

Zadání

Máme podprostor $\mathcal{A}$ zadáný parametricky:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 + 2t_1 \\x_2 &= 3 + 2t_1 \\x_3 &= 1 + t_1 \\x_4 &= -7 + 4t_1 \\x_5 &= -4 + 5t_1\end{aligned}$$

a podprostor $\mathcal{B}$ zadáný obecně:

$$\begin{aligned}-107x_1 - 122x_2 + 29x_3 - 124x_4 - 1351 &= 0 \\-6x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 31x_5 - 52 &= 0\end{aligned}$$

Naším úkolem je spočítat odchylku těchto podprostorů.

Výpočet odchylky

Výpočet odchylky podprostorů přímou metodou je poměrně pracný, a proto je dobré nejprve zjistit, zda není splněna některá z podmínek, která umožňuje použití některého vzorce či pravidla pro snazší určení vzdálenosti. Zjistíme nejprve, o jaké podprostory se jedná.

Popis $\mathcal{A}$

Podprostor je zadán parametricky. V takovém případě je jeho dimenze rovna počtu lineárně nezávislých směrových vektorů, tzn. hodnoti matice zaměření (tj. počtu jejích lineárně nezávislých řádků).

Matice M :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

již je ve schodovitém tvaru. Protože má nyní 1 nenulový řádek, je její hodnota, a tedy i dimenze podprostoru právě 1.

Jelikož dimenze je 1 tak se jedná o přímku v 5-rozměrném prostoru.

Popis $\mathcal{B}$

Podprostor je zadán obecně. V takovém případě je jeho dimenze určena:

$$\dim(\mathcal{B}) = n - k,$$

kde n je dimenze celého prostoru (tj. počet proměnných) a k je hodnost matice soustavy (tj. počet jejích lineárně nezávislých řádků).

Převédeme matici M :

$$\begin{pmatrix} -107 & -122 & 29 & -124 & 0 & -1351 \\ -6 & -8 & 8 & 0 & -31 & -52 \end{pmatrix}$$

na schodovitý tvar.

K 2. řádku přičteme $-\frac{6}{107}$ -násobek 1. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} -107 & -122 & 29 & -124 & 0 & -1351 \\ 0 & -\frac{124}{107} & \frac{682}{107} & \frac{744}{107} & -31 & \frac{2542}{107} \end{pmatrix}$$

Matici M jsme tak převedli do schodovitého tvaru. Protože má nyní 2 nenulové řádky, je její hodnost právě 2. A jelikož máme 5 proměnných, je dimenze podprostoru

$$\dim(\mathcal{B}) = 5 - 2 = 3.$$

Jelikož dimenze je 3 tak se jedná o 3-rozměrný podprostor v 5-rozměrném prostoru.

Určení odchylky

převod $\mathcal{B}$ do parametrického tvaru

Potřebujeme znát zaměření podprostoru $\mathcal{B}$, a tak jej převedeme na parametrický tvar. Převod z obecného na parametrický tvar se provede jednoduše vyřešením soustavy rovnic, kterou je podprostor zadán. Nejprve matici soustavy převedeme na schodovitý tvar.

převod na schodovitý tvar

Matice M :

$$\begin{pmatrix} -107 & -122 & 29 & -124 & 0 & -1351 \\ 0 & -\frac{124}{107} & \frac{682}{107} & \frac{744}{107} & -31 & \frac{2542}{107} \end{pmatrix}$$

již je ve schodovitém tvaru.

vyřešení soustavy

Máme tedy soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -107x_1 - 122x_2 + 29x_3 - 124x_4 - 1351 &= 0 \\ -\frac{124}{107}x_2 + \frac{682}{107}x_3 + \frac{744}{107}x_4 - 31x_5 + \frac{2542}{107} &= 0 \end{aligned}$$

Jde o soustavu 2 rovnic o 5 neznámých, a řešení tedy bude obsahovat 3 parametry.

Zvolíme některé neznámé za volné:

$$\begin{aligned} x_5 &= t_3 \\ x_4 &= t_2 \\ x_3 &= t_1 \end{aligned}$$

Po dosazení do 2. rovnice a úpravě dostáváme

$$x_2 = \frac{41}{2} + \frac{11}{2}t_1 + 6t_2 - \frac{107}{4}t_3$$

a po dosazení do 1. rovnice a úpravě dostáváme

$$x_1 = -36 - 6t_1 - 8t_2 + \frac{61}{2}t_3.$$

Řešením dané soustavy rovnic je tedy:

$$\begin{aligned} x_1 &= -36 - 6t_1 - 8t_2 + \frac{61}{2}t_3 \\ x_2 &= \frac{41}{2} + \frac{11}{2}t_1 + 6t_2 - \frac{107}{4}t_3 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= t_2 \\ x_5 &= t_3 \end{aligned}$$

Jedná se přitom současně o parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$.

nalezení ortogonální projekce směrového vektoru $\vec{v}_A$ na zaměření podprostoru $\mathcal{B}$

nalezení báze zaměření

Převědeme matici M :

$$\begin{pmatrix} -6 & \frac{11}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{61}{2} & -\frac{107}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na schodovitý tvar.

