedy i hodnost matice je 1.

zjištění hodnosti matice S

Nyní vytvoříme součet podprostorů (tj. obě matice prostě napíšeme „pod sebe“) a zjistíme hodnost matice součtu.

Převedeme matici S :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

na schodovitý tvar.

Protože 1. sloupec je nulový, tak jej přeskočíme.

Pokračujeme dalším sloupcem. K 3. řádku přičteme -1 -násobek 1. řádku. Po odstranění nulových řádků tedy matice S je:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matici S jsme tak převedli do schodovitého tvaru.

Počet nenulových řádků, a tedy i hodnost matice je 2.

rozhodnutí o rovnoběžnosti

Matice příslušné k jednotlivým podprostorům tedy mají hodnoty 2 a 1 a je tedy $\max(2, 1) = 2$. Matice příslušná k součtu podprostorů má hodnotu 2, přičemž $2 = 2$. Podprostory tedy jsou rovnoběžné.