K 2. řádku přičteme $-\frac{4}{3}$ -násobek 1. řádku, k 3. řádku přičteme $\frac{61}{12}$ -násobek 1. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} -6 & \frac{11}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{29}{24} & \frac{61}{12} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokračujeme dalším sloupcem a dalším řádkem. K 3. řádku přičteme $\frac{29}{32}$ -násobek 2. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} -6 & \frac{11}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} & \frac{29}{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Matci M jsme tak převedli do schodovitého tvaru. Báze podprostoru, na který vektor projektujeme, je tedy $\vec{u}_1 = (-6, \frac{11}{2}, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, \frac{31}{8}, \frac{29}{32}, 1)$. Abychom našli ortogonální projekci, musíme vyřešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + x_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) + x_3(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) + (\vec{x} \cdot \vec{u}_1) &= 0 \\ x_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) + x_3(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) + (\vec{x} \cdot \vec{u}_2) &= 0 \\ x_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) + x_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) + x_3(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3) + (\vec{x} \cdot \vec{u}_3) &= 0 \end{aligned}$$

V našem případě po výpočtu skalárních součinů dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{269}{4}x_1 - \frac{26}{3}x_2 + \frac{31}{8}x_3 &= 0 \\ -\frac{26}{3}x_1 + \frac{41}{9}x_2 - \frac{409}{96}x_3 &= 0 \\ \frac{31}{8}x_1 - \frac{409}{96}x_2 + \frac{17241}{1024}x_3 + \frac{25}{2} &= 0 \end{aligned}$$

nalezení ortogonální projekce

Převédeme matici M :

$$\begin{pmatrix} \frac{269}{4} & -\frac{26}{3} & \frac{31}{8} & 0 \\ -\frac{26}{3} & \frac{41}{9} & -\frac{409}{96} & 0 \\ \frac{31}{8} & -\frac{409}{96} & \frac{17241}{1024} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

na schodovitý tvar.

K 2. řádku přičteme $\frac{104}{807}$ -násobek 1. řádku, k 3. řádku přičteme $-\frac{31}{538}$ -násobek 1. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} \frac{269}{4} & -\frac{26}{3} & \frac{31}{8} & 0 \\ 0 & \frac{925}{269} & -\frac{32375}{8608} & 0 \\ 0 & -\frac{32375}{8608} & \frac{4576325}{275456} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokračujeme dalším sloupcem a dalším řádkem. K 3. řádku přičteme $\frac{35}{32}$ -násobek 2. řádku. Matice M tedy nyní je:

$$\begin{pmatrix} \frac{269}{4} & -\frac{26}{3} & \frac{31}{8} & 0 \\ 0 & \frac{925}{269} & -\frac{32375}{8608} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice M jsme tak převedli do schodovitého tvaru.

vyřešení soustavy

Máme tedy soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{269}{4}x_1 - \frac{26}{3}x_2 + \frac{31}{8}x_3 &= 0 \\ \frac{925}{269}x_2 - \frac{32375}{8608}x_3 &= 0 \\ \frac{25}{2}x_3 + \frac{25}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Jde o soustavu 3 rovnic o 3 neznámých, a řešení tedy nebude obsahovat parametr.

Z poslední rovnice je

$$x_3 = 1,$$

z 2. rovnice je

$$x_2 = \frac{35}{32}$$

a z 1. rovnice je

$$x_1 = \frac{1}{12}.$$

Řešením dané soustavy rovnic je tedy:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{12} \\x_2 &= \frac{35}{32} \\x_3 &= 1\end{aligned}$$

Ortogonální projekce je pak $\vec{y} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 = \frac{1}{12} \cdot (-6, \frac{11}{2}, 1, 0, 0) + \frac{35}{32} \cdot (0, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, \frac{31}{8}, \frac{29}{32}, 1) = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2}, 2, 1)$.

výpočet odchytky

Odchylka přímky $\mathcal{A}$ od podprostoru $\mathcal{B}$ je pak rovna odchylce směrového vektoru přímky $\mathcal{A}$ od její ortogonální projekce na zaměření podprostoru $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathcal{A}} &= (2, 2, 1, 4, 5), \\ \vec{v}_{\mathcal{Y}} &= \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2}, 2, 1\right).\end{aligned}$$

Pro odchylku platí:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}_{\mathcal{Y}}|}{\|\vec{v}_{\mathcal{A}}\| \cdot \|\vec{v}_{\mathcal{Y}}\|},$$

v našem případě:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &= \frac{|(2, 2, 1, 4, 5) \cdot (-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2}, 2, 1)|}{\|(2, 2, 1, 4, 5)\| \cdot \|(-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{2}, 2, 1)\|} = \\ &= \frac{|\frac{25}{2}|}{5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{\frac{25}{2}}{25} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Odtud:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad (tj. } 60^\circ\text{)}.$$